



Fundusze Europejskie
dla Rozwoju Społecznego



Rzeczpospolita
Polska

Dofinansowane przez
Unię Europejską



Politechnika  Białostocka

Wydział Elektryczny
Katedra Elektrotechniki, Ergoelektroniki
i Elektroenergetyki

Konspekt ćwiczeń rachunkowych z przedmiotu

ELEKTROTECHNIKA 1

Kod przedmiotu:

EMS1A1002

Anna Maria Białostocka

Białystok 2025



Spis treści

1	Program ćwiczeń.....	4
2	Ćwiczenia rachunkowe - realizacja	4
2.1	Wyznaczanie rezystancji zastępczej.	5
2.2	Metoda praw Kirchhoffa, metoda superpozycji.	10
2.3	Metoda prądów oczkowych	18
2.4	Metoda potencjałów węzłowych	23
2.5	Twierdzenie/metoda Thèvenina i Nortona	30
2.6	Kolokwium 1.....	36
2.7	Prąd i napięcie sinusoidalnie zmienne. Wyznaczanie impedancji zastępczej	37
2.8	Metoda praw Kirchhoffa, metoda superpozycji.	41
2.9	Dopasowanie odbiornika do źródła na maksymalną moc prądu sinusoidalnie zmiennego	44
2.10	Metoda prądów oczkowych	45
2.11	Metoda potencjałów węzłowych.....	48
2.12	Twierdzenie/metoda Thevenina i Nortona	50
2.13	Kompensacja mocy biernej	52
2.14	Kolokwium 2.....	53
3	Pomiary	Błąd! Nie zdefiniowano zakładki.
4	Literatura	53



Materiały przygotowane w ramach projektu „PB 5.0 – dostosowanie oferty dydaktycznej Politechniki Białostockiej do potrzeb nowoczesnej gospodarki oraz zielonej i cyfrowej transformacji” (nr umowy FERS.01.05-IP.08-0327/23-00) w ramach programu Fundusze Europejskie dla Rozwoju Społecznego 2021-2027 współfinansowanego ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego Plus.

Publikacja jest udostępniona na licencji Creative Commons - Uznanie autorstwa 4.0 (CC BY 4.0). Pełna treść licencji dostępna na stronie creativecommons.org.

Materiały dydaktyczne przeznaczone dla studentów Wydziału Elektrycznego PB.

© Wydział Elektryczny, Politechnika Białostocka, 2025



1 Program ćwiczeń

- 1.1. Prąd i napięcie stałe. Wyznaczanie rezystancji zastępczej.
- 1.2. Metoda praw Kirchhoffa, metoda superpozycji.
- 1.3. Dopasowanie odbiornika do źródła na maksymalną moc.
- 1.4. Metoda prądów oczkowych.
- 1.5. Metoda potencjałów węzłowych.
- 1.6. Twierdzenie/metoda Thèvenina i Nortona.
- 1.7. Kolokwium 1.
- 1.8. Prąd i napięcie sinusoidalnie zmienne. Wyznaczanie impedancji zastępczej.
- 1.9. Metoda praw Kirchhoffa, metoda superpozycji.
- 1.10. Dopasowanie odbiornika do źródła na maksymalną moc prądu sinusoidalnie zmiennego.
- 1.11. Metoda prądów oczkowych.
- 1.12. Metoda potencjałów węzłowych.
- 1.13. Twierdzenie/metoda Thevenina i Nortona.
- 1.14. Kompensacja mocy biernej.
- 1.15. Kolokwium 2.

2 Ćwiczenia rachunkowe - realizacja

Ćwiczenia rachunkowe będą się odbywały w odstępach tygodniowych (90 minut raz w tygodniu). Członkowie grupy będą podzieleni na zespoły (maksymalnie 4 osoby). Podział będzie dokonany na pierwszych zajęciach w pierwszym tygodniu semestru wraz z przedstawieniem zasad zaliczania przedmiotu, zasad BHP itd. Podział na zespoły odbędzie się w oparciu o metodę projektu i wybraną grę edukacyjną, podczas której studentom będzie można przypisać odpowiednie funkcje (kierownik, nadzorca, pracownicy itd.) oraz zbudować poczucie wspólnoty. Po przedstawieniu zagadnienia na początku każdego zajęcia, poszczególne zespoły będą samodzielnie pracowały nad rozwiązaniem problemów w zadaniach. Pod koniec zajęć zespoły będą się wymieniały między sobą zadaniami celem ich wzajemnego sprawdzenia. Prowadzący udostępni studentom rozwiązania do poszczególnych zadań. Ocena

końcowa z ćwiczeń rachunkowych będzie średnią arytmetyczną z dwóch kolokwii, których zasady organizacji zostały przedstawione w tekście poniżej.

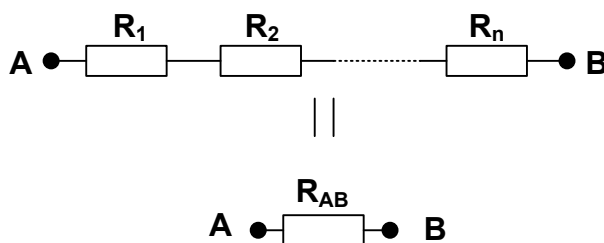
2.1 Wyznaczanie rezystancji zastępczej.

Zadania dotyczące zagadnień: rozpoznawanie w obwodzie elektrycznym elementów połączonym szeregowo i równolegle oraz w sposób mieszany, obliczanie rezystancji zastępczej (R_z) połączenia szeregowego rezystorów, obliczanie konduktancji zastępczej połączenia równoległego rezystancji, wyznaczanie rezystancji widzianej z wybranych zacisków obwodu elektrycznego.

Teoria.

Połączenie szeregowe elementów występuje w sytuacji gdy koniec jednego elementu jest początkiem drugiego elementu. Jest to połączenie na wzór wagonów w pociągu, jeden za drugim (jeden koniec = jeden początek). Przez wszystkie rezystory połączone szeregowo płynie ten sam prąd. Napięcie wypadkowe jest sumą spadków napięć na wszystkich elementach takiego połączenia. Rezystancja wypadkowa jest równa sumie rezystancji poszczególnych elementów tworzących to połączenie. Rezystancje zastępczą R_{AB} (Rys.1.) obliczymy wówczas ze wzoru:

$$R_{AB} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$



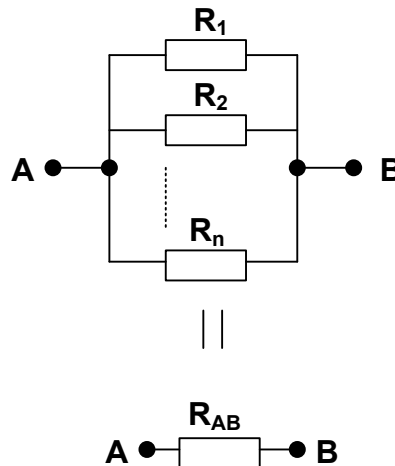
Rys.1. Połączenie szeregowe elementów pasywnych

Połączenie równoległe jest typem połączenia, w którym początki i końce wszystkich elementów są ze sobą bezpośrednio połączone – Rys.2. Z tego połączenia wynika, że napięcie na wszystkich elementach jest jednakowe. Prąd zaś stanowi sumę prądów płynących przez wszystkie połączone równoległe elementy. Rezystancję wypadkową R_{AB} obliczymy ze wzoru:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Wykorzystując pojęcie konduktancji $G = \frac{1}{R}$ powyższy wzór przyjmuje postać:

$$G_{AB} = G_1 + G_2 + \dots + G_n.$$

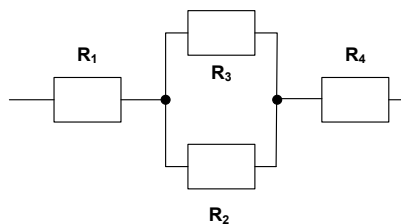


Rys.2. Połączenie równoległe elementów pasywnych

Przykładowe zadania:

Zadanie 1: Mamy tutaj do czynienia z połączeniem mieszanym (Rys.3.). Na początku obliczamy rezystancję zastępczą połączenia równoległego rezystorów R_2 i R_3 . Wówczas wszystkie rezystory są już połączone szeregowo i ich rezystancja zastępcza zaprezentowana jest poniższym wzorem:

$$R_z = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4$$



Rys.1. Połączenie mieszane rezystorów

Dane: $R_1=R_4=15 \Omega$, $R_2=15 \Omega$, $R_3=5 \Omega$.

Odp: $R_z=33,75 \Omega$.

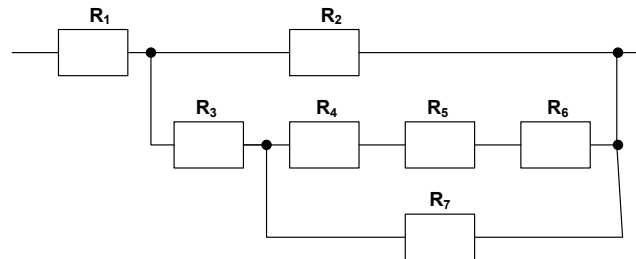
Zadanie 2: Podobnie jak w zadaniu 1, mamy tutaj do czynienia z połączeniem mieszanym rezystorów (Rys.2.). Kolejność obliczania rezystancji zastępczej jest następująca:

- połączenie szeregowo elementów R_4, R_5, R_6 (R_A): $R_A = R_4 + R_5 + R_6$
- połączenie równoległe elementów R_A i R_7 (R_B): $R_B = \frac{R_A \cdot R_7}{R_A + R_7}$,
- połączenie szeregowo elementów R_B i R_3 (R_C): $R_C = R_B + R_3$,

- połączenie równoległe elementów R_C i R_2 (R_D): $R_D = \frac{R_C \cdot R_2}{R_C + R_2}$,
- połączenie szeregowe elementów R_D i R_1 (R_E): $R_E = R_D + R_1$.

Dane: $R_1=6 \Omega$, $R_2=4 \Omega$, $R_3=8 \Omega$, $R_4=5 \Omega$, $R_5=2 \Omega$, $R_6=1 \Omega$, $R_7=10 \Omega$.

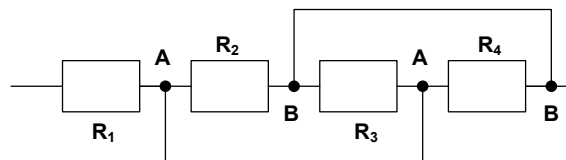
Odp: $R_z=9,03 \Omega$.



Rys.2. Połączenie mieszane rezystorów

Zadanie 3: W układzie z Rys.3. obliczyć rezystancję zastępczą. Wskazówka: należy rozpoznać węzły znajdujące się na jednakowym potencjale. Jeżeli węzły zostały połączone przewodem (który traktujemy jako bezrezystancyjny), to traktujemy je jako jeden i ten sam węzeł znajdujący się na tym samym potencjale. W poniższym układzie mamy do czynienia z dwoma węzłami (A, B), a rezystancja zastępcza przedstawia się następująco:

$$R_z = R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4}{R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4}$$

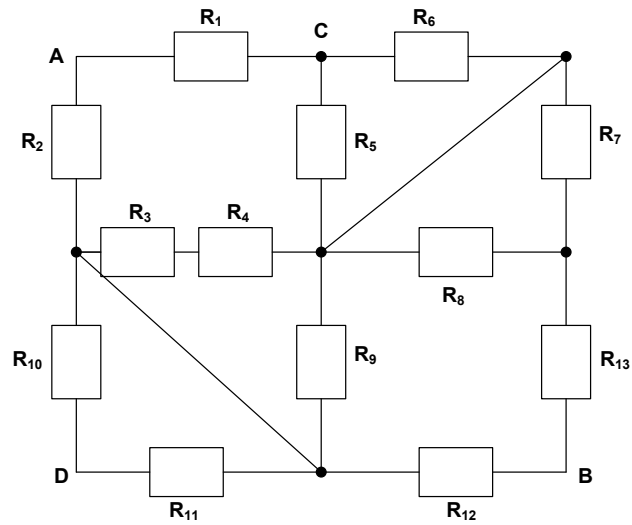


Rys.3. Połączenie mieszane rezystorów

Dane: $R_1=R_2=R_3=R_4=6 \Omega$.

Odp: $R_z=8 \Omega$.

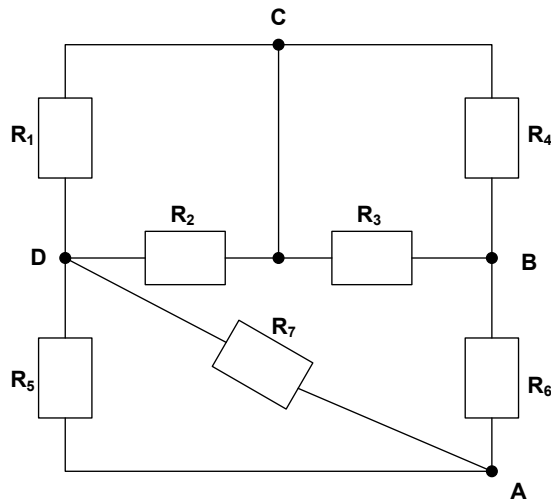
Zadanie 4: Rozpoznać połączenia pomiędzy poszczególnymi elementami oraz wyznaczyć wartości rezystancji zastępczych R_{AB} , R_{AC} , R_{AD} , R_{BC} , R_{BD} , R_{CD} (widzianych z odpowiednich zacisków) w układzie jak na Rys.4.



Rys.4. Połączenie mieszane rezystorów

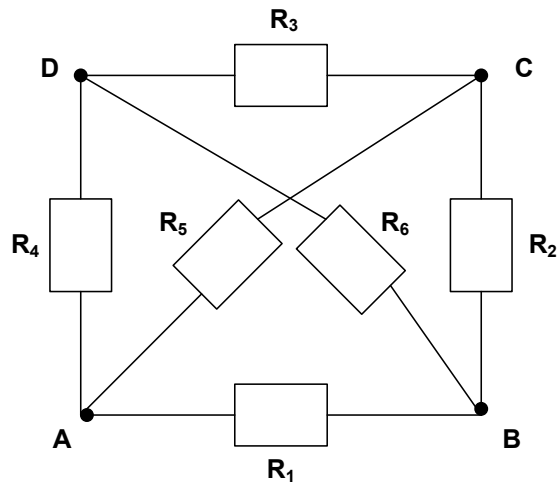
Dane: $R_1=R_3=R_5=R_7=R_9=R_{11}=R_{13}=5\ \Omega$, $R_2=R_4=R_6=R_8=R_{10}=R_{12}=10\ \Omega$.

Zadanie 5: Rozpoznać połączenia pomiędzy poszczególnymi elementami oraz wyznaczyć wartości rezystancji zastępczych R_{AB} , R_{AC} , R_{AD} , R_{BC} , R_{BD} , R_{CD} (widzianych z odpowiednich zacisków) w układzie jak na Rys.5.



Rys.5. Połączenie mieszane rezystorów

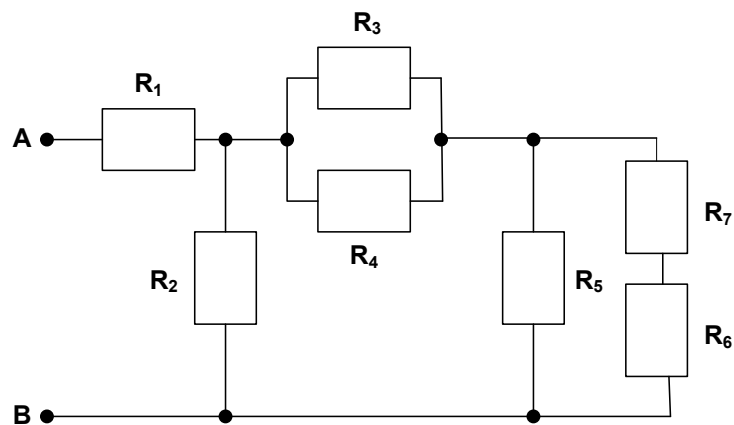
Dane: $R_1=R_3=R_5=R_7=10\ \Omega$, $R_2=R_4=R_6=5\ \Omega$.

Zadanie 6:

Rys.6. Połączenie mieszane rezystorów

Dane: $R_1=R_2=R_3=10\ \Omega$, $R_4=R_5=R_6=20\ \Omega$.

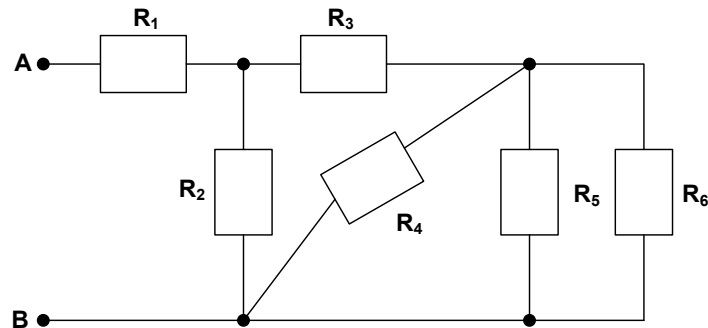
Zadanie 7: Obliczyć wartość rezystancji zastępczej widzianej z zacisków wejściowych AB (Rys.7.).



Rys.7. Połączenie mieszane rezystorów

Dane: $R_1=R_2=R_3=4\ \Omega$, $R_4=R_5=R_6=5\ \Omega$, $R_7=1\ \Omega$.

Zadanie 8: Obliczyć wartość rezystancji zastępczej widzianej z zacisków wejściowych AB (Rys.8.).



Rys.8. Połączenie mieszane rezystorów

Dane: $R_1=R_2=R_3=5\ \Omega$, $R_4=R_5=R_6=8\ \Omega$.

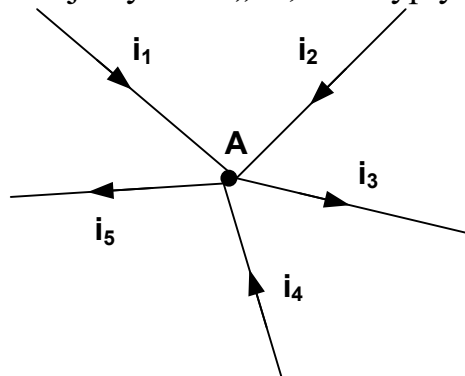
2.2 Metoda praw Kirchhoffa, metoda superpozycji.

Zadania dotyczące zagadnień: rozpoznawanie ilości oczek i węzłów w obwodzie elektrycznym, obliczanie rozplywu prądów (zastosowanie I prawa Kirchhoffa) w węzłach, spadków napięć na elementach pasywnych i aktywnych (zastosowanie II prawa Kirchhoffa) w oczkach, wydzielonej mocy (bilans mocy) w obwodzie.

Teoria.

Podstawę do analizy obwodów elektrycznych stanowią prawa Kirchhoffa. Tak zwane **pierwsze prawo Kirchhoffa** (prawo prądowe) stanowi bilans prądów w węźle obwodu elektrycznego. Brzmi ono następująco: Suma prądów w węźle obwodu elektrycznego jest równa 0 $-\sum_k i_k = 0$.

Sposób tworzenia równania prądowego jest następujący. Wszystkim prądom wpływającym do węzła nadajemy znak „+”, zaś wypływającym „-”.



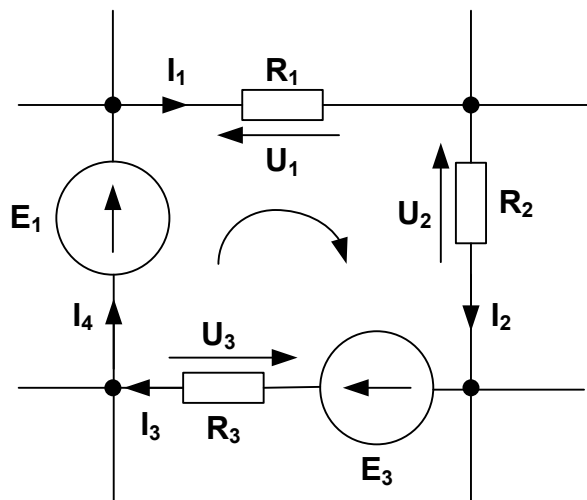
Rys.3. Węzeł w obwodzie elektrycznym

Wspomniane wyżej prawo dla węzła na Rys.3. zapiszemy następująco:

$$i_1 + i_2 + i_4 - i_3 - i_5 = 0$$

Podobnie zapisujemy równania dla wszystkich $W-1$ węzłów niezależnych w obwodzie elektrycznym, gdyż jeden z nich jest to tak zwany węzeł odniesienia i jego wybór jest dowolny.

II prawo Kirchhoffa (prawo napięciowe) dotyczy sumowania napięć gałęziowych w danym oczku względem dowolnie przyjętego kierunku odniesienia (zgodnie lub przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Napięcia zgodne z tym kierunkiem są brane pod uwagę z plusem, zaś te przeciwnie z minusem. Ogólnie rzecz biorąc suma napięć w oczku obwodu elektrycznego jest równa zero - $\sum_k u_k = 0$.



Rys.4. Oczko w obwodzie elektrycznym

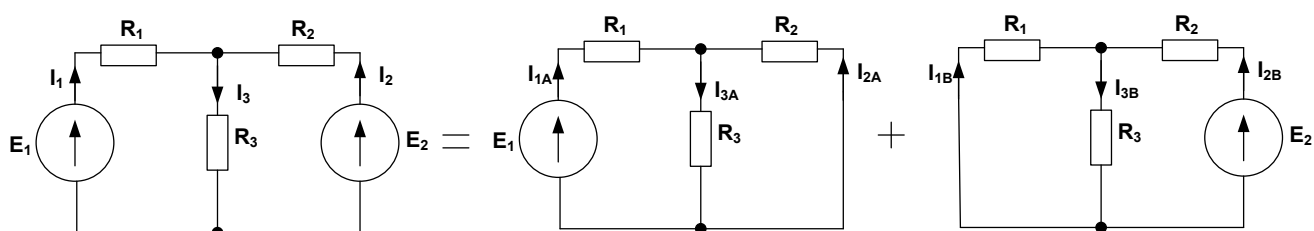
Uwzględniając kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara (Rys.4.) równanie napięciowe dla tego oczka przyjmuje postać:

$$-U_1 + U_2 + E_3 - U_3 + E_1 = 0.$$

Dla każdego oczka niezależnego ma powstać takie równanie, zaś liczbę oczek niezależnych obliczamy na podstawie równania: $O = G - (W - 1)$.

Gdzie: O - liczba oczek niezależnych, G - liczba gałęzi, W - liczba węzłów.

Metoda superpozycji bazuje na stwierdzeniu, iż odpowiedź obwodu elektrycznego liniowego jest równa sumie odpowiedzi na każde wymuszenie z osobna. Jest ona przydatna szczególnie w układach zawierających co najmniej dwa niezależne źródła (napięcia lub prądu). Analiza polega wówczas na rozbiciu danego obwodu o wielu wymuszeniach na wiele obwodów zawierających po jednym wymuszeniu, rozwiązaniu każdego z nich oddzielnie a następnie zsumowaniu odpowiedzi każdego obwodu. Zasada jest jednak następująca: eliminowane źródła są zastępowane zwarciami (w przypadku źródła napięciowego) lub rozwarciem (w przypadku źródła prądowego).



Rys.5. Metoda superpozycji – analiza obwodu elektrycznego

Powyższy schemat przedstawia obwód elektryczny złożony z dwóch źródeł napięciowych oraz trzech elementów pasywnych (rezystorów). Celem rozpatrzenia obwodu podzielimy go na dwa pod-obwody (A i B) – Rys.5. Na schemacie A zostało usunięte źródło E_2 (zwarcie), zaś na schemacie B – źródło E_1 (zwarcie). Wyznaczamy oddzielnie wartości prądów w pod-obwodach A i B, poczym sumujemy je. W przypadku każdego ze schematów możemy wykorzystać poznane już prawa Kirchhoffa.

Dla schematu A:

$$\begin{aligned} E_1 - U_{1A} - U_{3A} &= 0 \\ U_{3A} + U_{2A} &= 0 \\ I_{1A} + I_{2A} &= I_{3A} \end{aligned}$$

Dla schematu B:

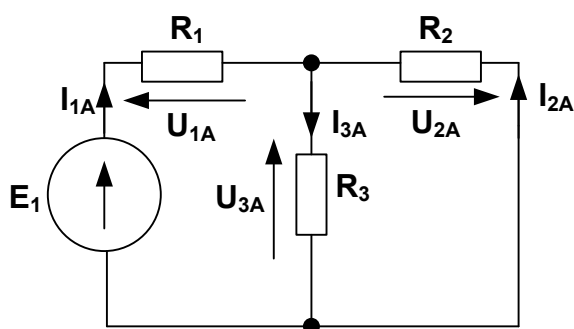
$$\begin{aligned} U_{1B} + U_{3B} &= 0 \\ U_{3B} + U_{2B} - E_2 &= 0 \\ I_{1B} + I_{2B} &= I_{3B} \end{aligned}$$

Dla każdego schematu oddzielnie rozwiązujemy układy równań i obliczamy wartości prądów, poczym sumujemy je:

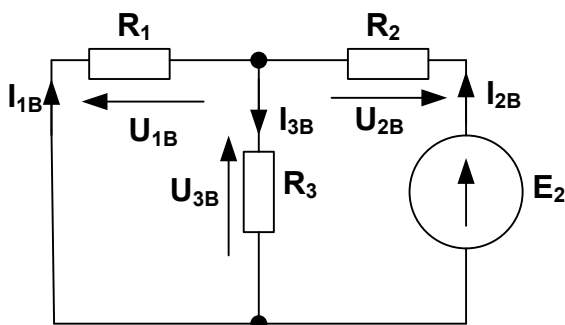
$$I_1 = I_{1A} + I_{1B}$$

$$I_2 = I_{2A} + I_{2B}$$

$$I_3 = I_{3A} + I_{3B}$$



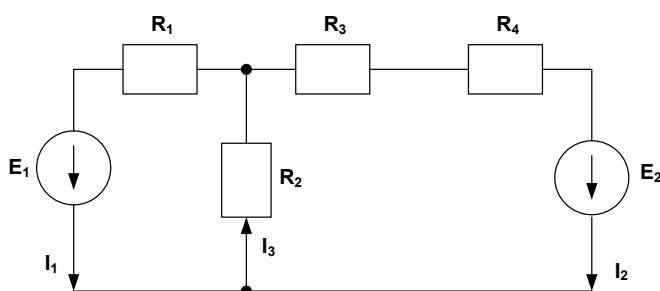
Rys.6. Schemat A



Rys.7. Schemat B

Przykładowe zadania.

Zadanie 1: Obliczyć wartości prądów gałęziowych w obwodzie jak na Rys.8.
Dane: $R_1=5\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=6\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $E_1=20\text{ V}$, $E_2=25\text{ V}$.



Rys.8. Obwód prądu i napięcia stałego

Przystępując do rozwiązywania obwodu z Rys.8. należy zaznaczyć spadki napięć na elementach pasywnych (rezystorach) zwrócone przeciwnie do płynących prądów oraz napisać prądowe i napięciowe prawo Kirchhoffa.

Piszemy równania II prawa Kirchhoffa dla obydwu oczek:

$$U_{R1} + U_{R2} = E_1 \quad U_{R2} + U_{R3} + U_{R4} = E_2$$

oraz prądowe prawo Kirchhoffa dla jednego z węzłów (górnego):

$$I_1 + I_2 = I_3$$

Podsumowując otrzymujemy następujący układ równań:

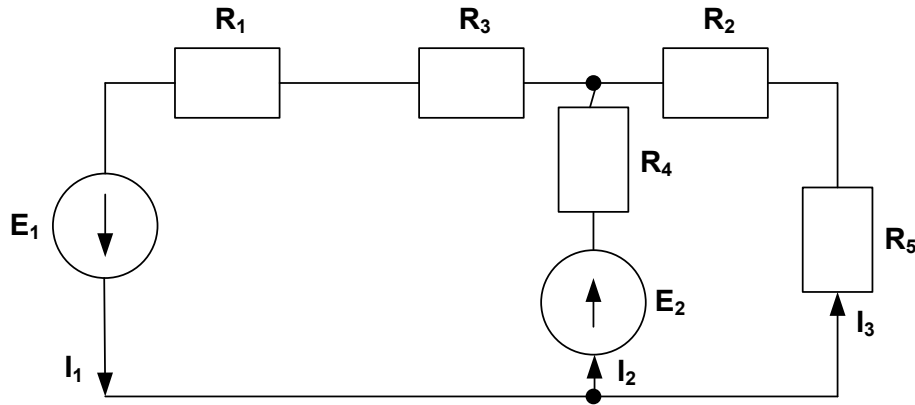
$$I_1 \cdot R_1 + (I_1 + I_2) \cdot R_2 = E_1 \quad (I_1 + I_2) \cdot R_2 + I_2 \cdot (R_3 + R_4) = E_2$$

$$I_1 \cdot (R_1 + R_2) + I_2 \cdot R_2 = E_1 \quad I_1 \cdot R_2 + I_2 \cdot (R_2 + R_3 + R_4) = E_2$$

Podstawiając wartości liczbowe i rozwiązując powyższy układ równań dowolną metodą matematyczną (macierzowa, dodawania stronami, przeciwnych współczynników itd.) otrzymamy wartości prądów gałęziowych w układzie.

Odp: $I_1=0,750\text{ A}$; $I_2=0,875\text{ A}$; $I_3=1,625\text{ A}$

Zadanie 2: Obliczyć rozpływ prądów (prądy gałęziowe) w obwodzie jak na Rys.9. Dane: $R_1=3\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$, $R_5=4\ \Omega$, $E_1=20\text{ V}$, $E_2=25\text{ V}$.



Rys.9. Obwód prądu i napięcia stałego

Przystępując do rozwiązania zadania metodą praw Kirchhoffa należy zapisać kolejno dwa wymienione powyżej prawa i rozwiązać układ równań.

Prądowe prawo Kirchhoffa: $I_1 = I_2 + I_3$

Napięciowe prawo Kirchhoffa:

oczko lewe: $U_{R1} + U_{R3} + U_{R4} = E_1 + E_2$

oczko prawe: $U_{R2} + U_{R5} - U_{R4} = -E_2$

Wykorzystując prawo Ohma otrzymujemy następujący układ równań:

$$I_1 \cdot R_1 + I_1 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_4 = E_1 + E_2$$

$$I_3 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_5 - I_2 \cdot R_4 = -E_2$$

W powyższym układzie mamy trzy niewiadome, w związku z czym wykorzystujemy prądowe prawo Kirchhoffa, aby pozbyć się jednej niewiadomej (u nas I_1):

$$(I_2 + I_3) \cdot R_1 + (I_2 + I_3) \cdot R_3 + I_2 \cdot R_4 = E_1 + E_2$$

$$I_3 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_5 - I_2 \cdot R_4 = -E_2$$

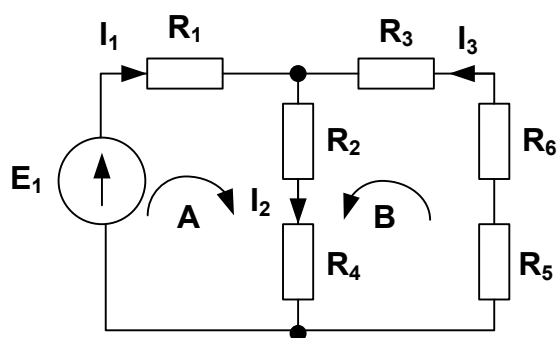
Po uporządkowaniu:

$$I_2 \cdot (R_1 + R_3 + R_4) + I_3 \cdot (R_1 + R_3) = E_1 + E_2$$

$$-I_2 \cdot R_4 + I_3 \cdot (R_2 + R_5) = -E_2$$

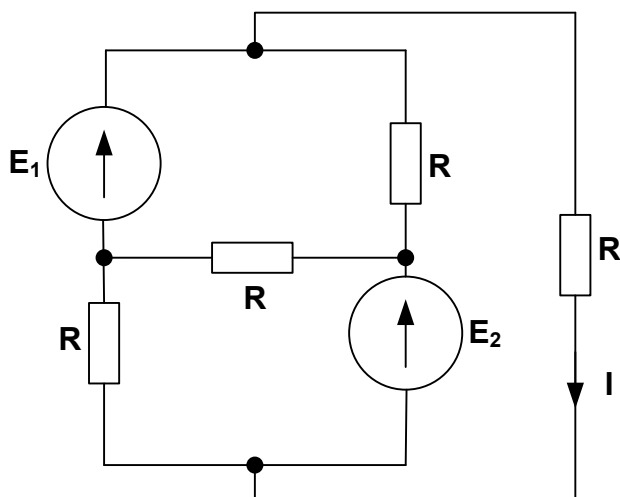
Odp: $I_1=4,34\text{ A}$; $I_2=4,67\text{ A}$; $I_3=-0,33\text{ A}$.

Zadanie 3: W obwodzie jak na Rys.10. wyznaczyć rozpływ prądów i moce wydzielane na elementach pasywnych. Dane: $R_1=R_3=R_5=5\ \Omega$, $R_2=R_4=R_6=10\ \Omega$, $E_1=25\text{ V}$.



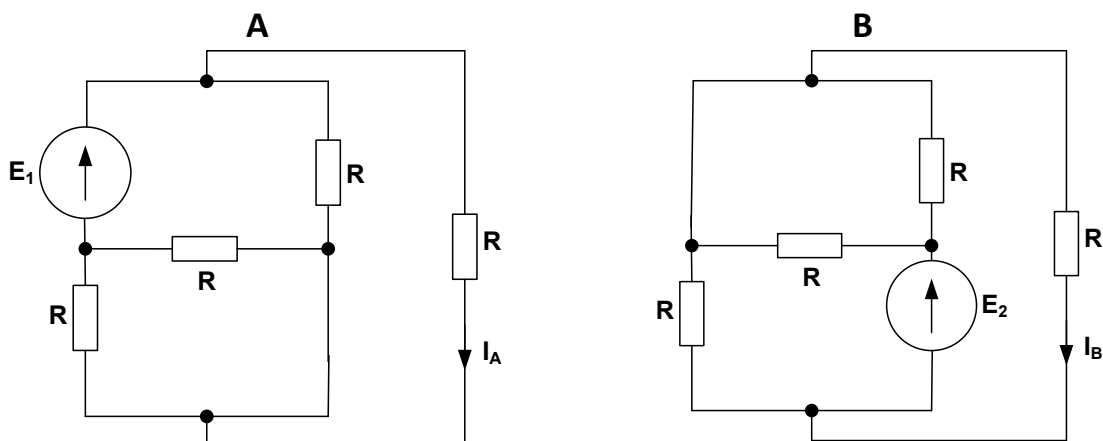
Rys.10. Obwód prądu i napięcia stałego

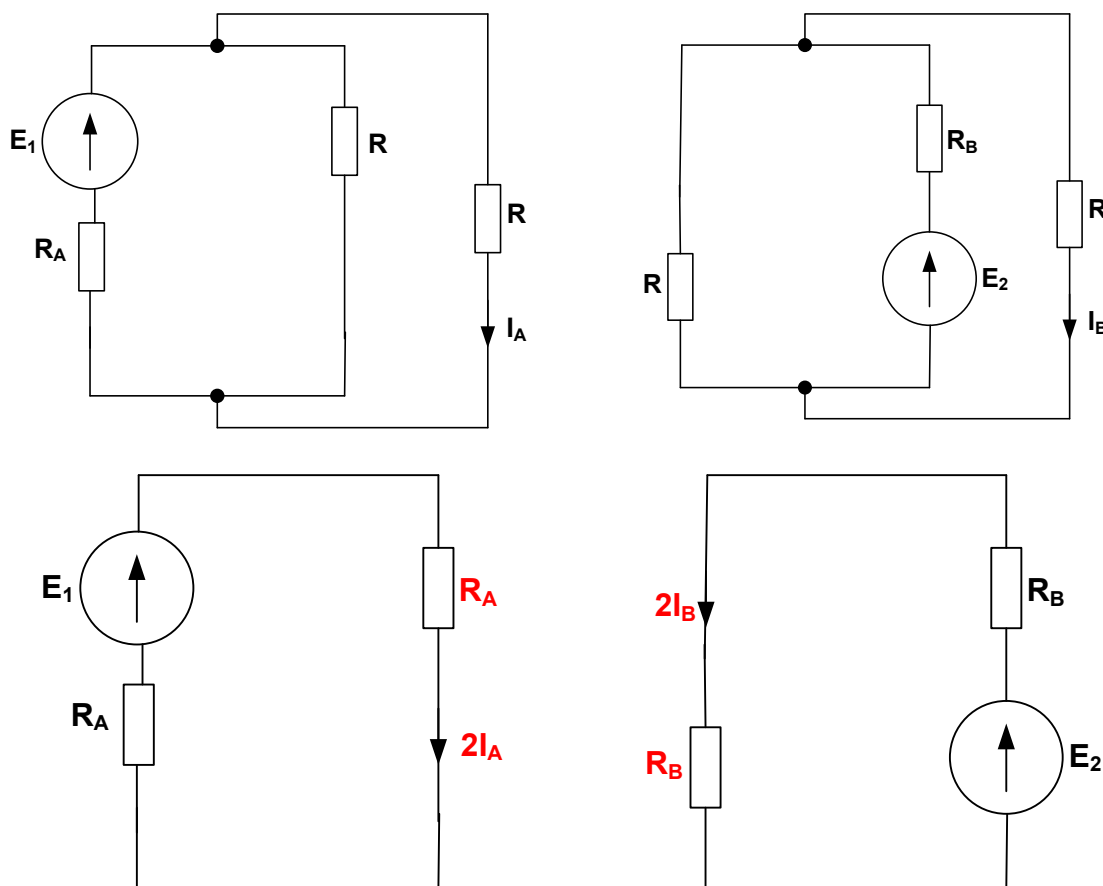
Zadanie 4: W układzie jak na Rys. 11. wyznaczyć wartość prądu metodą superpozycji. Dane: $E_1=4\text{ V}$, $E_2=2\text{ V}$, $R=1\ \Omega$.



Rys.11. Schemat obwodu elektrycznego

Zgodnie z zaprezentowaną wcześniej teorią, układ ma dwa źródła napięcia, w związku z czym będziemy analizować dwa pod-układy (A i B) – Rys.12.





Rys.12. Metoda superpozycji – analiza układu

Schemat A:

Rezystory R_A powstały jako równoległe połączenie dwóch rezystorów R o jednakowych wartościach. Ich wartości obliczamy ze wzoru: $R_A = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$.

Rezystor oznaczony kolorem czerwonym ma zgodnie z obliczeniami rezystancję o wartości równej połowie podstawowego rezystora R . Zatem zgodnie z prawem Ohma, prąd płynący przez niego ma wartość dwa razy większą ($2I_A$). Jest to jednocześnie prąd płynący w tym oczku.

Korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa wyznaczamy wartość tego prądu:

$$2I_A \cdot 2R_A = E_1, \text{ zatem } I_A = \frac{E_1}{4R_A} = \frac{4}{4 \cdot 0,5} = 2 \text{ A.}$$

Schemat B:

Rezystory R_B powstały jako równoległe połączenie dwóch rezystorów R o jednakowych wartościach. Ich wartości obliczamy ze wzoru: $R_B = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$.

Rezystor oznaczony kolorem czerwonym ma zgodnie z obliczeniami rezystancję o wartości równej połowie podstawowego rezystora R . Zatem zgodnie z prawem Ohma, prąd płynący przez niego ma wartość dwa razy większą ($2I_B$). Jest to jednocześnie prąd płynący w tym oczku.

Korzystając z drugiego prawa Kirchhoffa wyznaczamy wartość tego prądu:

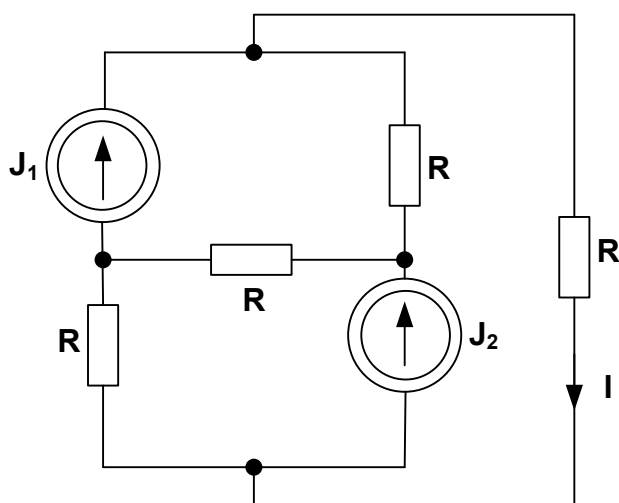
$$2I_B \cdot 2R_B = E_2, \text{ zatem } I_B = \frac{E_2}{4R_B} = \frac{2}{4 \cdot 0,5} = 1 \text{ A.}$$

Na koniec sumujemy wartości prądów ze schematów A i B:

$$I = I_A + I_B = 2 + 1 = 3 \text{ A.}$$

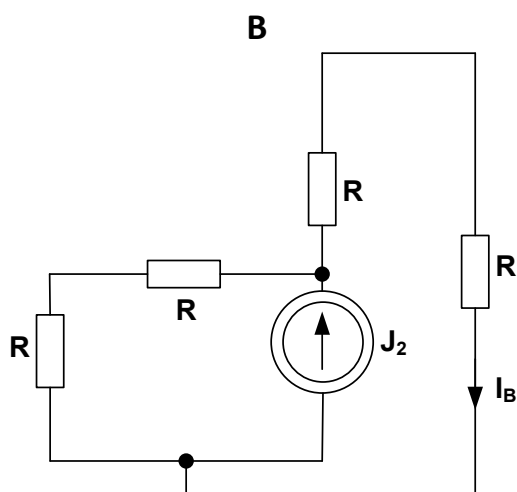
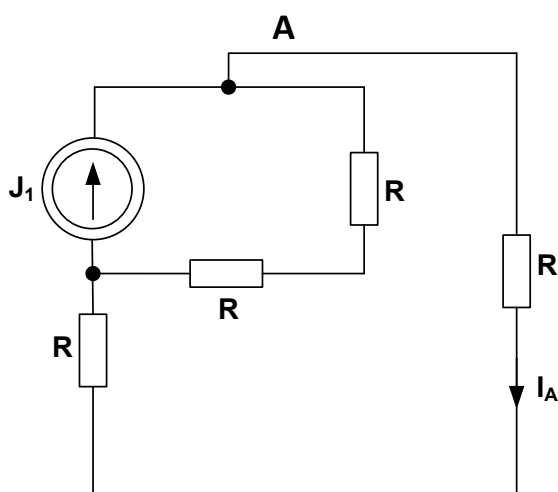
Odp: $I=3 \text{ A}$.

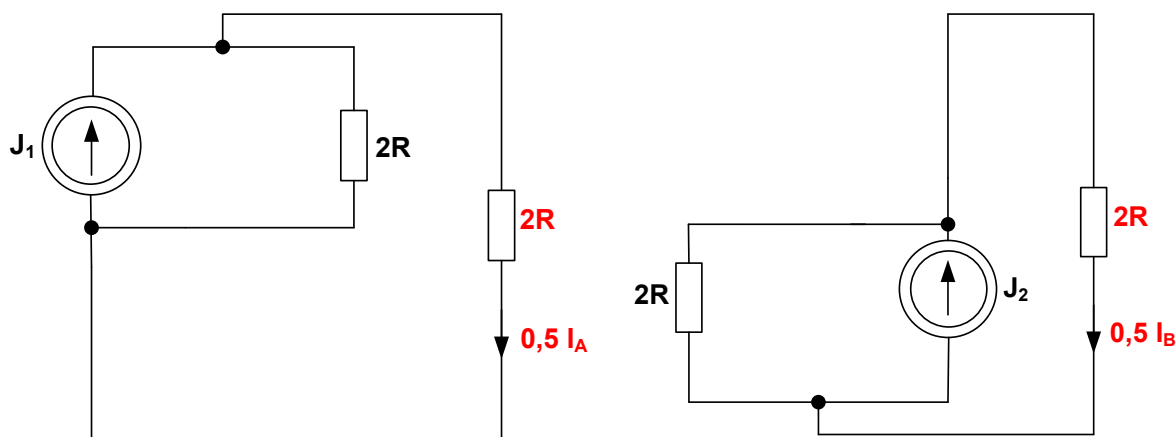
Zadanie 5: W układzie jak na Rys.13. obliczyć wartość prądu I stosując metodę superpozycji. Dane: $J_1=4 \text{ A}$, $J_2=2 \text{ A}$, $R=1 \Omega$.



Rys.13. Schemat obwodu elektrycznego

Zgodnie z zaprezentowaną wcześniej teorią, układ ma dwa źródła prądu (Rys.13.), w związku z czym będziemy analizować dwa pod-układy (A i B) – Rys.14.





Rys.14. Metoda superpozycji – analiza obwodu elektrycznego

Schemat A:

Pozostawiono źródło J_1 , zaś źródło J_2 zostało rozwarte. Powstały dwie gałęzie połączone równolegle ze źródłem prądowym, każda z nich z rezystorem o wartości $2R$. W związku z tym prąd I zmniejszył się dwukrotnie (prawo Ohma).

Schemat B:

Pozostawiono źródło J_2 , zaś źródło J_1 zostało rozwarte. Powstały dwie gałęzie połączone równolegle ze źródłem prądowym, każda z nich z rezystorem o wartości $2R$. W związku z tym prąd I zmniejszył się dwukrotnie (prawo Ohma).

W każdym z podukładów (A i B) prąd źródła J_1 lub J_2 rozplynie się na dwie równoległe gałęzie (o takich samych rezystancjach – $2R$) na połowy. Zatem wartość prądów obliczmy następująco:

$$J_1 = 0,5 I_A + 0,5 I_A = I_A$$

$$J_2 = 0,5 I_B + 0,5 I_B = I_B$$

Prąd I będzie sumą prądów I_A oraz I_B z poszczególnych pod-układów, zatem

$$I = I_A + I_B = J_1 + J_2 = 4 + 2 = 6 A.$$

Metodę superpozycji można poćwiczyć rozwiązując powyższe zadania przedstawione metodą praw Kirchhoffa. Wówczas będzie można porównać prawidłowość otrzymanych wyników.

2.3 Metoda prądów oczkowych

Zadania dotyczące zagadnień: rozpoznawanie ilości oczek w układzie – oczka zależne i niezależne, pisanie równań zgodnie z w/w metodą, obliczanie rozplywu prądów (prądy gałęziowe), spadków napięć na elementach pasywnych i aktywnych, obliczanie mocy (bilans mocy).

Teoria:

Metoda prądów oczkowych opiera się na II prawie Kirchhoffa (prawo napięciowe), według którego suma napięć wzdłuż dowolnej zamkniętej pętli

(oczka) obwodu elektrycznego jest równa zero. Metoda ta wymaga identyfikacji wszystkich oczek w układzie i każdemu z tych oczek przypisujemy prąd oczkowy (zmienna do obliczenia). Są to wirtualne prądy przepływające wzdłuż zamkniętych pętli obwodu, ich wartości wyznaczamy na podstawie rozpisanego układu równań. Układamy go dla oczek niezależnych (O) czyli takich, które są wystarczające do objęcia swoim zasięgiem wszystkich gałęzi (G) obwodu elektrycznego: $O = G - (W - 1)$,

gdzie: O – liczba oczek, G – liczba gałęzi, W – liczba węzłów.

W/w metoda pozwala ograniczyć liczbę zmiennych poddawanych analizie. Nie musimy analizować każdej gałęzi z osobna, skupiamy się na oczkach co upraszcza w znaczny sposób strukturę równań.

Kroki w analizie obwodu metodą prądów oczkowych:

- Zidentyfikuj wszystkie oczka w obwodzie elektrycznym,
- Przypisz prądy oczkowe każdemu w oczek, określając jego kierunek (zgodny lub przeciwny do ruchu wskazówek zegara),
- Utwórz układ równań (1 oczko=1 równanie),
- Rozwiąż układ równań określając wartości prądów oczkowych.

Sposób układania równań (Rys.1.):

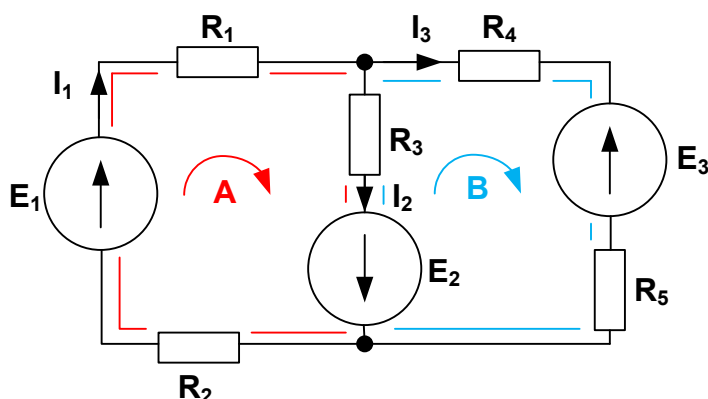
$$\text{Oczko A} \quad I_A \cdot (R_1 + R_2 + R_3) - I_B \cdot R_3 = E_1 + E_2$$

Prąd oczka mnożymy przez sumę rezystancji z czerwonych gałęzi oczka A ($R_1 + R_2 + R_3$). Jest to rezystancja własna oczka i zawsze występuje ze znakiem „+”. Potem sprawdzamy czy dane oczko graniczy z oczkami sąsiednimi (rezystancja wzajemna oczek) – gałąź dwukolorowa. W tym przypadku oczko A graniczy z oczkiem B przy udziale rezystora R_3 . Dodatkowo sprawdzamy, jak zachowują się prądy oczkowe na wspólnej gałęzi (z prądem I_2). Ich kierunki są przeciwne. W związku z tym rezystancja wzajemna jest ze znakiem „-”. Uwzględniamy wszystkie rezystancje wzajemne. Po prawej stronie równania wpisujemy wszystkie źródła napięciowe (ze wszystkich gałęzi danego oczka – kolor czerwony). Jeżeli znak źródła jest zgodny z kierunkiem prądu oczkowego, to ma ono znak „+”. Jeżeli zaś przeciwny, to stawiamy znak „-”. Jeżeli w oczku brak jest źródeł, wówczas po prawej stronie pojawia się 0.

$$\text{Oczko B} \quad I_B \cdot (R_3 + R_4 + R_5) - I_A \cdot R_3 = -E_2 - E_3$$

Postępujemy identycznie, jak w przypadku oczka A. $R_3 + R_4 + R_5$ - rezystancja własna oczka czyli suma rezystancji ze wszystkich gałęzi (niebieskich) należących do tego oczka. $-R_3$, to rezystancja wzajemna pomiędzy oczkiem A i B. Po prawej stronie równania mamy sumę źródeł znajdujących się na niebieskich gałęziach. Oba źródła mają znak „-”, wynikający z przeciwnego zwrotu do danego prądu oczkowego (B).

Podstawiamy wartości liczbowe i rozwiązując dowolną metodą powyższy układ równań otrzymujemy wartości prądów oczkowych A i B.



Rys.1. Analiza obwodu elektrycznego – metoda prądów oczkowych

Dane: $E_1=5\text{ V}$, $E_2=3\text{ V}$, $E_3=7\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=3\ \Omega$, $R_3=2\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$, $R_5=4\ \Omega$.

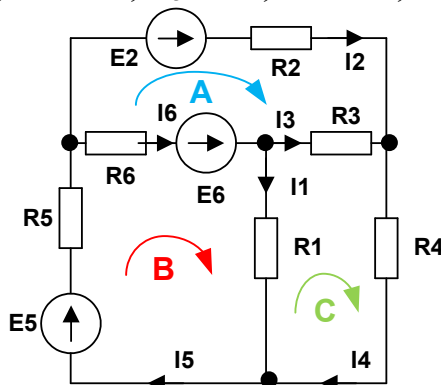
Wynikiem są następujące prądy oczkowe: $I_A=0,932\text{ A}$; $I_B=-0,739\text{ A}$.

Jeżeli mamy wyznaczyć wartości prądów gałęziowych, to musimy powiązać ze sobą obydwa rodzaje tych prądów (oczkowe i gałęziowe). Jeżeli prąd gałęziowy znajduje się na gałęzi jednokolorowej (czerwony lub niebieski), to dany prąd gałęziowy jest uzależniony tylko od jednego prądu oczkowego: $I_1=I_A$; $I_3=I_B$. Obydwa prądy gałęziowe mają kierunki zgodne z prądami oczkowymi, więc mają znaki „+”. Prąd I_2 płynie przez gałąź dwukolorową, więc jest uzależniony od dwóch prądów oczkowych: $I_2=I_A-I_B$. Prąd I_A ma w tym równaniu znak „+” ponieważ kierunki prądów I_A oraz I_2 są zgodne. Prąd I_B ma zaś znak „-”, bo zwrot I_2 oraz I_B jest przeciwny względem siebie.

$I_1=0,932\text{ A}$; $I_2=1,67\text{ A}$; $I_3=-0,739\text{ A}$. Wartość ujemna prądu I_3 nie jest błędem. Wynika z tego, że ten prąd płynie w przeciwnym kierunku niż to zostało zastrzałkowane na rysunku (Rys.1.).

Przykładowe zadania:

Zadanie 1: Oblicz rozpyły prądów metodą prądów oczkowych. Dane: $E_2=10\text{ V}$, $E_5=5\text{ V}$, $E_6=4\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$, $R_6=1\ \Omega$



Rys.2. Metoda prądów oczkowych - schemat obwodu elektrycznego

Rozpoczynamy rozwiązywanie zadania od obliczenia ilości oczek ze wzoru:

$$O = G - (W - 1),$$

gdzie: O – liczba oczek, G – liczba gałęzi, W – liczba węzłów.

W powyższym układzie mamy 3 oczka i obejmują one swoim zasięgiem wszystkie gałęzie badanego obwodu. Kierunek obiegu prądu oczkowego wybieramy zgodny w ruchem wskazówek zegara w każdym z nich. Zgodnie ze schematem rozpisujemy równania dla poszczególnych oczek:

$$\text{Oczko A: } I_A \cdot (R_2 + R_3 + R_6) - I_B \cdot R_6 - I_C \cdot R_3 = E_2 - E_6$$

$$\text{Oczko B: } -I_A \cdot R_6 + I_B \cdot (R_1 + R_5 + R_6) - I_C \cdot R_1 = E_5 + E_6$$

$$\text{Oczko C: } -I_A \cdot R_3 - I_B \cdot R_1 + I_C \cdot (R_1 + R_3 + R_4) = 0$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy następujący układ:

$$6I_A - I_B - 3I_C = 6$$

$$-I_A + 7I_B - I_C = 9$$

$$-3I_A - I_B + 8I_C = 0$$

Rozwiązując go dowolną metodą matematyczną otrzymujemy wartości prądów oczkowych:

$$I_A = 1,13 \text{ A}; I_B = 1,10 \text{ A}; I_C = 0,56 \text{ A}.$$

Na tej podstawie możemy otrzymać wartości prądów gałęziowych:

$$I_1 = I_B - I_C = 0,54 \text{ A}$$

$$I_2 = I_A = 1,13 \text{ A}$$

$$I_3 = I_C - I_A = -0,57 \text{ A} \text{ (oznacza to, że prąd płynie w przeciwną stronę niż jest on zastrzałkowany na rysunku)}$$

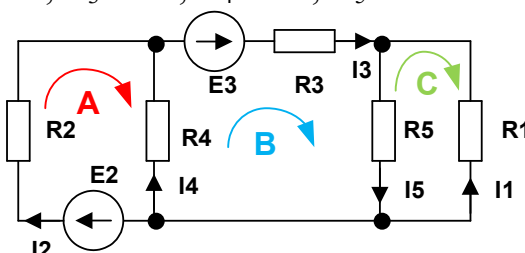
$$I_4 = I_C = 0,56 \text{ A}$$

$$I_5 = I_B = 1,10 \text{ A}$$

$$I_6 = I_B - I_A = -0,03 \text{ A} \text{ (oznacza to, że prąd płynie w przeciwną stronę niż jest on zastrzałkowany na rysunku)}.$$

Moc wydzielająca się na elementach pasywnych (rezystorach) jest mocą czynną i obliczymy ją ze wzoru: $P = RI^2$. Dla przykładu moc wydzielająca się na rezystancji R_5 będzie wynosiła: $P_5 = R_5 \cdot I_5^2 = 6,05 \text{ W}$

Zadanie 2: Oblicz rozpyły prądów metodą prądów oczkowych. Dane: $E_2 = 6 \text{ V}$, $E_3 = 4 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $R_5 = 1 \Omega$.



Rys.3. Metoda prądów oczkowych - schemat obwodu elektrycznego



Rozpoczynamy rozwiązywanie zadania od obliczenia ilości oczek ze wzoru:

$$O = G - (W - 1),$$

gdzie: O – liczba oczek, G – liczba gałęzi, W – liczba węzłów.

W powyższym układzie mamy 3 oczka i obejmują one swoim zasięgiem wszystkie gałęzie badanego obwodu. Kierunek obiegu prądu oczkowego wybieramy zgodny w ruchu wskazówek zegara w każdym z nich. Zgodnie ze schematem rozpisujemy równania dla poszczególnych oczek:

$$\text{Oczko A: } I_A \cdot (R_2 + R_4) - I_B \cdot R_4 = E_2$$

$$\text{Oczko B: } -I_A \cdot R_4 + I_B \cdot (R_3 + R_4 + R_5) - I_C \cdot R_5 = E_3$$

$$\text{Oczko C: } -I_B \cdot R_5 + I_C \cdot (R_1 + R_5) = 0$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy następujący układ:

$$7I_A - 5I_B = 6$$

$$-5I_A + 10I_B - I_C = 4$$

$$-I_B + 4I_C = 0$$

Rozwiązując go dowolną metodą matematyczną otrzymujemy wartości prądów oczkowych:

$$I_A = 1,82 \text{ A}; I_B = 1,34 \text{ A}; I_C = 0,34 \text{ A}.$$

Na tej podstawie możemy otrzymać wartości prądów gałęziowych:

$$I_1 = -I_C = -0,34 \text{ A}$$

$$I_2 = I_A = 1,82 \text{ A}$$

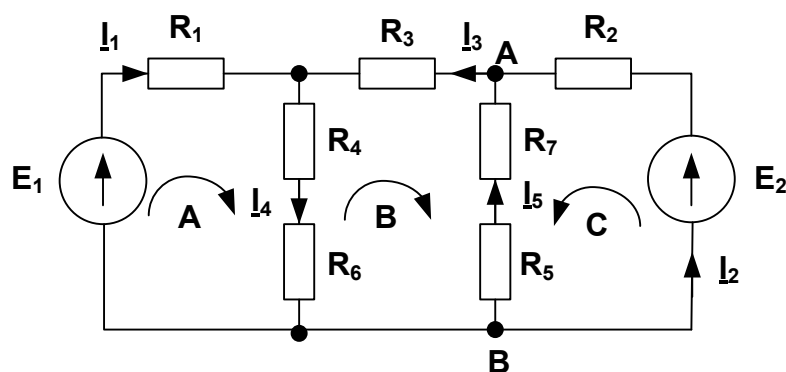
$$I_3 = I_B = 1,34 \text{ A}$$

$$I_4 = I_B - I_A = -0,48 \text{ A} \text{ (oznacza to, że prąd płynie w przeciwną stronę niż jest on zastrzałkowany na rysunku)}$$

$$I_5 = I_B - I_C = 1,00 \text{ A}.$$

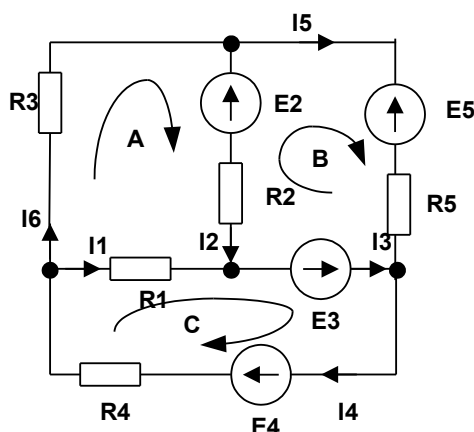
Moc wydzielająca się na elementach pasywnych (rezystorach) jest mocą czynną i obliczymy ją ze wzoru: $P = RI^2$. Dla przykładu moc wydzielająca się na rezystancji R_2 będzie wynosiła: $P_2 = R_2 \cdot I_2^2 = 6,62 \text{ W}$

Zadanie 3: W obwodzie jak na Rys.4. obliczyć wartości prądów gałęziowych metodą prądów oczkowych. Dane: $R_1 = 2 \text{ } \Omega$, $R_2 = 1 \text{ } \Omega$, $R_3 = 3 \text{ } \Omega$, $R_4 = 5 \text{ } \Omega$, $R_5 = 4 \text{ } \Omega$, $R_6 = 1 \text{ } \Omega$, $R_7 = 1 \text{ } \Omega$, $E_1 = 5 \text{ V}$, $E_2 = 4 \text{ V}$.



Rys.4. Obwód prądu i napięcia stałego – metoda prądów oczkowych

Zadanie 4: W obwodzie jak na Rys.5. obliczyć wartości prądów gałęziowych oraz moc wydzielającą się na elementach pasywnych. Dane: $R_1=1\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$, $R_4=4\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$, $E_2=5\text{ V}$, $E_3=4\text{ V}$, $E_4=2\text{ V}$, $E_5=10\text{ V}$.



Rys.5. Obwód prądu i napięcia stałego – metoda prądów oczkowych

2.4 Metoda potencjałów węzłowych

Zadania dotyczące zagadnień: rozpoznawanie ilości węzłów w układzie – węzły zależne i niezależne, węzły na tym samym potencjale, pisanie równań zgodnie z w/w metodą, obliczanie rozptywu prądów (prądy gałęziowe), spadków napięć na elementach pasywnych i aktywnych, obliczanie mocy (bilans mocy).

Teoria:

Metoda ta nazywana jest również metodą węzłową, która wynika bezpośrednio z równań prądowych Kirchhoffa. Jest jedną z najogólniejszych i najczęściej stosowanych metod. Zmiennymi są tutaj potencjały poszczególnych węzłów obwodu elektrycznego i określa się je względem jednego wybranego węzła uznanego za węzeł odniesienia, tzw. masy (o potencjale równym 0). Liczba równań w tej metodzie jest równa liczbie węzłów niezależnych (N), co znacznie ją upraszcza w stosunku do metody praw Kirchhoffa.

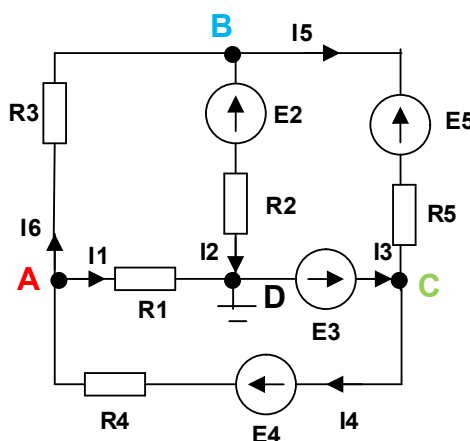
$$N = W - 1$$

gdzie: W – liczba wszystkich węzłów.

Zadanie 1: Poddajmy analizie schemat obwodu z Rys.1. Na schemacie mamy 4 węzły (A, B, C, D). Jeden z nich wybieramy jako węzeł odniesienia, a jego wybór uzależniony jest od obecności w układzie idealnego źródła napięcia (w gałęzi ze źródłem brak jest rezystora). W tym wypadku jest to źródło E_3 znajdujące się pomiędzy węzłami C oraz D i jeden z tych węzłów należy uziemić (nadać mu potencjał równy 0). Wybierzmy węzeł D do uziemienia. W związku z tym wyborem możemy określić potencjał węzła sąsiedniego C zgodnie z poniższym wzorem:

$$\begin{cases} V_C - V_D = E_3 \\ V_D = 0 \end{cases}$$

Z tego wynika, że $V_C = E_3$.



Rys.1. Metoda potencjałów węzłowych – schemat obwodu elektrycznego
Dane: $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$, $R_5=2\ \Omega$, $E_2=5\ \text{V}$, $E_3=10\ \text{V}$, $E_4=15\ \text{V}$, $E_5=12\ \text{V}$.

W związku z powyższym układamy równania dla dwóch węzłów – A i B.

Ogólna postać tych równań przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} G_{AA} \cdot V_A + G_{AB} \cdot V_B = I_A \\ G_{BA} \cdot V_A + G_{BB} \cdot V_B = I_B \end{cases}$$

Gdzie: G_{AA} , G_{BB} – konduktancje własne węzłów A i B (zawsze ze znakiem „+”); G_{AB} , G_{BA} – konduktancje wzajemne między węzłami A i B (zawsze ze znakiem „-”); I_A , I_B – prądy węzłowe.

Kroki postępowania podczas analizy układu metodą potencjałów węzłowych:

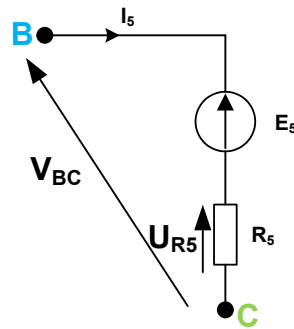
- Opis obwodu równaniami (poszukiwane zmienne V),
- Rozwiązanie równań $GV=I$,
- Określenie prądów gałęziowych z prawa napięciowego Kirchhoffa przy znanych potencjałach węzłowych (prąd gałęziowy jest równy iloczynowi konduktancji elementu i napięcia na nim wyrażonego przez sumę/różnicę znanych potencjałów węzłowych),
- Metoda dopuszcza istnienie w obwodzie źródeł typu prądowego. Źródła napięciowe należy przekształcić w odpowiednie źródła prądowe.

Kontynuując analizę obwodu z Rys.1. tworzymy równania dla pozostałych węzłów A i B.

$$\begin{aligned} V_A \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) - V_B \cdot \frac{1}{R_3} - V_C \cdot \frac{1}{R_4} &= \frac{E_4}{R_4} \\ -V_A \cdot \frac{1}{R_3} + V_B \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - V_C \cdot \frac{1}{R_5} &= \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_5}{R_5} \end{aligned}$$

Pisząc równanie dla danego węzła mnożymy potencjał analizowanego węzła przez sumę odwrotności rezystancji (konduktancje) ze wszystkich gałęzi dołączonych do rozpatrywanego węzła (konduktancja własna/suma odwrotności rezystancji własnych), ze znakiem plus. Jeżeli rezystory znajdują się na wspólnej gałęzi, wówczas zawsze sumujemy je w jednym wspólnym mianowniku. Jeżeli dany węzeł sąsiaduje z innymi węzłami, to uwzględniamy je ze znakami minus mnożąc potencjał sąsiedniego węzła przez odwrotność rezystancji (konduktancję) pomiędzy nimi (konduktancja wzajemna/odwrotność rezystancji wzajemnej). Stawiamy znak równa się i po prawej stronie uwzględniamy źródła dołączone do wszystkich gałęzi danego węzła. Źródła napięciowe dzielimy przez rezystancje umieszczone z nimi na gałęzi. Jeżeli źródło jest skierowane do danego węzła ma znak plus, jeżeli przeciwnie, to znak minus.

Wyznaczanie wartości prądów gałęziowych dla wybranej gałęzi.



Rys.2. Analiza wybranej gałęzi obwodu

„Wycinamy” gałąź z prądem I_5 i zaznaczamy dowolną różnicę potencjałów (V_{BC}) oraz spadki napięć na elementach pasywnych (U_{R5}). Tworzymy napięciowe prawo Kirchhoffa (kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara): $V_{BC} - E_5 - U_{R5} = 0$

Gdzie w miejsce U_{R5} podstawiamy prawo Ohma: $U_{R5} = I_5 \cdot R_5$

$$V_{BC} - E_5 = I_5 \cdot R_5$$
$$I_5 = \frac{V_{BC} - E_5}{R_5}$$

Podobnie postępujemy z pozostałymi gałęziami i ich prądami.

$$I_1 = \frac{V_A - V_D}{R_1}$$
$$I_2 = \frac{V_B - V_D - E_2}{R_2}$$
$$I_4 = \frac{E_4 - (V_A - V_C)}{R_4}$$

Do wyznaczenia wartości prądu płynącego przez idealne źródło napięcia wykorzystamy prądowe prawo Kirchhoffa: $I_3 = I_1 + I_2$.

Odp: $V_A=7,97$ V; $V_B=10,28$ V; $V_C=10$ V; $V_D=0$ V; $I_1=3,98$ A; $I_2=5,28$ A; $I_3=9,26$ A; $I_4=3,41$ A; $I_5=3,98$ A.

Przykładowe zadania:

Zadanie 2: Obliczyć rozpyływ prądów w obwodzie jak na Rys.3. metodą potencjałów węzłowych. Dane: $R_1=2 \Omega$, $R_2=3 \Omega$, $R_3=1 \Omega$, $R_4=5 \Omega$, $R_5=2 \Omega$, $R_6=4 \Omega$, $R_7=10 \Omega$, $E_1=15$ V, $E_2=24$ V.

Rozpoczynamy od określenia ilości węzłów, w tym zadaniu 4 (A, B, C, D). Mamy tutaj do czynienia z sytuacją dwóch węzłów na tym samym potencjale (węzeł C i poniższy bez oznaczenia) z uwagi na fakt, że pomiędzy nimi nie ma żadnego

elementu aktywnego lub pasywnego. Z uwagi na to rezystory są połączone równolegle i możemy zastąpić je rezystancją wspólną (R_{12}). Jeden z węzłów uziemiamy i jeżeli nie ma w obwodzie idealnego źródła napięcia, możemy uziemić dowolny węzeł. Wybór padł na węzeł D. Równania dla danej metody będą przedstawiać się następująco:

$$\begin{aligned} V_A \cdot \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} \right) - V_B \cdot \frac{1}{R_6} - V_D \cdot \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_7} \right) &= \frac{E_2}{R_5} \\ V_B \cdot \left(\frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_A \cdot \frac{1}{R_6} - V_C \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) &= \frac{E_1}{R_4} \\ V_C \cdot \left(\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_B \cdot \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_D \cdot \frac{1}{R_{12}} &= -\frac{E_1}{R_4} \end{aligned}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$0,85V_A - 0,25V_B = 12$$

$$-0,25V_A + 1,45V_B - 1,2V_C = 3$$

$$-1,2V_B + 2,4V_C = -3$$

Na podstawie powyższego układu otrzymujemy wartości potencjałów w węzłach:

$$V_A = 16,02 \text{ V}; V_B = 6,48 \text{ V}; V_C = 1,99 \text{ V}$$

Znając wartości potencjałów możemy wyliczyć prądy gałęziowe:

$$I_2 = \frac{V_D - V_C}{R_2} = -0,66 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{V_D - V_C}{R_1} = -1,00 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{V_C - V_B}{R_3} = -4,49 \text{ A}$$

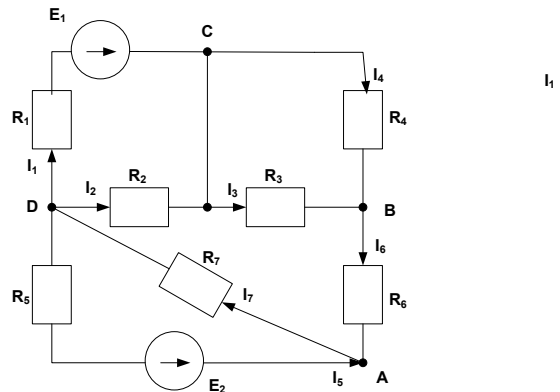
$$I_4 = \frac{V_C - V_B + E_1}{R_4} = 2,10 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{V_D - V_A + E_2}{R_5} = 3,99 \text{ A}$$

$$I_6 = \frac{V_B - V_A}{R_6} = -2,39 \text{ A}$$

$$I_7 = \frac{V_A - V_D}{R_7} = 1,60 \text{ A}$$

Po zakończeniu obliczeń należy sprawdzić ich poprawność zgodnie z I prawem Kirchhoffa, dla węzła B przedstawia się ono następująco: $I_3 + I_4 = I_6$. Stwierdzono poprawność.



Rys.3. Schemat obwodu elektrycznego

Zadanie 3: Obliczyć rozptyw prądów w obwodzie jak na Rys.4. metodą potencjałów węzłowych. Dane: $R_1=5\ \Omega$, $R_2=10\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $R_4=2\ \Omega$, $R_5=2\ \Omega$, $R_6=1\ \Omega$, $R_7=3\ \Omega$, $E_1=10\ \text{V}$, $E_2=20\ \text{V}$.

Rozpoczynamy od określenia ilości węzłów, w tym zadaniu 3 (A, B, C). Mamy tutaj do czynienia z sytuacją dwóch węzłów na tym samym potencjale (węzeł C i poniższy) z uwagi na fakt, że pomiędzy nimi nie ma żadnego elementu aktywnego lub pasywnego. Jeden z węzłów uziemiamy i jeżeli nie ma w obwodzie idealnego źródła napięcia, możemy uziemić dowolny węzeł. Wybór padł na węzeł C i nie uwzględniamy go podczas rozpatrywania rezystancji wzajemnej pomiędzy węzłami A i B. Równania dla danej metody będą przedstawiać się następująco:

$$\begin{aligned} V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_6 + R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - V_B \cdot \frac{1}{R_4} &= -\frac{E_1}{R_1} \\ V_B \cdot \left(\frac{1}{R_5 + R_7} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} \right) - V_A \cdot \frac{1}{R_4} &= \frac{E_2}{R_2} \end{aligned}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy:

$$0,90V_A - 0,50V_B = -2$$

$$-0,50V_A + 0,80V_B = 2$$

Na podstawie powyższego układu otrzymujemy wartości potencjałów w węzłach:

$$V_A = -1,28\ \text{V}; \quad V_B = 1,70\ \text{V}$$

Znając wartości potencjałów możemy wyliczyć prądy gałęziowe:

$$I_2 = \frac{-V_B + E_2}{R_2} = 1,83\ \text{A}$$

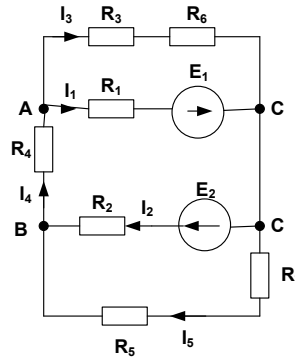
$$I_1 = \frac{V_A + E_1}{R_1} = 1,74\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{V_A}{R_3 + R_6} = -0,26\ \text{A}$$

$$I_4 = \frac{V_B - V_A}{R_4} = 1,49\ \text{A}$$

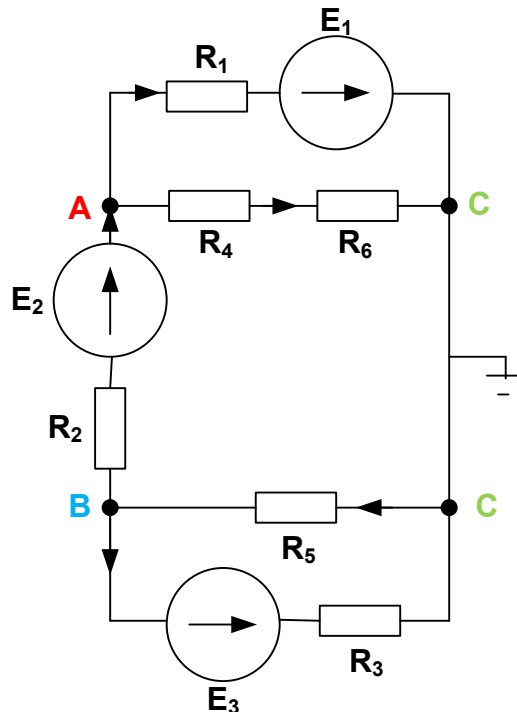
$$I_5 = \frac{-V_B}{R_5 + R_7} = -0,34 \text{ A}$$

Po zakończeniu obliczeń należy sprawdzić ich poprawność zgodnie z I prawem Kirchhoffa, dla węzła B przedstawia się ono następująco: $I_5 + I_2 = I_4$. Stwierdzono poprawność.



Rys.4. Schemat obwodu elektrycznego

Zadanie 4: Obliczyć rozptyw prądów w układzie jak na Rys.5. metodą prądów oczkowych. Dane: $R_1=3 \Omega$, $R_2=5 \Omega$, $R_3=2 \Omega$, $R_4=4 \Omega$, $R_5=4 \Omega$, $R_6=1 \Omega$, $E_1=6 \text{ V}$, $E_2=4 \text{ V}$; $E_3=3 \text{ V}$.

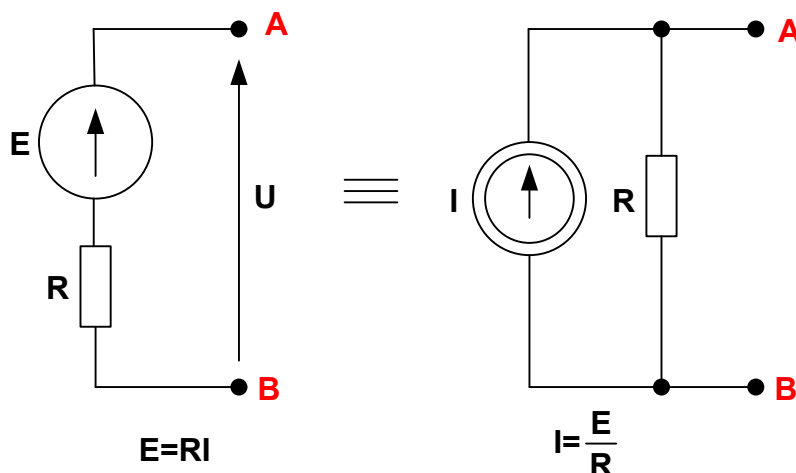


Rys.5. Analiza obwodu elektrycznego metodą potencjałów węzłowych

Odp: $V_A=-1,6 \text{ V}$; $V_B=-1,92 \text{ V}$, $V_3=0 \text{ V}$; $I_1=1,18 \text{ A}$; $I_2=0,70 \text{ A}$; $I_3=0,03 \text{ A}$;
 $I_4=-0,49 \text{ A}$; $I_5=0,73 \text{ A}$.

2.5 Twierdzenie/metoda Thèvenina i Nortona

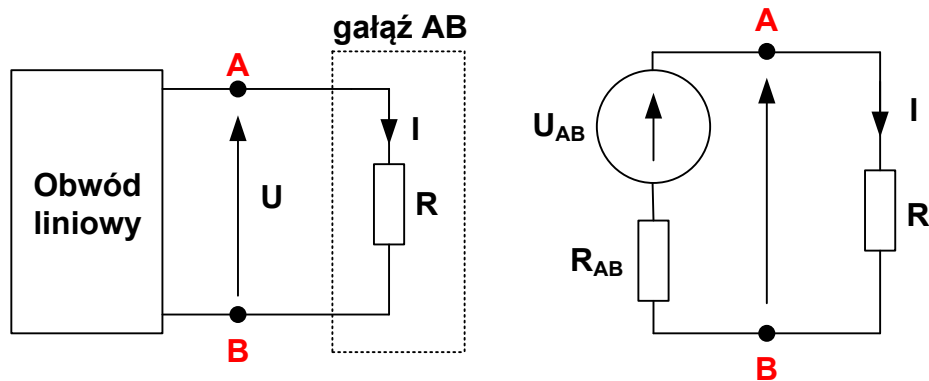
Równoważność twierdzenia Thèvenina i Nortona pozwala wyznaczyć uproszczone schematy zastępcze tego samego obwodu elektrycznego z wybranych punktów AB oryginalnego obwodu. Rezultatem tego jest fakt, iż gałąź szeregową zawierającą idealne źródło napięciowe E i rezystancję R może zostać zastąpiona gałęzią równoległą zawierającą idealne źródło prądowe oraz rezystancję R (Rys. 1.) bez zmiany wartości prądu w obwodzie zewnętrznym.



Rys.1. Równoważność twierdzenia Thèvenina i Nortona

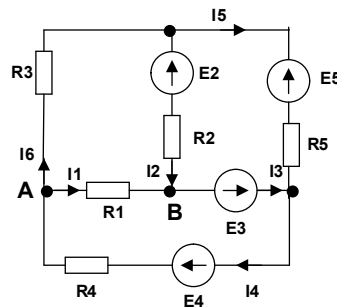
W/w twierdzenia umożliwiają znaczne uproszczenie struktury obwodu, a tym samym bardzo prosty sposób wyznaczenia prądu, napięcia lub mocy wydzielanej w wybranej gałęzi obwodu.

Twierdzenia Thèvenina. Dowolny obwód elektryczny zastępujemy od strony wybranych zacisków AB równoważnym obwodem złożonym z szeregowego połączenia idealnego źródła napięcia oraz rezystancji zastępczej obwodu. Wartość zastępczego źródła napięcia oblicza się na podstawie analizy oryginalnego obwodu jako napięcia panującego między zaciskami AB po odłączeniu gałęzi AB – U_{AB} , E_{Th} . Impedancja zastępcza (R_{AB} , R_{Th}), to impedancja widziana z zacisków AB (po odłączeniu gałęzi AB) po zwarcu wszystkich źródeł napięcia i rozwarciu wszystkich źródeł prądu. Wartość prądu I oblicza się z napięciowego prawa Kirchhoffa – Rys. 2.



Rys.2. Transformacja obwodu – twierdzenie Thèvenina

Zadanie 1: Oblicz wartość prądu I_1 metodą Thèvenina. Dane: $E_2=6\text{ V}$, $E_3=10\text{ V}$, $E_4=20\text{ V}$, $E_5=5\text{ V}$, $R_1=1\ \Omega$, $R_2=2\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $R_4=3\ \Omega$, $R_5=5\ \Omega$

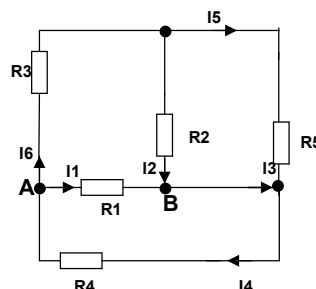


Rys.3. Schemat układu elektrycznego

W miejscu gałęzi z szukanym prądem robimy stan jałowy a na jej końcach zaznaczamy punkty A i B. Chcąc rozwiązać zadanie tą metodą musimy zrealizować dwa etapy:

Obliczenie rezystancji R widzianej z zacisków AB (R_{AB}) kiedy układ znajduje się w stanie nieaktywnym (źródła napięciowe zwieramy, prądowe rozwieramy)-dla obwodu z Rys.8. według wzoru poniżej:

$$R_X = R_3 + \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5} = 5,43\ \Omega$$
$$R_{AB} = \frac{R_X \cdot R_4}{R_X + R_4} = 1,93\ \Omega$$



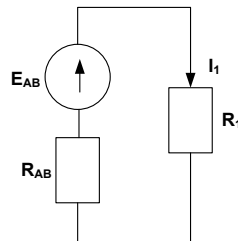
Rys.4. Schemat do wyznaczenia rezystancji R_{AB}

Obliczenie napięcia pomiędzy punktami AB (E_{AB}) kiedy układ znajduje się w stanie aktywnym)-dla obwodu z Rys.3. według wzoru poniżej:

$$E_{AB} = E_3 + E_4 - I_4 \cdot R_4$$

Po „wycięciu“ gałęzi z prądem I_1 mamy do czynienia w układzie z dwoma oczkami i szukany prąd I_4 (wzór powyżej) możemy wyznaczyć na podstawie metody prądów oczkowych. Jego wartość wynosi 2,54 A. Wówczas obliczamy wartość napięcia $E_{AB}=22,38$ V.

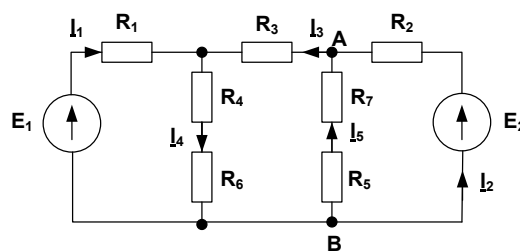
Na tej podstawie tworzymy jednooczkowy układ złożony z rzeczywistego źródła napięciowego (E_{AB}) wraz z jego rezystancją wewnętrzną (R_{AB}) i odłączonej gałęzi z szukanim prądem I_1 – Rys.5.

Rys.5. Obwód do obliczenia prądu I_1

$$I_1 = \frac{E_{AB}}{R_{AB} + R_1} = \frac{22,38}{1,93 + 1} = 7,64 \text{ A}$$

Otrzymaną wartość prądu można sprawdzić dowolną wcześniej poznaną metodą.

Zadanie 2: Obliczyć wartość prądu I_5 metodą Thèvenina. Dane: $E_1=18$ V, $E_2=20$ V, $R_1=2 \Omega$, $R_2=4 \Omega$, $R_3=5 \Omega$, $R_4=6 \Omega$, $R_5=3 \Omega$, $R_6=4 \Omega$, $R_7=2 \Omega$.



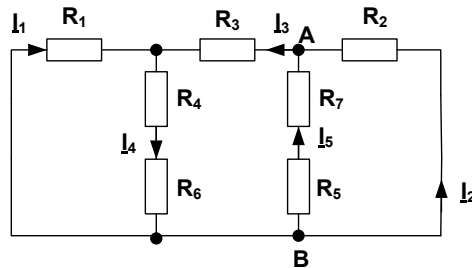
Rys.6. Schemat obwodu elektrycznego

W miejscu gałęzi z szukanim prądem robimy stan jałowy a na jej końcach zaznaczamy punkty A i B. Chcąc rozwiązać zadanie tą metodą musimy zrealizować dwa etapy:

Obliczenie rezystancji R widzianej z zacisków AB (R_{AB}) kiedy układ znajduje się w stanie nieaktywnym (źródła napięciowe zwieramy, prądowe rozwieramy)-dla obwodu z Rys.7. według wzoru poniżej:

$$R_X = R_3 + \frac{R_1 \cdot (R_4 + R_6)}{R_1 + R_4 + R_6} = 6,67 \, \Omega$$

$$R_{AB} = \frac{R_X \cdot R_2}{R_X + R_2} = 2,50 \, \Omega$$

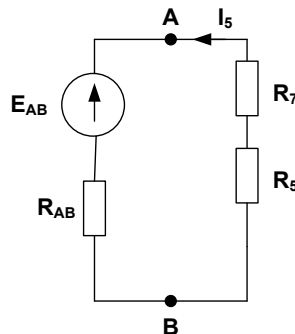


Rys.7. Schemat obwodu do wyznaczania rezystancji zastępczej R_{AB}
Obliczenie napięcia pomiędzy punktami AB (E_{AB}) kiedy układ znajduje się w stanie aktywnym)-dla obwodu z Rys.6. według wzoru poniżej:

$$E_{AB} = E_2 - I_2 \cdot R_2$$

Po „wycięciu“ gałęzi z prądem I_5 mamy do czynienia w układzie z dwoma oczkami i szukany prąd I_2 (wzór powyżej) możemy wyznaczyć na podstawie metody prądów oczkowych. Jego wartość wynosi 0,47 A. Wówczas obliczamy wartość napięcia $E_{AB}=18,12$ V.

Na tej podstawie tworzymy jednooczkowy układ złożony z rzeczywistego źródła napięciowego (E_{AB}) wraz z jego rezystancją wewnętrzną (R_{AB}) i odłączonej gałęzi z szukanim prądem I_5 – Rys.8.

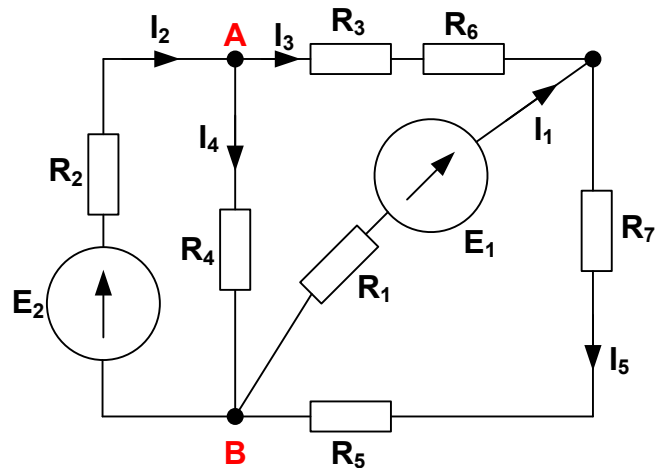


Rys.8. Schemat układu do wyznaczenia prądu I_5

$$I_5 = \frac{-E_{AB}}{R_{AB} + R_5 + R_7} = \frac{-18,12}{0,47 + 3 + 2} = -2,42 \, A$$

Otrzymaną wartość prądu można sprawdzić dowolną wcześniej poznaną metodą.

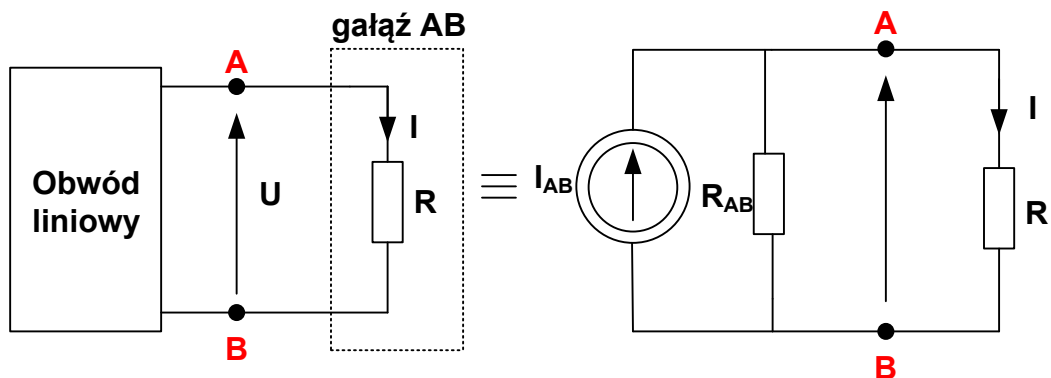
Zadanie 3: Obliczyć wartość prądu I_4 metodą Thèvenina. Dane: $E_1=50$ V, $E_2=25$ V, $R_1=10 \, \Omega$, $R_2=5 \, \Omega$, $R_3=7 \, \Omega$, $R_4=4 \, \Omega$, $R_5=6 \, \Omega$, $R_6=3 \, \Omega$, $R_7=4 \, \Omega$.



Rys.9. Analiza układu metodą Thèvenina

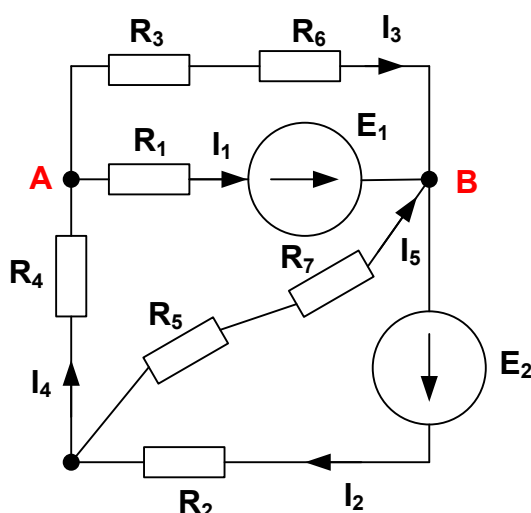
Odp: $U_{AB}=25\text{ V}$; $R_{AB}=3,75\ \Omega$; $I_4=3,23\text{ A}$.

Twierdzenie Nortona. Dowolny obwód elektryczny zastępujemy od strony wybranych zacisków AB równoważnym obwodem złożonym z równoległego połączenia idealnego źródła prądu oraz rezystancji zastępczej obwodu. Wartość zastępczego źródła prądu oblicza się na podstawie analizy oryginalnego obwodu jako prądu płynącego między zwartymi zaciskami AB – I_{AB} . Impedancja zastępcza (R_{AB}), to impedancja widziana z zacisków AB po zwarcu wszystkich źródeł napięcia i rozwarciu wszystkich źródeł prądu. Wartość prądu I oblicza się z prądowego prawa Kirchhoffa – Rys. 10.

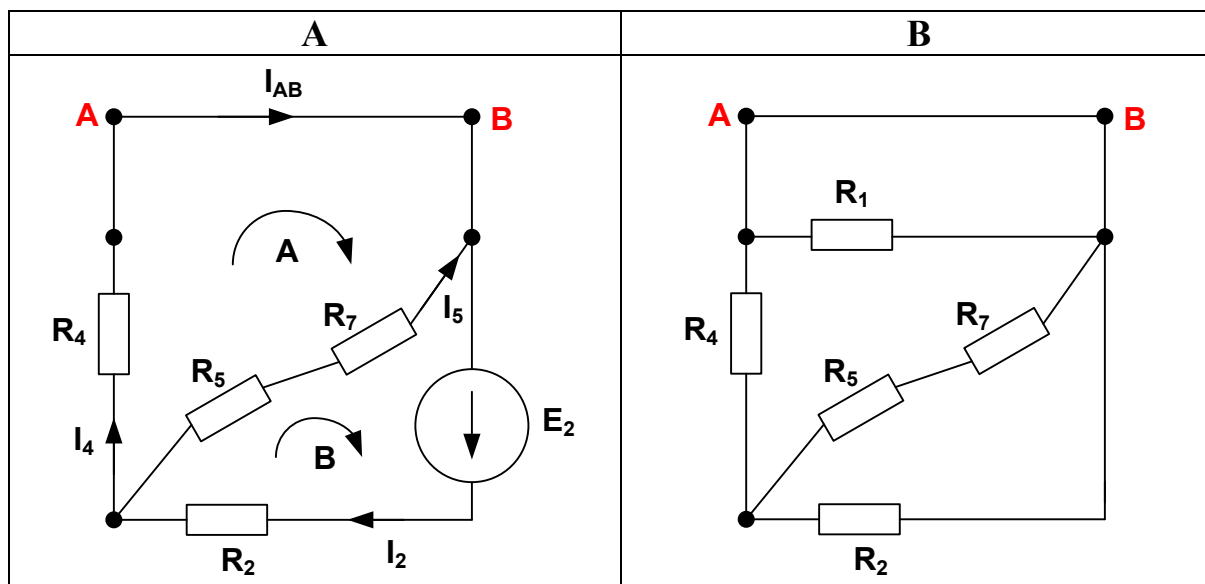


Rys.10. Transformacja obwodu – twierdzenie Nortona

Zadanie 4: Obliczyć wartość prądu I_3 metodą Nortona. Dane: $E_1=10\text{ V}$, $E_2=10\text{ V}$, $R_1=2\ \Omega$, $R_2=1\ \Omega$, $R_3=3\ \Omega$, $R_4=5\ \Omega$, $R_5=2\ \Omega$, $R_6=2\ \Omega$, $R_7=3\ \Omega$.



Rys.11. Analiza obwodu metodą Nortona



Rys.12. A) Wyznaczanie zastępczego źródła prądowego; B) Wyznaczanie rezystancji zastępczej

Zastępcze źródło prądu (I_{AB}). Zgodnie z metodą prądów oczkowych:

$$\begin{aligned} I_A \cdot (R_4 + R_5 + R_7) - I_B \cdot (R_5 + R_7) &= 0 \\ -I_A \cdot (R_5 + R_7) + I_B \cdot (R_5 + R_7 + R_2) &= E_2 \\ I_A \cdot 10 - I_B \cdot 5 &= 0 \\ -I_A \cdot 5 + I_B \cdot 6 &= 10 \end{aligned}$$

Stąd: $I_A = I_{AB} = 1,43 \text{ A}$.

Zastępcza rezystancja (widziana z zacisków AB) – kolejność postępowania.

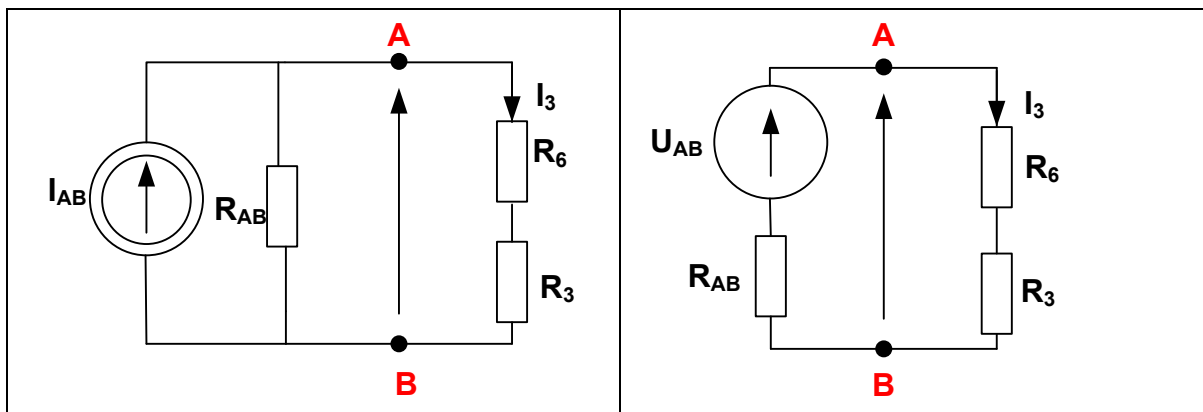
- a) R_5 i R_7 połączone szeregowo i do nich dołączona równolegle R_2 : $R_X = \frac{(R_5 + R_7) \cdot R_2}{R_5 + R_7 + R_2} = 0,83 \Omega$,

b) R_X i R_4 połączone szeregowo:

$$R_Y = R_X + R_4 = 5,83 \, \Omega,$$

c) R_Y i R_1 połączone równolegle:

$$R_{AB} = \frac{R_Y \cdot R_1}{R_Y + R_1} = 1,49 \, \Omega.$$



Rys.13. Transfiguracja obwodu elektrycznego

W celu ułatwienia obliczeń źródło prądowe zamieniamy na napięciowe i wyznaczamy wartość prądu I_3 płynącego przez obwód z napięciowego prawa Kirchhoffa.

$$U_{AB} = I_{AB} \cdot R_{AB} = 1,43 \cdot 1,49 = 2,13 \, V$$

$$U_{AB} = I_3 \cdot (R_3 + R_6 + R_{AB})$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3 + R_6 + R_{AB}} = 0,33 \, A$$

Odp: $I_3 = 0,33 \, A$.

2.6 Kolokwium 1

Kolokwium 1 będzie swoim zakresem obejmowało obliczenia w obwodach prądu i napięcia stałego w oparciu o poznane wcześniej metody (praw Kirchhoffa, superpozycji, prądów oczkowych, potencjałów węzłowych, Thèvenina, Nortona) i będzie trwało 90 minut. Na podstawie rozwiązań dwóch zadań (dwie metody wybrane przez prowadzącego) studenci otrzymają odpowiednio oceny z zakresu od 2,0 do 5,0. Jedno z zadań będzie rozwiązywane grupowo (wcześniejszy podział na grupy, na pierwszych zajęciach) w czasie 30 minut, zaś drugie – indywidualnie w czasie 60 minut. Ocena końcowa za kolokwium będzie średnią arytmetyczną obejmującą 30 % oceny grupowej i 70 % oceny indywidualnej.

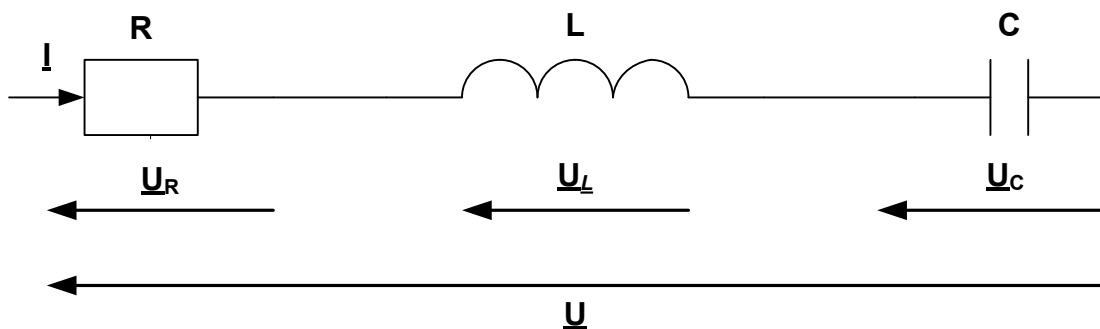
2.7 Prąd i napięcie sinusoidalnie zmienne. Wyznaczanie impedancji zastępczej

Zadania dotyczące zagadnień: przypomnienie i utrwalenie wiadomości dotyczących połączeń w obwodach elektrycznych, obliczanie impedancji zastępczej ($\underline{Z}_Z$), połączenie szeregowe, równoległe i mieszane elementów pasywnych, obliczanie admitancji zastępczej ($\underline{Y}_Z$) połączenia równoległego elementów pasywnych, wyznaczanie impedancji połączenia mieszanego i widzianego z wybranych zacisków obwodu elektrycznego.

Teoria:

Poszczególne elementy RLC mogą być połączone w obwodzie elektrycznym szeregowo, równoległe lub w sposób mieszany (identycznie jak w obwodach prądu i napięcia stałego).

Sposób szeregowy (Rys.1.) polega na połączeniu elementów jeden za drugim, gdzie koniec jednego jest jednocześnie początkiem drugiego elementu i może to przypominać wagony w pociągu. W rezultacie powyższego przez wszystkie elementy płynie ten sam prąd (brak miejsc rozplywu) - $\underline{I}$, a na każdym elemencie występuje oddzielny spadek napięcia - $\underline{U}_R$, $\underline{U}_L$, $\underline{U}_C$.



Rys.1. Połączenie szeregowe elementów RLC

Wzór ogólny obliczania impedancji zastępczej połączenia szeregowego przedstawia się następująco:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

gdzie: $\underline{Z}$ – impedancja, Ω ;
 X – reaktancja (opór bierny), Ω ;
 R – rezystancja (opór czynny), Ω ;
 X_L – reaktancja cewki, Ω ;
 X_C – reaktancja kondensatora, Ω .

W przypadku ćwiczeń laboratoryjnych najwygodniej analizę obwodu przeprowadzić na wartościach skutecznych zespolonych (metoda symboliczna). Jest to głównie związane ze wskazaniem mierników wykorzystywanych w trakcie realizacji ćwiczenia. Odczytujemy wartości w postaci skutecznej, które po uwzględnieniu kąta przesunięcia podstawiamy do zawartych w instrukcji wzorów.

Rozpoczynamy od zastąpienia przebiegów czasowych ich reprezentacją zespoloną (metoda symboliczna):

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow U = U_m \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t}$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow I = I_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t}$$

Zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys.1. możemy zapisać napięciowe prawo Kirchhoffa:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

Zastępując wartości czasowe przez ich reprezentację w postaci wektorów wirujących otrzymujemy:

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \\ U_m \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} &= \\ &= R \cdot I_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} + j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Dzieląc obydwie strony równania przez $e^{j\omega t}$ oraz $\sqrt{2}$ otrzymujemy postać napięciowego prawa Kirchhoffa w postaci skutecznej zespolonej:

$$U \cdot e^{j\varphi_u} = R \cdot I \cdot e^{j\varphi_i} + j\omega L \cdot I \cdot e^{j\varphi_i} + \frac{1}{j\omega C} \cdot I \cdot e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

stąd:

$$\underline{U} = R \cdot \underline{I} + jX_L \cdot \underline{I} + (-jX_C) \cdot \underline{I} = (R + jX_L - jX_C) \cdot \underline{I}$$

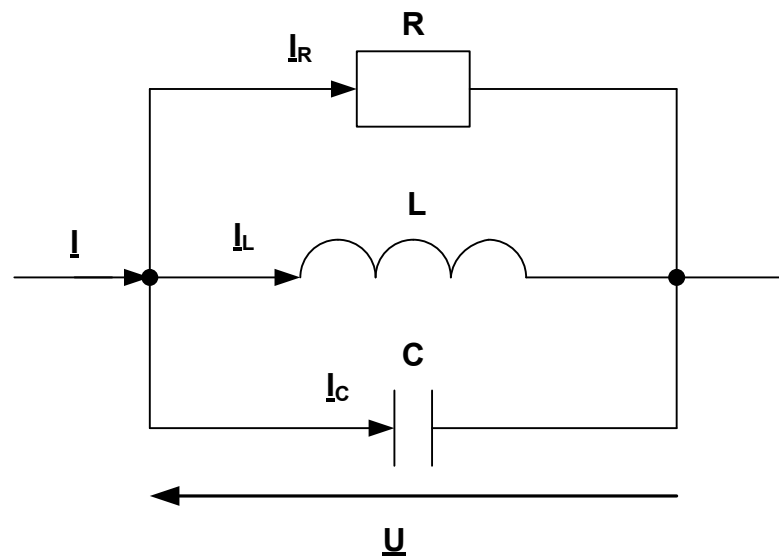
Po uwzględnieniu wzoru Eulera ($e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$) wzory na spadki napięć na poszczególnych elementach przedstawiają się następująco:

$\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}$ - prąd i napięcie są ze sobą w fazie (brak przesunięcia),

$\underline{U}_L = j\omega L \cdot \underline{I} = e^{j90^\circ} \cdot \omega L \cdot \underline{I}$ - napięcie na cewce wyprzedza prąd o kąt 90° ($e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \cdot \sin 90^\circ = j$),

$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = \frac{1}{e^{j90^\circ} \cdot \omega C} \cdot \underline{I} = e^{-j90^\circ} \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \underline{I}$ - napięcie na kondensatorze opóźnia się względem prądu o kąt 90° .

Konstruując wykres wektorowy należy pamiętać, że pomnożenie wektora przez operator j jest równoważne jego obrotowi o kąt 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (napięcie na cewce). Z kolei po pomnożeniu przez operator $-j$ wektor zostaje obrócony o kąt 90° zgodnie z ruchem wskazówek zegara (napięcie na kondensatorze). Pomnożenie przez liczbę rzeczywistą, jak to ma miejsce w przypadku napięcia na rezystorze, nie zmienia pozycji wektora napięcia w przestrzeni.



Rys.2. Połączenie równoległe elementów RLC

Sposób równoległy (Rys.2.) polega na zebraniu początków elementów w jeden punkt a końców w drugi. W takim przypadku przez każdy element płynie oddzielny prąd ($\underline{I}_R$, $\underline{I}_L$, $\underline{I}_C$) ale za to występuje ten sam spadek napięcia ($\underline{U}$).

W przypadku połączenia równoległego wzór na admitancję zastępczą wygląda jak poniżej:

$$\underline{Y} = G + jB = G + j(B_C - B_L) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

gdzie:

$\underline{Y}$ – admitancja, S;

$G = \frac{1}{R}$ – konduktancja, S;

$B = \frac{1}{X}$ – susceptancja, S;

B_C – susceptancja kondensatora, S;

B_L – susceptancja cewki, S.

Zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys.2. możemy zapisać prądowe prawo Kirchhoffa:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = \frac{u(t)}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int u(t) dt + C \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{U(t)}{R} + \frac{1}{L} \cdot \int U(t) dt + C \cdot \frac{dU(t)}{dt}$$

$$I_m \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} =$$

stąd:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} + (-jB_L) \cdot \underline{U} + jB_C \cdot \underline{U} = \left(\frac{1}{R} - jB_L + jB_C\right) \cdot \underline{U}$$

Po uwzględnieniu wzoru Eulera ($e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$) wzory na prądy płynące przez poszczególne elementy przedstawiają się następująco:

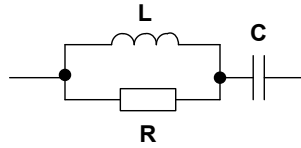
$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R} \cdot \text{ - prąd i napięcie są ze sobą w fazie (brak przesunięcia),}$$

$$\underline{I}_L = -j \frac{1}{\omega L} \cdot \underline{U} = e^{-j90^\circ} \cdot \frac{1}{\omega L} \cdot \underline{U} \text{ - prąd na cewce opóźnia się względem napięcia o kąt } 90^\circ (e^{-j90^\circ} = \cos(-90^\circ) + j \cdot \sin(-90^\circ) = -j),$$

$$\underline{I}_C = j\omega C \cdot \underline{U} = e^{j90^\circ} \cdot \omega C \cdot \underline{U} = e^{j90^\circ} \cdot \omega C \cdot \underline{U} \text{ - prąd na kondensatorze wyprzedza napięcie o kąt } 90^\circ.$$

Powyższe zależności dotyczące prądów i napięć na poszczególnych elementach są identyczne jak w przypadku połączenia szeregowego, konstrukcja wykresu wskazowego również.

Zadanie 1: Obliczyć impedancję zastępczą ($\underline{Z}_Z$) obwodu jak na Rys.3. Dane: $R=10 \Omega$, $X_L=15 \Omega$, $X_C=5 \Omega$.



Rys.3. Schemat połączenia elementów pasywnych

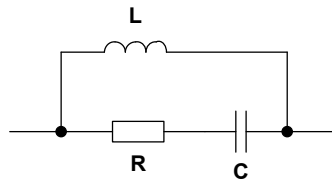
Mamy tutaj do czynienia z połączeniem równoległym rezystora R i cewki L. Do nich zaś szeregowo dołączony został kondensator C. Impedancja zastępcza $\underline{Z}$ tego połączenia przedstawia się następująco:

$$\underline{Z} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} - jX_C$$

Odp: $\underline{Z}_Z=6,92-j0,38 \Omega$.

Na Rys.4. mamy do czynienia z szeregowym połączeniem rezystora R i kondensatora C, do których równolegle została przyłączona cewka L. Impedancja zastępcza $\underline{Z}$ tego połączenia przedstawia się następująco:

$$\underline{Z} = \frac{(R - jX_C) \cdot jX_L}{R - jX_C + jX_L}$$



Rys.4. Schemat połączeń elementów pasywnych

Odp: $\underline{Z}_Z=11,25+j3,75 \Omega$.

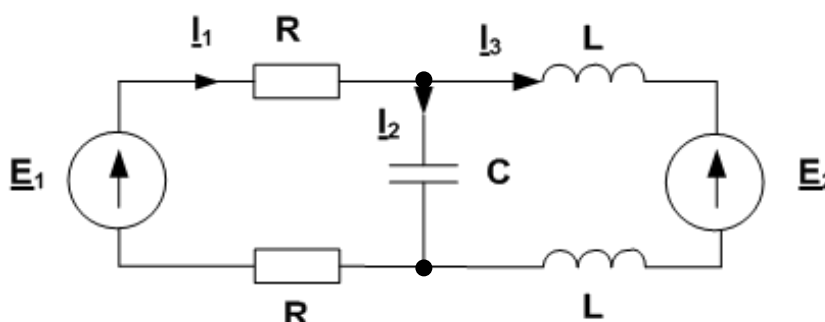
2.8 Metoda praw Kirchhoffa, metoda superpozycji.

Zadania dotyczące zagadnień: przypomnienie i utrwalanie wiadomości dotyczących prądowego i napięciowego prawa Kirchhoffa, obliczanie rozptywu prądów (zastosowanie prądowego prawa Kirchhoffa) w węzle i rozkładu napięć (zastosowanie napięciowego prawa Kirchhoffa) na elementach pasywnych i aktywnych w oczku prostych obwodów elektrycznych.

Teoria:

Prawo prądowe Kirchhoffa – suma prądów wpływających do węzła równa jest sumie prądów wypływających z węzła obwodu elektrycznego. Prawo napięciowe Kirchhoffa – suma napięć w oczku obwodu elektrycznego jest równa zero. Wszystkie obliczenia wykonujemy tylko i wyłącznie na postaciach czasowych (metoda klasyczna) lub postaciach zespolonych (metoda symboliczna).

Zadanie 1: Przystępując do rozwiązania obwodu z Rys.1. należy zaznaczyć spadki napięć na elementach pasywnych (rezystory, cewki, kondensatory) zwrócone przeciwnie do płynących prądów oraz zapisać I i II prawo Kirchhoffa. Dane: $\underline{E}_1 = (20 + j40)$ V, $\underline{E}_2 = 50$ V, $R = 20 \Omega$, $X_L = 15 \Omega$, $X_C = 5 \Omega$.



Rys.1. Schemat obwodu elektrycznego

Piszemy równania napięciowego prawa Kirchhoffa dla obydwu oczek:

$$\underline{U}_R + \underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{E}_1 \quad \underline{U}_C - \underline{U}_L - \underline{U}_L = \underline{E}_2$$

oraz prądowe prawo Kirchhoffa dla jednego z węzłów (górnego):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

Podsumowując otrzymujemy następujący układ równań:

$$2 \cdot \underline{I}_1 \cdot R + \underline{I}_2 \cdot (-jX_C) = \underline{E}_1 \quad ; \quad \underline{I}_2 \cdot (-jX_C) - 2 \cdot (\underline{I}_1 - \underline{I}_2) \cdot jX_L = \underline{E}_2$$

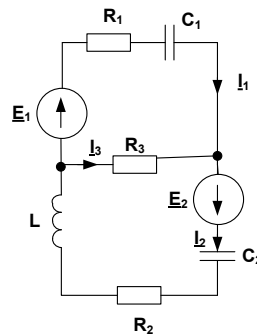
Podstawiając wartości elementów pasywnych i aktywnych otrzymujemy wartości prądów gałęziowych:

$$\underline{I}_1 = (0,59 + j1,09) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = (0,70 - j0,69) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = (-0,11 + j1,78) \text{ A}$$

Zadanie 2: Przystępując do rozwiązania obwodu z Rys.2. należy zaznaczyć spadki napięć na elementach pasywnych (rezystory, cewki, kondensatory) zwrócone przeciwnie do płynących prądów oraz zapisać prądowe i napięciowe prawo Kirchhoffa. Dane: $\underline{E}_1 = (25 + j50)$ V, $\underline{E}_2 = j30$ V, $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 15 \Omega$, $X_L = 15 \Omega$, $X_{C1} = 5 \Omega$, $X_{C2} = 10 \Omega$



Rys.2. Schemat układu elektrycznego

Piszemy równania napięciowego prawa Kirchhoffa dla obydwu oczek:

$$\underline{U}_{R1} + \underline{U}_{C1} - \underline{U}_{R3} = \underline{E}_1 \quad \underline{U}_{C2} + \underline{U}_{R2} + \underline{U}_L + \underline{U}_{R3} = \underline{E}_2$$

oraz prądowe prawo Kirchhoffa dla jednego z węzłów (górnego):

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 + \underline{I}_3$$

Podsumowując otrzymujemy następujący układ równań:

$$\underline{I}_1 \cdot (R_1 - jX_{C1}) - \underline{I}_3 \cdot R_3 = \underline{E}_1 \quad ; \quad (\underline{I}_1 + \underline{I}_3) \cdot (-jX_{C2} + R_2 + jX_L) + \underline{I}_3 \cdot R_3 = \underline{E}_2$$

Podstawiając wartości elementów pasywnych i aktywnych otrzymujemy wartości prądów gałęziowych:

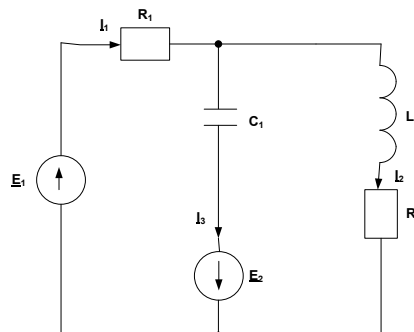
$$\underline{I}_1 = (0,75 + j2,65) \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = (0,97 + j2,60) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = (0,22 - j0,05) \text{ A}$$

Zadanie 3: Obliczyć rozpyły prądów w obwodzie jak na Rys.3. wykorzystując poznaną wcześniej metodę superpozycji. Dane: $\underline{E}_1 = j50 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = (100 + j100) \text{ V}$, $R_1 = 25 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $X_{L1} = 20 \Omega$, $X_{C1} = 10 \Omega$.

W tym miejscu zostanie zaprezentowany sposób analizy przykładowego obwodu elektrycznego metodą superpozycji.



Rys.3. Schemat obwodu elektrycznego

Zgodnie z informacjami zawartymi we wstępie układ pierwotny (Rys.3.) rozbijamy na dwa pod-układy i w każdym z nich dokonujemy obliczeń wartości

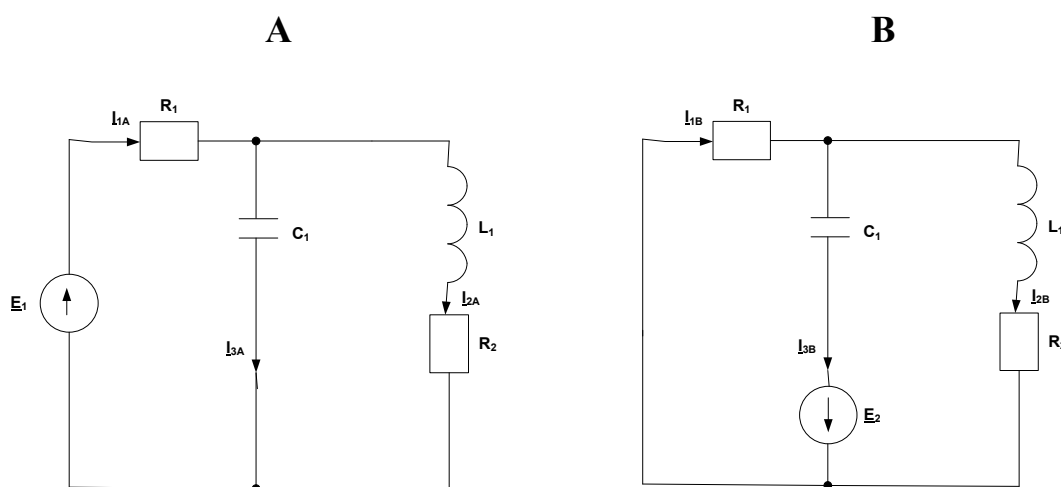
prądów – $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$, odpowiednio z oznaczeniami A i B. Jeżeli w każdym podukładzie prądy mają taki sam zwrot jak w układzie pierwotnym, wówczas spełnione powinny być zależności:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1A} + \underline{I}_{1B},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{2A} + \underline{I}_{2B},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{3A} + \underline{I}_{3B}.$$

Obliczenia w obydwu podukładach (A i B) wykonujemy dowolnie poznaną metodą – Rys.4.



Rys.4. Rozbicie układu pierwotnego na pod-układy do sprawdzenia zasady superpozycji

2.9 Dopasowanie odbiornika do źródła na maksymalną moc prądu sinusoidalnie zmiennego

Zadania dotyczące zagadnień: przypomnienie oraz utrwalenie wiadomości dotyczących mocy wydzielających się w obwodzie elektrycznym prądu i napięcia zmiennego, wyznaczanie impedancji wejściowej obwodu i przyrównywanie jej do impedancji źródła celem dopasowania na maksymalną moc.

Teoria:

Główną zasadą dopasowania na maksymalną moc (Maximum Power Transfer Theorem) jest uzyskanie największej mocy jaka jest przekazywana ze źródła do obciążenia. Wówczas to impedancja obciążenia ($\underline{Z}_{obc}$) musi być sprzężeniem zespolonym impedancji źródła ($\underline{Z}_{\dot{z}r}$). Moduł impedancji źródła musi być

równy modułowi impedancji obciążenia. Kąt fazowy impedancji źródła musi być przeciwieństwem kąta fazowego impedancji obciążenia. Po spełnieniu tych warunków, większość mocy przekazanej ze źródła będzie mocą czynną i w rezultacie otrzymamy maksymalną, efektywną pracę odbiornika.

$$\underline{Z}_{\dot{z}r} = R_{\dot{z}r} + jX_{\dot{z}r} = Z_{\dot{z}r} \cdot e^{j\varphi} = Z \cdot e^{j\varphi}$$
$$\underline{Z}_{obc} = R_{obc} - jX_{obc} = Z_{obc} \cdot e^{-j\varphi} = Z \cdot e^{-j\varphi}$$

Rodzaje mocy wydzielających się w obwodach prądu i napięcia zmiennego:

- Moc czynna (P) związana z elementem obwodu jakim jest rezystor (R) i jej jednostką jest wat, W. Można jej wartość wyliczyć ze wzoru:
- Moc bierna (Q) związana jest z elementami pasywnymi jakimi są cewki i kondensatory (C, L) i jej jednostką jest VAR. Na kondensatorach wydzielająca się moc ma znak minus, zaś na cewkach plus. Można jej wartość wyliczyć ze wzoru:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \text{ var}$$

Obydwie moce można wyznaczyć ze wzoru na moc pozorną zespoloną ($\underline{S}$) zgodnie ze wzorem:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$$

Wówczas część czynna będzie mocą czynną, zaś część urojona mocą bierną (znak uzależniony jest od rodzaju obciążenia).

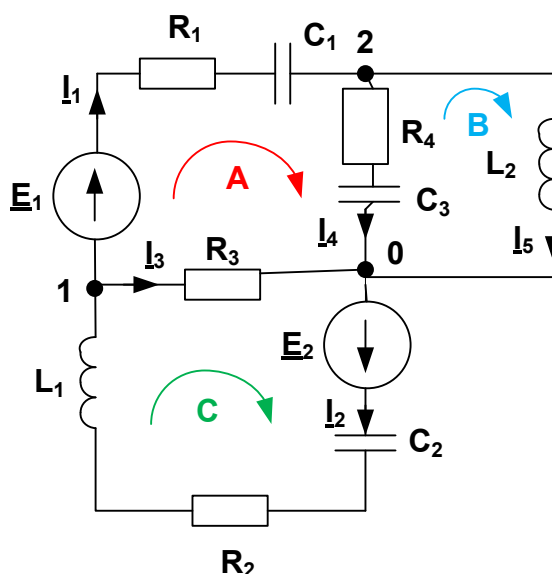
2.10 Metoda prądów oczkowych

Zadania dotyczące zagadnień: przypomnienie i utrwalenie zagadnień związanych z metodą potencjałów węzłowych, wyznaczanie wartości prądów, napięć i mocy w obwodach elektrycznych prądu i napięcia zmiennego.

Teoria:

Wszystkie obliczenia wykonujemy w taki sam sposób jak w przypadku obwodów prądu i napięcia stałego. Posługujemy się jednak liczbami zespolonymi (impedancje, admitancje).

Zadanie 1: Obliczyć rozływ prądów w obwodzie z Rys.1. metodą prądów oczkowych. Dane: $\underline{E}_1=j25 \text{ V}$, $\underline{E}_2=(20-j15) \text{ V}$, $R_1=5 \Omega$, $R_2=4 \Omega$, $R_3=2 \Omega$, $R_4=1 \Omega$, $X_{C1}=5 \Omega$, $X_{C2}=2 \Omega$, $X_{C3}=1 \Omega$, $X_{L1}=2 \Omega$, $X_{L2}=5 \Omega$.



Rys.1. Analiza obwodu metodą prądów oczkowych – schemat obwodu elektrycznego

$$\begin{aligned} \underline{I}_A \cdot (R_1 + R_3 + R_4 - jX_{C1} - jX_{C3}) - \underline{I}_B \cdot (R_4 - jX_{C3}) - \underline{I}_C \cdot R_3 &= \underline{E}_1 \\ -\underline{I}_A \cdot (R_4 - jX_{C3}) + \underline{I}_B \cdot (R_4 - jX_{C3} + jX_{L2}) &= 0 \\ -\underline{I}_A \cdot R_3 + \underline{I}_C \cdot (R_3 + R_2 - jX_{C2} + jX_{L1}) &= \underline{E}_2 \end{aligned}$$

Po podstawieniu danych wartości otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A \cdot (8 - j6) - \underline{I}_B \cdot (1 - j1) - \underline{I}_C \cdot 2 &= j25 \\ -\underline{I}_A \cdot (1 - j1) + \underline{I}_B \cdot (1 + j4) &= 0 \\ -\underline{I}_A \cdot 2 + \underline{I}_C \cdot 6 &= 20 - j15 \end{aligned}$$

Na tej podstawie otrzymujemy wartości prądów oczkowych:

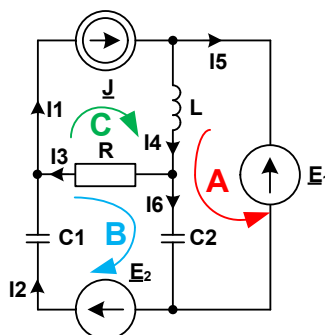
$$\underline{I}_A = (-0,687 + j2,045) \text{ A}; \underline{I}_B = (0,723 - j0,159) \text{ A}; \underline{I}_C = (3,104 - j1,818) \text{ A}.$$

Stąd wartości prądów gałęziowych przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_A = (-0,687 + j2,045) \text{ A}; \underline{I}_2 = \underline{I}_C = (3,104 - j1,818) \text{ A}; \underline{I}_3 = \underline{I}_C - \underline{I}_A = (3,791 - j3,863) \text{ A}; \\ \underline{I}_4 &= \underline{I}_A - \underline{I}_B = (-1,410 + j2,204) \text{ A}; \underline{I}_5 = \underline{I}_B = (0,723 - j0,159) \text{ A}. \end{aligned}$$

Zadanie 2: Obliczyć rozpływ prądów jak na Rys.2. metodą prądów oczkowych.

Dane: $\underline{J} = 2 \text{ A}$, $\underline{E}_1 = j15 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = (5 + j20) \text{ V}$, $R = 5 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$, $X_{C1} = 4 \Omega$, $X_{C2} = 2 \Omega$.



Rys.2. Analiza obwodu metodą prądów oczkowych – schemat obwodu elektrycznego

W przypadku analizowanego obwodu mamy do czynienia ze źródłem prądowym. Jeżeli występuje ono dodatkowo w zewnętrznej gałęzi oczka, to możemy uznać że prąd oczkowy jest równy dodatniej lub ujemnej wartości źródła prądowego (w zależności od zastrzałkowania prądu oczkowego). Upraszcza to w pewien sposób rozwiązanie tego zadania ponieważ mamy do ułożenia tylko dwa równania dla oczka A i B ($I_C = J$).

Równania przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A \cdot (jX_L - jX_{C2}) + \underline{I}_B \cdot (-jX_{C2}) + \underline{I}_C \cdot jX_L &= \underline{E}_1 \\ \underline{I}_A \cdot (-jX_{C2}) + \underline{I}_B \cdot (R - jX_{C1} - jX_{C2}) - \underline{I}_C \cdot R &= \underline{E}_2 \\ \underline{I}_C &= \underline{J} \end{aligned}$$

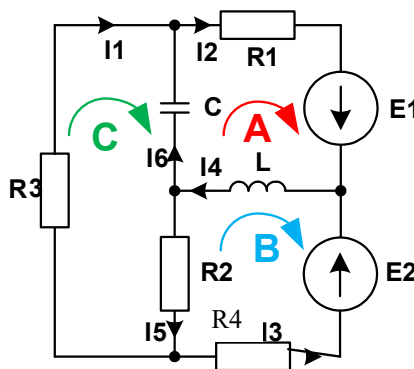
Na podstawie powyższego układu równań otrzymujemy następujące prądy oczkowe:

$$\underline{I}_A = (-0,799 + j0,711) \text{ A}; \quad \underline{I}_B = (-0,697 + j2,844) \text{ A}; \quad \underline{I}_C = 2 \text{ A}.$$

Wartości prądów gałęziowych przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 = \underline{J} &= 2 \text{ A}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_B = (-0,697 + j2,844) \text{ A}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_C - \underline{I}_B = (2,697 - j,844) \text{ A}; \\ \underline{I}_4 = \underline{I}_A + \underline{I}_C &= (1,201 + j0,711) \text{ A}; \quad \underline{I}_5 = -\underline{I}_A = (0,799 - j0,711) \text{ A}; \\ \underline{I}_6 = \underline{I}_A + \underline{I}_B &= (-1,496 + j3,555) \text{ A}. \end{aligned}$$

Zadanie 3: Obliczyć rozpływ prądów jak na Rys.3. metodą prądów oczkowych.
Dane: $\underline{E}_1 = 100 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = j75 \text{ V}$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 25 \Omega$, $R_4 = 5 \Omega$, $X_L = 10 \Omega$, $X_C = 4 \Omega$.



Rys.3. Analiza obwodu metodą prądów oczkowych - schemat

Równania dla poszczególnych oczek:

$$\begin{aligned} \underline{I}_A \cdot (R_1 + jX_L - jX_C) - \underline{I}_B \cdot jX_L - \underline{I}_C \cdot (-jX_C) &= \underline{E}_1 \\ -\underline{I}_A \cdot jX_L + \underline{I}_B \cdot (R_2 + R_4 + jX_L) - \underline{I}_C \cdot R_2 &= -\underline{E}_2 \\ -\underline{I}_A \cdot (-jX_C) - \underline{I}_B \cdot R_2 + \underline{I}_C \cdot (R_2 + R_3 - jX_C) &= 0 \end{aligned}$$

Wartości prądów gałęziowych:

$\underline{I}_1 = \underline{I}_C = (0,710 - j0,856) \text{ A}$; $\underline{I}_2 = \underline{I}_A = (8,388 - j3,824) \text{ A}$; $\underline{I}_3 = -\underline{I}_B = (-1,358 + j1,176) \text{ A}$; $\underline{I}_4 = \underline{I}_A - \underline{I}_B = (7,030 - j2,648) \text{ A}$; $\underline{I}_5 = \underline{I}_C - \underline{I}_B = (-0,648 + j0,320) \text{ A}$; $\underline{I}_6 = \underline{I}_A - \underline{I}_C = (7,678 - j2,968) \text{ A}$.

2.11 Metoda potencjałów węzłowych

Zadania dotyczące zagadnień: przypomnienie i utrwalenie zagadnień związanych z metodą potencjałów węzłowych, wyznaczanie wartości prądów, napięć i mocy w obwodach elektrycznych prądu i napięcia zmiennego.

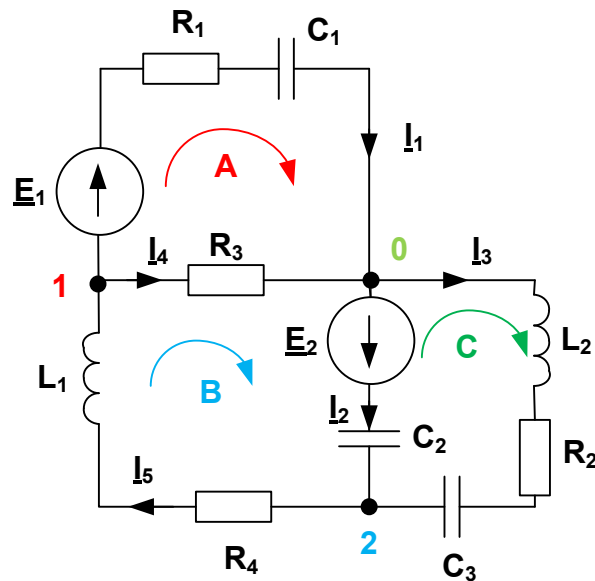
Teoria:

Wszystkie obliczenia wykonujemy w taki sam sposób jak w przypadku obwodów prądu i napięcia stałego. Posługujemy się jednak liczbami zespolonymi (impedancje, admitancje).

Zadanie 1: W obwodzie jak na Rys.1. wyznaczyć rozływ prądów metodą potencjałów węzłowych. Dane: $\underline{E}_1 = 50 \text{ V}$, $\underline{E}_2 = -j100 \text{ V}$, $R_1 = 5 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, $X_{L1} = 4 \Omega$, $X_{L2} = 10 \Omega$, $X_{C1} = 5 \Omega$, $X_{C2} = 10 \Omega$, $X_{C3} = 20 \Omega$.

W układzie na Rys.1. mamy zaznaczone trzy węzły (0, 1, 2). Zgodnie z teorią przedstawioną wcześniej poszukujemy w obwodzie idealnego źródła napięcia (bez impedancji w gałęzi ze źródłem). Jeżeli takiego brak, to wówczas możemy uziemić dowolny węzeł. Jednak proponuję uziemić węzeł, do którego dochodzi największa liczba gałęzi. Ma to związek z uproszczeniem struktury samych równań i prostszym rozwiązaniem. Na poniższym Rys.1. uziemiamy węzeł 0, do którego dołączonych jest najwięcej gałęzi (4). W poniższych równaniach uwzględniony został iloczyn potencjału węzła 0 i odpowiedniej admitancji, jednak można to pominąć z uwagi na zerową wartość potencjału węzła 0. Stąd też równania przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \underline{V}_0 &= 0 \\ -\underline{V}_0 \cdot \left(\frac{1}{R_1 - jX_{C1}} + \frac{1}{R_3} \right) + \underline{V}_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1 - jX_{C1}} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + jX_{L1}} \right) - \underline{V}_2 \cdot \frac{1}{R_4 + jX_{L1}} &= \frac{-\underline{E}_1}{R_1 - jX_{C1}} \\ -\underline{V}_0 \cdot \left(\frac{1}{-jX_{C2}} + \frac{1}{R_2 - jX_{C3} + jX_{L2}} \right) - \underline{V}_1 \cdot \frac{1}{R_4 + jX_{L1}} + \underline{V}_2 \cdot \left(\frac{1}{-jX_{C2}} + \frac{1}{R_2 - jX_{C3} + jX_{L2}} + \frac{1}{R_4 + jX_{L1}} \right) &= \frac{\underline{E}_2}{-jX_{C2}} \end{aligned}$$



Rys.1. Schemat obwodu elektrycznego – analiza metodą potencjałów węzłowych

Wartości potencjałów poszczególnych węzłów:

$$\underline{V}_1 = (-14,667 - j36,000) \text{ V}; \quad \underline{V}_2 = (18,400 - j17,867) \text{ V}.$$

Wzory na wyznaczenie wartości prądów gałęziowych:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_0 + \underline{E}_1}{R_1 - jX_{C1}} = (7,133 - j0,067) \text{ A}$$

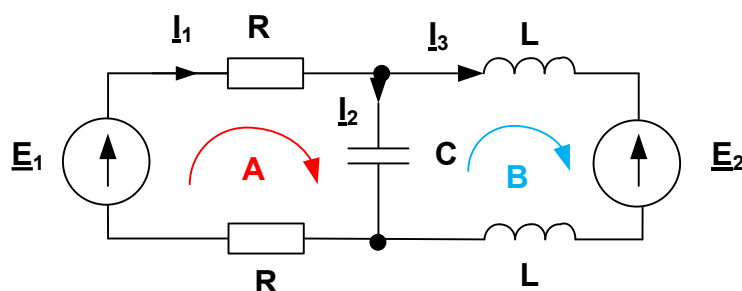
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_0 - \underline{V}_2 + \underline{E}_2}{-jX_{C2}} = (8,213 - j1,840) \text{ A}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_0 - \underline{V}_2}{R_2 - jX_{C3} + jX_{L2}} = (-1,813 - j0,027) \text{ A}$$

$$\underline{I}_4 = \frac{\underline{V}_1 - \underline{V}_0}{R_3} = (-0,733 - j1,800) \text{ A}$$

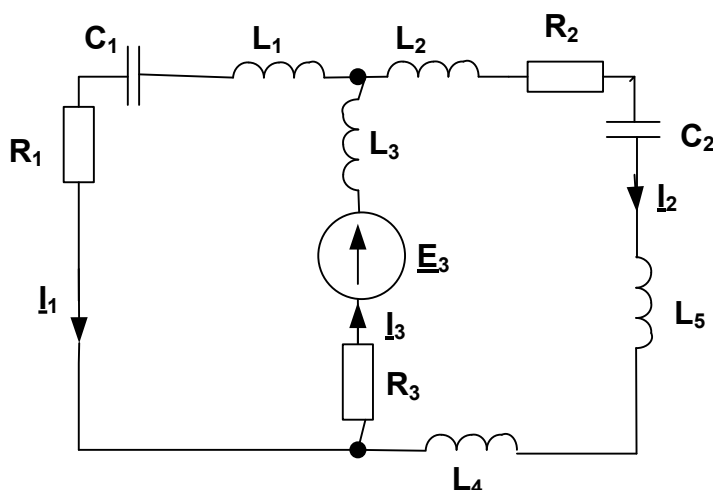
$$\underline{I}_5 = \frac{\underline{V}_2 - \underline{V}_1}{R_4 + jX_{L1}} = (6,400 - j1,867) \text{ A}$$

Zadanie 2: W obwodzie jak na Rys.2. wyznaczyć wartości prądów metodą potencjałów węzłowych. Dane: $\underline{E}_1 = (100 + j50) \text{ V}$, $\underline{E}_2 = j50 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $X_L = 20 \Omega$, $X_C = 10 \Omega$



Rys.2. Schemat obwodu elektrycznego – analiza metodą potencjałów węzłowych

Zadanie 3: W obwodzie jak na Rys.3. wyznaczyć rozpyły prądów metodą potencjałów węzłowych. Dane: $\underline{E}_3 = (150 - j75) \text{ V}$, $R_1 = X_{C2} = 15 \text{ } \Omega$, $X_{C1} = X_{L5} = 5 \text{ } \Omega$, $R_2 = X_{L1} = X_{L2} = 20 \text{ } \Omega$, $R_3 = X_{L4} = 25 \text{ } \Omega$, $X_{L3} = 10 \text{ } \Omega$.



Rys.3. Analiza obwodu metodą potencjałów węzłowych

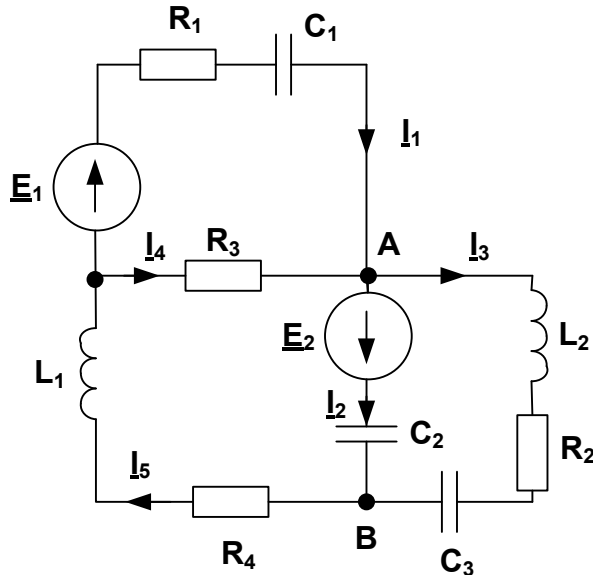
2.12 Twierdzenie/metoda Thèvenina i Nortona

Zadania dotyczące zagadnień: przypomnienie i utrwalenie zagadnień związanych z twierdzeniem/metodą Thèvenina i Nortona, wyznaczanie wartości wybranych prądów, napięć i mocy w obwodach elektrycznych prądu i napięcia zmiennego.

Teoria:

Obowiązują identyczne zasady analizy w/w metodami jak w obwodach prądu i napięcia stałego. Różnica polega jedynie na tym, że wszystkie obliczenia wykonujemy na liczbach zespolonych.

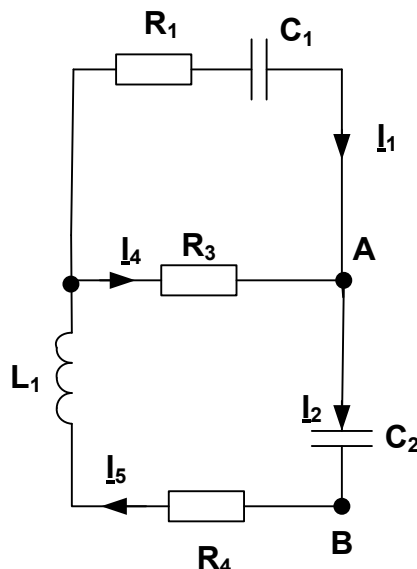
Zadanie 1: Wyznaczyć wartość prądu I_3 metodą Thèvenina w obwodzie z Rys.1.
Dane: $\underline{E}_1=(25+j50)$ V, $\underline{E}_2=j40$ V, $R_1=5\Omega$, $R_2=3\Omega$, $R_3=4\Omega$, $R_4=2\Omega$, $X_{L1}=2\Omega$, $X_{L2}=4\Omega$, $X_{C1}=2\Omega$, $X_{C2}=1\Omega$, $X_{C3}=1\Omega$.



Rys.1. Schemat obwodu elektrycznego

W miejscu gałęzi z szukanym prądem robimy stan jałowy a na jej końcach zaznaczamy punkty A i B. Chcąc rozwiązać zadanie tą metodą musimy zrealizować dwa etapy:

1. Obliczenie impedancji $\underline{Z}$ widzianej z zacisków AB ($\underline{Z}_{AB}$) kiedy układ znajduje się w stanie nieaktywnym (źródła napięciowe zwieramy, prądowe rozwieramy)-dla obwodu z Rys.2. według wzoru poniżej:



Rys.2. Schemat do obliczania impedancji $\underline{Z}_{AB}$

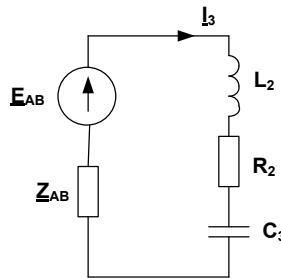
$$\underline{Z}_X = \frac{(R_1 - jX_{C1}) \cdot R_3}{R_3 + R_1 - jX_{C1}}$$
$$\underline{Z}_{AB} = \frac{(\underline{Z}_X + R_4 + jX_{L1}) \cdot (-jX_{C2})}{\underline{Z}_X + R_4 + jX_{L1} - jX_{C2}} = (0,23 - j1,03) \Omega$$

Obliczenie napięcia pomiędzy punktami AB ($\underline{E}_{AB}$) kiedy układ znajduje się w stanie aktywnym)-dla obwodu z Rys.13. według wzoru poniżej:

$$\underline{E}_{AB} = -E_2 + \underline{I}_2 \cdot (-jX_{C2}) = (14,26 - j43,43) V$$

Po „wycięciu“ gałęzi z prądem $\underline{I}_3$ mamy do czynienia w układzie z dwoma oczkami i szukany prąd $\underline{I}_2$ (wzór powyżej) możemy wyznaczyć na podstawie metody prądów oczkowych. Jego wartość wynosi $(3,43 + j14,26) A$. Wówczas obliczamy wartość napięcia $\underline{E}_{AB} = (14,26 - j43,43) V$.

Na tej podstawie tworzymy jednooczkowy układ złożony z rzeczywistego źródła napięciowego ($\underline{E}_{AB}$) wraz z jego rezystancją wewnętrzną ($\underline{Z}_{AB}$) i odłączonej gałęzi z szukanym prądem $\underline{I}_3$ – Rys.3.



Rys.3. Schemat do wyznaczania wartości szukanego prądu (transfiguracja obwodu)

Wartość prądu obliczamy zgodnie z e wzorem:

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{E}_{AB}}{\underline{Z}_{AB} + R_2 + jX_{L2} - jX_{C3}} = (-2,76 - j11,76) A.$$

2.13 Kompensacja mocy biernej

Zadania dotyczące zagadnień: utrwalenie wiadomości z wykładu, na tych zajęciach studenci będą podejmować próby kompensacji mocy biernej w oparciu o realne rozliczenia za energię elektryczną, każdy student (informację otrzymają odpowiednio wcześniej) będzie miał za zadanie dostarczyć rachunek za energię elektryczną i w oparciu o niego dokona własnych obliczeń, na zakończenie zajęć



odbędzie się prezentacja otrzymanych wyników (ćwiczenia będą miały formę mikro-projektu).

2.14 Kolokwium 2

Kolokwium 2 będzie swoim zakresem obejmowało obliczenia w obwodach prądu i napięcia zmiennego w oparciu o poznane wcześniej metody (praw Kirchhoffa, superpozycji, prądów oczkowych, potencjałów węzłowych, Thèvenina, Nortona) i będzie trwało 90 minut. Na podstawie rozwiązań dwóch zadań (dwie metody wybrane przez prowadzącego) studenci otrzymają odpowiednio oceny z zakresu od 2,0 do 5,0. Jedno z zadań będzie rozwiązywane grupowo (wcześniejszy podział na grupy, na pierwszych zajęciach) w czasie 30 minut, zaś drugie – indywidualnie w czasie 60 minut. Ocena końcowa za kolokwium będzie średnią arytmetyczną obejmującą 30 % oceny grupowej i 70 % oceny indywidualnej.

3 Literatura

Materiały elektroniczne

- [1] Moebs W., Ling S. J., Sanny J. i in., *Fizyka dla szkół wyższych Tom 2*, ISBN-13: 978-83-948838-2-9, 2020,
<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-2/pages/10-3-prawa-kirchhoffa>
- [2] FORBOT, *Dzielnik napięcia - co trzeba wiedzieć? Kiedy go NIE używać? Kurs elektroniki od FORBOT [#8]*, 2021,
[youtube.com/watch?v=t8oVIbg-lRA](https://www.youtube.com/watch?v=t8oVIbg-lRA)
- [3] Saeed K., Parfieniuk M., *Podstawy elektrotechniki i elektroniki dla studentów informatyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, 2018,
pb.edu.pl/oficyna-wydawnicza/wp-content/uploads/sites/4/2020/11/Podstawy-elektrotechniki-i-elektroniki-dla-studentow-informatyki.pdf

Podręczniki

- [4] Bolkowski S., *Teoria obwodów elektrycznych*, WNT, Warszawa, 2022.
- [5] Osiowski J., Szabatin J., *Podstawy teorii obwodów Tom 1*, WNT, Warszawa, 2023