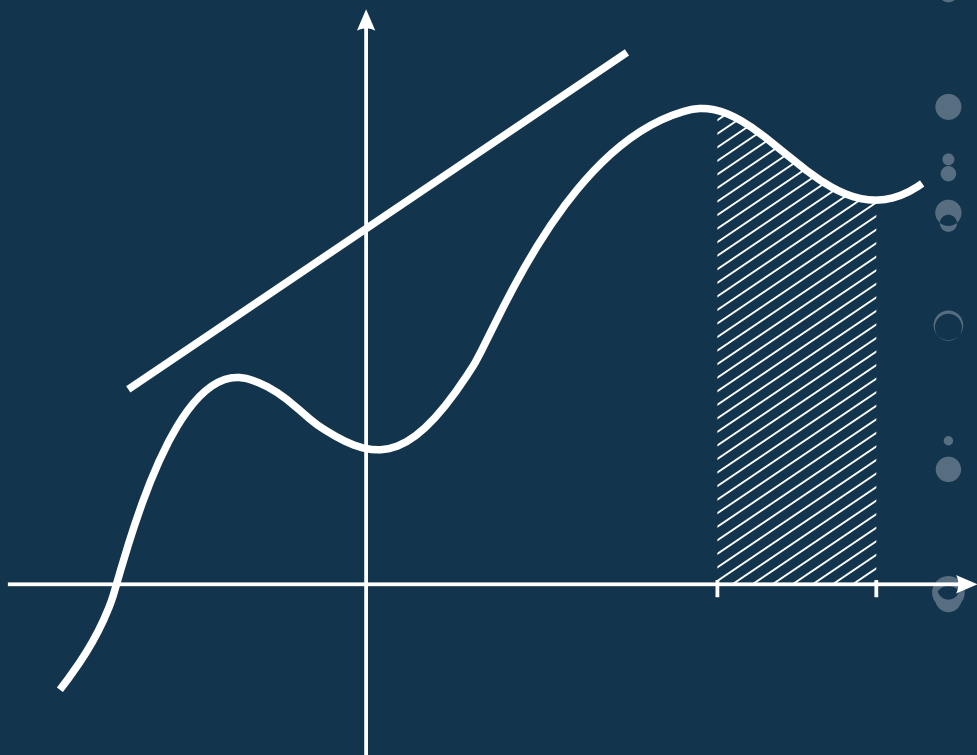


MATEMATYKA

Wybrane zagadnienia rachunku różniczkowego i całkowego

SKRYPT DLA STUDENTÓW KIERUNKÓW INŻYNIERSKICH

Elżbieta Gołąbeska



Elżbieta Gołąbeska

MATEMATYKA

Wybrane zagadnienia
rachunku różniczkowego i całkowego

Skrypt dla studentów kierunków inżynierskich



Politechnika
Białostocka

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ

BIAŁYSTOK 2026

Recenzent:
dr Arkadiusz Niedźwiecki

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Korekta językowa:
Katarzyna Duniewska

Skład:
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej

Okładka:
Marcin Dominów

Wszystkie rysunki w publikacji są autorskie.

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2026

ISBN 978-83-68673-27-2 (eBook)
DOI: 10.24427/978-83-68673-27-2



Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.
Publikacja jest dostępna w internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
www.pb.edu.pl

Spis treści

Słowo wstępne.....	4
1. Całka nieoznaczona	6
1.1. Pojęcie całki nieoznaczonej.....	6
1.2. Całki nieoznaczone funkcji elementarnych.....	9
1.3. Całkowanie przez części.....	11
1.4. Całkowanie przez podstawianie	20
2. Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej	30
2.1. Pojęcie całki oznaczonej i jej interpretacja geometryczna	30
2.2. Pole trapezu krzywoliniowego	41
2.3. Pole obszaru zawartego między dwiema krzywymi.....	48
2.4. Długość łuku krzywej.....	57
2.5. Objętość bryły obrotowej	64
2.6. Pole powierzchni bryły obrotowej.....	68
3. Pochodne funkcji dwóch zmiennych	74
3.1. Pojęcie funkcji dwóch zmiennych.....	74
3.2. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych	76
3.3. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych	87
3.4. Pochodne cząstkowe mieszane funkcji dwóch zmiennych	92
3.5. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.....	97
4. Rachunek całkowy funkcji dwóch zmiennych	110
4.1. Pojęcie całki podwójnej.....	110
4.2. Całka z funkcji dwóch zmiennych przy stałych granicach całkowania ...	120
4.3. Całka z funkcji dwóch zmiennych po prostokącie	126
4.4. Całka z funkcji dwóch zmiennych po obszarze normalnym	131
5. Równania różniczkowe zwyczajne.....	138
5.1. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego	138
5.2. Rozwiązanie równania różniczkowego	140
5.3. Rozwiązanie ogólne i rozwiązanie szczególne równania różniczkowego.....	142
5.4. Równania o zmiennych rozdzielonych.....	160
5.5. Równania liniowe jednorodne i niejednorodne	170
5.6. Równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu.....	180
Literatura	188
Spis rysunków	189

Słowo wstępne

Niniejsza książka jest skryptem przeznaczonym dla studentów kierunków inżynierskich, na których matematyka stanowi podstawę dalszych zastosowań w zagadnieniach technicznych. Opracowanie to stanowi kontynuację dwóch wcześniejszych publikacji: *Matematyka – wybrane zagadnienia algebry liniowej i geometrii analitycznej* oraz *Matematyka – wybrane zagadnienia analizy matematycznej*. Zakres tematyczny jest dostosowany do obowiązujących programów nauczania i realizacji założonych efektów uczenia się przedmiotu matematyka 2.

Założeniem autorki było przedstawienie podstawowych zagadnień aparatu matematycznego w sposób jak najbardziej przystępny i zrozumiały. Układ treści opiera się na rozwiązanych przykładach wzbogaconych komentarzami, które ułatwią studentowi przyswojenie niezbędnej wiedzy oraz nabycie wymaganych umiejętności. Niniejsza książka składa się z pięciu rozdziałów.

Rozdział pierwszy poświęcony jest całce nieoznaczonej. Czytelnik znajdzie tu treści, które pozwolą: zdefiniować całkę nieoznaczoną jako rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych $F(x)$ danej funkcji $f(x)$ określonej na danym przedziale, które po zróżniczkowaniu dadzą funkcję podcałkową, obliczać całkę nieoznaczoną z funkcji elementarnej z wykorzystaniem podstawowych wzorów i własności rachunku całkowego, obliczać całkę nieoznaczoną metodą całkowania przez części, a także obliczać całkę nieoznaczoną przez podstawianie.

Drugi rozdział dotyczy całki oznaczonej. Po zdefiniowaniu pojęcia całki oznaczonej skupiono się na jej obliczaniu w podanych granicach całkowania. Zaprezentowane przykłady zostały uszeregowane według stopnia trudności od najprostszycych, gdzie funkcje podcałkowe są elementarne i nie wymagają zastosowania metod całkowania przez części czy całkowania przez podstawianie, aż po przykłady, w których pod całką znajdują się iloczyn bądź iloraz funkcji albo funkcja złożona. W dalszej części tego rozdziału zaprezentowano możliwości zastosowania rachunku całkowego do obliczania pola obszaru ograniczonego krzywą wielomianową i osią OX , obliczania pola trapezu krzywoliniowego, obliczania długości łuku krzywej oraz obliczania objętości bryły obrotowej i pola jej powierzchni.

W rozdziale trzecim omówiono wybrane treści dotyczące pochodnej funkcji dwóch zmiennych. Na początku podano definicję funkcji dwóch zmiennych i skupiono się na określaniu dziedziny takiej funkcji. Podano także definicję pochodnej cząstkowej pierwszego i drugiego rzędu oraz pochodnych cząstkowych mieszanych funkcji dwóch zmiennych oraz zaprezentowano przykłady ich

obliczania. W dalszej części tego rozdziału zastosowano rachunek pochodnych funkcji dwóch zmiennych do wyznaczania ich ekstremów lokalnych.

Czwarty rozdział skupia się na rachunku całkowym funkcji dwóch zmiennych. Po zdefiniowaniu całki podwójnej, całki po obszarze normalnym, całki iterowanej oraz prezentacji sposobu zamiany całki po obszarze na całkę iterowaną skupiono się na obliczaniu całki iterowanej oraz całki podwójnej przy stałych granicach całkowania. W tej części opracowania wskazano również przykłady obliczania całki po obszarze (w tym po prostokącie) przy zamianie na całkę iterowaną.

Ostatni, piąty rozdział, to najbardziej obszerna część skryptu, poświęcona równaniom różniczkowym zwyczajnym. Zdefiniowanie pojęcia równania różniczkowego zwyczajnego stanowi wprowadzenie do wyznaczania rozwiązania ogólnego równania różniczkowego. Z kolei wyznaczenie rozwiązania szczególnego takiego równania różniczkowego opiera się na zagadnieniu początkowym zwanym inaczej zagadnieniem Cauchy'ego lub problemem Cauchy'ego. W celu przedstawienia zasad rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych wprowadzono pojęcie równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych. W dalszej części skupiono się na rozwiązywaniu równań różniczkowych jednorodnych i niejednorodnych, ze szczególnym uwzględnieniem równań różniczkowych liniowych. Ostatnia część tego rozdziału dotyczy rozwiązywania równań różniczkowych drugiego rzędu poprzez sprowadzenie ich do równania pierwszego rzędu.

Publikacja *Matematyka – wybrane zagadnienia rachunku różniczkowego i całkowego* ma charakter wydawnictwa pomocniczego, zredagowanego na potrzeby ćwiczeń z przedmiotu matematyka 2 na kierunkach technicznych. Pozycja została w całości zredagowana przez wykładowcę z dużym doświadczeniem akademickim, który dostrzegł potrzebę stworzenia takiego skryptu.

Elżbieta Gołąbeska

1. Całka nieoznaczona

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału pierwszego można bez trudu:

- podać definicję całki nieoznaczonej,
- obliczyć całkę nieoznaczoną z funkcji elementarnej z wykorzystaniem podstawowych wzorów i własności rachunku całkowego,
- obliczyć całkę nieoznaczoną metodą całkowania przez części,
- obliczyć całkę nieoznaczoną przez podstawianie.

1.1. Pojęcie całki nieoznaczonej

Całki nieoznaczone to jedno z ważniejszych zagadnień analizy matematycznej. Można powiedzieć, że całkowanie jest do pewnego stopnia¹ operacją odwrotną do liczenia pochodnej funkcji. W związku z tym warto przypomnieć, czym jest pochodna funkcji.

Pochodną funkcji interpretuje się jako miarę szybkości zmian wartości funkcji względem zmian jej argumentów. Pochodną funkcji w punkcie można zdefiniować jako granicę ilorazu różnicowego. Jeśli zatem $f(x)$ jest daną funkcją, a $x_0 \in R$ dowolnym argumentem, w otoczeniu którego funkcja $f(x)$ jest określona, to pochodną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , oznaczaną symbolem $f'(x_0)$, definiuje się jako granicę:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.1)$$

lub jako granicę:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.2)$$

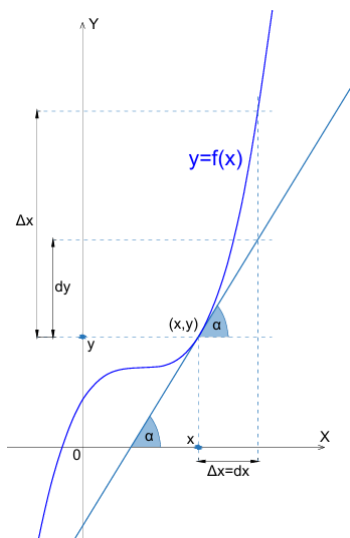
gdzie wyrażenie $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ nazywa się ilorazem różnicowym tej funkcji, definiowanym jako stosunek przyrostu wartości funkcji do przyrostu jej argumentu.

¹ Wzory na znajdowanie całek funkcji elementarnych można łatwo sprawdzić, korzystając ze wzorów na pochodne tych funkcji. Niestety ze względu na brak wzorów na całkę iloczynu i ilorazu dwóch funkcji całkowanie jest trudniejsze niż różniczkowanie.

Mówi się, że funkcja $f: (a, b) \rightarrow R$ ma pochodną w punkcie $x_0 \in (a, b)$, gdy istnieje granica ilorazu różnicowego $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, i wówczas uznaje się, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 .

W sensie geometrycznym wartość pochodnej funkcji w danym punkcie równa jest tangensowi kąta pomiędzy osią OX a styczną do krzywej w punkcie o współrzędnych (x, y) .

Mając dany wykres funkcji, wyznacza się jego styczne w każdym punkcie, a tangensy nachyleń tych stycznych do osi OX są wartościami pochodnych funkcji w tych punktach.



Rys. 1.1. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji

Całka nieoznaczona jest odwróceniem tej operacji. Wykorzystując dane styczne do wykresu funkcji, należy wyznaczyć jej wykres. W sensie rachunkowym należy natomiast wyznaczyć wszystkie funkcje pierwotne funkcji $f(x)$, tzn. takie, które po zróżniczkowaniu dadzą funkcję $f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$.

Reasumując, można stwierdzić, że całka nieoznaczona jest to rodzina wszystkich funkcji pierwotnych $F(x)$ danej funkcji $f(x)$ określonej na przedziale (a, b) .

Definicja całki nieoznaczonej

Jeżeli funkcja $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$, tzn. taką, że jej pochodna jest równa funkcji $f(x)$ dla każdego $x \in (a, b)$, co można zapisać:

$$\bigwedge_{x \in (a, b)} F'(x) = f(x)$$

to całką nieoznaczoną z funkcji $f(x)$ nazywa się wszystkie funkcje pierwotne $F(x)$.

Uwaga: Ponieważ takich funkcji jest nieskończenie wiele, zapisuje się je jako $F(x) + c$, gdzie $f(x)$ nazywa się funkcją podcałkową, a c stałą całkowania.

Całkę nieoznaczoną z funkcji $f(x)$ zapisuje się jako:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad (1.3)$$

- **Sprawdzanie, czy podane funkcje są funkcjami pierwotnymi danej funkcji.**

Przykład 1.1.1

Sprawdzić, czy podane funkcje są funkcjami pierwotnymi funkcji $f(x) = 6x$.

- $F(x) = 3x^2 + 5$
- $F(x) = 3x^2 - 7$
- $F(x) = 6x + \frac{1}{2}$
- $F(x) = 3x^2$

Rozwiązanie:

- Aby sprawdzić, czy funkcja $F(x) = 3x^2 + 5$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$, należy obliczyć pochodną $F'(x)$:

$$F'(x) = (3x^2 + 5)' = 6x$$

Podana funkcja $F(x)$ jest zatem funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$.

- Aby sprawdzić, czy funkcja $F(x) = 3x^2 - 7$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$, należy obliczyć pochodną $F'(x)$:

$$F'(x) = (3x^2 - 7)' = 6x$$

Podana funkcja $F(x)$ jest zatem funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$.

- Aby sprawdzić, czy funkcja $F(x) = 6x + \frac{1}{2}$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$, należy obliczyć pochodną $F'(x)$:

$$F'(x) = \left(6x + \frac{1}{2}\right)' = 6$$

Podana funkcja $F(x)$ nie jest zatem funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$.

- d) Aby sprawdzić, czy funkcja $F(x) = 3x^2$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$, należy obliczyć pochodną $F'(x)$:

$$F'(x) = (3x^2)' = 6x$$

Podana funkcja $F(x)$ jest zatem funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 6x$.

Wniosek: $(F(x) + c)' = f(x)$.

1.2. Całki nieoznaczone funkcji elementarnych

Całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania (czyli do znajdowania pochodnej funkcji), dlatego wzory na całki funkcji elementarnych można otrzymać ze wzorów na pochodne tych funkcji.

Podstawowe wzory rachunku całkowego:

- a) $\int dx = x + c$
- b) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ dla $n \neq -1$
- c) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- d) $\int e^x dx = e^x + c$
- e) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$ dla $a \in R$
- f) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ dla $a \neq 1$ i $a > 0$
- g) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- h) $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$ dla $a \neq 0$
- i) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- j) $\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$ dla $a \neq 0$
- k) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c$ dla $\cos x \neq 0$
- l) $\int c \operatorname{tg} x dx = \ln|\sin x| + c$ dla $\sin x \neq 0$
- m) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$ dla $\cos x \neq 0$
- n) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$ dla $\sin x \neq 0$

W rachunku całkowym obowiązują określone reguły:

1. Całka sumy (różnicy) funkcji jest równa sumie (różnicy) całek:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (1.4)$$

2. Stałą można wyłączyć przed całkę:

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (1.5)$$

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem podstawowych wzorów rachunku całkowego.**

Przykład 1.2.1

Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z podstawowych wzorów rachunku całkowego.

- $\int x^7 dx$
- $\int x^{-5} dx$
- $\int x^{\frac{1}{3}} dx$
- $\int \sqrt[3]{x^2} dx$

Rozwiązanie:

- $\int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{x^8}{8} + c = \frac{1}{8}x^8 + c$
- $\int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4}x^{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$
- $\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$
- $\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem podstawowych wzorów i reguł rachunku całkowego.**

Przykład 1.2.2

Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z podstawowych wzorów i reguł rachunku całkowego.

- $\int (x^4 + e^x) dx$
- $\int 3x^5 dx$
- $\int (-5x^{-6} - \sin x + 5e^x) dx$
- $\int (8x^7 + 3\sqrt{x} + \frac{2}{x} + \pi) dx$

Rozwiązanie:

- $\int (x^4 + e^x) dx = \int x^4 dx + \int e^x dx = \frac{x^5}{5} + e^x + c = \frac{1}{5}x^5 + e^x + c$
- $\int 3x^5 dx = 3 \int x^5 dx = 3 \cdot \frac{x^6}{6} + c = \frac{1}{2}x^6 + c$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int (-5x^{-6} - \sin x + 5e^x) dx &= -5 \int x^{-6} dx - \int \sin x dx + 5 \int e^x dx = \\
 &= -5 \cdot \frac{x^{-5}}{-5} + \cos x + 5e^x + c = x^{-5} + \cos x + 5e^x + c = \\
 &= \frac{1}{x^5} + \cos x + 5e^x + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int (8x^7 + 3\sqrt{x} + \frac{2}{x} + \pi) dx &= 8 \int x^7 dx + 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx + \pi \int dx = \\
 &= 8 \cdot \frac{x^8}{8} + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2 \ln|x| + \pi x + c = \\
 &= x^8 + 2x^{\frac{3}{2}} + 2 \ln|x| + \pi x + c = x^8 + 2\sqrt{x^3} + 2 \ln|x| + \pi x + c
 \end{aligned}$$

1.3. Całkowanie przez części

Nie ma wzorów podobnych do tych, jakie stosuje się do obliczania całek funkcji elementarnych, do obliczania całki z iloczynu bądź ilorazu dwóch funkcji, co wynika ze wzorów na pochodną iloczynu i ilorazu dwóch funkcji – np. pochodna iloczynu dwóch funkcji nie jest równa iloczynowi pochodnych. Aby obliczyć całkę iloczynu (ilorazu) dwóch funkcji, które mają ciągle pochodne, należy wykorzystać metodę całkowania przez części:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx \quad (1.6)$$

Metoda całkowania przez części jest skuteczna wtedy, gdy np. różniczka jednej funkcji jest prostsza (np. pochodna funkcji potęgowej obniża potęgę o jeden), a całka drugiej funkcji nie komplikuje się. Ponadto zazwyczaj dotyczy sytuacji, gdy jest to iloczyn (iloraz) dwóch funkcji elementarnych, chociaż nie jest to reguła.

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez części, gdy pod całką występuje iloczyn funkcji elementarnych.**

Przykład 1.3.1

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez części.

- $\int x \cdot e^x dx$
- $\int e^x \cdot x^2 dx$
- $\int x \cdot \ln|x| dx$
- $\int x^3 \cdot \ln|x| dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int x \cdot e^x dx &= \left(\begin{array}{l} u = x \\ u' = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = \\
 &= x \cdot e^x - e^x + c
 \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: W przypadku iloczynu, w którym jedna z funkcji jest iksem w dowolnej potędze, zazwyczaj to ona jest przyjmowana jako funkcja u . Ponadto wykładnik potęgi przy x wskazuje, ile razy należy potraktować tę całkę przez części. W tym przypadku x był w potęgze pierwszej, więc wystarczyło scałkować przez części jednokrotnie.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int e^x \cdot x^2 dx &= \left(\begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = e^x \\ u' = 2x \quad v = e^x \end{array} \right) = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx = \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = e^x \\ u' = 1 \quad v = e^x \end{array} \right) = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2(x \cdot e^x - e^x) + c = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Nie zawsze funkcja stojąca pod całką jako pierwsza w iloczynie dwóch funkcji jest funkcją u . W przypadku iloczynu, w którym jedna z funkcji jest iksem w dowolnej potędze, zazwyczaj to ona jest przyjmowana jako funkcja u . Ponadto wykładnik potęgi przy x wskazuje, ile razy należy potraktować tę całkę przez części. W tym przypadku x był w potęgze drugiej, więc należało scałkować przez części dwukrotnie.

$$\begin{aligned} \text{c) } \int x \cdot \ln|x| dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln|x| \quad v' = x \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{4}x^2 + c = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \right) + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Nie zawsze funkcja stojąca pod całką jako pierwsza w iloczynie dwóch funkcji jest funkcją u . W przypadku iloczynu, w którym jedna z funkcji jest logarytmem naturalnym, zazwyczaj to ona jest przyjmowana jako funkcja u , ponieważ łatwo jest wskazać jej pochodną, a po zastosowaniu metody całkowania przez części całka kolejnej funkcji nie komplikuje się.

$$\begin{aligned} \text{d) } \int x^3 \cdot \ln|x| dx &= \left(\begin{array}{l} u = \ln|x| \quad v' = x^3 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right) = \frac{x^4}{4} \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln|x| - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln|x| - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \\ &= \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln|x| - \frac{1}{16}x^4 + c = \frac{1}{4}x^4 \left(\ln|x| - \frac{1}{4} \right) + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Nie zawsze funkcja stojąca pod całką jako pierwsza w iloczynie dwóch funkcji jest funkcją u . W przypadku iloczynu, w którym jedna z funkcji jest logarytmem naturalnym, zazwyczaj to ona jest przyjmowana jako funkcja u , ponieważ łatwo jest wskazać jej pochodną, a po zastosowaniu metody całkowania przez części, całka kolejnej funkcji nie komplikuje się.

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez części, gdy pod całką nie występuje iloczyn funkcji elementarnych.**

Metoda całkowania przez części stosowana jest również w przypadkach, gdy niekoniecznie wyraźnie widać iloczyn funkcji pod całką. W niektórych przykładach opłaca się utworzyć „sztucznie” iloczyn funkcji podcałkowej z „jedynek”.

Przykład 1.3.2

Obliczyć całkę $\int \ln|x| dx$, stosując metodę całkowania przez części.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \int \ln|x| dx &= \int 1 \cdot \ln|x| dx = \begin{pmatrix} u = \ln|x| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{pmatrix} = \\ &= x \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln|x| - \int dx = x \cdot \ln|x| - x + c = \\ &= x \cdot (\ln|x| - 1) + c \end{aligned}$$

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez części, gdy pojawia się tzw. zapętlenie.**

Metoda całkowania przez części czasami doprowadza do tzw. zapętlenia. Oznacza to, że po jej zastosowaniu w uzyskanej postaci pojawia się ponownie całka wyjściowa. Wówczas należy przejść na równanie całkowe.

Przykład 1.3.3

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez części.

- $\int e^x \cdot \cos x dx$
- $\int 2e^x \cdot \sin x dx$
- $\int \sin x \cdot \cos x dx$
- $\int \sin(\ln|x|) dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int e^x \cdot \cos x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = e^x \quad v' = \cos x \\ u' = e^x \quad v = \sin x \end{array} \right) = \\ &= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = e^x \quad v' = \sin x \\ u' = e^x \quad v = -\cos x \end{array} \right) = \\ &= e^x \cdot \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x) \, dx \right] = \\ &= e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx \end{aligned}$$

Jak widać, po zastosowaniu metody całkowania przez części ponownie pojawiła się całka $\int e^x \cdot \cos x \, dx$. W tym momencie należy przerwać obliczenia i przejść na równanie całkowite, tzn. porównać całkę wyjściową z uzyskaną postacią wynikową.

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

Po przeniesieniu całki $\int e^x \cos x \, dx$ z prawej strony równania na lewą uzyskuje się:

$$2 \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + c$$

Dzieląc obustronnie przez 2, otrzymuje się:

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{e^x \cdot (\sin x + \cos x)}{2} + c$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 2e^x \cdot \sin x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = 2e^x \quad v' = \sin x \\ u' = 2e^x \quad v = -\cos x \end{array} \right) = \\ &= 2e^x \cdot (-\cos x) - \int 2e^x \cdot (-\cos x) \, dx = \\ &= -2e^x \cdot \cos x + \int 2e^x \cdot \cos x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = 2e^x \quad v' = \cos x \\ u' = 2e^x \quad v = \sin x \end{array} \right) = \\ &= -2e^x \cdot \cos x + 2e^x \cdot \sin x - \int 2e^x \cdot \sin x \, dx \end{aligned}$$

Jak widać, po zastosowaniu metody całkowania przez części ponownie pojawiła się całka $\int 2e^x \sin x \, dx$. W tym momencie należy przerwać obliczenia i przejść na równanie całkowite, tzn. porównać całkę wyjściową z uzyskaną postacią wynikową.

$$\int 2e^x \cdot \sin x \, dx = -2e^x \cdot \cos x + 2e^x \cdot \sin x - \int 2e^x \cdot \sin x \, dx$$

Po przeniesieniu całki $\int 2e^x \sin x \, dx$ z prawej strony równania na lewą, uzyskuje się:

$$\int 4e^x \cdot \sin x \, dx = -2e^x \cdot \cos x + 2e^x \cdot \sin x + c$$

$$4 \int e^x \cdot \sin x \, dx = 2e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

Dzieląc obustronnie przez 2, otrzymuje się:

$$\int 2e^x \cdot \sin x \, dx = e^x \cdot (\sin x - \cos x) + c$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \sin x \cdot \cos x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = \sin x \quad v' = \cos x \\ u' = \cos x \quad v = \sin x \end{array} \right) = \\ &= \sin x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot \cos x \, dx \end{aligned}$$

Jak widać, po zastosowaniu metody całkowania przez części, ponownie pojawiła się całka $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$. W tym momencie należy przerwać obliczenia i przejść na równanie całkowe, tzn. porównać całkę wyjściową z uzyskaną postacią wynikową.

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot \cos x \, dx$$

Po przeniesieniu całki $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$ z prawej strony równania na lewą uzyskuje się:

$$2 \int \sin x \cdot \cos x \, dx = \sin^2 x + c$$

Dzieląc obustronnie przez 2, otrzymuje się:

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$\text{d) } \int \sin(\ln|x|) \, dx = \int 1 \cdot \sin(\ln|x|) \, dx = \left(\begin{array}{l} u = \sin(\ln|x|) \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln|x|) \quad v = x \end{array} \right) =$$

$$= x \cdot \sin(\ln|x|) - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln|x|) \, dx =$$

$$= x \cdot \sin(\ln|x|) - \int \cos(\ln|x|) \, dx =$$

$$= \left(\begin{array}{l} u = \cos(\ln|x|) \quad v' = 1 \\ u' = -\frac{1}{x} \cdot \sin(\ln|x|) \quad v = x \end{array} \right) =$$

$$= x \cdot \sin(\ln|x|) - \left[x \cdot \cos(\ln|x|) - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \sin(\ln|x|) \, dx \right] =$$

$$= x \cdot \sin(\ln|x|) - x \cdot \cos(\ln|x|) - \int \sin(\ln|x|) \, dx$$

Na początku, aby można było skorzystać z metody całkowania przez części, utworzono iloczyn funkcji podcałkowej z „jedyneką”. Następnie, jak widać, ponownie pojawiła się całka $\int \sin(\ln|x|) \, dx$. W tym momencie należy przerwać obliczenia i przejść na równanie całkowe, tzn. porównać całkę wyjściową z uzyskaną postacią wynikową.

$$\int \sin(\ln|x|) \, dx = x \cdot \sin(\ln|x|) - x \cdot \cos(\ln|x|) - \int \sin(\ln|x|) \, dx$$

Po przeniesieniu całki $\int \sin(\ln|x|) \, dx$ z prawej strony równania na lewą uzyskuje się:

$$2 \int \sin(\ln|x|) \, dx = x \cdot \sin(\ln|x|) - x \cdot \cos(\ln|x|) + c$$

Dzieląc obustronnie przez 2, otrzymuje się:

$$\int \sin(\ln|x|) dx = \frac{x \cdot [\sin(\ln|x|) - \cos(\ln|x|)]}{2} + c$$

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez części, gdy pod całką występuje iloraz funkcji elementarnych.**

Metoda całkowania przez części doskonale sprawdza się w przypadku, gdy pod całką występuje iloraz dwóch funkcji (każdy iloraz można zamienić na iloczyn).

Przykład 1.3.4

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez części.

- $\int \frac{\ln|x|}{x} dx$
- $\int \frac{2 \ln|x|}{e^{-x}} dx$
- $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$
- $\int \frac{2 \ln|x|}{x^{-3}} dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{\ln|x|}{x} dx &= \int \ln|x| \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln|x| & v' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \ln|x| \end{array} \right) = \\ &= \ln|x| \cdot \ln|x| - \int \frac{\ln|x|}{x} dx \end{aligned}$$

Funkcja podcałkowa dana ilorazem została przedstawiona w postaci iloczynu. Następnie, po zastosowaniu metody całkowania przez części, ponownie pojawiła się całka $\int \frac{\ln|x|}{x} dx$. W tym momencie należy przerwać obliczenia i przejść na równanie całkowe, tzn. porównać całkę wyjściową z uzyskaną postacią wynikową.

$$\int \frac{\ln|x|}{x} dx = \ln|x| \cdot \ln|x| - \int \frac{\ln|x|}{x} dx$$

Po przeniesieniu całki $\int \frac{\ln|x|}{x} dx$ z prawej strony równania na lewą uzyskuje się:

$$2 \int \frac{\ln|x|}{x} dx = \ln^2|x| + c$$

Dzieląc obustronnie przez 2, otrzymuje się:

$$\int \frac{\ln|x|}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2|x| + c$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \int \frac{2 \ln|x|}{x^{-3}} dx &= \int 2 \ln|x| \cdot \frac{1}{x^{-3}} dx = \int 2 \ln|x| \cdot x^3 dx = \\
&= \left(\begin{array}{ll} u = 2 \ln|x| & v' = x^3 \\ u' = \frac{2}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right) = \frac{x^4}{4} \cdot 2 \ln|x| - \int \frac{2}{x} \cdot \frac{x^4}{4} dx = \\
&= \frac{1}{2} x^4 \cdot \ln|x| - \frac{1}{2} \int x^3 dx = \frac{1}{2} x^4 \cdot \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + c = \\
&= \frac{1}{2} x^4 \left(\ln|x| - \frac{1}{4} \right) + c
\end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Funkcja podcałkowa dana ilorazem została przedstawiona w postaci iloczynu. Następnie zastosowano metodę całkowania przez części.

$$\begin{aligned}
\text{c) } \int \frac{x}{\sin^2 x} dx &= \int x \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx = \left(\begin{array}{ll} u = x & v' = \frac{1}{\sin^2 x} \\ u' = 1 & v = -\text{ctgx} \end{array} \right) = \\
&= x \cdot (-\text{ctgx}) - \int -\text{ctgx} dx = -x \cdot \text{ctgx} + \int \text{ctgx} dx = \\
&= -x \cdot \text{ctgx} + \ln|\sin x| + c
\end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Funkcja podcałkowa dana ilorazem została przedstawiona w postaci iloczynu. Następnie zastosowano metodę całkowania przez części. W tym przykładzie należy tylko uzasadnić, że $\int \text{ctgx} dx = \ln|\sin x| + c$. Wystarczy wykazać, że funkcja podcałkowa jest pochodną funkcji $\ln|\sin x|$. Funkcja ta jest funkcją złożoną, zatem należy pamiętać, że pochodna funkcji złożonej równa jest iloczynowi pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej.

Jeśli:

$$w = \sin x \quad z = \ln w$$

$$w' = \cos x \quad z' = \frac{1}{w} = \frac{1}{\sin x}$$

to:

$$[\ln|\sin x|]' = \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{ctgx}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \\
&= \left(\begin{array}{ll} u = x & v' = \frac{1}{\cos^2 x} \\ u' = 1 & v = \text{tgx} \end{array} \right) = x \cdot \text{tgx} - \int \text{tgx} dx = \\
&= x \cdot \text{tgx} - (-\ln|\cos x|) + c = x \cdot \text{tgx} + \ln|\cos x| + c
\end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Funkcja podcałkowa dana ilorazem została przedstawiona w postaci iloczynu. Następnie zastosowano metodę całkowania przez części. W tym przykładzie należy tylko uzasadnić, że $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + c$. Wystarczy wykazać, że funkcja podcałkowa jest pochodną funkcji $\ln |\cos x|$. Funkcja ta jest funkcją złożoną, zatem należy pamiętać, że pochodna funkcji złożonej równa jest iloczynowi pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej.

Jeśli:

$$w = \cos x \quad z = -\ln|w|$$

$$w' = -\sin x \quad z' = -\frac{1}{w} = -\frac{1}{\cos x}$$

to:

$$[-\ln |\cos x|]' = (-\sin x) \cdot \left(-\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez części w innych niestandardowych przypadkach.**

Przykład 1.3.5

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez części.

- $\int 3x^4 \cdot e^x \, dx$
- $\int (x^2 - x) \cdot e^x \, dx$
- $\int \sin^2 x \, dx$
- $\int (\ln|x|)^2 \, dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 3x^4 \cdot e^x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = 3x^4 \\ u' = 12x^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = \\ &= 3x^4 \cdot e^x - \int 12x^3 \cdot e^x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = 12x^3 \\ u' = 36x^2 \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = \\ &= 3x^4 \cdot e^x - 12x^3 \cdot e^x + \int 36x^2 \cdot e^x \, dx \left(\begin{array}{l} u = 36x^2 \\ u' = 72x \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = \\ &= 3x^4 \cdot e^x - 12x^3 \cdot e^x + 36x^2 \cdot e^x - \int 72x \cdot e^x \, dx \left(\begin{array}{l} u = 72x \\ u' = 72 \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = \\ &= 3x^4 \cdot e^x - 12x^3 \cdot e^x + 36x^2 \cdot e^x - 72x \cdot e^x + \int 72e^x \, dx = \\ &= 3x^4 \cdot e^x - 12x^3 \cdot e^x + 36x^2 \cdot e^x - 72x \cdot e^x + 72e^x + c = \\ &= 3e^x \cdot (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Jak widać, w iloczynie pod całką wykładnik potęgi przy x wynosi 4, co oznacza, że należało scałkować przez części czterokrotnie.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int (x^2 - x) \cdot e^x dx &= \left(\begin{array}{l} u = x^2 - x \\ u' = 2x - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = \\
 &= (x^2 - x) \cdot e^x - \int (2x - 1) \cdot e^x dx = \\
 &= \left(\begin{array}{l} u = 2x - 1 \\ u' = 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = e^x \\ v = e^x \end{array} \right) = (x^2 - x) \cdot e^x - (2x - 1) \cdot e^x + \int 2e^x dx = \\
 &= (x^2 - x) \cdot e^x - (2x - 1) \cdot e^x + 2e^x + c = e^x \cdot (x^2 - 3x + 3) + c
 \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Jak widać, w iloczynie pod całką wykładnik najwyższej potęgi przy x wynosi 2, co oznacza, że należało scałkować przez części dwukrotnie.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \sin^2 x dx &= \int \sin x \cdot \sin x dx = \left(\begin{array}{l} u = \sin x \\ u' = \cos x \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = \sin x \\ v = -\cos x \end{array} \right) = \\
 &= -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x dx = \\
 &= -\sin x \cdot \cos x + \int (1 - \sin^2 x) dx = \\
 &= -\sin x \cdot \cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx = \\
 &= -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx
 \end{aligned}$$

Po zastosowaniu całkowania przez części po prawej stronie pojawiła się całka $\int \cos^2 x dx$. Funkcję podcałkową zapisano jako $(1 - \sin^2 x)$, wykorzystując wzór na „jedynekę trygonometryczną”. Należy zauważyć, że w rozwiązaniu ponownie pojawiła się całka $\int \sin^2 x dx$, przed którą stoi minus. W tym momencie trzeba przejść na równanie całkowe.

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x dx$$

Niewiadomą w tym równaniu jest całka $\int \sin^2 x dx$. Niewiadoma zwykle znajduje się po lewej stronie równania, dlatego przenosimy całkę z prawej strony na lewą, otrzymując:

$$2 \int \sin^2 x dx = -\sin x \cdot \cos x + x + c$$

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} + c$$

$$\text{d) } \int (\ln|x|)^2 dx = \int \ln|x| \cdot \ln|x| dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln|x| \\ u' = \frac{1}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} v' = \ln|x| \\ v = ? \end{array} \right) = *$$

Całką $\int \ln|x| dx$ (którą należy wstawić w miejsce znaku zapytania) została obliczona w przykładzie 1.3.2 również przy zastosowaniu metody całkowania przez części.

$$\begin{aligned} \int \ln|x| dx &= \int 1 \cdot \ln|x| dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln|x| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{array} \right) = \\ &= x \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln|x| - \int dx = \\ &= x \cdot \ln|x| - x + c = x \cdot (\ln|x| - 1) + c \end{aligned}$$

Przy obliczaniu całki wyjściowej, po wstawieniu w miejsce znaku zapytania obliczonej całki $\int \ln|x| dx$ i uzyskaniu v , otrzymuje się:

$$\begin{aligned} * &= \left(\begin{array}{ll} u = \ln|x| & v' = \ln|x| \\ u' = \frac{1}{x} & v = x(\ln|x| - 1) \end{array} \right) = \\ &= x \cdot \ln|x| \cdot (\ln|x| - 1) - \int \frac{1}{x} \cdot x \cdot (\ln|x| - 1) dx = \\ &= x \cdot \ln|x| \cdot (\ln|x| - 1) - \int \ln|x| dx + \int dx = \\ &= x \cdot \ln|x| \cdot (\ln|x| - 1) - x \cdot (\ln|x| - 1) + x + c = \\ &= x \cdot (\ln|x| - 1) \cdot (\ln|x| - 1) + x + c = x \cdot [(\ln|x| - 1)^2 + 1] + c \end{aligned}$$

1.4. Całkowanie przez podstawianie

Całkowanie przez podstawianie jest metodą stosowaną w przypadku, gdy wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną bądź gdy można wyodrębnić iloczyn pewnej funkcji i jej pochodnej.

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt \quad (1.7)$$

gdzie: $t = g(x)$ i $dt = g'(x) dx$

Zasada całkowania przez podstawianie w sytuacji, gdy wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną, polega na wskazaniu w niej funkcji wewnętrznej i oznaczeniu jako t . W kolejnym kroku należy zróżniczkować obie strony równości i z uzyskanej postaci wyznaczyć dx . Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, należy wpisać pod całką funkcję elementarną, aby scałkować ją, wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję.

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez podstawianie, gdy pod całką znajduje się funkcja złożona.**

Przykład 1.4.1

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez podstawianie.

- $\int (8x + 2)^5 dx$
- $\int 5^{2x+1} dx$
- $\int \sqrt[3]{4x - 2} dx$
- $\int e^{x-2} dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (8x + 2)^5 dx &= \left(\begin{array}{l} t = 8x + 2 \\ dt = 8dx \\ dx = \frac{dt}{8} \end{array} \right) = \int t^5 \cdot \frac{dt}{8} = \frac{1}{8} \int t^5 dt = \frac{1}{8} \cdot \frac{t^6}{6} + c = \\ &= \frac{1}{48} \cdot (8x + 2)^6 + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną. Wskazano funkcję wewnętrzną i oznaczono jako t , ($t = 8x + 2$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{8}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję elementarną t^5 , aby scałkować ją, wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $8x + 2$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 5^{2x+1} dx &= \left(\begin{array}{l} t = 2x + 1 \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right) = \int 5^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int 5^t dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{5^t}{\ln 5} + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2x+1}}{\ln 5} + c = \frac{5^{2x+1}}{2 \ln 5} + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną. Wskazano funkcję wewnętrzną i oznaczono jako t , ($t = 2x + 1$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{2}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję elementarną 5^t , aby scałkować ją, wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $2x + 1$.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \int \sqrt[3]{4x-2} \, dx &= \left(\begin{array}{l} t = 4x - 2 \\ dt = 4 \, dx \\ dx = \frac{dt}{4} \end{array} \right) = \int \sqrt[3]{t} \, dt = \int t^{\frac{1}{3}} \, dt = \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \\
 &= \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{t^4} + c = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(4x-2)^4} + c
 \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną. Wskazano funkcję wewnętrzną i oznaczono jako t , ($t = 4x - 2$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{4}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję elementarną $\sqrt[3]{t}$, aby scałkować ją, wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $4x - 2$.

$$\text{d) } \int e^{x-2} \, dx = \left(\begin{array}{l} t = x - 2 \\ dt = dx \\ dx = dt \end{array} \right) = \int e^t \, dt = e^t + c = e^{x-2} + c$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną. Wskazano funkcję wewnętrzną i oznaczono jako t , ($t = x - 2$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = dt$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję elementarną e^t , aby scałkować ją, wykorzystując podstawowe wzory rachunku całkowego. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $x - 2$.

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez podstawianie, gdy pod całką znajduje się iloczyn pewnej funkcji i jej pochodnej.**

Całkowanie przez podstawianie w sytuacji, gdy wyrażenie podcałkowe jest iloczynem pewnej funkcji i jej pochodnej, polega na wskazaniu tej funkcji i oznaczeniu jako t . W kolejnym kroku należy zróżniczkować obie strony równości i z uzyskanej postaci wyznaczyć dx . Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, należy wpisać pod całką funkcję t w iloczynie z tą drugą (która jest jej pochodną) oraz wpisać zamiast dx jej nowy odpowiednik. Po właściwym skróceniu wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, należy wykonać odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym trzeba powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję.

Przykład 1.4.2

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez podstawianie.

a) $\int \sin x \cdot \cos x \, dx$

b) $\int \frac{\ln|x|}{x} \, dx$

c) $\int x \cdot \frac{1}{x^2+1} \, dx$

d) $\int \frac{3x^2-7}{x^3-7x} \, dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sin x \cdot \cos x \, dx &= \left(\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \\ dx = \frac{dt}{\cos x} \end{array} \right) = \int t \cdot \cos x \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int t \, dt = \\ &= \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2} \sin^2 x + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest pochodną drugiej. Wskazano tę funkcję i oznaczono jako t , ($t = \sin x$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{\cos x}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję t w iloczynie z tą drugą (która jest jej pochodną) oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{\cos x}$. Po odpowiednim skróceniu $\cos x$ wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy wrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $\sin x$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{\ln|x|}{x} \, dx &= \int \ln|x| \cdot \frac{1}{x} \, dx = \left(\begin{array}{l} t = \ln|x| \\ dt = \frac{1}{x} \, dx \\ dx = x \, dt \end{array} \right) = \\ &= \int t \cdot \frac{1}{x} \cdot x \, dt = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} + c = \frac{1}{2} \ln^2|x| + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest pochodną drugiej. Wskazano tę funkcję i oznaczono jako t , ($t = \ln|x|$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = x \, dt$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję t w iloczynie z tą drugą (która jest jej pochodną) oraz zamiast dx wpisano $x \, dt$. Po odpowiednim skróceniu x wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory

i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $\ln|x|$. Tę samą całkę rozwiązano metodą całkowania przez części w przykładzie 1.3.4 b, uzyskując taki sam wynik.

$$\begin{aligned} \text{c) } \int x \cdot \frac{1}{x^2+1} dx &= \left(\begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right) = \int x \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest pochodną drugiej. Wskazano tę funkcję i oznaczono jako t , ($t = x^2 + 1$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{2x}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całą funkcję t w iloczynie z tą drugą (która jest jej pochodną) oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{2x}$. Po odpowiednim skróceniu x wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \frac{3x^2-7}{x^3-7x} dx &= \int (3x^2 - 7) \cdot \frac{1}{x^3-7x} dx = \left(\begin{array}{l} t = x^3 - 7x \\ dt = (3x^2 - 7)dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2-7} \end{array} \right) = \\ &= \int (3x^2 - 7) \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{3x^2-7} = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c = \ln|x^3 - 7x| + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest pochodną drugiej. Wskazano tę funkcję i oznaczono jako t , ($t = x^3 - 7x$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{3x^2-7}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całą funkcję t w iloczynie z tą drugą (która jest jej pochodną) oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{3x^2-7}$. Po odpowiednim skróceniu $3x^2 - 7$ wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $x^3 - 7x$.

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez podstawianie, gdy pod całką znajduje się iloczyn pewnej funkcji elementarnej i funkcji złożonej.**

Całkowanie przez podstawianie w sytuacji, gdy wyrażenie podcałkowe jest iloczynem pewnej funkcji elementarnej i funkcji złożonej, w której funkcja wewnętrzna ma pochodną równą danej funkcji elementarnej, polega na wskazaniu w funkcji złożonej funkcji wewnętrznej i oznaczeniu jej jako t . W kolejnym kroku należy zróżniczkować obie strony równości i z uzyskanej równości wyznaczyć dx . Następnie zastosować metodę całkowania przez podstawianie, wpisując pod całką funkcję t w iloczynie z tą drugą (funkcją elementarną) oraz podając zamiast dx jej nowy odpowiednik. Po właściwym skróceniu wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, należy wykonać odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym trzeba powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję.

Przykład 1.4.3

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez podstawianie.

a) $\int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx$

b) $\int \frac{2x}{\cos^2(2-3x^2)} \, dx$

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+6}} \, dx$

d) $\int \frac{e^{x^4}}{x^5} \, dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \sin x \cdot \cos^5 x \, dx &= \left(\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \right) = - \int \sin x \cdot t^5 \cdot \frac{dt}{\sin x} = \\ &= - \int t^5 \, dt = -\frac{1}{6}t^6 + c = -\frac{1}{6}\cos^6 x + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną. Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako t , ($t = \cos x$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{-\sin x}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką funkcję t^5 w iloczynie z tą drugą ($\sin x$) oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{-\sin x}$. Po odpowiednim skróceniu $\sin x$ wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe

wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $\cos x$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{2x}{\cos^2(2+3x^2)} dx &= \left(\begin{array}{l} t = 2 + 3x^2 \\ dt = 6x dx \\ dx = \frac{dt}{6x} \end{array} \right) = \int \frac{2x}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{6x} = \frac{2}{6} \int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \\ &= \frac{1}{3} tg t + c = \frac{1}{3} tg(2 + 3x^2) + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną (funkcja w mianowniku). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako t , ($t = 2 + 3x^2$). W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{6x}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloraz funkcji $2x$ i funkcji $\cos^2 t$ oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{6x}$. Po odpowiednim skróceniu x wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $2 + 3x^2$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+6}} dx &= \left(\begin{array}{l} t = x^4 + 6 \\ dt = 4x^3 dx \\ dx = \frac{dt}{4x^3} \end{array} \right) = \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{t}} \cdot \frac{dt}{4x^3} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt[5]{t}} dt = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{1}{5}} dt = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt[5]{t^4} + c = \frac{5}{16} \sqrt[5]{(x^4 + 6)^4} + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną (funkcja w mianowniku). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako $t = x^4 + 6$. W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{4x^3}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloraz funkcji x^3 i funkcji $\sqrt[5]{t}$ oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{4x^3}$. Po odpowiednim skróceniu x^3 wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $x^4 + 6$.

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \int \frac{e^{x^4}}{x^5} dx &= \left(\begin{array}{l} t = \frac{1}{x^4} \\ dt = \frac{-4}{x^5} dx \\ dx = \frac{x^5}{-4} dt \end{array} \right) = - \int \frac{e^t}{x^5} \cdot \frac{x^5}{4} dt = -\frac{1}{4} \int e^t dt = -\frac{1}{4} e^t + c = \\
 &= -\frac{1}{4} e^{\frac{1}{x^4}} + c = \frac{1}{4} e^{x^{-4}} + c
 \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną (funkcja w liczniku). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako $t = \frac{1}{x^4}$. W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{x^5}{-4} dt$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloraz funkcji e^t i funkcji x^5 oraz zamiast dx wpisano $\frac{x^5}{-4} dt$. Po odpowiednim skróceniu x^5 wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $\frac{1}{x^4}$.

- **Obliczanie całki nieoznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez podstawianie, gdy pod całką znajdują się iloczyn bądź iloraz dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną.**

Przykład 1.4.4

Obliczyć całki nieoznaczone, stosując metodę całkowania przez podstawianie.

a) $\int \frac{4x^2-3}{\sqrt[3]{4x^3-9x}} dx$

b) $\int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$

c) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

d) $\int x \cdot \ln|2-x^2| dx$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{4x^2-3}{\sqrt[3]{4x^3-9x}} dx &= \left(\begin{array}{l} t = 4x^3 - 9x \\ dt = 12x^2 - 9 dx \\ dx = \frac{dt}{12x^2-9} \end{array} \right) = \int \frac{4x^2-3}{\sqrt[3]{t}} \cdot \frac{dt}{3(4x^2-3)} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \\
 &= \frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{2}{3}} + c = \frac{1}{2} \sqrt[3]{t^2} + c = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{(4x^3-9x)^2} + c
 \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną (funkcja w mianowniku). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako $t = 4x^3 - 9x$. W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{12x^2 - 9}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloraz danej funkcji $4x^2 - 3$ i funkcji $\sqrt[3]{t}$ oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{12x^2 - 9}$ (w mianowniku której wyłączyło przed nawias 3, aby uzyskać w nawiasie $4x^2 - 3$). Po odpowiednim skróceniu $4x^2 - 3$ wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $4x^3 - 9x$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \sin x \cdot e^{\cos x} dx &= \left(\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ dx = \frac{dt}{-\sin x} \end{array} \right) = - \int \sin x \cdot e^t \frac{dt}{\sin x} = - \int e^t dt = \\ &= -e^t + c = -e^{\cos x} + c \end{aligned}$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną ($e^{\cos x}$). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako $t = \cos x$. W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{-\sin x}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloczyn danej funkcji $\sin x$ i funkcji e^t oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{-\sin x}$. Po odpowiednim skróceniu $\sin x$ wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $\cos x$.

$$\text{c) } \int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left(\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array} \right) = \int \frac{t^3}{x} \cdot x dt = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \frac{1}{4} \ln^4 x + c$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną ($\ln^3 x$). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako $t = \ln x$. W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = x dt$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloraz funkcji t^3 i danej funkcji x oraz zamiast dx wpisano $x dt$. Po odpowiednim skróceniu x wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Wykorzystując podstawowe wzory i własności rachunku całkowego, wykonano

odpowiednie obliczenia. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $\ln x$.

$$\begin{aligned} \text{d) } \int \ln|2 - x^2| dx &= \left(\begin{array}{l} t = 2 - x^2 \\ dt = -2x dx \\ dx = \frac{dt}{-2x} \end{array} \right) = - \int x \cdot \ln|t| \cdot \frac{dt}{2x} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \ln|t| dt = * \end{aligned}$$

Całka $\int \ln|t| dt$ została obliczona w przykładzie 1.3.2 również przy zastosowaniu metody całkowania przez części.

$$\begin{aligned} \int \ln|t| dt &= \int 1 \cdot \ln|t| dt = \left(\begin{array}{ll} u = \ln|t| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{t} & v = t \end{array} \right) \\ &= t \cdot \ln|t| - \int \frac{1}{t} \cdot t dt = \\ &= t \cdot \ln|t| - \int dt = t \cdot \ln|t| - t + c = t \cdot (\ln|t| - 1) + c \end{aligned}$$

Po obliczeniu całki wyjściowej otrzymuje się:

$$* = -\frac{1}{2} t \cdot (\ln|t| - 1) + c = -\frac{1}{2} (2 - x^2) \cdot [\ln|2 - x^2| - 1] + c$$

Komentarz do rozwiązania: Wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną ($\ln|2 - x^2|$). Wyodrębniono z niej funkcję wewnętrzną i oznaczono jako $t = 2 - x^2$. W kolejnym kroku zróżniczkowano obie strony tej równości i wyznaczono z uzyskanej postaci $dx = \frac{dt}{-2x}$. Następnie, zgodnie z metodą całkowania przez podstawianie, wpisano pod całką iloczyn danej funkcji x i funkcji $\ln|t|$ oraz zamiast dx wpisano $\frac{dt}{-2x}$. Po odpowiednim skróceniu x wyrażenie podcałkowe zawiera już wyłącznie funkcję ze zmienną t . Całkę $\int \ln|t| dt$ obliczono metodą całkowania przez części. W wyniku końcowym należy powrócić do pierwotnego podstawienia, wstawiając za t przyjętą na początku funkcję $2 - x^2$.

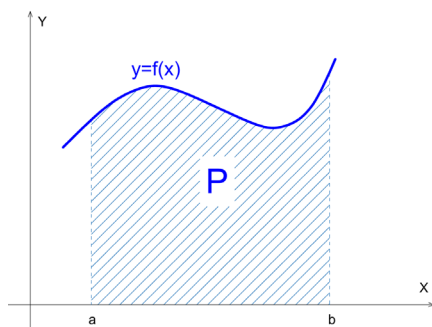
2. Całka oznaczona funkcji jednej zmiennej

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału drugiego można bez trudu:

- podać definicję całki oznaczonej,
- obliczyć całkę oznaczoną w podanych granicach całkowania,
- obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą wielomianową i osią OX ,
- obliczyć pole trapezu krzywoliniowego z wykorzystaniem rachunku całkowego,
- obliczyć długość łuku krzywej z wykorzystaniem rachunku całkowego,
- obliczyć objętość bryły obrotowej z wykorzystaniem rachunku całkowego,
- obliczyć pole powierzchni bryły obrotowej z wykorzystaniem rachunku całkowego.

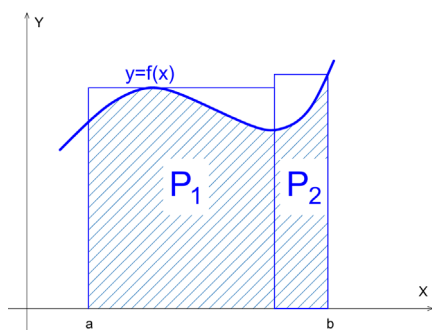
2.1. Pojęcie całki oznaczonej i jej interpretacja geometryczna

Umiejętność wyznaczenia całki nieoznaczonej stanowi punkt wyjścia do obliczenia całki oznaczonej. W sensie rachunkowym polega to na obliczeniu różnicy wartości znalezionych funkcji pierwotnych dla wskazanych punktów przedziału. Aby lepiej zrozumieć zagadnienie całki oznaczonej oraz potrzebę jej wprowadzenia, warto rozpocząć od jej interpretacji geometrycznej, a w zasadzie rozwiązania pewnego problemu. Problemem tym jest potrzeba dokładnego obliczenia pola jakiegoś nietypowego obszaru, który nie jest kwadratem, prostokątem, rombem, równoległobokiem czy kołem. Taki obszar (zawarty między wykresem funkcji a osią OX w określonym przedziale domkniętym) nazywa się trapezem krzywoliniowym. Obszar ten można zilustrować na wykresie.



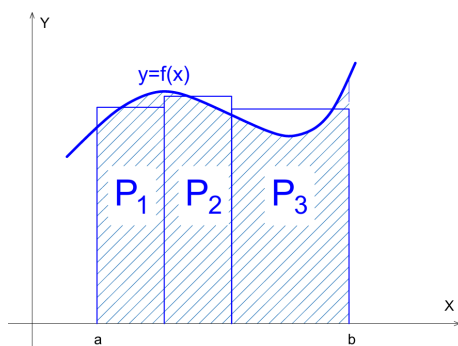
Rys. 2.1. Pole trapezu krzywoliniowego jako jednego obszaru

Obliczenie pola trapezu krzywoliniowego ograniczonego krzywą $f(x)$ i osią OX na przedziale domkniętym $[a, b]$ w sposób klasyczny (na podstawie dostępnych wzorów na pola figur płaskich) nie jest możliwe. Można spróbować podzielić ten obszar na dwa mniejsze.



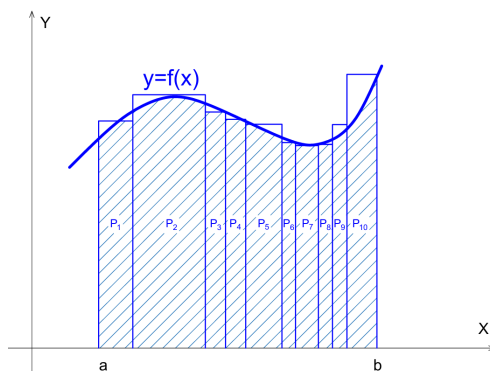
Rys. 2.2. Pole trapezu krzywoliniowego jako suma pól dwóch obszarów

Pole P takiego obszaru można zatem przedstawić jako sumę pól P_1 i P_2 . Jednak, jak widać, nadal jest ono wyrażone wyłącznie wartością przybliżoną. Można zatem pójść o krok dalej i pole P przybliżyć sumą pól trzech prostokątów: P_1 , P_2 i P_3 .



Rys. 2.3. Pole trapezu krzywoliniowego jako suma pól trzech obszarów

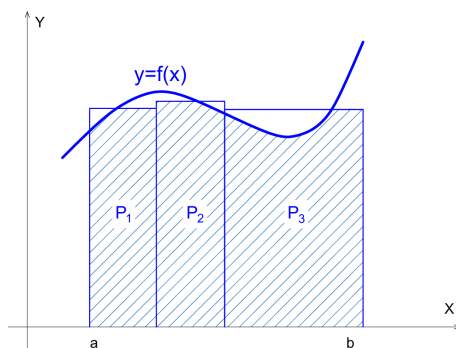
Gdy zwiększy się liczbę prostokątów pokrywających pole obszaru trapezu krzywoliniowego, przybliżenie stanie się coraz dokładniejsze.



Rys. 2.4. Pole trapezu krzywoliniowego jako suma pól dziesięciu obszarów

Pole P tego trapezu można obliczyć z pewną dokładnością, dzieląc go na odpowiednią liczbę prostokątów. Jednak w celu obliczenia dokładnej, a nie przybliżonej wartości pola P , należałoby dokonać podziału obszaru trapezu krzywoliniowego na nieskończenie wiele takich prostokątów. Jeżeli prostokątów tych byłoby nieskończenie wiele i byłyby one nieskończenie małe, to suma ich pól dałaby dokładną wartość pola P . Takie rozumowanie prowadzi do skonstruowania metody na policzenie dokładnej wartości „nietypowego” pola. Dzieląc je na nieskończoną liczbę nieskończenie małych prostokątów i sumując ich pola, uzyska się pole całego obszaru na przedziale domkniętym $[a, b]$. Tak otrzymana suma nieskończona (można też powiedzieć – szereg) nazywać się będzie całką oznaczoną w sensie Riemanna (od nazwiska matematyka, który jako pierwszy ją opisał).

Zanim całka Riemanna zostanie formalnie zdefiniowana, należy zauważyć, że zwiększając liczbę prostokątów, dokonuje się podziału odcinka $[a, b]$ dowolnie wybranymi punktami $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ na mniejsze, wyznaczając wewnątrz nich dowolne punkty: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$.



Rys. 2.5. Przykładowy podział odcinka $[a, b]$ na trzy mniejsze

Przy podziale odcinka $[a, b]$ dowolnie wybranymi punktami $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ otrzymuje się przybliżenie pola P jako:

$$P \approx (x_1 - a) \cdot f(\xi_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(\xi_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot f(\xi_n) \quad (2.1)$$

Dla uproszczenia odcinki $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, b]$ można oznaczyć odpowiednio jako $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Wówczas przybliżone pole trapezu krzywoliniowego dla jakiegokolwiek ustalonego podziału na n prostokątów wynosi:

$$P \approx f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + f(\xi_3) \cdot \Delta x_3 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n \quad (2.2)$$

Zwiększając liczbę odcinków, na które dzieli się odcinek $[a, b]$ w nieskończoność, otrzymuje się sumę nieskończoną (zwaną sumą całkową).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + f(\xi_3) \cdot \Delta x_3 + \dots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n] = \quad (2.3) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

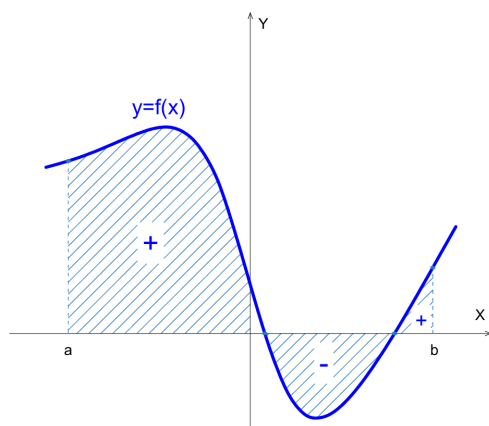
Jeśli ta granica jest zbieżna zawsze do tej samej liczby, niezależnie od wyboru odcinków Δx_n (przy założeniu, że długości tych odcinków dążą do zera wraz ze wzrostem n), i niezależnie od wyboru punktów ξ_n , to liczba ta nazywa się całką oznaczoną w przedziale domkniętym od a do b .

Definicja całki oznaczonej

Niech funkcja $f(x)$ będzie ograniczona na przedziale domkniętym $[a, b]$. Całką oznaczoną (całką Riemanna lub całką w sensie Riemanna) z funkcji f na przedziale domkniętym $[a, b]$ nazywa się liczbę oznaczaną symbolem $\int_a^b f(x) dx$, gdzie:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \quad (2.4)$$

Niech $f(x)$ będzie funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale domkniętym $[a, b]$. Wówczas $\int_a^b f(x) dx$ jest równa polu figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x)$, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.



Rys. 2.6. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Na podstawie powyższych rozważań całkę oznaczoną intuicyjnie należy rozumieć jako pole powierzchni między wykresem funkcji $f(x)$ w pewnym przedziale domkniętym $[a, b]$ a osią odciętych (ze znakiem „+” dla wartości dodatnich funkcji, ze znakiem „-” dla ujemnych wartości funkcji).

Twierdzenie o całkowalności funkcji

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona na przedziale domkniętym $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości, to jest na nim całkowalna.

Twierdzenie Newtona-Leibniza

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, to całkę oznaczoną można policzyć ze wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.5)$$

gdzie $F(x) = \int f(x)dx$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$.

Jak widać, gdy znana jest całka nieoznaczona, to obliczenie pola pod funkcją podcałkową $f(x)$ sprowadza się do odjęcia od wartości funkcji pierwotnej w górnej granicy całkowania b jej wartości w dolnej granicy całkowania a .

Warto zauważyć, że w przypadku całki oznaczonej nie pojawia się stała c , która była dodawana do funkcji pierwotnej przy obliczaniu całek nieoznaczonych. Dzieje się tak dlatego, że różnica $F(b) - F(a)$ nie zależy od stałej całkowania c . Pole, jako miara powierzchni, musi być wyrażone liczbą nieujemną.

Twierdzenie o addytywności całki oznaczonej względem przedziałów całkowania

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowna na przedziale domkniętym $[a, b]$, a $c \in [a, b]$, to:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (2.6)$$

Własności całki oznaczonej:

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ dla $a < b$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^b [k \cdot f(x)]dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$ dla $k \in R$

Zanim całka oznaczona zostanie wykorzystana do zagadnień geometrycznych, najpierw warto skupić się na umiejętności przeprowadzania rachunków. Aby obliczyć całkę oznaczoną, najprościej jest na początku wyznaczyć całkę nieoznaczoną, a następnie odjąć od siebie wartości funkcji pierwotnej obliczone dla końców przedziału całkowania.

- **Obliczanie całki oznaczonej z funkcji elementarnej z wykorzystaniem podstawowych wzorów i reguł rachunku całkowego.**

Przykład 2.1.1

Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza oraz własności całek, obliczyć całki oznaczone.

- a) $\int_2^4 5x^3 dx$
- b) $\int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 1)dx$
- c) $\int_0^\pi \sin x dx$
- d) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + 2x + e^x\right) dx$

Rozwiązanie:

a) $\int_2^4 5x^3 dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int 5x^3 dx = 5 \int x^3 dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + c = \frac{5}{4}x^4 + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_2^4 5x^3 dx = \left[\frac{5}{4} x^4 \right]_2^4 = \frac{5}{4} \cdot 4^4 - \frac{5}{4} \cdot 2^4 = \frac{5}{4} \cdot (4^4 - 2^4) = \\ = \frac{5}{4} \cdot (256 - 16) = 300$$

b) $\int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 1) dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int (x^3 + 3x + 1) dx = \int x^3 dx + 3 \int x dx + \int dx = \\ = \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c = \frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 + x + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 3x + 1) dx = \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^2 + x \right]_{-1}^1 = \\ = \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 1 \right) = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

c) $\int_0^\pi \sin x dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = \\ = -(\cos \pi) + (\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$$

d) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x} + 2x + e^x \right) dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int \left(\frac{1}{x} + 2x + e^x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + 2 \int x dx + \int e^x dx = \\ = \ln|x| + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + e^x + c = \ln|x| + x^2 + e^x + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + 2x + e^x \right) dx &= [\ln|x| + x^2 + e^x]_1^3 = \\ &= (\ln 3 + 3^2 + e^3) - (\ln 1 + 1^2 + e^1) = \\ &= \ln 3 + 9 + e^3 - \ln 1 - 1 - e = \ln 3 + e^3 - e + 8 \end{aligned}$$

- **Obliczanie całki oznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez części.**

Jeżeli wyrażenie podcałkowe w całce oznaczonej wymaga zastosowania całkowania przez części, można najpierw obliczyć tę całkę jako nieoznaczoną, wykorzystując metodę omówioną w punkcie 1.3 niniejszego opracowania, stosując wzór (1.6), a następnie odjąć od siebie wartości funkcji pierwotnej obliczone dla końców przedziału całkowania.

Przykład 2.1.2

Obliczyć całki oznaczone.

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$
- $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx$
- $\int_1^3 x^3 \cdot e^x \, dx$
- $\int_1^e \ln|x| \, dx$

Rozwiązanie:

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji elementarnych i należy zastosować metodę całkowania przez części.

$$\begin{aligned} \int x \cdot \cos x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos x \\ u' = 1 \quad v = \sin x \end{array} \right) = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = \\ &= x \cdot \sin x + \cos x + c \end{aligned}$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx &= [x \cdot \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(\frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) - (0 \cdot \sin 0 + \cos 0) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0\right) - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

b) $\int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji elementarnych i należy zastosować metodę całkowania przez części.

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sin x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = \sin x \\ u' = 2x \quad v = -\cos x \end{array} \right) = \\ &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) \, dx = \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2 \int x \cdot \cos x \, dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos x \\ u' = 1 \quad v = \sin x \end{array} \right) = -x^2 \cdot \cos x + 2 \left(x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx \right) = \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2(x \cdot \sin x + \cos x) + c = \\ &= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \sin x \, dx &= [-x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cos x]_0^{\pi} = \\ &= (-\pi^2 \cdot \cos \pi + 2\pi \cdot \sin \pi + 2 \cos \pi) \\ &\quad - (0^2 \cdot \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 + 2 \cos 0) = \\ &= (-\pi^2 \cdot (-1) + 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot (-1)) - (0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \\ &= \pi^2 - 2 - 2 = \pi^2 - 4 \end{aligned}$$

c) $\int_1^3 x^3 \cdot e^x \, dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji elementarnych i należy zastosować metodę całkowania przez części.

$$\begin{aligned} \int x^3 \cdot e^x \, dx &= \left(\begin{array}{l} u = x^3 \quad v' = e^x \\ u' = 3x^2 \quad v = e^x \end{array} \right) = x^3 \cdot e^x - \int 3x^2 \cdot e^x \, dx = \\ &= x^3 \cdot e^x - 3 \int x^2 \cdot e^x \, dx = \left(\begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = e^x \\ u' = 2x \quad v = e^x \end{array} \right) = \\ &= x^3 \cdot e^x - 3 \left(x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x \, dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^3 \cdot e^x - 3 \left[x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx \right] = \begin{pmatrix} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{pmatrix} \\
&= x^3 \cdot e^x - 3 \left[x^2 \cdot e^x - 2 \left(x \cdot e^x - \int e^x dx \right) \right] = \\
&= x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x + c
\end{aligned}$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x^3 \cdot e^x dx &= [x^3 \cdot e^x - 3x^2 \cdot e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x]_1^3 = \\
&= (3^3 \cdot e^3 - 3 \cdot 3^2 \cdot e^3 + 6 \cdot 3 \cdot e^3 - 6e^3) - \\
&\quad - (1^3 \cdot e^1 - 3 \cdot 1^2 \cdot e^1 + 6 \cdot 1 \cdot e^1 - 6e^1) = \\
&= (27e^3 - 27e^3 + 18e^3 - 6e^3) - (e - 3e + 6e - 6e) = \\
&= 12e^3 + 2e = 2e \cdot (6e^2 + 1)
\end{aligned}$$

d) $\int_1^e \ln|x| dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że w wyrażeniu podcałkowym trzeba utworzyć iloczyn dwóch funkcji elementarnych $1 \cdot \ln|x|$, a następnie zastosować metodę całkowania przez części.

$$\begin{aligned}
\int 1 \cdot \ln|x| dx &= \begin{pmatrix} u = \ln|x| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{pmatrix} = \\
&= x \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \cdot \ln|x| - \int dx = x \cdot \ln|x| - x + c
\end{aligned}$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln|x| dx &= [x \cdot \ln|x| - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = \\
&= (e \cdot 1 - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 1
\end{aligned}$$

- **Obliczanie całki oznaczonej z wykorzystaniem metody całkowania przez podstawianie.**

Jeżeli wyrażenie podcałkowe w całce oznaczonej wymaga zastosowania całkowania przez podstawianie, można najpierw obliczyć tę całkę jako nieoznaczoną, wykorzystując metodę omówioną w punkcie 1.4 niniejszego opracowania, stosując wzór (1.7), a następnie odjąć od siebie wartości funkcji pierwotnej obliczone dla końców przedziału całkowania.

Przykład 2.1.3

Obliczyć całki oznaczone.

a) $\int_0^1 e^{-x} dx$

b) $\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx$

c) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x}}$

d) $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3-1} dx$

Rozwiązanie:

a) $\int_0^1 x \cdot e^{-x} dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest funkcją złożoną i należy zastosować metodę całkowania przez podstawianie.

$$\int e^{-x} dx = \left(\begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \\ dx = -dt \end{array} \right) = \int e^t dt = e^t + c = e^{-x} + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_0^1 e^{-x} dx = [e^{-x}]_0^1 = e^{-1} - e^0 = \frac{1}{e} - 1$$

b) $\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest iloczynem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną i należy zastosować metodę całkowania przez podstawianie.

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \left(\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_0^2 x \cdot e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^2 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^4 - 1)$$

c) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x}}$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną i należy zastosować metodę całkowania przez podstawianie.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x}} = \left(\begin{array}{l} t = 3-x \\ dt = -dx \\ dx = -dt \end{array} \right) = - \int \frac{1}{\sqrt[5]{t}} dt = - \int t^{-\frac{1}{5}} dt = -\frac{5}{4} t^{\frac{4}{5}} + c =$$

$$= -\frac{5}{4} \sqrt[5]{t^4} + c = -\frac{5}{4} \sqrt[5]{(3-x)^4} + c$$

Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-x}} = \left[-\frac{5}{4} \sqrt[5]{(3-x)^4} \right]_2^3 = -\frac{5}{4} \left[\sqrt[5]{(3-3)^4} - \sqrt[5]{(3-2)^4} \right] =$$

$$= -\frac{5}{4} \cdot (-1) = \frac{5}{4}$$

d) $\int_0^2 \frac{x^2}{x^3-1} dx$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną, zauważając, że wyrażenie podcałkowe jest ilorazem dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną i należy zastosować metodę całkowania przez podstawianie.

$$\int \frac{x^2}{x^3-1} dx = \left(\begin{array}{l} t = x^3 - 1 \\ dt = 3x^2 dx \\ dx = \frac{dt}{3x^2} \end{array} \right) = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln|t| + c = \frac{1}{3} \ln|x^3 - 1| + c$$

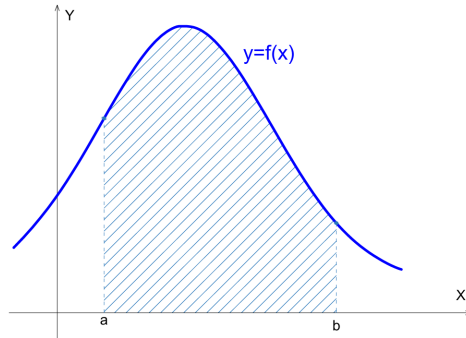
Do funkcji pierwotnej (z pominięciem stałej całkowania c), uzyskanej w wyniku obliczenia całki nieoznaczonej, należy wstawić granice całkowania.

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x^3-1} dx = \left[\frac{1}{3} \ln|x^3-1| \right]_0^2 = \frac{1}{3} [\ln|2^3-1| - \ln|0^3-1|] =$$

$$= \frac{1}{3} [\ln 7 - \ln 1] = \frac{1}{3} \ln 7$$

2.2. Pole trapezu krzywoliniowego

Obszar wycięty z płaszczyzny i zawarty w prostokątnym układzie współrzędnych może być utworzony poprzez krzywe liniowe, kwadratowe, trygonometryczne lub inne krzywe wielomianowe. Figurę ograniczoną wykresem funkcji $f(x)$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną na przedziale domkniętym $[a, b]$, prostymi $x = a$, $x = b$ oraz prostą $y = 0$ nazywa się trapezem krzywoliniowym.



Rys. 2.7. Trapez krzywoliniowy

Pole obszaru zawartego między wykresem funkcji $f(x)$ a osią OX na przedziale domkniętym $[a, b]$ można z łatwością obliczyć przy użyciu całki oznaczonej, gdzie granice całkowania stanowią krańce przedziału $[a, b]$, a funkcją podcałkową jest funkcja $f(x)$, zgodnie ze wzorem (2.7).

$$P = \int_a^b f(x) dx \quad (2.7)$$

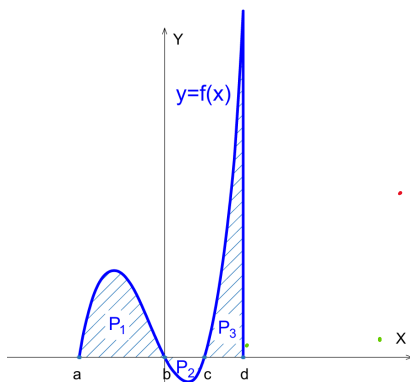
Trzeba przy tym pamiętać, że obszar, którego pole należy obliczyć, może znajdować się pod osią OX (dla $f(x) \leq 0$). Wówczas całka liczona zgodnie ze wzorem (2.7) wyjdzie ujemna. Pamiętając jednak o tym, że pole figury nie może być ujemne, należy temu zapobiec, poprzedzając liczoną całkę „minusem”. Wówczas wzór przyjmuje postać jak w (2.8).

$$P = - \int_a^b f(x) dx \quad (2.8)$$

W przypadku, gdy wykres funkcji $f(x)$ przecina oś OX w środku przedziału $[a, b]$, a zatem jego część obszaru ograniczonego krzywą znajduje się pod osią OX , a część nad osią OX , bezpieczniej jest przyjąć wzór (2.9).

$$P = \int_a^b |f(x)| dx \quad (2.9)$$

Zakładając, że trapez krzywoliniowy został wyznaczony przez funkcję $f(x)$ na przedziale domkniętym $[a, d]$ (jak na rysunku 2.8.), można też podzielić przedział $[a, d]$ na części i wyliczyć odpowiednie sumy.



Rys. 2.8. Trapez krzywoliniowy składający się z trzech obszarów

W takim przypadku pole zaznaczonego obszaru jest sumą $P = P_1 + P_2 + P_3$, gdzie:

$$P_1 = \int_a^b f(x) dx$$

$$P_2 = - \int_b^c f(x) dx$$

$$P_3 = \int_c^d f(x) dx$$

- **Obliczanie pola trapezu krzywoliniowego na danym przedziale z wykorzystaniem całki oznaczonej.**

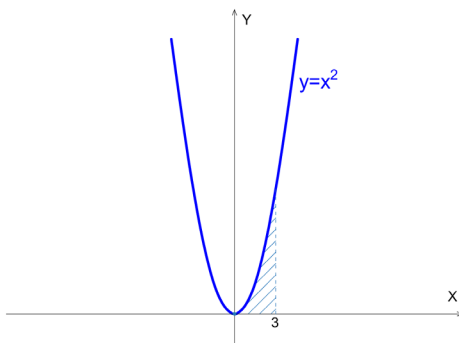
Przykład 2.2.1

- Obliczyć pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego krzywą $y = x^2$ na przedziale $[0, 3]$.
- Obliczyć pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego krzywą $y = \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$.
- Obliczyć pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego krzywą $y = -2x - 8$ i osią OY .
- Obliczyć pole trapezu krzywoliniowego ograniczonego krzywą $y = x^3 + x^2 - 2x$ na przedziale $[-2, 2]$.

Rozwiązanie:

a) $y = x^2$ na przedziale $[0, 3]$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $y = x^2$ i zaznaczyć właściwy trapez krzywoliniowy na przedziale $[0, 3]$.



$$P = \int_0^3 x^2 dx$$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

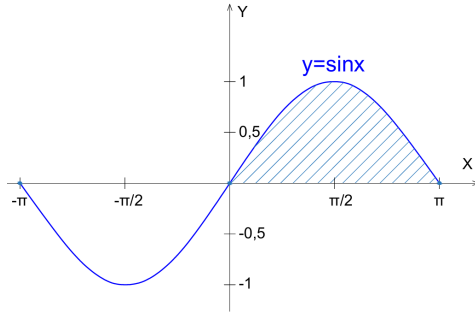
$$\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{27}{3} - 0 = 9$$

Stąd:

$$P = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = 9 \quad (j)^2$$

b) $y = \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $y = \sin x$ i zaznaczyć właściwy trapez krzywoliniowy na przedziale $[0, \pi]$.



$$P = \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$[-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

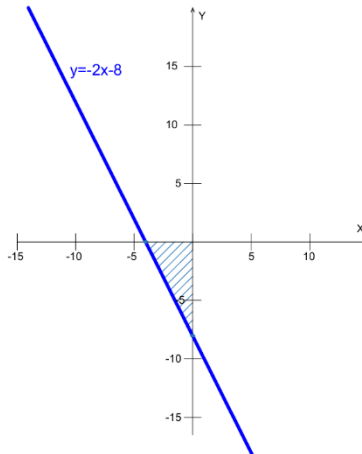
Stąd:

$$P = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) =$$

$$= -(-1) + 1 = 1 + 1 = 2 \quad (j)^2$$

c) $y = -2x - 8$ i oś OY

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $y = -2x - 8$ i zaznaczyć właściwy trapez krzywoliniowy.



Tym razem nie ma podanych granic całkowania. Informacja, że z jednej strony ten obszar ogranicza oś OY , wskazuje, że jeden z krańców przedziału wynosi 0. Znalezienie drugiego sprowadza się do obliczenia miejsca zerowego funkcji liniowej $y = -2x - 8$.

$$-2x - 8 = 0$$

$$x = -4$$

Wiadomo już, że szukana granica całkowania wynosi -4 . Ponadto należy zauważyć, że trapez krzywoliniowy znajduje się pod osią OX , co oznacza, że obliczaną całkę oznaczoną należy poprzedzić „minusem”.

Zatem:

$$P = - \int_{-4}^0 (-2x - 8) dx$$

Najpierw można obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\begin{aligned} & - \int (-2x - 8) dx = \\ & = 2 \int x dx + 8 \int dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + 8x + c = x^2 + 8x + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

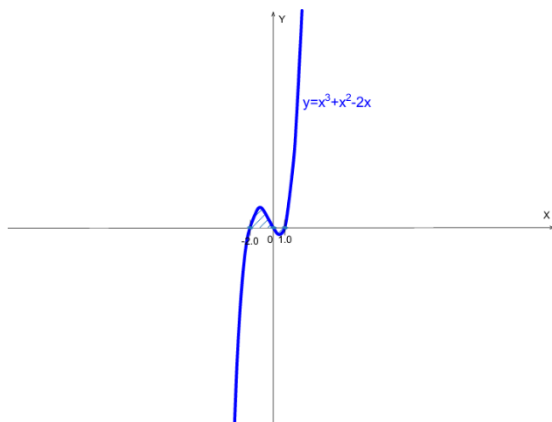
$$[x^2 + 8x]_{-4}^0 = (0^2 + 8 \cdot 0) - ((-4)^2 + 8 \cdot (-4)) = -(16 - 32) = 16$$

Stąd:

$$\begin{aligned} P & = - \int_{-4}^0 (-2x - 8) dx = [x^2 + 8x]_{-4}^0 = \\ & = (0^2 + 8 \cdot 0) - ((-4)^2 + 8 \cdot (-4)) = -(16 - 32) = 16 \quad (j)^2 \end{aligned}$$

d) $y = x^3 + x^2 - 2x$ na przedziale $[-2, 2]$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $y = x^3 + x^2 - 2x$ i zaznaczyć właściwy trapez krzywoliniowy na przedziale $[-2, 2]$.



Funkcja $y = x^3 + x^2 - 2x$ ma trzy miejsca zerowe, które wskazują granice całkowania. Należy je wyznaczyć (a nie odczytać z wykresu) w następujący sposób:

$$0 = x^3 + x^2 - 2x$$

$$x \cdot (x^2 + x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Ustawiając kolejno miejsca zerowe, można wskazać granice całkowania: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Jednak obszar, którego pole trzeba obliczyć, wskazany jest do $x_4 = 2$. Ponadto należy zauważyć, że część trapezu krzywoliniowego na przedziale $[0, 1]$ znajduje się pod osią OX , co oznacza, że całkę oznaczoną liczoną na tym przedziale należy poprzedzić „minusem”.

Pole trapezu krzywoliniowego jest sumą trzech pól: $P = P_1 + P_2 + P_3$, gdzie:

$$P_1 = \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$P_2 = - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

$$P_3 = \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x) dx$$

Należy zauważyć, że funkcja podcałkowa w każdej z trzech całek jest taka sama, zatem można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\begin{aligned} \int (x^3 + x^2 - 2x) dx &= \int x^3 dx + \int x^2 dx - 2 \int x dx = \\ &= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - x^2 + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania (dla każdego obszaru inne) i obliczyć pola obszarów P_1, P_2, P_3 .

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 = \\
 &= \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 + \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 \right) = \\
 &= 0 - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx = - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^1 = \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \\
 &= \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^4 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0^2 \right) = \frac{5}{12} - 0 = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

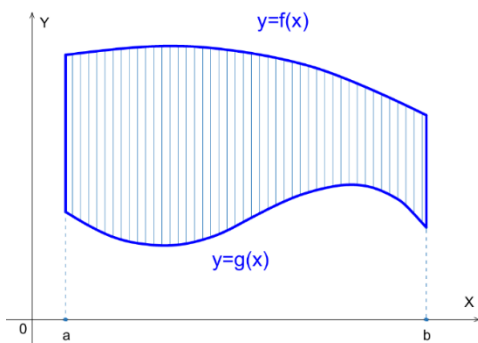
$$\begin{aligned}
 P_3 &= \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^2 = \\
 &= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 2^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1^2 \right) = \\
 &= \frac{8}{3} - \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} = \frac{37}{12}
 \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 + P_3 = \\
 &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 2x) dx - \int_0^1 (x^3 + x^2 - 2x) dx + \int_1^2 (x^3 + x^2 - 2x) dx = \\
 &= \frac{8}{3} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \frac{32}{12} + \frac{5}{12} + \frac{37}{12} = \frac{74}{12} = \frac{37}{6} \quad (j)^2
 \end{aligned}$$

2.3. Pole obszaru zawartego między dwiema krzywymi

Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są ciągłe na przedziale domkniętym $[a, b]$ oraz $g(x) \leq f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(x)$ i $g(x)$ oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem (2.10).

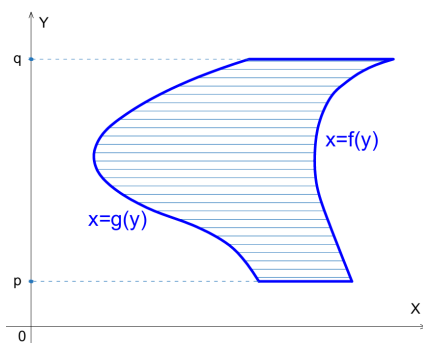


Rys. 2.9. Pole obszaru między funkcjami $f(x)$ i $g(x)$

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \quad (2.10)$$

$$P = \{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Z kolei, jeżeli funkcje $f(y)$ i $g(y)$ są ciągłe na przedziale domkniętym $[p, q]$ oraz $g(y) \leq f(y)$ dla każdego $y \in [p, q]$, to pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $f(y)$ i $g(y)$ oraz prostymi $y = p, y = q$ wyraża się wzorem (2.11).



Rys. 2.10. Pole obszaru między funkcjami $f(y)$ i $g(y)$

$$P = \int_p^q (f(y) - g(y)) dy \quad (2.11)$$

$$P = \{(x, y): p \leq y \leq q, g(y) \leq x \leq f(y)\}$$

- **Obliczanie pola obszaru ograniczonego krzywymi (wykresami funkcji) z wykorzystaniem całki oznaczonej.**

Przykład 2.3.1

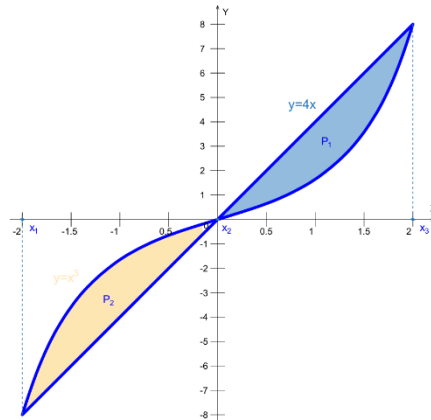
- Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = x^3$ i prostą $y = 4x$.
- Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = x^2 - 2x$ i prostą $y = 2x - 3$.

- c) Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.
d) Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami $y = \sin x$ i $y = \cos x$ na przedziale $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Rozwiązanie:

a) $y = x^3, y = 4x$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $y = x^3$ i prostej $y = 4x$.



Tym razem nie ma podanych granic całkowania. Ich znalezienie sprowadza się do wyznaczenia punktów przecięcia wykresów danych funkcji. W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}$$

$$y = 4x$$

$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 4) = 0$$

$$x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x - 2 = 0 \text{ lub } x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x = 2 \text{ lub } x = -2$$

Ustawiając kolejno miejsca zerowe, można wskazać granice całkowania: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$. Ponadto warto zauważyć, że obszar, którego pole należy obliczyć, składa się z dwóch obszarów zaznaczonych na rysunku jako P_1 i P_2 , przy czym P_2 znajduje się pod osią OX , co wskazuje, że całkę oznaczoną liczoną na tym przedziale należy poprzedzić „minusem”.

Można jednak zauważyć, że pola P_1 i P_2 są sobie równe, zatem wystarczy obliczyć tylko pole P_1 i uzyskany wynik pomnożyć przez 2, uzyskując w ten sposób pole całego obszaru wyznaczonego przez krzywe $y = x^3$ i $y = 4x$.

Zajmując się wyłącznie obszarem P_1 , należy rozważyć, która z podanych funkcji tworzy większy trapez krzywoliniowy zawarty między funkcją a osią OX na wskazanym przedziale. W tym przypadku jest to funkcja liniowa $y = 4x$ na przedziale $[0, 2]$. Jeśli druga funkcja $y = x^3$ tworzy mniejszy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na przedziale $[0, 2]$, to wystarczy odjąć jego pole od pola większego trapezu. W rachunku całkowym można to zapisać jako:

$$P_1 = \int_0^2 4x \, dx - \int_0^2 x^3 \, dx$$

Każdą z całek można obliczyć najpierw oddzielnie jako całki nieoznaczone, wyznaczając funkcje pierwotne.

$$\int 4x \, dx = 4 \int x \, dx = 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c = 2x^2 + c$$

$$\int x^3 \, dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

Pole obszaru P_1 można obliczyć, wstawiając granice całkowania do wyznaczonych funkcji pierwotnych (bez stałej całkowania c).

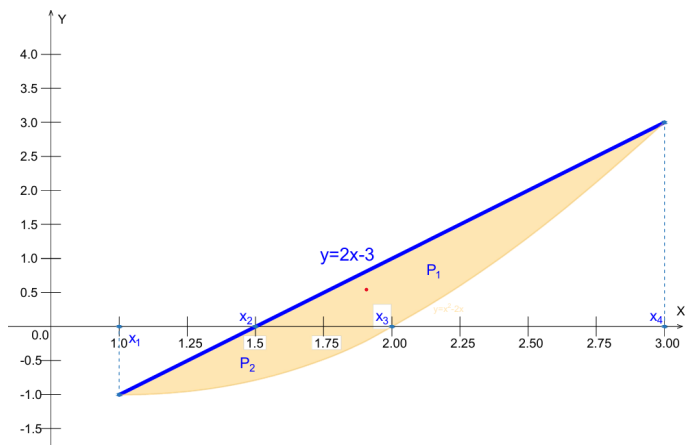
$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^2 4x \, dx - \int_0^2 x^3 \, dx = [2x^2]_0^2 - \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \\ &= (2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0^2) - \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 \right) = 8 - 4 = 4 \text{ (j)}^2 \end{aligned}$$

Pamiętając, że $P = P_1 + P_2$, przy czym $P_1 = P_2$, można zapisać, że:

$$P = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (j)}^2$$

b) $y = x^2 - 2x, y = 2x - 3$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $y = x^2 - 2x$ oraz prostej $y = 2x - 3$.



Należy zauważyć, że obszar, którego pole trzeba obliczyć, składa się z dwóch obszarów zaznaczonych na rysunku jako P_1 i P_2 , przy czym P_2 znajduje się pod osią OX , co wskazuje, że całkę oznaczoną liczoną na tym przedziale trzeba będzie poprzedzić „minusem”. Ważne jest jednak najpierw określenie, w jakich granicach należy te funkcje całkować. W tym celu należy obliczyć granice całkowania, którym odpowiadają punkty: x_1 , x_2 , x_3 , x_4 . Jak widać, x_1 i x_4 to punkty przecięcia wykresów danych funkcji.

W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = 2x - 3$$

$$x^2 - 2x - 2x + 3 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$$

$$x_4 = \frac{4+2}{2} = 3$$

Z kolei x_2 jest punktem przecięcia funkcji liniowej z osią OX , zatem wystarczy wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji.

$$0 = 2x - 3$$

$$2x = 3$$

Stąd:

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

Natomiast x_3 jest punktem przecięcia funkcji kwadratowej z osią OX , zatem wystarczy wyznaczyć miejsca zerowe tej funkcji, przy czym jedno z nich nie będzie tu potrzebne.

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x - 2) = 0$$

Stąd:

$x_0 = 0$, $x_3 = 2$, przy czym x_0 nie stanowi granicy całkowania (leży poza interesującym obszarem).

Mając wszystkie granice całkowania, można przystąpić do obliczania pól obszarów. Zajmując się najpierw obszarem P_1 , należy rozważyć, która z podanych funkcji tworzy większy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na wskazanym przedziale. W tym przypadku jest to funkcja liniowa $y = 2x - 3$ na przedziale $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$. Jeśli druga funkcja, $y = x^2 - 2x$, tworzy mniejszy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na przedziale $[2, 3]$, wystarczy odjąć jego pole od pola większego trapezu.

W rachunku całkowym można to zapisać jako:

$$P_1 = \int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3) dx - \int_2^3 (x^2 - 2x) dx$$

Każdą z całek można obliczyć najpierw oddzielnie jako całki nieoznaczone, wyznaczając funkcje pierwotne.

$$\int (2x - 3) dx = 2 \int x dx - 3 \int dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 3x + c = x^2 - 3x + c$$

$$\int (x^2 - 2x) dx = \int x^2 dx - 2 \int x dx = \frac{1}{3} x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c = \frac{1}{3} x^3 - x^2 + c$$

Pole obszaru P_1 można obliczyć, wstawiając granice całkowania do wyznaczonych funkcji pierwotnych (bez stałej całkowania c).

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3) dx - \int_2^3 (x^2 - 2x) dx = \\ &= [x^2 - 3x]_{\frac{3}{2}}^3 - \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 = \\ &= \left[(3^2 - 3 \cdot 3) - \left(\left(\frac{3}{2} \right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} \right) \right] - \left[(9 - 9) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \right] = \\ &= \left[0 - \left(\frac{9}{4} - \frac{18}{4} \right) \right] - \left[0 - \left(\frac{8}{3} - \frac{12}{3} \right) \right] = \frac{9}{4} - \frac{4}{3} = \frac{27}{12} - \frac{16}{12} = \frac{11}{12} \quad (j)^2 \end{aligned}$$

Przechodząc teraz do obszaru P_2 , należy rozważyć, która z podanych funkcji tworzy większy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na wskazanym przedziale. W tym przypadku jest to funkcja kwadratowa $y = x^2 - 2x$ na przedziale $[1, 2]$. Jeśli druga funkcja liniowa, $y = 2x - 3$, tworzy mniejszy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na przedziale $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, wystarczy odjąć jego pole od pola większego trapezu.

W rachunku całkowym można to zapisać jako:

$P_2 = - \left[\int_1^2 (x^2 - 2x) dx - \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - 3) dx \right]$, pamiętając, że całka jest poprzedzona „minusem” ze względu na to, że P_2 leży pod osią OX .

Każda z całek została obliczona wyżej jako całka nieoznaczona, zatem do wyznaczonych funkcji pierwotnych wystarczy wstawić granice całkowania.

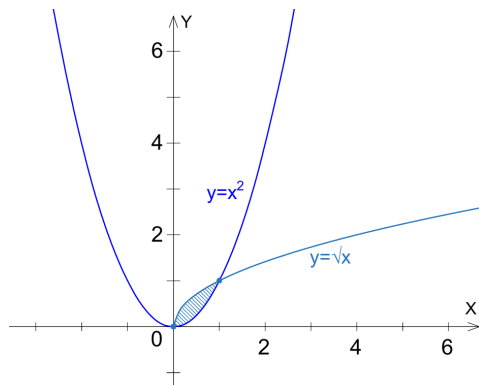
$$\begin{aligned} P_2 &= - \left[\int_1^2 (x^2 - 2x) dx - \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - 3) dx \right] = \\ &= - \left[\left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_1^2 - [x^2 - 3x]_1^{\frac{3}{2}} \right] = \\ &= - \left[\left(\frac{8}{3} - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2} \right) + (1 - 3) \right] = \\ &= - \left[-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{9}{4} - 2 \right] = - \left[-\frac{16}{12} + \frac{8}{12} + \frac{27}{12} - \frac{24}{12} \right] = 5 \text{ (j)}^2 \end{aligned}$$

Pamiętając, że $P = P_1 + P_2$, można zapisać:

$$P = \frac{11}{12} + 5 = \frac{71}{12} \text{ (j)}^2$$

c) $y = x^2, y = \sqrt{x}$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykresy krzywych $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.



Tym razem nie ma podanych granic całkowania. Ich znalezienie sprowadza się do wyznaczenia punktów przecięcia wykresów danych funkcji. W tym celu wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$x^2 = \sqrt{x}$$

Podnosząc obie strony do kwadratu, uzyskuje się:

$$x^4 = x$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x \cdot (x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^3 - 1 = 0$$

Stąd:

$$x_1 = 0 \text{ lub } x_2 = 1$$

Mając granice całkowania, można przystąpić do obliczania pola obszaru. Należy rozważyć, która z podanych funkcji tworzy większy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na wskazanym przedziale. W tym przypadku jest to funkcja $y = \sqrt{x}$ na przedziale $[0, 1]$. Ponieważ druga funkcja, $y = x^2$, tworzy mniejszy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na przedziale $[0, 1]$, wystarczy odjąć jego pole od pola większego trapezu.

W rachunku całkowym można to zapisać jako:

$$P = \int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx$$

Każdą z całek można obliczyć najpierw oddzielnie jako całki nieoznaczone, wyznaczając funkcje pierwotne.

$$\int \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 + c$$

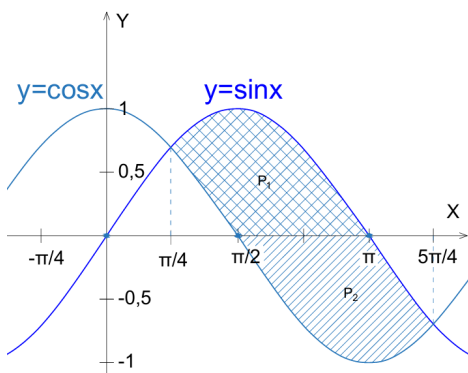
Wracając do obliczania pola obszaru P, należy wstawić granice całkowania do wyznaczonych funkcji pierwotnych (bez stałej całkowania c).

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} \sqrt{1^3} - \frac{2}{3} \sqrt{0^3} \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad (j)^2$$

d) $y = \sin x$, $y = \cos x$ na przedziale $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$

W celu wizualizacji obszaru, którego pole będzie liczone, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykresy krzywych $y = \sin x$ i $y = \cos x$.



Należy zauważyć, że obszar, którego pole trzeba obliczyć, składa się z dwóch obszarów zaznaczonych na rysunku jako P_1 i P_2 , przy czym P_2 znajduje się pod osią OX , co wskazuje, że całkę oznaczoną liczoną na tym przedziale trzeba będzie poprzedzić „minusem”. Można jednak zauważyć, że obszary P_1 i P_2 są sobie równe, co oznacza, że wystarczy obliczyć pole obszaru P_1 i uzyskany wynik pomnożyć przez 2, uzyskując w ten sposób pole całego obszaru wyznaczonego przez krzywe $y = \sin x$ i $y = \cos x$.

Zajmując się wyłącznie obszarem P_1 należy rozważyć, która z podanych funkcji tworzy większy trapez krzywoliniowy zawarty między funkcją a osią OX na wskazanym przedziale. W tym przypadku jest to funkcja $y = \sin x$ na przedziale $\left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$. Jeśli druga funkcja, $y = \cos x$, tworzy mniejszy trapez krzywoliniowy zawarty między nią a osią OX na przedziale $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$, wystarczy odjąć jego pole od pola większego trapezu. W rachunku całkowym można to zapisać jako:

$$P_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

Każdą z całek można obliczyć najpierw oddzielnie jako całki nieoznaczone, wyznaczając funkcje pierwotne.

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

Pole obszaru P_1 można obliczyć, wstawiając granice całkowania do wyznaczonych funkcji pierwotnych (bez stałej całkowania c).

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= (-\cos \pi - (-\cos \frac{\pi}{4})) - (\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4}) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \sqrt{2} \text{ (j)}^2 \end{aligned}$$

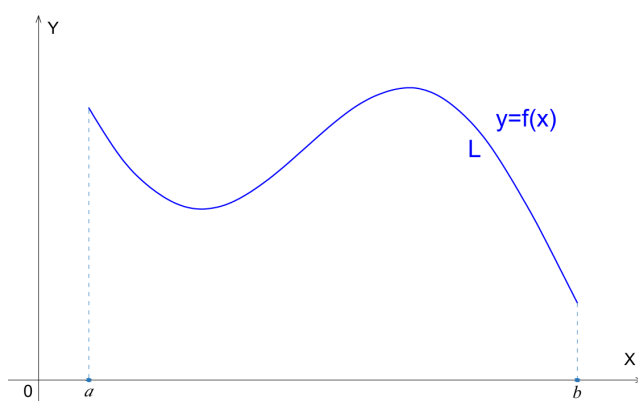
Pamiętając, że $P = P_1 + P_2$, przy czym $P_1 = P_2$, można zapisać, że:

$$P = 2 \cdot P_1 = 2\sqrt{2} \text{ (j)}^2$$

2.4. Długość łuku krzywej

W wielu praktycznych zastosowaniach całki oznaczonej kluczową rolę odgrywa możliwość obliczenia długości fragmentu wykresu funkcji, a zatem długości łuku krzywej, na określonym przedziale. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła i ma ciągłą pochodną na przedziale domkniętym $[a, b]$, to długość łuku krzywej $L = \{(x, f(x)): x \in [a, b]\}$ wyraża się wzorem (2.12).

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx \quad (2.12)$$



Rys. 2.11. Długość łuku krzywej $y = f(x)$ na odcinku $[a, b]$

- Obliczanie długości łuku krzywej na danym przedziale z wykorzystaniem całki oznaczonej.

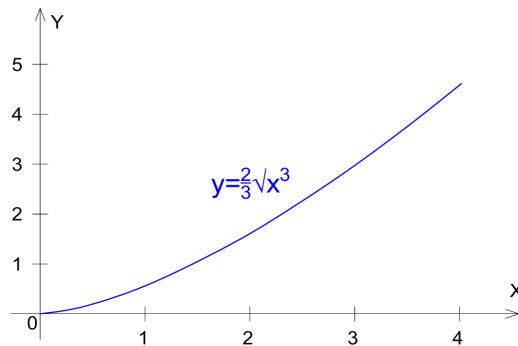
Przykład 2.4.1

- Obliczyć długość łuku krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ dla $x \in [0, 1]$.
- Obliczyć długość łuku krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$ dla $x \in [1, 2]$.
- Obliczyć długość łuku krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ dla $x \in [-1, 1]$.
- Obliczyć długość łuku krzywej będącej wykresem funkcji $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ dla $x \in [0, 5]$.

Rozwiązanie:

a) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, $x \in [0, 1]$

W celu wizualizacji łuku, którego długość będzie liczona, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$.



Do obliczenia długości łuku krzywej $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ na danym przedziale $[0, 1]$ wykorzystany zostanie wzór (2.12). Można dla ułatwienia wykonywać obliczenia fragmentami.

Na początku można obliczyć pochodną funkcji $f(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

W kolejnym kroku obliczoną pochodną należy podnieść do kwadratu.

$$[f'(x)]^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

Następnie obliczony kwadrat pochodnej trzeba dodać do 1, uzyskując wyrażenie podpierwiastkowe.

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + x$$

Uzyskaną funkcję należy wstawić pod pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + x}$$

W kolejnym kroku trzeba obliczyć całkę nieoznaczoną z powyższej funkcji. Z uwagi, że jest to funkcja złożona, należy zastosować metodę całkowania przez podstawianie.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \int \sqrt{1 + x} dx = \left(\begin{array}{l} t = 1 + x \\ dt = dx \\ dx = dt \end{array} \right) = \\ &= \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + x)^3} + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

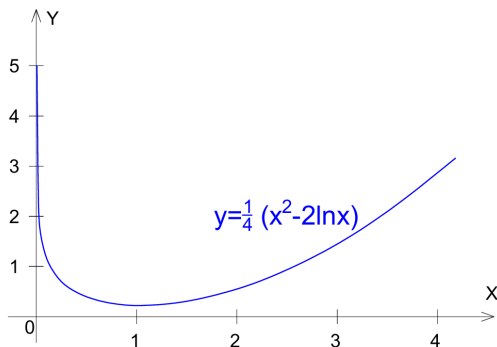
$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{(1 + x)^3} \right]_0^1 = \\ &= \left(\frac{2}{3} \sqrt{(1 + 1)^3} \right) - \left(\frac{2}{3} \sqrt{(1 + 0)^3} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{8} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \left[\frac{2}{3} \sqrt{(1 + x)^3} \right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} \quad (j)$$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$, $x \in [1, 2]$

W celu wizualizacji łuku, którego długość będzie liczona, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$.



Do obliczenia długości łuku krzywej $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)$ na danym przedziale $[1, 2]$ wykorzystany zostanie wzór (2.12). Można dla ułatwienia wykonywać obliczenia fragmentami.

Na początku można obliczyć pochodną funkcji $f(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}(x^2 - 2\ln x)\right)' = \frac{1}{4}\left(2x - 2 \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2-1}{2x}$$

W kolejnym kroku obliczoną pochodną należy podnieść do kwadratu.

$$[f'(x)]^2 = \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2 = \frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}$$

Następnie obliczony kwadrat pochodnej trzeba dodać do 1, uzyskując wyrażenie podpierwiastkowe.

$$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2} = \frac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{4x^2} = \\ &= \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{4x^2} = \left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^2 \end{aligned}$$

Uzyskaną funkcję należy wstawić pod pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2} = \frac{x^2+1}{2x}$$

W kolejnym kroku trzeba obliczyć całkę nieoznaczoną z powyższej funkcji.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \int \frac{x^2+1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln|x| + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

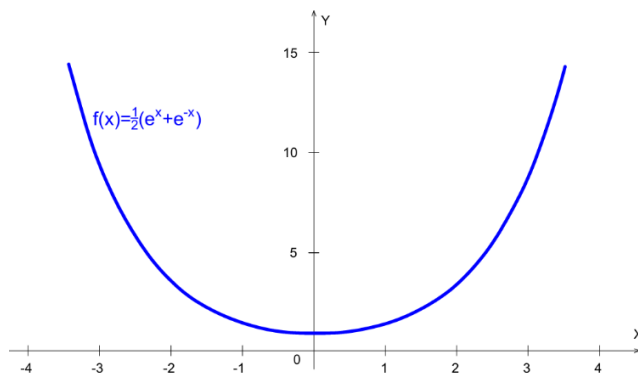
$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln|x|\right]_1^2 = \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \ln 2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \ln 1\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \ln 2\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \ln|x|\right]_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \quad (j)$$

c) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), [-1, 1]$

W celu wizualizacji łuku, którego długość będzie liczona, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.



Do obliczenia długości łuku krzywej $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ na danym przedziale $[-1, 1]$ wykorzystany zostanie wzór (2.12). Można dla ułatwienia wykonywać obliczenia fragmentami.

Na początku można obliczyć pochodną funkcji $f(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

W kolejnym kroku obliczoną pochodną należy podnieść do kwadratu.

$$\begin{aligned} [f'(x)]^2 &= \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \end{aligned}$$

Następnie obliczony kwadrat pochodnej trzeba dodać do 1, uzyskując wyrażenie podpierwiastkowe.

$$\begin{aligned} 1 + [f'(x)]^2 &= 1 + \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 \end{aligned}$$

Uzyskaną funkcję należy wstawić pod pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

W kolejnym kroku trzeba obliczyć całkę nieoznaczoną z powyższej funkcji.

$$\int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int e^x dx + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x} + c = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_{-1}^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1}) \right) - \left(\frac{1}{2}(e^{-1} - e^1) \right) =$$

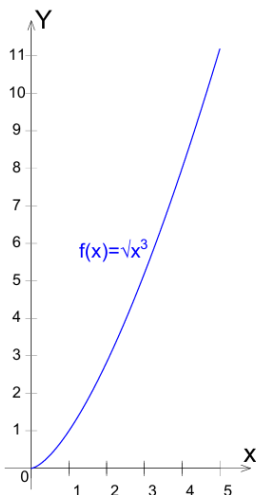
$$= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + e \right) = \frac{1}{2} \left(2e - \frac{2}{e} \right) = e - \frac{1}{e}$$

Stąd:

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} \quad (j)$$

d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $[0, 5]$

W celu wizualizacji łuku, którego długość będzie liczona, warto naszkicować w prostokątnym układzie współrzędnych wykres krzywej $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$.



Do obliczenia długości łuku krzywej $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ na danym przedziale $[0, 5]$ wykorzystany zostanie wzór (2.12). Można dla ułatwienia wykonywać obliczenia fragmentami.

Na początku można obliczyć pochodną funkcji $f(x)$.

$$f'(x) = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

W kolejnym kroku obliczoną pochodną należy podnieść do kwadratu.

$$[f'(x)]^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2 = \frac{9}{4}x$$

Następnie obliczony kwadrat pochodnej trzeba dodać do 1, uzyskując wyrażenie podpierwiastkowe.

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{9}{4}x$$

Uzyskaną funkcję należy wstawić pod pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$$

W kolejnym kroku trzeba obliczyć całkę nieoznaczoną z powyższej funkcji. Z uwagi, że jest to funkcja złożona, należy zastosować metodę całkowania przez podstawianie.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \begin{pmatrix} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ dt = \frac{9}{4}dx \\ dx = \frac{4}{9}dt \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4}{9} \int \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + c = \\ &= \frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_0^5 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \left[\frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^5 = \\ &= \left(\frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 5\right)^3} \right) - \left(\frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 0\right)^3} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{27} \left(\sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^3} - \sqrt{1^3} \right) = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{343}{8} - 1 \right) = \frac{8}{27} \cdot \frac{335}{8} = \frac{335}{27}$$

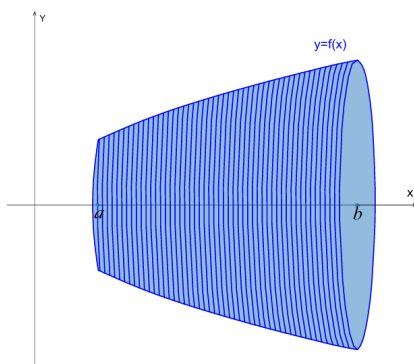
Stąd:

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \left[\frac{8}{27} \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3} \right]_0^5 = \frac{335}{27} \quad (i)$$

2.5. Objętość bryły obrotowej

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieujemna i ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, a jej pochodna również jest funkcją ciągłą, wtedy objętość V bryły powstałej z obrotu funkcji $f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, wokół osi OX wyraża się wzorem (2.13).

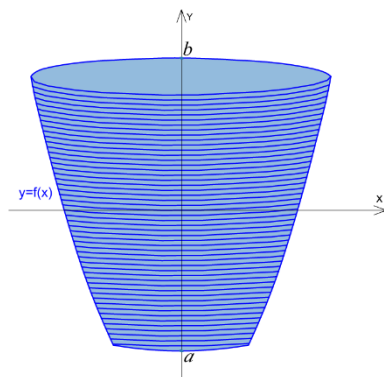
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (2.13)$$



Rys. 2.12. Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX na odcinku $[a, b]$

Natomiast jeżeli wykres funkcji $f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, a $a \geq 0$, obraca się wokół osi OY , wówczas objętość V powstałej bryły wyraża się wzorem (2.14).

$$V = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad (2.14)$$



Rys. 2.13. Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OY na odcinku $[a, b]$

- **Obliczanie objętości bryły obrotowej na danym przedziale z wykorzystaniem całki oznaczonej.**

Przykład 2.5.1

- Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $f(x) = \sqrt{\ln x}$ wokół osi OX na przedziale $[1, e]$.
- Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ wokół osi OX na przedziale $[0, 4]$.
- Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $f^2(x) = 4x$ wokół osi OX na przedziale $[0, 2]$.
- Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót krzywej $f(x) = \sqrt{4x}$ wokół osi OY na przedziale $[0, 2]$.

Rozwiązanie:

- $f(x) = \sqrt{\ln x}$ wokół osi OX , $[1, e]$

Do obliczenia objętości bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = \sqrt{\ln x}$ wokół osi OX na przedziale $[1, e]$ wykorzystany zostanie wzór (2.13). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku można obliczyć kwadrat funkcji $f(x)$.

$$[f(x)]^2 = [\sqrt{\ln x}]^2 = \ln x$$

W kolejnym kroku należy obliczyć całkę nieoznaczoną z uzyskanego kwadratu funkcji $f(x)$. Z uwagi na rodzaj funkcji podcałkowej trzeba zastosować całkowanie przez części.

$$\begin{aligned} & \int [f(x)]^2 dx \\ &= \int \ln x \, dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{pmatrix} = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \\ &= x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_1^e [f(x)]^2 dx &= [x \cdot \ln x - x]_1^e = (e \cdot \ln e - e) - (1 \cdot \ln 1 - 1) = \\ &= (e - e) - (0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$V = \pi \int_1^e [f(x)]^2 dx = \pi \cdot [x \cdot \ln x - x]_1^e = \pi (j^3)$$

b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ wokół osi OX , $[0, 4]$

Do obliczenia objętości bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ wokół osi OX na przedziale $[0, 4]$ wykorzystany zostanie wzór (2.13). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku można obliczyć kwadrat funkcji $f(x)$.

$$[f(x)]^2 = [\sqrt{x} \cdot e^{-x}]^2 = x \cdot e^{-2x}$$

W kolejnym kroku należy obliczyć całkę nieoznaczoną z uzyskanego kwadratu funkcji $f(x)$. Z uwagi na rodzaj funkcji podcałkowej trzeba zastosować całkowanie przez części (przy czym całkę z v' należy obliczyć przez podstawianie).

$$\begin{aligned} \int [f(x)]^2 dx &= \int x \cdot e^{-2x} \, dx = \begin{pmatrix} u = x & v' = e^{-2x} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{2} e^{-2x} \end{pmatrix} = \\ &= x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_0^4 [f(x)]^2 dx &= \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^4 = \\ &= \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 4 \cdot e^{(-2) \cdot 4} - \frac{1}{4} e^{(-2) \cdot 4} \right) - \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 \cdot e^{(-2) \cdot 0} - \frac{1}{4} e^{(-2) \cdot 0} \right) = \\ &= -\frac{2}{e^8} + \frac{1}{4e^8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Stąd:

$$V = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 dx = \pi \cdot \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right]_0^4 = \left(-\frac{2}{e^8} + \frac{1}{4e^8} + \frac{1}{4} \right) \pi \text{ (j}^3\text{)}$$

c) $f^2(x) = 4x$ wokół osi OX , $[0, 2]$

Do obliczenia objętości bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = \sqrt{4x}$ wokół osi OX na przedziale $[0, 2]$ wykorzystany zostanie wzór (2.13). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku można obliczyć kwadrat funkcji $f(x)$.

$$[f(x)]^2 = [\sqrt{4x}]^2 = 4x$$

W kolejnym kroku należy obliczyć całkę nieoznaczoną z uzyskanego kwadratu funkcji $f(x)$.

$$\int [f(x)]^2 dx = \int 4x dx = 4 \int x dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} + c = 2x^2 + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\int_0^2 [f(x)]^2 dx = [2x^2]_0^2 = (2 \cdot 2^2) - (2 \cdot 0^2) = 8$$

Stąd:

$$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx = \pi \cdot [2x^2]_0^2 = 8\pi \text{ (j}^3\text{)}$$

d) $f(x) = \sqrt{4x}$ wokół osi OY , $[0, 2]$

Do obliczenia objętości bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = \sqrt{4x}$ wokół osi OY na przedziale $[0, 2]$ wykorzystany zostanie wzór (2.14). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku należy obliczyć całkę nieoznaczoną z iloczynu x i funkcji $f(x)$.

$$\int x \cdot f(x) dx = \int x \cdot \sqrt{4x} dx = \int \sqrt{4x^3} dx =$$

$$= 2 \int \sqrt{x^3} dx = 2 \cdot \int x^{\frac{3}{2}} dx = 2 \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\int_0^2 x \cdot [f(x)]^2 dx = \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 = \left(\frac{4}{3} \cdot 2^3 \right) - \left(\frac{4}{3} \cdot 0^3 \right) = \frac{32}{3}$$

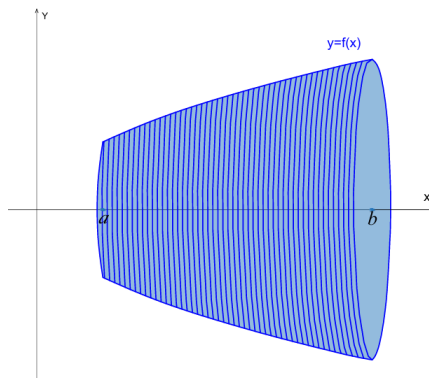
Stąd:

$$V = 2\pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx = 2\pi \cdot \left[\frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{64}{3} \pi \text{ (j}^3\text{)}$$

2.6. Pole powierzchni bryły obrotowej

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest nieujemna i ciągła na przedziale domkniętym $[a, b]$, a jej pochodna również jest funkcją ciągłą, na odcinku $[a, b]$, wtedy pole powierzchni S bryły powstałej z obrotu wykresu funkcji $f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, wokół osi OX wyraża się wzorem (2.15).

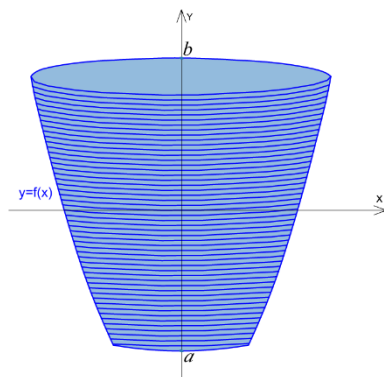
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2.15)$$



Rys. 2.14. Pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX

Natomiast jeżeli wykres funkcji $f(x)$, gdzie $x \in [a, b]$, $a \geq 0$, obraca się wokół osi OY , wówczas pole powierzchni S powstałej bryły wyraża się wzorem (2.16).

$$S = 2\pi \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (2.16)$$



Rys. 2.15. Pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OY na odcinku $[a, b]$

- **Obliczanie pola powierzchni bryły obrotowej na danym przedziale z wykorzystaniem całki oznaczonej.**

Przykład 2.6.1

- Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej $f(x) = 3x + 2$ wokół osi OX na przedziale $[0, 4]$.
- Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej $f(x) = 2x - 1$ wokół osi OY na przedziale $[1, 3]$.
- Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej $x^2 + y^2 = r^2$ wokół osi OX na przedziale $[-r, r]$.
- Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót krzywej $f(x) = \frac{r}{h}x$ wokół osi OX na przedziale $[0, h]$.

Rozwiązanie:

- $f(x) = 3x + 2$ wokół osi OX , $[0, 4]$

Do obliczenia pola powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = 3x + 2$ wokół osi OX na przedziale $[0, 4]$ wykorzystany zostanie wzór (2.15). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku należy obliczyć pochodną funkcji $f(x)$.

$$f'(x) = (3x + 2)' = 3$$

Następnie obliczoną pochodną trzeba podnieść do kwadratu.

$$[f'(x)]^2 = 3^2 = 9$$

W kolejnym kroku należy dodać 1 do obliczonego kwadratu pochodnej.

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + 9 = 10$$

Z uzyskanego wyniku należy obliczyć pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{10}$$

Kolejnym etapem jest obliczenie iloczynu funkcji $f(x)$ i otrzymanego w poprzednim kroku pierwiastka $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

$$f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = (3x + 2) \cdot \sqrt{10}$$

Z uzyskanej funkcji można teraz obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\begin{aligned} \int f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \int (3x + 2) \cdot \sqrt{10} \, dx = \sqrt{10} \int (3x + 2) \, dx = \\ &= \sqrt{10} \left(3 \int x \, dx + 2 \int dx \right) = \sqrt{10} \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) + c \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx &= \left[\sqrt{10} \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \right]_0^4 = \\ &= \sqrt{10} \left[\left(\frac{3}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 \right) - \left(\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \right) \right] = \\ &= \sqrt{10}(24 + 8) = 32\sqrt{10} \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^4 f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = 2\pi \cdot \left[\sqrt{10} \left(\frac{3}{2} x^2 + 2x \right) \right]_0^4 = \\ &= 2\pi \cdot \sqrt{10} = 64\sqrt{10} \pi \text{ (j}^2\text{)} \end{aligned}$$

b) $f(x) = 2x - 1$ wokół osi OY , $[1, 3]$

Do obliczenia pola powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = 2x - 1$ wokół osi OY na przedziale $[1, 3]$ wykorzystany zostanie wzór (2.16). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku należy obliczyć pochodną funkcji $f(x)$.

$$f'(x) = (2x - 1)' = 2$$

Następnie obliczoną pochodną trzeba podnieść do kwadratu.

$$[f'(x)]^2 = 2^2 = 4$$

W kolejnym kroku należy dodać 1 do obliczonego kwadratu pochodnej.

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + 4 = 5$$

Z uzyskanego wyniku należy obliczyć pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{5}$$

Kolejnym działaniem jest obliczenie iloczynu x i otrzymanego w poprzednim kroku pierwiastka $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

$$x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = x \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \cdot x$$

Z uzyskanej funkcji można teraz obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \int \sqrt{5} \cdot x \, dx = \sqrt{5} \int x \, dx = \sqrt{5} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} x^2 + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \left[\frac{\sqrt{5}}{2} x^2 \right]_1^3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 3^2 \right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1^2 \right) = \\ &= \frac{9\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Stąd:

$$S = 2\pi \int_1^3 x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \cdot \left[\frac{\sqrt{5}}{2} x^2 \right]_1^3 = 2\pi \cdot 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \pi \text{ (j}^2\text{)}$$

c) $x^2 + y^2 = r^2$ wokół osi OX , $[-r, r]$

Do obliczenia pola powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $x^2 + y^2 = r^2$ wokół osi OX na przedziale $[-r, r]$ wykorzystany zostanie wzór (2.15). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami. Na początku należałoby przekształcić wzór podanej funkcji tak, aby podać ją w postaci $y^2 = r^2 - x^2$, z czego można by następnie wyznaczyć $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Widać jednak, że nie jest to wygodna postać do dalszych obliczeń, dlatego w tym przypadku lepiej zróżniczkować podaną funkcję po zmiennej x w postaci, w jakiej jest dana. Otrzymuje się wówczas:

$$2x + 2yy' = 0$$

Stąd:

$$yy' = -x$$

W tym momencie można przejść do zapisania wyrażenia podpierwiastkowego ze wzoru (2.15), pamiętając, że $f'(x) = y'$ (ponieważ $f(x) = y$).

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + (y')^2$$

Wyrażenie podpierwiastkowe przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} y \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{y^2 + y^2 \cdot (y')^2} = \\ &= \sqrt{y^2 + (yy')^2} = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{r^2} = r \end{aligned}$$

Z uzyskanej funkcji można teraz obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\int r \, dx = r \int dx = r \cdot x + c$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\int_{-r}^r r \, dx = [r \cdot x]_{-r}^r = (r \cdot r) - (r \cdot (-r)) = r^2 + r^2 = 2r^2$$

Stąd:

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-r}^r f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = 2\pi \cdot [r \cdot x]_{-r}^r = 2\pi \cdot 2r^2 \\ &= 4\pi r^3 \quad (j^2) \end{aligned}$$

d) $f(x) = \frac{r}{h}x$ wokół osi OX , $[0, h]$

Do obliczenia pola powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $f(x) = \frac{r}{h}x$ wokół osi OX na przedziale $[0, h]$ wykorzystany zostanie wzór (2.15). Obliczenia można dla ułatwienia wykonywać fragmentami.

Na początku należy obliczyć pochodną funkcji $f(x)$, pamiętając, że r i h to stałe.

$$f'(x) = \left(\frac{r}{h}x\right)' = \frac{r}{h}$$

Następnie obliczoną pochodną trzeba podnieść do kwadratu.

$$[f'(x)]^2 = \left(\frac{r}{h}\right)^2 = \frac{r^2}{h^2}$$

W kolejnym kroku należy dodać 1 do obliczonego kwadratu pochodnej.

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{r^2}{h^2} = \frac{h^2 + r^2}{h^2}$$

Z uzyskanego wyniku należy obliczyć pierwiastek.

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}}$$

Kolejnym etapem jest obliczenie iloczynu funkcji $f(x)$ i otrzymanego w poprzednim kroku pierwiastka $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$.

$$f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \frac{r}{h} \cdot x \cdot \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} = x \cdot \sqrt{\frac{r^2(h^2 + r^2)}{h^4}} = x \cdot \frac{r}{h^2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$$

Z uzyskanej funkcji można teraz obliczyć całkę nieoznaczoną.

$$\begin{aligned}
 \int f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} &= \int \left(x \cdot \frac{r}{h^2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \right) dx = \\
 &= \int \left(\frac{r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \cdot x \right) dx = \frac{r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \int x dx = \\
 &= \frac{r}{h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \cdot \frac{x^2}{2} + c = \\
 &= \frac{r}{2h^2} \sqrt{h^2 + r^2} \cdot x^2 + c
 \end{aligned}$$

Do uzyskanej funkcji pierwotnej (bez stałej całkowania c) trzeba wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
 \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= \left[\frac{r}{2h^2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot x^2 \right]_0^h = \\
 &= \left[\left(\frac{r}{2h^2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot h^2 \right) - \left(\frac{r}{2h^2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \cdot 0^2 \right) \right] = \\
 &= \frac{rh^2}{2h^2} \cdot \sqrt{h^2 + r^2} = \frac{1}{2} r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}
 \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^h f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2} r \sqrt{h^2 + r^2} = \\
 &= \pi \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2} \text{ (j}^2\text{)}
 \end{aligned}$$

3. Pochodne funkcji dwóch zmiennych

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału trzeciego można bez trudu:

- podać definicję funkcji dwóch zmiennych i określić ich dziedzinę,
- podać definicję pochodnej cząstkowej pierwszego i drugiego rzędu oraz pochodnych cząstkowych mieszanych funkcji dwóch zmiennych,
- obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu oraz pochodne cząstkowe mieszane funkcji dwóch zmiennych,
- zastosować rachunek pochodnych funkcji dwóch zmiennych do wyznaczenia ekstremów lokalnych tych funkcji.

3.1. Pojęcie funkcji dwóch zmiennych

Do tej pory przedmiotem analizy były wyłącznie funkcje jednej zmiennej, których definicja jest dobrze znana i oznacza formalny zapis pewnej zależności pomiędzy określonymi zjawiskami, obiektami bądź wielkościami, przy określonych warunkach. Funkcją jednej zmiennej nazywa się tylko taką zależność, która każdemu elementowi z jednego zbioru przyporządkowuje dokładnie jeden element z drugiego zbioru. Interpretacją geometryczną funkcji jednej zmiennej były zatem punkty płaszczyzny, których współrzędne zostały utworzone z argumentów danej funkcji i ich wartości, czyli $(x, f(x))$ (lub prościej (x, y)).

Idąc jednak dalej, jeżeli każdemu punktowi (x, y) ze zbioru D jest przyporządkowana pewna liczba z ze zbioru Z , to można powiedzieć, że w zbiorze D została określona funkcja dwóch zmiennych x i y o wartościach z ze zbioru Z . Funkcja dwóch zmiennych jest zatem formalnym zapisem przyporządkowującym punktom płaszczyzny elementy zbioru liczb.

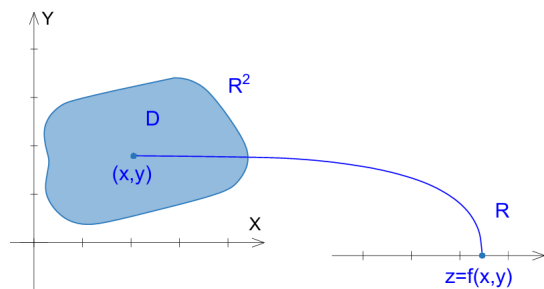
Definicja funkcji dwóch zmiennych

Funkcją dwóch zmiennych określoną na zbiorze $D \subseteq R^2$ o wartościach w zbiorze R nazywa się przyporządkowanie każdemu punktowi (x, y) ze zbioru D dokładnie jednej liczby rzeczywistej z .

Funkcję taką można zapisać następująco:

$$f: D \rightarrow R \text{ lub } z = f(x, y), \text{ gdzie } x, y \in D$$

Element przyporządkowany punktowi (x, y) oznacza się symbolem $f(x, y)$.



Rys. 3.1. Interpretacja geometryczna funkcji dwóch zmiennych

Zbiór D nazywa się dziedziną funkcji lub polem funkcji, natomiast zbiór Z elementów przyporządkowanych punktom (x, y) – zakresem funkcji. Jeżeli przy określaniu funkcji wzorem nie zostanie podany zakres jej pola (dziedziny), to zakłada się, że polem (dziedziną) jest zbiór tych par liczb (x, y) , dla których wzór ma sens. Taki zbiór punktów przestrzeni R^2 , dla których wzór ten ma sens, nazywa się dziedziną naturalną funkcji.

- **Wyznaczanie dziedziny funkcji dwóch zmiennych.**

Przykład 3.1.1

Wyznaczyć dziedzinę funkcji dwóch zmiennych.

- $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
- $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
- $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$
- $f(x, y) = \frac{1}{(x-2)(y-1)}$

Rozwiązanie:

a) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Zgodnie z założeniem wyrażenie podpierwiastkowe musi być ≥ 0 , więc:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

Zatem:

$$D = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Dziedziną tej funkcji jest więc koło domknięte o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 2.

b) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

Zgodnie z założeniem wyrażenie logarytmowane musi być > 0 , więc:

$$1 - x^2 - y^2 > 0$$

$$x^2 + y^2 < 1$$

Zatem:

$$D = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 < 1\}$$

Dziedzina tej funkcji jest więc koło otwarte o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu 1.

c) $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

Zgodnie z założeniem mianownik ułamka musi być $\neq 0$, więc:

$$x + y \neq 0$$

$$x \neq -y$$

Zatem:

$$D = \{(x, y) \in R^2: x \neq -y\}$$

Dziedzina tej funkcji jest więc płaszczyzna R^2 poza punktami leżącymi na prostej $y = -x$.

d) $f(x, y) = \frac{1}{(x-2)(y-1)}$

Zgodnie z założeniem mianownik ułamka musi być $\neq 0$, więc:

$$(x - 2)(y - 1) \neq 0$$

$$x \neq 2 \wedge y \neq 1$$

Zatem:

$$D = \{(x, y) \in R^2: x \neq 2 \wedge y \neq 1\}$$

Dziedzina tej funkcji jest więc płaszczyzna R^2 poza punktem $(2, 1)$.

3.2. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych

Podobnie jak funkcje jednej zmiennej, tak i funkcje dwóch zmiennych można różniczkować, czyli obliczać ich pochodne, które mają określony zakres zastosowań, w tym na przykład można je wykorzystać do wyznaczania ekstremów funkcji.

Niech dana będzie funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ określona w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz niech $y = y_0$. Wówczas $f(x, y_0)$ będzie pewną funkcją $\varphi(x)$ tylko zmiennej x : $\varphi(x) = f(x, y_0)$.

O ile ta funkcja ma pochodną $\varphi'(x)$ w punkcie x_0 , to nazywa się ją pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem x w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta f}{\delta x}\right]_{P_0(x_0, y_0)}$ (lub $f'_x(x_0, y_0)$).

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$ względem x w punkcie (x, y) oznacza się krótko jako $\frac{\delta f}{\delta x}$ lub f'_x .

Podobnie przez pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ rozumie się pochodną funkcji $\varphi'(y) = f(x_0, y)$ w punkcie y_0 i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta f}{\delta y}\right]_{P_0(x_0, y_0)}$ lub $f'_y(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$ względem y w punkcie (x, y) oznacza się krótko jako $\frac{\delta f}{\delta y}$ lub f'_y .

Definicja pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych

Niech dana będzie funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ określona w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$ względem x w punkcie (x_0, y_0) jest

$$\left[\frac{\delta f}{\delta x}\right]_{P_0(x_0, y_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (3.1)$$

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$ względem y w punkcie (x_0, y_0) jest natomiast

$$\left[\frac{\delta f}{\delta y}\right]_{P_0(x_0, y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (3.2)$$

W przypadku funkcji dwóch zmiennych nie ma wymogu, aby funkcja była ciągła w punkcie, w którym ma pochodne cząstkowe. Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych funkcji dwóch zmiennych obowiązują te same wzory i własności co przy obliczaniu pochodnych funkcji jednej zmiennej². Obliczając pochodną cząstkową funkcji dwóch zmiennych względem jednej zmiennej, drugą należy traktować jako stałą.

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu prostych funkcji dwóch zmiennych.**

Przykład 3.2.1

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 - 5x^3$

b) $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x^3y^2 - xy + x - 2y + 5$

² Wzory i własności pochodnej funkcji jednej zmiennej zostały podane w: E. Gołąbeska *Matematyka – wybrane zagadnienia analizy matematycznej. Skrypt dla studentów kierunków inżynierskich*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2023, s. 116–118, <https://www.scribd.com/document/708648736/Wybrane-zagadnienia-analizy-matematycznej> [dostęp: 15.07.2025].

$$c) f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy^2 + y^3 - \frac{2y}{3} + 1$$

$$d) f(x, y) = x^{-3} + 2y^{-2} - \frac{xy}{4}$$

Rozwiązanie:

$$a) f(x, y) = x^2y + 2xy^2 - 5x^3$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2xy + 2y^2 - 15x^2$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = x^2 + 4xy$$

$$b) f(x, y) = 2x^2y^3 + 3x^3y^2 - xy + x - 2y + 5$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 4xy^3 + 9x^2y^2 - y + 1$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 6x^2y^2 + 6x^3y - x - 2$$

$$c) f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy^2 + y^3 - \frac{2y}{3} + 1$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = x + \sqrt{3}y^2$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - \frac{2}{3}$$

$$d) f(x, y) = x^{-3} + 2y^{-2} - \frac{xy}{4}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -3x^{-4} - \frac{y}{4}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -4y^{-3} - \frac{x}{4}$$

- Obliczanie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu iloczynu funkcji dwóch zmiennych.

Przykład 3.2.2

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$.

- $f(x, y) = 2x^3 \cdot \cos y$
- $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$
- $f(x, y) = e^x \cdot \ln y$
- $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \log y$

Rozwiązanie:

a) $f(x, y) = 2x^3 \cdot \cos y$

Jest to iloczyn dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej iloczynu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x^3 \cdot \cos y + 2x^3 \cdot 0 = 2x^3 \cos y$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \cdot \cos y + 2x^3 \cdot (-\sin y) = -2x^3 \sin y$$

b) $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$

Jest to iloczyn dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej iloczynu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot 0 = \cos x \cos y$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \cdot \cos y + \sin x \cdot (-\sin y) = -\sin x \sin y$$

c) $f(x, y) = e^x \cdot \ln y$

Jest to iloczyn dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej iloczynu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = e^x \cdot \ln y + e^x \cdot 0 = e^x \ln y$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \cdot \ln y + e^x \cdot \frac{1}{y} = \frac{e^x}{y}$$

$$d) f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \log y$$

Jest to iloczyn dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej iloczynu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = x \cdot \log y + \frac{1}{2}x^2 \cdot 0 = x \log y$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \cdot \log y + \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{y \ln 10} = \frac{x^2}{2y \ln 10}$$

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu ilorazu funkcji dwóch zmiennych.**

Przykład 3.2.3

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$.

$$a) f(x, y) = \frac{2x+3}{4y-2}$$

$$b) f(x, y) = \frac{3x^2}{\cos y}$$

$$c) f(x, y) = \frac{\ln y}{e^x}$$

$$d) f(x, y) = \frac{3 \sin x}{2y^4}$$

Rozwiązanie:

$$a) f(x, y) = \frac{2x+3}{4y-2}$$

Jest to iloraz dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} &= \frac{2 \cdot (4y - 2) - (2x + 3) \cdot 0}{(4y - 2)^2} = \frac{2(4y - 2)}{(4y - 2) \cdot (4y - 2)} = \\ &= \frac{2}{4y - 2} = \frac{1}{2y - 1} \end{aligned}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta y} &= \frac{0 \cdot (4y - 2) - (2x + 3) \cdot 4}{(4y - 2)^2} = \frac{-4(2x + 3)}{[2(2y - 1)]^2} = \frac{-4(2x + 3)}{4(2y - 1)^2} = \\ &= \frac{-(2x + 3)}{(2y - 1)^2} = \frac{-2x - 3}{(2y - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{3x^2}{\cos y}$$

Jest to iloraz dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{6x \cdot \cos y - 3x^2 \cdot 0}{(\cos y)^2} = \frac{6x \cos y}{\cos^2 y} = \frac{6x}{\cos y}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{0 \cdot \cos y - 3x^2 \cdot (-\sin y)}{(\cos y)^2} = \frac{3x^2 \sin y}{\cos^2 y} = \frac{3x^2 \sin y}{\cos y \cos y} = \frac{3x^2 \operatorname{tg} y}{\cos y}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{\ln y}{e^x}$$

Jest to iloraz dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{0 \cdot e^x - \ln y \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{-e^x \ln y}{e^{2x}} = -\frac{\ln y}{e^x}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{\frac{1}{y} \cdot e^x - \ln y \cdot 0}{(e^x)^2} = \frac{\frac{e^x}{y}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{ye^{2x}} = \frac{1}{ye^x}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{3 \sin x}{2y^4}$$

Jest to iloraz dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{3 \cos x \cdot 2y^4 - 3 \sin x \cdot 0}{(2y^4)^2} = \frac{6y^4 \cos x}{4y^8} = \frac{3 \cos x}{2y^4}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{0 \cdot 2y^4 - 3 \sin x \cdot 8y^3}{(2y^4)^2} = \frac{-24y^3 \sin x}{4y^8} = -\frac{6 \sin x}{y^5}$$

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji złożonej dwóch zmiennych.**

Przykład 3.2.4

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$.

- $f(x, y) = \ln(2x + 7y)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^4}$
- $f(x, y) = e^{3x+2y}$
- $f(x, y) = \sin(x + y)$

Rozwiązanie:

a) $f(x, y) = \ln(2x + 7y)$

Jest to funkcja złożona, zatem jej pochodną należy obliczać jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$w = 2x + 7y \quad z = \ln w$$

$$w'_x = 2 \quad w'_y = 7 \quad z' = \frac{1}{w} = \frac{1}{2x + 7y}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2 \cdot \frac{1}{2x + 7y} = \frac{2}{2x + 7y}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 7 \cdot \frac{1}{2x + 7y} = \frac{7}{2x + 7y}$$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^4}$

Jest to funkcja złożona, zatem jej pochodną należy obliczać jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$w = x^2 + 4y^4 \quad z = \sqrt{w}$$

$$w'_x = 2x \quad w'_y = 16y^3 \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4y^4}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4y^4}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4y^4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4y^4}}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 16y^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4y^4}} = \frac{16y^3}{2\sqrt{x^2 + 4y^4}} = \frac{8y^3}{\sqrt{x^2 + 4y^4}}$$

c) $f(x, y) = e^{3x+2y}$

Jest to funkcja złożona, zatem jej pochodną należy obliczać jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x , zmienną y należy traktować jako stałą.

$$w = 3x + 2y \quad z = e^w$$

$$w'_x = 3 \quad w'_y = 2 \quad z' = e^w = e^{3x+2y}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 3 \cdot e^{3x+2y} = 3e^{3x+2y}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2 \cdot e^{3x+2y} = 2e^{3x+2y}$$

d) $f(x, y) = \sin(x + y)$

Jest to funkcja złożona, zatem jej pochodną należy obliczać jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$w = x + y \quad z = \sin w$$

$$w'_x = 1 \quad w'_y = 1 \quad z' = \cos w = \cos(x + y)$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 1 \cdot \cos(x + y) = \cos(x + y)$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 1 \cdot \cos(x + y) = \cos(x + y)$$

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu iloczynu oraz ilorazu funkcji dwóch zmiennych, z których przynajmniej jedna jest funkcją złożoną.**

Przykład 3.2.5

Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x, y)$.

a) $f(x, y) = e^x \cdot \sqrt{2x - y^3}$

b) $f(x, y) = \sqrt{e^{4x+y}}$

$$c) f(x, y) = \frac{e^x}{\ln(2x+3y)}$$

$$d) f(x, y) = \frac{\sin x}{\sqrt{e^{3y}}}$$

Rozwiązanie:

$$a) f(x, y) = e^x \cdot \sqrt{2x - y^3}$$

Jest to iloczyn dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną. W związku z tym pochodną należy obliczyć, wykorzystując własności pochodnej iloczynu, a przy obliczaniu pochodnej funkcji złożonej pamiętać, aby obliczać ją jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej. Ponadto przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą, a przy obliczaniu pochodnej po zmiennej y – odwrotnie.

$$w = 2x - y^3 \quad z = \sqrt{w}$$

$$w'_x = 2 \quad w'_y = -3y^2 \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{2x - y^3}}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} &= e^x \cdot \sqrt{2x - y^3} + e^x \cdot \left[2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x - y^3}} \right] = \\ &= e^x \cdot \left[\sqrt{2x - y^3} + \frac{1}{\sqrt{2x - y^3}} \right] = \frac{e^x(2x - y^3 + 1)}{\sqrt{2x - y^3}} \end{aligned}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta y} &= 0 \cdot \sqrt{2x - y^3} + e^x \cdot \left[-3y^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x - y^3}} \right] = \\ &= e^x \cdot \frac{-3y^2}{2\sqrt{2x - y^3}} = \frac{-3y^2 e^x}{2\sqrt{2x - y^3}} \end{aligned}$$

$$b) f(x, y) = \sqrt{e^{4x+y}}$$

Jest to funkcja podwójnie złożona. W związku z tym należy pamiętać, że trzeba to uwzględnić dwukrotnie i za każdym razem obliczać jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej. Ponadto przy obliczaniu pochodnych po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą, a przy obliczaniu pochodnych cząstkowych po zmiennej y – odwrotnie.

Najpierw w funkcji $f(x, y)$ wskazuje się funkcję wewnętrzną w i funkcję zewnętrzną z .

$$w = e^{4x+y} \quad z = \sqrt{w}$$

Funkcja w jest, jak widać, funkcją złożoną, dlatego w niej również należy wskazać funkcję wewnętrzną w_1 oraz funkcję zewnętrzną z_1 .

$$w_1 = 4x + y \quad z_1 = e^{w_1} = e^{4x+y}$$

W kolejnym kroku oblicza się pochodne funkcji w_1 po zmiennej x oraz po zmiennej y , a także pochodną funkcji z_1 .

$$(w_1')_x = 4 \quad (w_1')_y = 1 \quad z_1' = e^{w_1} = e^{4x+y}$$

Teraz można wrócić do funkcji w i funkcji z , aby policzyć ich pochodne po zmiennej x i po zmiennej y .

$$w'_x = 4 \cdot e^{4x+y} \quad w'_y = 1 \cdot e^{4x+y} \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{4x+y}}}$$

Mając powyższe wyliczenia, można przejść do obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu po zmiennej x jako iloczynu pochodnej funkcji wewnętrznej w'_x i pochodnej funkcji zewnętrznej z' .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 4 \cdot e^{4x+y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{4x+y}}} = \frac{4e^{4x+y}}{\sqrt{e^{4x+y}}} = \frac{2e^{4x+y} \cdot \sqrt{e^{4x+y}}}{e^{4x+y}} = 2\sqrt{e^{4x+y}}$$

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej y oblicza się podobnie jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej w'_y i pochodnej funkcji zewnętrznej z' .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 1 \cdot e^{4x+y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^{4x+y}}} = \frac{e^{4x+y}}{2\sqrt{e^{4x+y}}} = \frac{e^{4x+y} \cdot \sqrt{e^{4x+y}}}{2e^{4x+y}} = \frac{1}{2}\sqrt{e^{4x+y}}$$

c) $f(x, y) = \frac{e^x}{\ln(2x+3y)}$

Jest to iloraz dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją złożoną (ta w mianowniku). W związku z tym pochodną należy obliczyć, wykorzystując własności pochodnej ilorazu, a przy obliczaniu pochodnej funkcji złożonej pamiętać, aby obliczać ją jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej. Ponadto przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą, a przy obliczaniu pochodnej po zmiennej y – odwrotnie.

$$w = 2x + 3y \quad z = \ln w$$

$$w'_x = 2 \quad w'_y = 3 \quad z' = \frac{1}{w} = \frac{1}{2x + 3y}$$

Mając powyższe wyliczenia, można przejść do obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu po zmiennej x , korzystając z własności pochodnej ilorazu.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{e^x \cdot \ln(2x + 3y) - e^x \cdot \frac{2}{2x + 3y}}{[\ln(2x + 3y)]^2} = \frac{e^x \cdot \left[\ln(2x + 3y) - \frac{2}{2x + 3y} \right]}{[\ln(2x + 3y)]^2}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta y} &= \frac{0 \cdot \ln(2x + 3y) - e^x \cdot \frac{3}{2x + 3y}}{[\ln(2x + 3y)]^2} = \\ &= \frac{\frac{3e^x}{2x + 3y}}{[\ln(2x + 3y)]^2} = \frac{3e^x}{(2x + 3y)[\ln(2x + 3y)]^2} \end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \frac{\sin x}{\sqrt{e^{3y}}}$

Jest to iloraz dwóch funkcji, z których jedna jest funkcją podwójnie złożoną (ta w mianowniku). W związku z tym pochodną należy obliczyć, wykorzystując własności pochodnej ilorazu, a przy obliczaniu pochodnej funkcji złożonej pamiętać, aby obliczać ją jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej. Ponadto przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą, a przy obliczaniu pochodnej po zmiennej y – odwrotnie.

$$w = e^{3y} \quad z = \sqrt{w}$$

Funkcja w jest, jak widać, funkcją złożoną, dlatego w niej również należy wskazać funkcję wewnętrzną w_1 oraz funkcję zewnętrzną z_1 .

$$w_1 = 3y \quad z_1 = e^{w_1} = e^{3y}$$

W kolejnym kroku oblicza się pochodne funkcji w_1 po zmiennej x oraz po zmiennej y , a także pochodną funkcji z_1 .

$$(w_1')_x = 0 \quad (w_1')_y = 3 \quad z_1' = e^{w_1} = 3e^{3y}$$

Teraz można wrócić do funkcji w i funkcji z , aby policzyć ich pochodne po zmiennej x i po zmiennej y .

$$w'_x = 0 \cdot 3e^{3y} = 0 \quad w'_y = 3e^{3y} \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{e^{3y}}}$$

Mając powyższe wyliczenia, można przejść do obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu po zmiennej x jako iloczynu pochodnej funkcji wewnętrznej w'_x i pochodnej funkcji zewnętrznej z' .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\cos x \cdot \sqrt{e^{3y}} - \sin x \cdot 0}{(\sqrt{e^{3y}})^2} = \frac{\cos x \sqrt{e^{3y}}}{e^{3y}}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej y zmienną x należy traktować jako stałą.

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta y} &= \frac{0 \cdot \sqrt{e^{3y}} - \sin x \cdot \frac{3e^{3y}}{2\sqrt{e^{3y}}}}{(\sqrt{e^{3y}})^2} = \frac{-\sin x \cdot 3e^{3y}}{2\sqrt{e^{3y}} \cdot (\sqrt{e^{3y}})^2} = \\ &= \frac{-3e^{3y} \sin x}{2\sqrt{e^{3y}} \cdot e^{3y}} = -\frac{3 \sin x}{2\sqrt{e^{3y}}} \end{aligned}$$

3.3. Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych są odpowiednikiem drugiej pochodnej funkcji jednej zmiennej. W sensie rachunkowym wyznaczenie ich polega na obliczeniu pochodnej cząstkowej odpowiednio po zmiennej x z pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu obliczonej po zmiennej x oraz pochodnej cząstkowej po zmiennej y z pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu obliczonej po zmiennej y .

Niech więc dana będzie funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ określona w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz niech $y = y_0$. Wówczas $f(x, y_0)$ będzie pewną funkcją $\varphi(x)$ jedynie zmiennej x : $\varphi(x) = f(x, y_0)$.

Jeśli ta funkcja ma pochodną $\varphi''(x)$ w punkcie x_0 , to nazywa się ją pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem x w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right]_{P_0(x_0, y_0)}$ lub $f''_{xx}(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$ względem x w punkcie (x, y) oznacza się krótko jako $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$ lub f''_{xx} .

Podobnie przez pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ rozumie się pochodną funkcji $\varphi''(y) = f(x_0, y)$ w punkcie y_0 i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}\right]_{P_0(x_0, y_0)}$ lub $f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$ względem y w punkcie (x, y) oznacza się krótko jako $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$ lub f''_{yy} .

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych drugiego rzędu prostych funkcji dwóch zmiennych.**

Przykład 3.3.1

Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$.

- $f(x, y) = x^3y^4 + 4xy^3 - x^2 + y$
- $f(x, y) = 5x^2y + 2x^3y^5 - 3x - 2y^2 + \frac{1}{2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + e^x + \ln|y| - \frac{2y}{3}$
- $f(x, y) = x^{-3} + 2y^{-2} - \frac{y^2}{2}$

Rozwiązanie:

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą, a przy obliczaniu po zmiennej y traktuje się tak zmienną x .

$$a) f(x, y) = x^3y^4 + 4xy^3 - x^2 + y$$

W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2y^4 + 4y^3 - 2x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 6xy^4 - 2$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 4x^3y^3 + 12xy^2 + 1$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 12x^3y^2 + 24xy$$

$$b) f(x, y) = 5x^2y + 2x^3y^5 - 3x - 2y^2 + \frac{1}{2}$$

W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 10xy + 6x^2y^5 - 3$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 10y + 12xy^5$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 5x^2 + 10x^3y^4 - 4y$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 40x^3y^3 - 4$$

c) $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + e^x + \ln|y| - \frac{2y}{3}$

W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = x^2 + e^x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 2x + e^x$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{1}{y} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

d) $f(x, y) = x^{-3} + 2y^{-2} - \frac{y^2}{2}$

W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -3x^{-4}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 12x^{-5}$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -4y^{-3} - y$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 12y^{-4} - 1$$

- Obliczanie pochodnych cząstkowych drugiego rzędu iloczynu, ilorazu oraz funkcji złożonej dwóch zmiennych.

Przykład 3.3.2

Obliczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$.

- $f(x, y) = e^x \cdot \sin y$
- $f(x, y) = \frac{\ln|x|}{y}$
- $f(x, y) = \frac{x^2 - y^3}{xy}$
- $f(x, y) = \ln|2x + 3y^2|$

Rozwiązanie:

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą, a przy obliczaniu po zmiennej y traktuje się tak zmienną x .

$$\text{a) } f(x, y) = e^x \cdot \sin y$$

Jest to iloczyn dwóch funkcji elementarnych, zatem należy skorzystać z własności pochodnej iloczynu. W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = e^x \cdot \sin y + e^x \cdot 0 = e^x \sin y$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = e^x \cdot \sin y + e^x \cdot 0 = e^x \sin y$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \cdot \sin y + e^x \cdot \cos y = e^x \cos y$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 0 \cdot \cos y + e^x \cdot (-\sin y) = -e^x \sin y$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{\ln|x|}{y}$$

Jest to iloraz dwóch funkcji elementarnych, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu. W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\frac{1}{x} \cdot y - \ln|x| \cdot 0}{y^2} = \frac{\frac{y}{x}}{y^2} = \frac{y}{xy^2} = \frac{1}{xy}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{0 \cdot xy - 1 \cdot y}{(xy)^2} = \frac{-y}{x^2 y^2} = -\frac{1}{x^2 y}$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{0 \cdot y - \ln|x| \cdot 1}{y^2} = \frac{\ln|x|}{y^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{0 \cdot y^2 - (\ln|x|) \cdot 2y}{(y^2)^2} = \frac{-2y \ln|x|}{y^4} = \frac{-2 \ln|x|}{y^3}$$

c) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^3}{xy}$

Jest to iloraz dwóch funkcji elementarnych, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu. W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta x} &= \frac{2x \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot y}{(xy)^2} = \frac{2x^2 y - x^2 y + y^4}{x^2 y^2} = \\ &= \frac{x^2 y + y^4}{x^2 y^2} = \frac{y(x^2 + y^3)}{x^2 y^2} = \frac{x^2 + y^3}{x^2 y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} &= \frac{2x \cdot x^2 y - (x^2 + y^3) \cdot 2xy}{(x^2 y)^2} = \frac{2x^3 y - 2x^3 y - 2xy^4}{x^4 y^2} = \\ &= \frac{-2xy^4}{x^4 y^2} = -\frac{2y^2}{x^3} \end{aligned}$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\begin{aligned} \frac{\delta f}{\delta y} &= \frac{-3y^2 \cdot xy - (x^2 - y^3) \cdot x}{(xy)^2} = \frac{-3xy^3 - x^3 + xy^3}{x^2 y^2} = \\ &= \frac{-2xy^3 - x^3}{x^2 y^2} = \frac{x(-2y^3 - x^2)}{x^2 y^2} = \frac{-x^2 - 2y^3}{xy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} &= \frac{-6y \cdot xy^2 - (-x^2 - 2y^3) \cdot 2xy}{(xy^2)^2} = \frac{-6xy^4 + 2x^3 y + 4xy^4}{x^2 y^4} = \\ &= \frac{-2xy^4 + 2x^3 y}{x^2 y^4} = \frac{2xy(-y^3 + x^2)}{x^2 y^4} = \frac{2(x^2 - y^3)}{xy^3} \end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \ln|2x + 3y^2|$

Jest to funkcja złożona, zatem jej pochodną należy obliczyć jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej cząstkowej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą. W pierwszej kolejności trzeba obliczyć pochodną cząstkową pierwszego rzędu po zmiennej x , a następnie z uzyskanej pochodnej cząstkowej pochodną cząstkową drugiego rzędu, również po zmiennej x .

$$w = 2x + 4y^2 \quad z = \ln w$$

$$w'_x = 2 \quad w'_y = 8y \quad z' = \frac{1}{w} = \frac{1}{2x + 4y^2}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2 \cdot \frac{1}{2x + 4y^2} = \frac{2}{2x + 4y^2} = \frac{1}{x + 2y^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{0 \cdot (x + 2y^2) - 1 \cdot 1}{(x + 2y^2)^2} = -\frac{1}{(x + 2y^2)^2}$$

Podobnie postępuje się w przypadku obliczania pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu po zmiennej y .

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 8y \cdot \frac{1}{2x + 4y^2} = \frac{8y}{2x + 4y^2} = \frac{4y}{x + 2y^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{4 \cdot (x + 2y^2) - 4y \cdot 4y}{(x + 2y^2)^2} = \frac{4(x + 2y^2 - 4y^2)}{(x + 2y^2)^2} = \frac{4(x - 2y^2)}{(x + 2y^2)^2}$$

3.4. Pochodne cząstkowe mieszane funkcji dwóch zmiennych

Aby uzyskać pochodne cząstkowe mieszane funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$, należy pochodną cząstkową pierwszego rzędu obliczoną po zmiennej x zróżniczkować ponownie, ale po zmiennej y , a pochodną cząstkową pierwszego rzędu obliczoną po zmiennej y zróżniczkować ponownie, ale po zmiennej x .

Niech więc dana będzie funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$ określona w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz niech $y = y_0$. Wówczas $f(x, y_0)$ będzie pewną funkcją $\varphi(x)$ jedynie zmiennej x : $\varphi(x) = f(x, y_0)$.

Jeśli ta funkcja ma pochodną $\varphi'(x)$ w punkcie x_0 , to nazywa się ją pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem x w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta f}{\delta x} \right]_{P_0(x_0, y_0)}$ lub $f'_x(x_0, y_0)$. Różniczkując tę pochodną po raz kolejny (tym razem względem y), uzyskuje się pochodną

cząstkową mieszaną funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \right]_{P_0(x_0, y_0)}$ lub $f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową mieszaną funkcji $f(x, y)$ względem y z pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu względem zmiennej x w punkcie (x, y) oznacza się krótko jako $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$ lub f''_{yx} .

Podobnie różniczkując pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ względem y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, uzyskuje się po raz kolejny pochodną cząstkową mieszaną funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$, tym razem względem x , w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznacza symbolem $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \right]_{P_0(x_0, y_0)}$ lub $f''_{xy}(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową mieszaną funkcji $f(x, y)$ względem x z pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu względem zmiennej y w punkcie (x, y) oznacza się krótko jako $\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}$ lub f''_{xy} .

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych mieszanych prostych funkcji dwóch zmiennych.**

Przykład 3.4.1

Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane funkcji $f(x, y)$.

a) $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3xy^2 - 5x^2 + 1$

b) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - 2e^x + 3 \ln x - \frac{2}{3}x\sqrt{y}$

c) $f(x, y) = \frac{2}{x} - \frac{y}{2}$

d) $f(x, y) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{y^2} - e^x$

Rozwiązanie:

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą. Z uzyskanej pochodnej oblicza się ponownie pochodną, ale tym razem po zmiennej y , traktując zmienną x jako stałą. W kolejnym kroku najpierw jest obliczana pochodna pierwszego rzędu po zmiennej y , a z niej pochodna po zmiennej x .

a) $f(x, y) = 2x^2y^3 + 3xy^2 - 5x^2 + 1$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 4xy^3 + 3y^2 - 10x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 12xy^2 + 6y$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 6x^2y^2 + 6xy$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 12xy^2 + 6y$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - 2e^x + 3 \ln x - \frac{2}{3}x\sqrt{y}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = x^3 - 2e^x + \frac{3}{x} - \frac{2}{3}\sqrt{y}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = -\frac{1}{3\sqrt{y}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{x}{3\sqrt{y}}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = -\frac{1}{3\sqrt{y}}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{2}{x} - \frac{y}{2}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 0$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 0$$

$$\text{d) } f(x, y) = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{y^2} - e^x$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = -\frac{3}{x^4} - e^x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 0$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = -\frac{4}{y^3}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 0$$

$$\text{Wniosek: } \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}.$$

- **Obliczanie pochodnych cząstkowych mieszanych iloczynu, ilorazu oraz funkcji złożonej dwóch zmiennych.**

Przykład 3.4.2

Obliczyć pochodne cząstkowe mieszane funkcji $f(x, y)$.

$$\text{a) } f(x, y) = e^y \cdot \cos x$$

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{x}{\ln|y|}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \frac{2x^3 - 3y^2}{xy}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \ln|2y + x^2|$$

Rozwiązanie:

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej pierwszego rzędu po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą. Z uzyskanej pochodnej oblicza się ponownie pochodną, ale tym razem po zmiennej y , traktując zmienną x jako stałą. W kolejnym kroku najpierw jest obliczana pochodna pierwszego rzędu po zmiennej y , a z niej pochodna po zmiennej x .

a) $f(x, y) = e^y \cdot \cos x$

Jest to iloczyn dwóch funkcji elementarnych, zatem należy skorzystać z własności pochodnej iloczynu.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 0 \cdot \cos x + e^y \cdot (-\sin x) = -e^y \sin x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = -e^y \cdot \sin x + (-e^y) \cdot 0 = -e^y \sin x$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = e^y \cdot \cos x + e^y \cdot 0 = e^y \cos x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = 0 \cdot \cos x + e^y \cdot (-\sin x) = -e^y \sin x$$

b) $f(x, y) = \frac{x}{\ln|y|}$

Jest to iloraz dwóch funkcji elementarnych, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu.

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{1 \cdot \ln|y| - x \cdot 0}{(\ln|y|)^2} = \frac{\ln|y|}{\ln^2|y|} = \frac{1}{\ln|y|}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{0 \cdot \ln|y| - 1 \cdot \frac{1}{y}}{(\ln|y|)^2} = \frac{-\frac{1}{y}}{\ln^2|y|} = -\frac{1}{y \ln^2|y|}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{0 \cdot \ln|y| - x \cdot \frac{1}{y}}{(\ln|y|)^2} = -\frac{\frac{x}{y}}{\ln^2|y|} = -\frac{x}{y \ln^2|y|}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{-1 \cdot y \ln^2|y| - x \cdot 0}{(y \ln^2|y|)^2} = \frac{-y \ln^2|y|}{(y \ln^2|y|)^2} = -\frac{1}{y \ln^2|y|}$$

c) $f(x, y) = \frac{2x^3 - 3y^2}{xy}$

Jest to iloraz dwóch funkcji, zatem należy skorzystać z własności pochodnej ilorazu.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta f}{\delta x} &= \frac{6x^2 \cdot xy - (2x^3 - 3y^2) \cdot y}{(xy)^2} = \frac{6x^3y - 2x^3y + 3y^3}{x^2y^2} = \\
&= \frac{4x^3y + 3y^3}{x^2y^2} = \frac{y(4x^3 + 3y^2)}{x^2y^2} = \frac{4x^3 + 3y^2}{x^2y} \\
\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} &= \frac{6y \cdot x^2y - (4x^3 + 3y^2) \cdot x^2}{(x^2y)^2} = \frac{6x^2y^2 - 4x^5 - 3x^2y^2}{x^4y^2} = \\
&= \frac{3x^2y^2 - 4x^5}{x^4y^2} = \frac{x^2(3y^2 - 4x^3)}{x^4y^2} = \frac{-4x^3 + 3y^2}{x^2y^2} \\
\frac{\delta f}{\delta y} &= \frac{-6y \cdot xy - (2x^3 - 3y^2) \cdot x}{(xy)^2} = \frac{-6xy^2 - 2x^4 + 3xy^2}{x^2y^2} = \\
&= \frac{-3xy^2 - 2x^4}{x^2y^2} = \frac{x(-3y^2 - 2x^3)}{x^2y^2} = \frac{-2x^3 - 3y^2}{xy^2} \\
\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} &= \frac{-6x^2 \cdot xy^2 - (-3y^2 - 2x^3) \cdot y^2}{(xy^2)^2} = \frac{-6x^3y^2 + 3y^4 + 2x^3y^2}{x^2y^4} = \\
&= \frac{-4x^3y^2 + 3y^4}{x^2y^4} = \frac{y^2(-4x^3 + 3y^2)}{x^2y^4} = \frac{-4x^3 + 3y^2}{x^2y^2}
\end{aligned}$$

d) $f(x, y) = \ln|2y + x^2|$

Jest to funkcja złożona, zatem jej pochodną należy obliczyć jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej.

$$w = 2y + x^2 \quad z = \ln w$$

$$w'_x = 2x \quad w'_y = 2 \quad z' = \frac{1}{w} = \frac{1}{2y + x^2}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2x \cdot \frac{1}{2y + x^2} = \frac{2x}{2y + x^2} = \frac{2x}{x^2 + 2y}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{0 \cdot (x^2 + 2y) - 2 \cdot 2x}{(x^2 + 2y)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 2y)^2}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2 \cdot \frac{1}{2y + x^2} = \frac{2}{x^2 + 2y}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{0 \cdot (x^2 + 2y) - 2 \cdot 2x}{(x^2 + 2y)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 2y)^2}$$

3.5. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Funkcje dwóch zmiennych, podobnie jak funkcje jednej zmiennej, mogą posiadać ekstrema lokalne w przedziałach określoności. Ekstrema lokalne odnoszą się do zachowania funkcji $f(x, y)$ w pewnym małym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$. Ich wyznaczenie jest proste przy wykorzystaniu pochodnych cząstkowych. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu pozwalają wyznaczyć punkty podejrzone o ekstrema, przy czym należy sprawdzić, czy wszystkie wskazane punkty należą do dziedziny danej funkcji. W następnym kroku pochodne cząstkowe drugiego rzędu i pochodna cząstkowa mieszana służą do określenia właściwego ekstremum (minimum bądź maksimum).

Definicja minimum lokalnego funkcji dwóch zmiennych

Funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ minimum, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego $P(x, y)$ z tego otoczenia zachodzi nierówność

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Jeżeli powyższa nierówność jest ostra, to minimum nazywa się właściwym.

Definicja maksimum lokalnego funkcji dwóch zmiennych

Funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ maksimum, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu takie, że dla dowolnego $P(x, y)$ z tego otoczenia zachodzi nierówność

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

Jeżeli powyższa nierówność jest ostra, to maksimum nazywa się właściwym.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i ma w tym punkcie ekstremum, to

$$\left[\frac{\delta f}{\delta x} \right]_{P_0} = 0, \quad \left[\frac{\delta f}{\delta y} \right]_{P_0} = 0$$

Zatem punkty, w których możliwe, że jest ekstremum, wyznacza się, rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

którego rozwiązanie nosi nazwę punktów stacjonarnych lub punktów krytycznych funkcji albo też punktów podejranych o istnienie ekstremum.

Należy podkreślić, że w punktach, które stanowią rozwiązanie układu równań (3.3), funkcja $f(x, y)$ niekoniecznie osiąga ekstremum. Dodatkowo musi być spełniony warunek dostateczny istnienia ekstremum.

Macierz złożona z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu funkcji $f(x, y)$ we wzorze (3.4) nosi nazwę macierzy Hessego lub hesjanu.

Uwaga: Gdy wyznacznik hesjanu jest ujemny, to funkcja nie ma w punkcie $(P_0(x_0, y_0))$ ekstremum lokalnego. W przypadku, gdy ten wyznacznik jest równy zero, to funkcja może mieć lub nie mieć ekstremum. Sprawdzenie, czy funkcja posiada w tym punkcie ekstremum lokalne, przeprowadza się innymi metodami, na przykład korzystając z definicji ekstremum.

Twierdzenie (warunek dostateczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $P_0(x_0, y_0)$ ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, a także

$$\left[\frac{\delta f}{\delta x} \right]_{P_0} = 0, \left[\frac{\delta f}{\delta y} \right]_{P_0} = 0$$

oraz

$$\det \begin{bmatrix} \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0} & \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \right]_{P_0} \\ \left[\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \right]_{P_0} & \left[\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \right]_{P_0} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.4)$$

to funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ ekstremum, przy czym, jeśli:

$$\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0} > 0 \text{ – jest to minimum właściwe,}$$

$$\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0} < 0 \text{ – jest to maksimum właściwe.}$$

Dla ułatwienia można skorzystać z poniższego schematu wyznaczania ekstremum funkcji dwóch zmiennych:

1. Dana jest funkcja: $f(x, y)$. Wyznaczyć dziedzinę.

2. Obliczyć: $\frac{\delta f}{\delta x}$ oraz $\frac{\delta f}{\delta y}$.

3. Z układu równań: $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x} = 0 \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 0 \end{cases}$ wyznaczyć punkt (punkty) podejrzane o ekstrema

i sprawdzić, czy należą do dziedziny funkcji. Jeśli nie należą, to w tych punktach funkcja nie posiada ekstremów.

4. Obliczyć $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 f}{\delta y^2}$ oraz $\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$.

5. Obliczyć: $\det \begin{bmatrix} \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right] & \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \right] \\ \left[\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} \right] & \left[\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \right] \end{bmatrix}$, a następnie kolejno podstaw współrzędne poszczególnych punktów podejrzanych o ekstrema wyznaczonych w punkcie trzecim. W tych punktach, dla których wyznacznik jest większy od zera, funkcja osiąga ekstremum.
6. Jeśli $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0} > 0$, to funkcja osiąga w tym punkcie minimum, natomiast jeśli $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0} < 0$, to funkcja osiąga w tym punkcie maksimum.
7. Wstawiając współrzędne punktu $P_0(x_0, y_0)$ do wzoru funkcji $f(x, y)$, oblicz wartość ekstremum.

- **Wyznaczanie ekstremów lokalnych prostych funkcji dwóch zmiennych.**

Przykład 3.5.1

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y)$.

- $f(x, y) = x^2 + xy + 2x + y^2$
- $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$
- $f(x, y) = (x - 2)^3 + (x - 2)^2 + y^2$
- $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Rozwiązanie:

- $f(x, y) = x^2 + xy + 2x + y^2$
 - $D = R^2$
 - $\frac{\delta f}{\delta x} = 2x + y + 2$
 $\frac{\delta f}{\delta y} = x + 2y$
 - $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = -2x - 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} y = -2x - 2 \\ x + 2(-2x - 2) = 0 \end{cases}$
 $x = -\frac{4}{3}, y = \frac{2}{3}$

Zatem punktem krytycznym funkcji jest $P_0\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, który należy do dziedziny funkcji.

$$4. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 1$$

$$5. \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Ponieważ wyznacznik jest większy od zera, to funkcja $f(x, y)$ posiada w punkcie $P_0\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ekstremum.

6. Jeśli $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right]_{P_0(0,0)} > 0$, to funkcja osiąga w tym punkcie minimum.

$$7. f(0,0) = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{3}, \text{ co daje wartość minimum.}$$

b) $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$

1. $D = R^2$

2. $\frac{\delta f}{\delta x} = 4x + 4y$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 4x - 2y$$

3. $\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -y \\ 2 \cdot (-y) - y = 0 \end{cases}$$

$$x = 0, y = 0$$

Zatem punktem krytycznym funkcji jest $P_0(0,0)$, który należy do dziedziny funkcji.

4. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 4$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = -2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 4$$

5. $\det \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 16 = -24$

Ponieważ wyznacznik jest mniejszy od zera, funkcja $f(x, y)$ nie posiada w punkcie $P_0(0,0)$ ekstremum.

c) $f(x, y) = (x - 2)^3 + (x - 2)^2 + y^2$

Na początku należy zapisać tę funkcję w rozwiniętej postaci:

$$f(x, y) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 + y^2$$

1. $D = R^2$

2. $\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2 - 10x + 8$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2y$$

3. $\begin{cases} 3x^2 - 10x + 8 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x^2 - 10x + 8 = 0 * \\ y = 0 \end{cases}$$

Z pierwszego równania układu równań * należy obliczyć x .

$$3x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$\Delta = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{10-2}{6} = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{10+2}{6} = 2$$

Stąd otrzymano dwa punkty krytyczne: $P_1\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ i $P_2(2, 0)$, które należą do dziedziny funkcji.

4. $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 6x - 10$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 2$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 0$$

5. $\det \begin{bmatrix} 6x - 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 6x - 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12x - 0 = 12x - 20$

Do obliczonej postaci wyznacznika należy kolejno wstawiać punkty krytyczne.

$$\det \begin{bmatrix} 6x - 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{P_1\left(\frac{4}{3}, 0\right)} = 12 \cdot \frac{4}{3} - 20 = -4$$

Ponieważ wyznacznik jest mniejszy od zera, funkcja $f(x, y)$ nie posiada w punkcie $P_1\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ekstremum.

$$\det \begin{bmatrix} 6x - 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{P_2(2, 0)} = 12 \cdot 2 - 20 = 4$$

Ponieważ wyznacznik jest większy od zera, funkcja $f(x, y)$ posiada w punkcie $P_2(2, 0)$ ekstremum.

6. $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}\right]_{P_2(2, 0)} = 6 \cdot 2 - 10 = 2 > 0$, zatem funkcja osiąga w tym punkcie minimum.

7. $f(2,0) = (2-2)^3 + (2-2)^2 + 0^2 = 0$, co daje wartość minimum.

d) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

1. $D = \mathbb{R}^2$

2. $\frac{\delta f}{\delta x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 6xy - 12$$

3.
$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - 5 = 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{y^2} + y^2 - 5 = 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y^4 - 5y^2 + 4}{y^2} = 0 \\ x = \frac{2}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 - 5y^2 + 4 = 0 * \\ x = \frac{2}{y} ** \end{cases}$$

W przypadku równania * wystarczy podstawić $t = y^2$.

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$t_1 = \frac{5-3}{2} = 1, t_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

Kiedy wróci się do podstawienia, otrzymuje się:

$$y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = -2, y_4 = 2$$

Wstawiając obliczone igreki do drugiego równania układu równań **, otrzymuje się: $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 1$

Stąd otrzymano zaś cztery punkty krytyczne: $P_1(-2, -1), P_2(2, 1), P_3(-1, -2)$ i $P_4(1, 2)$, które należą do dziedziny funkcji.

$$4. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = 6x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 6x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 6y$$

$$5. \det \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$$

Do obliczonej postaci wyznacznika należy kolejno podstawiać punkty krytyczne.

$$\det \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}_{P_1(-2,-1)} = 36 \cdot [(-2)^2 - (-1)^2] = 108$$

Ponieważ wyznacznik jest większy od zera, funkcja $f(x, y)$ posiada w punkcie $P_1(-2, -1)$ ekstremum.

$$\det \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}_{P_2(2,1)} = 36 \cdot [2^2 - 1^2] = 108$$

Ponieważ wyznacznik jest większy od zera, funkcja $f(x, y)$ posiada w punkcie $P_2(2, 1)$ ekstremum.

$$\det \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}_{P_3(-1,-2)} = 36 \cdot [(-1)^2 - (-2)^2] = -108$$

Ponieważ wyznacznik jest mniejszy od zera, funkcja $f(x, y)$ nie posiada w punkcie $P_3(-1, -2)$ ekstremum.

$$\det \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}_{P_4(-2,-2)} = 36 \cdot [(-2)^2 - (-2)^2] = 0$$

Ponieważ wyznacznik jest mniejszy od zera, funkcja $f(x, y)$ może mieć lub może nie mieć w punkcie $P_4(1, 2)$ ekstremum.

$$6. \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_1(-2,-1)} = 6 \cdot (-2) = -12 < 0, \text{ zatem funkcja osiąga w tym punkcie maksimum.}$$

$$\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_2(2,1)} = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \text{ zatem funkcja osiąga w tym punkcie minimum.}$$

$$7. f(-2, -1) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 - 15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-1) = 28, \text{ co daje wartość maksimum.}$$

$$f(2, 1) = (2)^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1^2 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = -28, \text{ co daje wartość minimum.}$$

- Wyznaczanie ekstremów lokalnych iloczynu, ilorazu oraz złożonych funkcji dwóch zmiennych.

Przykład 3.5.2

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y)$.

- $f(x, y) = e^x \cdot (2x + y^2)$
- $f(x, y) = \frac{x^2}{e^y}$
- $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
- $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 + 2x}$

Rozwiązanie:

- $f(x, y) = f(x, y) = e^x \cdot (2x + y^2)$

Jest to iloczyn dwóch funkcji, dlatego należy wykorzystać własność pochodnej iloczynu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą i na odwrót.

- $D = \mathbb{R}^2$

- $\frac{\delta f}{\delta x} = e^x \cdot (2x + y^2) + e^x \cdot 2 = e^x(y^2 + 2x + 2)$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 0 \cdot (2x + y^2) + e^x \cdot 2y = 2ye^x$$

- $$\begin{cases} e^x(y^2 + 2x + 2) = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases}$$

Obydwa równania można podzielić obustronnie przez e^x ze względu na to, że liczba e jest dodatnia, w związku z czym podniesiona do dowolnej potęgi nadal będzie dodatnia.

$$\begin{cases} y^2 + 2x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x = -1, y = 0$$

Punktem krytycznym funkcji jest zatem $P_0(-1, 0)$, który należy do dziedziny funkcji.

- $\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = e^x(y^2 + 2x + 2) + e^x \cdot 2 = e^x(y^2 + 2x + 4)$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 2 \cdot e^x + 2y \cdot 0 = 2e^x$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = 0 \cdot (y^2 + 2x + 2) + e^x \cdot 2y = 2ye^x$$

$$\begin{aligned}
5. \quad \det \begin{bmatrix} e^x(y^2 + 2x + 4) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{bmatrix} &= \begin{vmatrix} e^x(y^2 + 2x + 4) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{vmatrix} = \\
&= e^x(y^2 + 2x + 4) \cdot 2e^x - (2ye^x) \cdot (2ye^x) = \\
&= e^{2x}(2y^2 + 4x + 8 - 4y^2) \\
\det \begin{bmatrix} e^x(y^2 + 2x + 4) & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{bmatrix}_{P_0(-1,0)} &= \\
&= e^{-2}(2 \cdot 0^2 + 4 \cdot (-1) + 8 - 4 \cdot 0^2) = \frac{4}{e^2}
\end{aligned}$$

Ponieważ wyznacznik jest większy od zera, funkcja $f(x, y)$ posiada w punkcie $P_0(-1, 0)$ ekstremum.

$$6. \quad \left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0(-1,0)} = e^{-1}(0^2 + 2 \cdot (-1) + 4) = 2 > 0, \text{ więc funkcja osiąga w tym punkcie minimum.}$$

$$7. \quad f(-1, 0) = e^{-1} \cdot (2 \cdot (-1) + 0^2) = -\frac{2}{e}, \text{ co daje wartość minimum.}$$

$$b) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{e^y}$$

Jest to iloraz dwóch funkcji, dlatego należy wykorzystać własność pochodnej ilorazu, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą i na odwrót.

1. Funkcja jest dana ułamkiem, zatem należałoby założyć, że mianownik jest różny od zera: $e^y \neq 0$. Z uwagi na to, że liczba e jest dodatnia, podniesiona do jakiegokolwiek potęgi będzie nadal liczbą dodatnią, a zatem różną od zera. Dziedziną funkcji $f(x, y)$ jest zatem R^2 .

$$D = R^2$$

$$2. \quad \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{2x \cdot e^y - x^2 \cdot 0}{(e^y)^2} = \frac{2xe^y}{e^{2y}} = \frac{2x}{e^y}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{0 \cdot e^y - x^2 \cdot e^y}{(e^y)^2} = \frac{-x^2 e^y}{e^{2y}} = -\frac{x^2}{e^y}$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{2x}{e^y} = 0 \\ -\frac{x^2}{e^y} = 0 \end{cases}$$

Obydwa równania można obustronnie pomnożyć przez e^y ze względu na to, że liczba e jest dodatnia, w związku z czym podniesiona do dowolnej potęgi nadal będzie dodatnia.

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Stąd: } x = 0.$$

Wstawiając obliczony x do któregokolwiek równania układu równań, na przykład do równania pierwszego, otrzymuje się:

$$\frac{0}{e^y} = 0$$

Jedynym y spełniającym tę równość jest natomiast $y = 0$.

Punktem krytycznym funkcji jest zatem $P_0(0,0)$, który należy do dziedziny funkcji.

$$4. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{2 \cdot e^y - 2x \cdot 0}{(e^y)^2} = \frac{2e^y}{e^{2y}} = \frac{2}{e^y}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{0 \cdot e^y - (-x^2) \cdot e^y}{(e^y)^2} = \frac{x^2 e^y}{e^{2y}} = \frac{x^2}{e^y}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{0 \cdot e^y - 2x \cdot e^y}{(e^y)^2} = \frac{-2x e^y}{e^{2y}} = -\frac{2x}{e^y}$$

$$5. \det \begin{bmatrix} \frac{2}{e^y} & -\frac{2x}{e^y} \\ -\frac{2x}{e^y} & \frac{x^2}{e^y} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{e^y} & -\frac{2x}{e^y} \\ -\frac{2x}{e^y} & \frac{x^2}{e^y} \end{vmatrix} = \frac{2}{e^y} \cdot \frac{x^2}{e^y} - \left(-\frac{2x}{e^y}\right) \cdot \left(-\frac{2x}{e^y}\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{e^{2y}} - \frac{4x^2}{e^{2y}} = -\frac{2x^2}{e^{2y}}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2}{e^y} & -\frac{2x}{e^y} \\ -\frac{2x}{e^y} & \frac{x^2}{e^y} \end{bmatrix}_{P_0(0,0)} = -\frac{2 \cdot 0^2}{e^{2 \cdot 0}} = \frac{0}{1} = 0$$

Ponieważ wyznacznik jest równy zero, funkcja $f(x, y)$ może mieć lub może nie mieć w punkcie $P_0(0,0)$ ekstremum. Warunek dostateczny istnienia ekstremum nie rozstrzyga tego.

c) $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

Jest to funkcja złożona, dlatego należy obliczyć ją jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą i na odwrót.

1. Należy założyć, że wyrażenie podpierwiastkowe jest większe bądź równe zero.

$$x + y \geq 0$$

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x + y \geq 0\}$$

2. $w = x + y \quad z = \sqrt{w}$

$$w'_x = 1 \quad w'_y = 1 \quad z' = \frac{1}{2\sqrt{w}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$

$$3. \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = 0 \\ \frac{\sqrt{x+y}}{2(x+y)} = 0 \end{cases}$$

Równanie można obustronnie pomnożyć przez $2(x+y)$ ze względu na to, że $(x+y)$ jest nieujemne (co wynika z dziedziny funkcji).

$$2\sqrt{x+y} = 0$$

Po podzieleniu obustronnie przez 2 otrzymuje się

$$\sqrt{x+y} = 0$$

Po podniesieniu obustronnie do kwadratu otrzymuje się natomiast:

$$x+y = 0$$

$$x = -y$$

$$x = 0, y = 0$$

Punktem krytycznym funkcji jest zatem $P_0(0,0)$, który należy do dziedziny funkcji.

$$4. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{0 \cdot 2\sqrt{x+y} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}}}{4(x+y)} = -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{0 \cdot 2\sqrt{x+y} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}}}{4(x+y)} = -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{0 \cdot 2\sqrt{x+y} - 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}}}{4(x+y)} = -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}$$

$$5. \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} & -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} \\ -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} & -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} & -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} \\ -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} & -\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}\right) - \left(-\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4(x+y)\sqrt{x+y}}\right) = 0$$

W związku z tym, że wyznacznik jest równy zero, funkcja $f(x,y)$ może mieć lub może nie mieć ekstremum w punkcie $P_0(0,0)$. Warunek dostateczny istnienia ekstremum nie rozstrzyga tego.

$$d) f(x,y) = e^{x^2+y^2+2x}$$

Jest to funkcja złożona, dlatego należy obliczyć jako iloczyn pochodnej funkcji wewnętrznej i pochodnej funkcji zewnętrznej, pamiętając, że przy obliczaniu pochodnej po zmiennej x zmienną y należy traktować jako stałą i na odwrót.

$$\begin{aligned}
1. \quad & D = R^2 \\
2. \quad & w = x^2 + y^2 + 2x \quad z = e^w \\
& w'_x = 2x + 2 \quad w'_y = 2y \quad z' = e^w = e^{x^2+y^2+2x} \\
& \frac{\delta f}{\delta x} = (2x + 2) \cdot e^{x^2+y^2+2x} \\
& \frac{\delta f}{\delta y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2+2x}
\end{aligned}$$

$$3. \quad \begin{cases} (2x + 2) \cdot e^{x^2+y^2+2x} = 0 \\ 2y \cdot e^{x^2+y^2+2x} = 0 \end{cases}$$

Obydwa równania można podzielić obustronnie przez $e^{x^2+y^2+2x}$, ponieważ liczba e jest dodatnia, w związku z czym podniesiona do dowolnej potęgi nadal jest dodatnia.

$$\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \\
x = -1, y = 0$$

Punktem krytycznym funkcji jest zatem $P_0(-1, 0)$, który należy do dziedziny funkcji.

$$\begin{aligned}
4. \quad \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} &= 2 \cdot e^{x^2+y^2+2x} + (2x + 2) \cdot (2x + 2) \cdot e^{x^2+y^2+2x} = \\
&= e^{x^2+y^2+2x}(4x^2 + 8x + 6)
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = 2 \cdot e^{x^2+y^2+2x} + 2y \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2+2x} = e^{x^2+y^2+2x}(4y^2 + 2)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} &= 0 \cdot e^{x^2+y^2+2x} + (2x + 2) \cdot 2y \cdot e^{x^2+y^2+2x} = \\
&= e^{x^2+y^2+2x}(4xy + 4y)
\end{aligned}$$

$$5. \quad \det \begin{bmatrix} e^{x^2+y^2+2x}(4x^2 + 8x + 6) & e^{x^2+y^2+2x}(4xy + 4y) \\ e^{x^2+y^2+2x}(4xy + 4y) & e^{x^2+y^2+2x}(4y^2 + 2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{x^2+y^2+2x} \cdot \begin{vmatrix} 4x^2 + 8x + 6 & 4xy + 4y \\ 4xy + 4y & 4y^2 + 2 \end{vmatrix} = \\
&= e^{x^2+y^2+2x} \cdot [(4x^2 + 8x + 6) \cdot (4y^2 + 2) - (4xy + 4y) \cdot (4xy + 4y)] = \\
&= e^{x^2+y^2+2x} \cdot (16x^2y^2 + 32xy^2 + 24y^2 + 8x^2 + 16x + 12 - \\
&\quad - 16x^2y^2 - 32xy^2 - 16y^2) = \\
&= e^{x^2+y^2+2x} \cdot (8y^2 + 8x^2 + 16x + 12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} e^{x^2+y^2+2x}(4x^2 + 8x + 6) & e^{x^2+y^2+2x}(4xy + 4y) \\ e^{x^2+y^2+2x}(4xy + 4y) & e^{x^2+y^2+2x}(4y^2 + 2) \end{bmatrix}_{P_0(-1,0)} = \\ & = e^{(-1)^2+0^2+2 \cdot (-1)} \cdot (8 \cdot 0^2 + 8 \cdot (-1)^2 + 16 \cdot (-1) + 12) = \\ & = e^{-1}(0 + 8 - 16 + 12) = \frac{4}{e} \end{aligned}$$

W związku z tym, że wyznacznik jest większy od zera, funkcja $f(x, y)$ posiada ekstremum w punkcie $P_0(-1, 0)$.

6. Ponieważ $\left[\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right]_{P_0(-1,0)} = e^{(-1)^2+0^2+2 \cdot (-1)}(4 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) + 6) = \frac{2}{e} > 0$, funkcja osiąga w tym punkcie minimum.
7. $f(-1, 0) = e^{(-1)^2+0^2+2 \cdot (-1)} = \frac{1}{e}$, co daje wartość minimum.

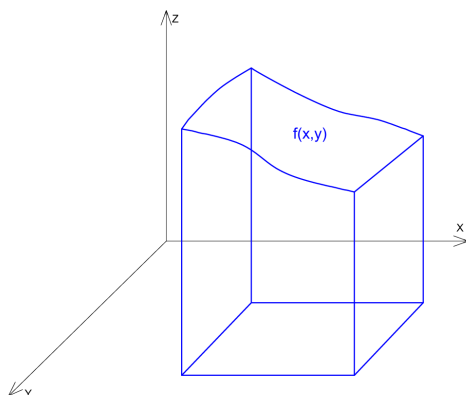
4. Rachunek całkowy funkcji dwóch zmiennych

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału czwartego można bez trudu:

- podać definicję całki podwójnej, całki po obszarze normalnym, całki iterowanej;
- zamienić całkę po obszarze na całkę iterowaną;
- obliczyć całkę iterowaną;
- obliczyć całkę podwójną przy stałych granicach całkowania oraz całkę po obszarze (w tym całkę po prostokącie) przy zamianie na całkę iterowaną.

4.1. Pojęcie całki podwójnej

Rachunek całkowy funkcji dwóch zmiennych w sensie rachunkowym traktować należy podobnie jak rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej omówiony w rozdziale pierwszym niniejszej publikacji. Opiera się na tych samych wzorach i własnościach, a w przypadku, gdy funkcja podcałkowa jest złożona bądź pod całką znajduje się iloczyn (iloraz) funkcji elementarnych, stosowana jest metoda całkowania przez podstawianie lub całkowania przez części. W przypadku całkowania funkcji dwóch zmiennych zasadniczo postępuje się tak samo, przy czym najpierw oblicza się całkę wewnętrzną, a dopiero później całkę zewnętrzną. Z kolei w odniesieniu do interpretacji geometrycznej całki z funkcji jednej zmiennej jako całki sum Riemanna, która identyfikowana była z polem powierzchni trapezu krzywoliniowego ograniczonego prostymi $x = a$, $x = b$, osią OX i wykresem funkcji $f(x, y)$, całka z funkcji dwóch zmiennych przybliża objętość pod wykresem funkcji $f(x, y)$ na pewnym obszarze $D \subseteq R^2$ w przypadku, gdy $f(x, y) \geq 0$ na tym obszarze.



Rys. 4.1. Interpretacja geometryczna całki podwójnej

Zanim zostanie zdefiniowana całka podwójna i ustalony obszar (czyli granice całkowania po poszczególnych zmiennych) całkowania, należy wprowadzić definicję obszaru normalnego.

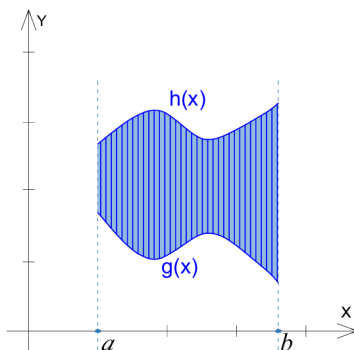
Definicja obszaru normalnego względem osi OX

Obszar normalny w R^2 względem osi OX to podzbiór D płaszczyzny z wyróżnionym kartezjańskim układem współrzędnych, który jest ograniczony dwoma wykresami funkcji ciągłych oraz prostymi równoległymi do osi OY .

Obszar normalny względem osi OX jest to zatem zbiór punktów (x, y) spełniający warunek:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Proste $x = a$ oraz $x = b$ ograniczają obszar normalny po prawej i lewej stronie, natomiast krzywe $y = g(x)$ i $y = h(x)$ odpowiednio od dołu i od góry (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Obszar normalny względem osi OX

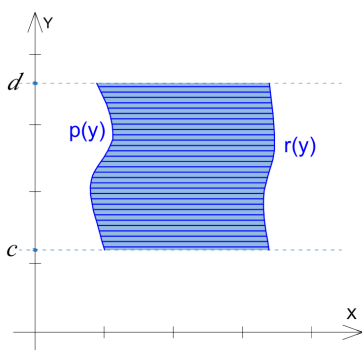
Definicja obszaru normalnego względem osi OY

Obszar normalny w R^2 względem osi OY to podzbiór D płaszczyzny z wyróżnionym kartezjańskim układem współrzędnych, który jest ograniczony dwoma wykresami funkcji ciągłych oraz prostymi równoległymi do osi OX .

Obszar normalny względem osi OY to zatem zbiór punktów (x, y) spełniający warunek:

$$\begin{cases} p(y) \leq x \leq r(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad (4.2)$$

Proste $y = c$ oraz $y = d$ ograniczają obszar normalny odpowiednio od dołu oraz od góry, natomiast krzywe $x = p(y)$ i $x = r(y)$ odpowiednio od lewej i od prawej (rys. 4.3).



Rys. 4.3. Obszar normalny względem osi OY

Całkowanie funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ odbywa się w zależności od sposobu zapisu całki:

1. Może być zapisana w taki sposób, że granice całkowania dla obu zmiennych są stałe.

Definicja całki podwójnej po stałych granicach całkowania

Niech funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$, ciągła i ograniczona w zbiorze $D \subseteq R^2$ (zbiór D znajduje się na płaszczyźnie XY i nazywa się obszarem) należącym do dziedziny funkcji, będzie w tym zbiorze całkowna. Całkę podwójną z funkcji dwóch zmiennych w stałych granicach całkowania zapisuje się jako:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \quad (4.3)$$

gdzie: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

2. Może być zapisana w taki sposób, że całkowanie odbywa się po prostokącie, który jest szczególnym przypadkiem obszaru normalnego³ (ponieważ P jest to obszar normalny względem osi OX i względem osi OY).

Definicja całki podwójnej po prostokącie

Niech funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$, ciągła i ograniczona w zbiorze $P \subseteq R^2$ (zbiór P znajduje się na płaszczyźnie XY i nazywa się prostokątem) należącym do dziedziny funkcji, będzie w tym zbiorze całkowalna. Całkę podwójną z funkcji dwóch zmiennych po prostokącie zapisuje się jako:

$$\iint_P f(x, y) dy dx \tag{4.4}$$

gdzie: $P = [a, b] \times [c, d]$.

3. Może być zapisana w taki sposób, że całkowanie odbywa się po obszarze wyznaczonym przez krzywe, przy czym obszar ten musi być opisany w sposób umożliwiający iteracyjne⁴ całkowanie, np. obszar normalny D względem jednej z osi.

Definicja całki podwójnej po obszarze normalnym

Niech funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$, ciągła i ograniczona w zbiorze $D \subseteq R^2$ (zbiór D znajduje się na płaszczyźnie XY i nazywa się obszarem normalnym) należącym do dziedziny funkcji, będzie w tym zbiorze całkowalna. Całkę podwójną po obszarze normalnym z funkcji dwóch zmiennych zapisuje się jako:

$$\iint_D f(x, y) dy dx \tag{4.5}$$

gdzie:

$$D: \{a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

lub

$$\iint_D f(x, y) dx dy \tag{4.6}$$

gdzie:

$$D: \{c \leq y \leq d, p(y) \leq x \leq r(y)\}$$

³ Obszarem normalnym jest taki obszar, w którym co najmniej jedna zmienna zmienia się w stałych granicach (a druga zwykle w zmiennych granicach, tzn. zawartych między funkcjami). W zapisie pojawia się sformułowanie „co najmniej jedna zmienna”, co oznacza, że gdy granice dla obu zmiennych są stałe, obszar traktuje się jako obszar normalny.

⁴ Całkowanie iterowane to sposób obliczania całek wielokrotnych (w tym całek podwójnych), w przypadku którego całkowanie odbywa się kolejno względem poszczególnych zmiennych, a pozostałe traktowane są jako stałe.

Kolejność całkowania uzależniona jest od zapisu całki, przy czym można ją zmieniać, jeśli funkcja $f(x, y)$ i obszar D (lub prostokąt P) spełniają odpowiednie warunki regularności. Co prawda kolejność całkowania czasami ma znaczenie – wtedy, kiedy jedna iteracja prowadzi do prostszych obliczeń niż druga – jednak zazwyczaj obie całki iterowane da się obliczyć. Najpierw należy całkę po obszarze zamienić na całkę iterowaną.

Definicja całki iterowanej

Niech funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$, ciągła i ograniczona w zbiorze $D \subseteq R^2$ (w szczególnym przypadku w zbiorze P , gdzie $P = [a, b] \times [c, d]$), będzie w tym zbiorze całkowna. Całkę podwójną z funkcji dwóch zmiennych można zapisać jako całkę iterowaną:

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (4.7)$$

gdzie: $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq h(x) \end{cases}$

lub

$$\int_c^d \left(\int_{p(y)}^{r(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (4.8)$$

gdzie: $\begin{cases} p(y) \leq x \leq r(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

- **Zamiana całki po obszarze na całkę iterowaną.**

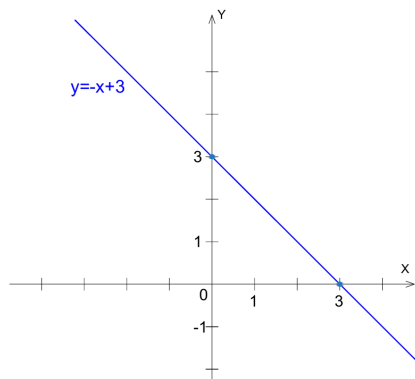
Przykład 4.1.1

Zamienić całkę podwójną po obszarze z funkcji $f(x, y)$ na całkę iterowaną.

- $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest ograniczony prostą $y = -x + 3$ oraz osiami OX i OY .
- $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 4)$.
- $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest ograniczony krzywymi: $y = x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2} + 1$.
- $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest ograniczony krzywymi: $xy = 1$ i $|x - y| = 1$.

Rozwiązanie:

- $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest ograniczony prostą $y = -x + 3$ oraz osiami OX i OY .



Aby zamienić całkę po obszarze normalnym, po którym ma być liczona z funkcji dwóch zmiennych, na całkę iterowaną, należy wskazać zmienną, która będzie zmieniała się w stałych granicach. Można przyjąć, że tą zmienną będzie x . Skoro z jednej strony (z lewej) obszar ten ogranicza oś OY , to jedna granica całkowania wynosi 0, natomiast, aby wyznaczyć drugą, wystarczy obliczyć miejsce zerowe funkcji $y = -x + 3$. W tym przypadku wynosi ono $x = 3$. Można zatem powiedzieć, że zmienna x zmienia się w stałych granicach od 0 do 3.

Zmienną y należy w tej sytuacji uzależnić od zmiennej x . Skoro od dołu obszar ten ogranicza oś OX , to dolna granica całkowania wynosi 0, natomiast górna jest w punkcie przecięcia wykresu funkcji $y = -x + 3$ z osią OY . Wynika z tego, że to wykres funkcji ogranicza z góry ten obszar, zatem zmienna y zmienia się w granicach od 0 do $-x + 3$.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako całkę iterowaną:

$$\int_0^3 \left(\int_0^{-x+3} f(x, y) dy \right) dx$$

Gdyby przyjąć na odwrót i wskazać zmienną y jako tę, która będzie zmieniała się w stałych granicach, a zmienną x uzależnić od zmiennej y , wówczas dolna granica całkowania wynosiłaby 0 z racji tego, że oś OX ogranicza ten obszar z dołu. Z kolei górna granica całkowania pokrywałaby się z punktem przecięcia wykresu funkcji $y = -x + 3$ z osią OY . W tym przypadku $y = 3$. Można by zatem powiedzieć, że zmienna y zmienia się w stałych granicach od 0 do 3.

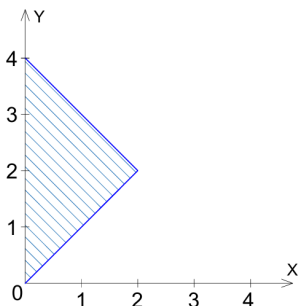
Analizując w takim razie, jak zmienna x , uzależniona od zmiennej y , zachowuje się względem interesującego nas obszaru, należy zauważyć, że z lewej strony obszar ten ogranicza oś OY , w związku z czym dolna granica całkowania wynosi 0, natomiast górna znajduje się w punkcie przecięcia wykresu funkcji $y = -x + 3$ z osią OX . To zatem wykres funkcji

ogranicza ten obszar z prawej strony, a zmienna x zmienia się w granicach od 0 do $3 - y$.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OY można zapisać jako całkę iterowaną:

$$\int_0^3 \left(\int_0^{3-y} f(x, y) dx \right) dy$$

- b) $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 4)$.



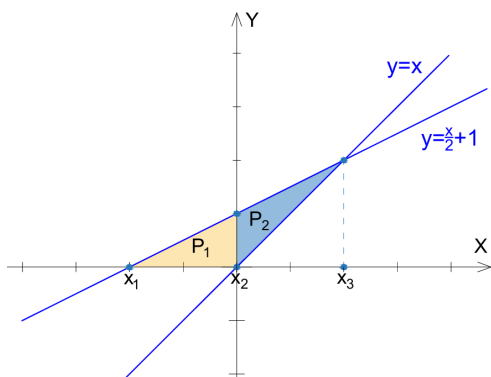
Tym razem zostanie wyznaczona całka iterowana wyłącznie względem osi OX . Aby zatem zamienić całkę po obszarze normalnym, po którym ma być liczona z funkcji dwóch zmiennych, na całkę iterowaną, należy wskazać zmienną x jako tę, która będzie zmieniała się w stałych granicach. Skoro z jednej strony obszar ten ogranicza oś OY , to jedna granica całkowania wynosi 0, natomiast, aby wyznaczyć drugą, wystarczy przyjąć pierwszą współrzędną wierzchołka trójkąta, który usytuowany jest w punkcie $(2, 2)$. Można zatem powiedzieć, że zmienna x zmienia się w stałych granicach od 0 do 2.

Zmienną y w takim przypadku należy uzależnić od zmiennej x . Tym razem od dołu obszar ten ogranicza funkcja $y = x$, zatem dolna granica całkowania wynosi x , natomiast z góry obszar ogranicza funkcja $y = -x + 4$, zatem zmienna y zmienia się w granicach od x do $-x + 4$.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako całkę iterowaną:

$$\int_0^2 \left(\int_x^{-x+4} f(x, y) dy \right) dx$$

- c) $\iint_D f(x, y) dx dy$, gdy D jest ograniczony krzywymi: $y = x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{x}{2} + 1$.



Obszar zawarty między danymi funkcjami nie jest jednoznacznie obszarem normalnym (traktowany w całości). Można jednak podzielić go na mniejsze obszary, które będą obszarami normalnymi (na rysunku zaznaczono jako P_1 i P_2). Tym razem zostanie wyznaczona całka iterowana wyłącznie względem osi OX . Aby zatem całkę po obszarze normalnym, po którym ma być liczona z funkcji dwóch zmiennych, zamienić na całkę iterowaną, należy wskazać zmienną x jako tę, która będzie zmieniała się w stałych granicach. Obszar całkowania po zmiennej x należy w tym przypadku podzielić na dwa obszary: od x_1 do x_2 oraz od x_2 do x_3 . Aby wyznaczyć granice całkowania po zmiennej x , wystarczy wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $y = \frac{x}{2} + 1$ (celem wyznaczenia punktu x_1) i funkcji $y = x$ (celem wyznaczenia punktu x_2) oraz punkt przecięcia obu tych funkcji (celem wyznaczenia punktu x_3).

$$\begin{array}{l} \frac{x}{2} + 1 = 0 \\ \frac{x}{2} = -1 \quad / \cdot 2 \\ x_1 = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \quad \begin{cases} y = \frac{x}{2} + 1 \\ y = x \end{cases} \\ \frac{x}{2} + 1 = x \quad / \cdot 2 \\ 2 \end{array}$$

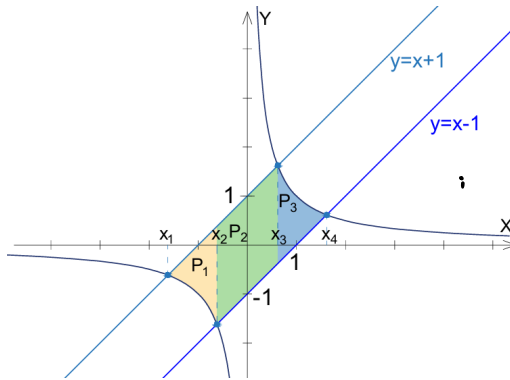
Uwzględniając podział obszaru całkowania na dwa mniejsze obszary (zaznaczone na rysunku jako P_1, P_2), w celu obliczenia pola całego obszaru, należy utworzyć ich sumę, przy obliczonych granicach całkowania po zmiennej x .

Zmienną y w takim wypadku należy uzależnić od zmiennej x . Ustalając granice całkowania dla poszczególnych obszarów po zmiennej y , należy wskazywać odpowiednie funkcje ograniczające te obszary od dołu i od góry.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako sumę całek iterowanych:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_x^{\frac{x}{2}+1} f(x,y) dy \right) dx + \\
& + \int_{x_2}^{x_3} \left(\int_{\frac{x}{2}+1}^x f(x,y) dy \right) dx = \\
& = \int_{-2}^0 \left(\int_x^{\frac{x}{2}+1} f(x,y) dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}+1}^x f(x,y) dy \right) dx
\end{aligned}$$

d) $\iint_D f(x,y) dx dy$, gdy D jest ograniczony krzywymi: $xy = 1$ i $|x - y| = 1$.



Tym razem zostanie wyznaczona całka iterowana wyłącznie względem osi OX . Zatem, aby zamienić całkę po obszarze normalnym, po którym ma być liczona z funkcji dwóch zmiennych, na całkę iterowaną, należy wskazać zmienną x jako tę, która będzie zmieniała się w stałych granicach. Obszar całkowania po zmiennej x należy podzielić na trzy obszary: od x_1 do x_2 , od x_2 do x_3 oraz od x_3 do x_4 . W tym celu trzeba obliczyć wszystkie cztery punkty przecięcia wykresów danych funkcji, rozwiązując odpowiednie układy równań:

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1) = 1 * \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$x^2 + x - 1 + 0 *$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-1) = 1 * \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 1 +$$

$$0 *$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad x_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Uwzględniając podział obszaru całkowania na trzy mniejsze obszary (zaznaczone na rysunku jako P_1, P_2, P_3), w celu obliczenia pola całego obszaru należy utworzyć ich sumę przy obliczonych granicach całkowania po zmiennej x .

Zmienną y w takim przypadku należy uzależnić od zmiennej x . Ustalając granice całkowania dla poszczególnych obszarów po zmiennej y , należy wskazywać odpowiednie funkcje ograniczające te obszary od dołu i od góry.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako sumę całek iterowanych:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x+1} f(x, y) dy \right) dx + \int_{x_2}^{x_3} \left(\int_{x-1}^{x+1} f(x, y) dy \right) dx + \int_{x_3}^{x_4} \left(\int_{x-1}^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy \right) dx = \\ & = \int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x+1} f(x, y) dy \right) dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(\int_{x-1}^{x+1} f(x, y) dy \right) dx + \int_{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \left(\int_{x-1}^{\frac{1}{x}} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

4.2. Całka z funkcji dwóch zmiennych przy stałych granicach całkowania

- Obliczanie całki z funkcji dwóch zmiennych przy stałych granicach całkowania.

Przykład 4.2.1

Obliczyć podaną całkę z funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ przy stałych granicach całkowania.

- $\int_0^2 \int_3^4 (x + y) dx dy$
- $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + xy^2) dx dy$
- $\int_1^e \int_2^3 x^2 \ln|y| dx dy$
- $\int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} 2x^2y dy dx$

Rozwiązanie:

a) $\int_0^2 \int_3^4 (x + y) dx dy$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int (x + y) dx = \int x dx + y \int dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + c$$

$$\int_3^4 (x + y) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_3^4 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4y \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3y \right) = y + \frac{7}{2}$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int \left(y + \frac{7}{2} \right) dy = \int y dy + \frac{7}{2} \int dy = \frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{2}y + c$$

$$\int_0^2 \left(y + \frac{7}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + \frac{7}{2}y \right]_0^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{2} \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{7}{2} \cdot 0 \right) = 9$$

$$b) \int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + xy^2) dx dy$$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int (x^2 + xy^2) dx = \int x^2 dx + y^2 \int x dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + c$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 + xy^2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot y^2 \right)$$

$$- \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 \cdot y^2 \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int \frac{2}{3} dy = \frac{2}{3} \int dy = \frac{2}{3}y + c$$

$$\int_2^4 \frac{2}{3} dy = \left[\frac{2}{3}y \right]_2^4 = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$c) \int_1^e \int_2^3 x^2 \ln|y| dx dy$$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int x^2 \ln|y| dx = \ln|y| \int x^2 dx = \ln|y| \cdot \frac{1}{3}x^3 + c$$

$$\int_2^3 x^2 \ln|y| dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln|y| \right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 \cdot \ln|y| - \frac{1}{3} \cdot 2^3 \cdot \ln|y| + c = 9 \ln|y| - \frac{8}{3} \ln|y| + c = \frac{19}{3} \ln|y| + c$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int \frac{19}{3} \ln|y| dy = \frac{19}{3} \int \ln|y| dy^* = \frac{19}{3} (y \ln|y| - 1) + c$$

Całka oznaczona * została poniżej obliczona przez części:

$$\begin{aligned}
 * \int \ln|y| \, dy &= \left(\begin{array}{ll} u = \ln|y| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{y} & v = y \end{array} \right) = \\
 &= y \cdot \ln|y| - \int \frac{1}{y} \cdot y \, dy + c = y \ln|y| - y + c \\
 \int_1^e \frac{19}{3} \ln|y| \, dy &= \left[\frac{19}{3} (y \ln|y| - y) \right]_1^e = \\
 &= \left(\frac{19}{3} (e \ln e - e) \right) - \left(\frac{19}{3} (\ln 1 - 1) \right) = \frac{19}{3}
 \end{aligned}$$

d) $\int_0^1 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} 2x^2y \, dy \, dx$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej y (traktując zmienną x jako stałą). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
 \int 2x^2y \, dy &= 2x^2 \int y \, dy = 2x^2 \cdot \frac{1}{2}y^2 + c = x^2y^2 + c \\
 \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} 2x^2y \, dy &= [x^2y^2]_0^{(1-\sqrt{x})^2} = \left(x^2 \cdot [(1-\sqrt{x})^2]^2 \right) - (x^2 \cdot 0^2) = \\
 &= x^2(1-\sqrt{x})^4 = x^2[(1-\sqrt{x})^2 \cdot (1-\sqrt{x})^2] = \\
 &= x^2[(1-2\sqrt{x}+x) \cdot (1-2\sqrt{x}+x)] = \\
 &= x^2[1-2\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}+4x-2x\sqrt{x}+x-2x\sqrt{x}+x^2] = \\
 &= x^2[x^2-4x\sqrt{x}-4\sqrt{x}+6x+1] = \\
 &= x^4+6x^3-4x^3\sqrt{x}-4x^2\sqrt{x}+x^2 = \\
 &= x^4+6x^3+x^2-4x^{\frac{7}{2}}-4x^{\frac{5}{2}}
 \end{aligned}$$

Obliczoną całkę po zmiennej y należy teraz scałkować po zmiennej x . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
 & \int \left(x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x^{\frac{7}{2}} - 4x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \\
 & = \int x^4 dx + 6 \int x^3 dx + \int x^2 dx - 4 \int x^{\frac{7}{2}} dx - 4 \int x^{\frac{5}{2}} dx = \\
 & = \frac{1}{5} x^5 + 6 \cdot \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - 4 \cdot \frac{2}{9} x^{\frac{9}{2}} - 4 \cdot \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + c = \\
 & = \frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{8}{9} x^{\frac{9}{2}} - \frac{8}{7} x^{\frac{7}{2}} + c \\
 & \int_0^1 \left(x^4 + 6x^3 + x^2 - 4x^{\frac{7}{2}} - 4x^{\frac{5}{2}} \right) dy \\
 & = \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{8}{9} x^{\frac{9}{2}} - \frac{8}{7} x^{\frac{7}{2}} \right]_0^1 = \\
 & = \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 + \frac{3}{2} \cdot 1^4 + \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{8}{9} \cdot 1^{\frac{9}{2}} - \frac{8}{7} \cdot 1^{\frac{7}{2}} \right) = \\
 & = - \left(\frac{1}{5} \cdot 0^5 + \frac{3}{2} \cdot 0^4 + \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{8}{9} \cdot 0^{\frac{9}{2}} - \frac{8}{7} \cdot 0^{\frac{7}{2}} \right) = \\
 & = \frac{1}{5} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{8}{9} - \frac{8}{7} = \frac{1}{630}
 \end{aligned}$$

Przykład 4.2.2

Obliczyć podaną całkę z funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ przy stałych granicach całkowania.

- $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos x \, dx dy$
- $\int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \, dx dy$
- $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x+y) \, dx dy$
- $\int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1+y} \, dx dy$

Rozwiązanie:

a) $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos x \, dx dy$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int y^2 \cos x \, dx = y^2 \int \cos x \, dx = y^2 \sin x + c$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2 \cos x \, dx &= [y^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = y^2 \sin \frac{\pi}{2} - y^2 \sin 0 = \\ &= y^2 \cdot 1 - y^2 \cdot 0 = y^2 \end{aligned}$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int y^2 \, dy = \frac{1}{3} y^3 + c$$

$$\int_0^1 y^2 \, dy = \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

b) $\int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} \, dx \, dy$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int e^{x+y} \, dx = \int e^x \cdot e^y \, dx = e^y \int e^x \, dx = e^y e^x + c$$

$$\int_0^{\ln 3} e^{x+y} \, dx = [e^y e^x]_0^{\ln 3} = e^y e^{\ln 3} - e^y e^0 = 3e^y - e^y = 2e^y$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int 2e^y \, dy = 2 \int e^y \, dy = 2e^y + c$$

$$\int_0^{\ln 4} 2e^y \, dy = [2e^y]_0^{\ln 4} = 2e^{\ln 4} - 2e^0 = 8 - 2 = 6$$

$$c) \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(x+y) dx dy$$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Należy zauważyć, że funkcję podcałkową trzeba rozwinąć według wzoru na funkcję trygonometryczną sumy. Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int \sin(x+y) dx &= \int (\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y) dx = \\ &= \int \sin x \cdot \cos y dx + \int \cos x \cdot \sin y dx = \\ &= \cos y \int \sin x dx + \sin y \int \cos x dx = \\ &= \cos y \cdot (-\cos x) + \sin y \cdot \sin x = \sin x \sin y - \cos x \cos y \\ \int_0^\pi \sin(x+y) dx &= [\sin x \sin y - \cos x \cos y]_0^\pi = \\ &= (\sin \pi \cdot \sin y - \cos \pi \cdot \cos y) - (\sin 0 \cdot \sin y - \cos 0 \cdot \cos y) = \\ &= (0 \cdot \sin y - (-1) \cdot \cos y) - (0 \cdot \sin y - 1 \cdot \cos y) = \\ &= \cos y + \cos y = 2 \cos y \end{aligned}$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned} \int 2 \cos y dy &= 2 \int \cos y dy = 2 \sin y + c \\ \int_0^\pi 2 \cos y dy &= [2 \sin y]_0^\pi = 2 \sin \pi - 2 \sin 0 = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

$$d) \int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{1+y} dx dy$$

Należy zacząć od obliczenia całki wewnętrznej, czyli po zmiennej x (traktując zmienną y jako stałą). Należy zauważyć, że funkcja podcałkowa nie zawiera zmiennej x , dlatego cały pierwiastek jako stałą można wyłączyć przed symbol całki. Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int \sqrt{1+y} dx = \sqrt{1+y} \int dx = x \cdot \sqrt{1+y} + c$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1+y} dx = [x \cdot \sqrt{1+y}]_{-1}^1 = (1 \cdot \sqrt{1+y}) - ((-1) \cdot \sqrt{1+y}) =$$

$$= \sqrt{1+y} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+y}$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Należy zauważyć, że funkcja podcałkowa jest funkcją złożoną, zatem trzeba wykorzystać metodę całkowania przez podstawianie. Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int 2\sqrt{1+y} dy = \left(\begin{array}{l} t = 1+y \\ dt = dy \\ dy = dt \end{array} \right) =$$

$$= 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt = 2 \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + c = \frac{4}{3} \sqrt{(1+y)^3} + c$$

$$\int_0^1 2\sqrt{1+y} dy = \left[\frac{4}{3} \sqrt{(1+y)^3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{(1+1)^3} - \frac{4}{3} \sqrt{(1+0)^3} = \frac{4}{3} (\sqrt{8} - 1)$$

4.3. Całka z funkcji dwóch zmiennych po prostokącie

- Obliczanie całki podwójnej po prostokącie przy zamianie na całkę iterowaną.

Przykład 4.3.1

Obliczyć podaną całkę z funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ po prostokącie P .

- $\iint_P dx dy$ $P: [2,3] \times [0,4]$
- $\iint_P x^2 y dx dy$ $P: [0,1] \times [0,6]$
- $\iint_P x \sin y dx dy$ $P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$
- $\iint_P \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx dy$ $P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$

Rozwiązanie:

a) $\iint_P dx dy$ $P: [2,3] \times [0,4]$

Na początku całkę po prostokącie należy zamienić na całkę iterowaną. Zapis $P: [2,3] \times [0,4]$ może sugerować, że granice całkowania po zmiennej x wynoszą 2 i 3, natomiast granice całkowania po zmiennej y wynoszą 0 i 4.

Wobec tego całka iterowana przyjmuje postać:

$$\int_0^4 \int_2^3 dx dy$$

Można też zapisać tę całkę przy zmienionych granicach całkowania jako $\int_2^3 \int_0^4 dy dx$.

Pozostając jednak przy pierwszej wersji, najpierw obliczamy całkę wewnętrzną, czyli po zmiennej x (przy traktowaniu zmiennej y jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int dx = \int dx = x + c$$

$$\int_2^3 dx = [x]_2^3 = 3 - 2 = 1$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int dy = y + c$$

$$\int_0^4 dy = [y]_0^4 = 4 - 0 = 4$$

b) $\iint_P x^2 y dx dy$ $P: [0,1] \times [0,6]$

Na początku całkę po prostokącie należy zamienić na całkę iterowaną. Zapis $P: [0,1] \times [0,6]$ może sugerować, że granice całkowania po zmiennej x wynoszą 0 i 1, natomiast granice całkowania po zmiennej y wynoszą 0 i 6. Wobec tego całka iterowana przyjmuje postać:

$$\int_0^6 \int_0^1 x^2 y dx dy$$

Można też zapisać tę całkę przy zmienionych granicach całkowania jako $\int_0^1 \int_0^6 x^2 y dy dx$.

W związku z zastosowaniem jednak pierwszej wersji obliczona zostanie najpierw całka wewnętrzna, czyli po zmiennej x (przy traktowaniu zmiennej y jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int x^2 y \, dx dy = y \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 y + c$$

$$\int_0^1 x^2 y \, dx dy = \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_2^3 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 \cdot y - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \cdot y = \frac{1}{3} y + c$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania:

$$\int \frac{1}{3} y \, dy = \frac{1}{3} \int y \, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{2} + c = \frac{1}{6} y^2 + c$$

$$\int_0^6 \frac{1}{3} y \, dy = \left[\frac{1}{6} y^2 \right]_0^6 = \frac{1}{6} \cdot 6^2 - \frac{1}{6} \cdot 0^2 = 6$$

c) $\iint_P x \sin y \, dx dy$ $P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$

Na początku całkę po prostokącie należy zamienić na całkę iterowaną. Zapis $P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq \pi\}$ wyraźnie wskazuje, że granice całkowania po zmiennej x wynoszą 0 i 1, natomiast granice całkowania po zmiennej y wynoszą 0 i π . Wobec tego całka iterowana przyjmuje postać:

$$\int_0^\pi \int_0^1 x \sin y \, dx dy$$

Na początku obliczona zostanie całka wewnętrzna, czyli po zmiennej x (przy traktowaniu zmiennej y jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania:

$$\int x \sin y \, dx dy = \sin y \int x \, dx = \sin y \cdot \frac{1}{2} x^2 + c = \frac{1}{2} x^2 \sin y + c$$

$$\int_0^1 x \sin y \, dx dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \sin y \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot 1^3 \cdot \sin y - \frac{1}{2} \cdot 0^2 \cdot \sin y =$$

$$= \frac{1}{2} \sin y + c$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int \frac{1}{2} \sin y \, dy = \frac{1}{2} \int \sin y \, dy = \frac{1}{2} \cdot (-\cos y) + c = -\frac{1}{2} \cos y + c$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin y \, dy = \left[-\frac{1}{2} \cos y \right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2} \cdot \cos \pi - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$$

d) $\iint_P \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, dx dy \quad P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$

Na początku całkę po prostokącie należy zamienić na całkę iterowaną. Zapis $P = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$ wyraźnie wskazuje, że granice całkowania po zmiennej x wynoszą 0 i 1, natomiast granice całkowania po zmiennej y wynoszą 0 i 1. Wobec tego całka iterowana przyjmuje postać:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, dx dy$$

Na początku obliczona zostanie całka wewnętrzna, czyli po zmiennej x (przy traktowaniu zmiennej y jako stałej). Należy zauważyć, że pod całką występuje funkcja złożona, zatem trzeba wykorzystać metodę całkowania przez podstawianie. Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, dx = y \int \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, dx = \left(\begin{array}{l} t = x^2 + y^2 + 1 \\ dt_x = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right) =$$

$$= y \cdot \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = y \cdot \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} y \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = y\sqrt{t} + c =$$

$$= y\sqrt{x^2+y^2+1} + c$$

$$\int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \, dx dy = \left[y\sqrt{x^2+y^2+1} \right]_0^1 =$$

$$= y\sqrt{1^2+y^2+1} - y\sqrt{0^2+y^2+1} + c = y\sqrt{y^2+2} - y\sqrt{y^2+1} + c$$

Obliczoną całkę po zmiennej x należy teraz scałkować po zmiennej y . Należy zauważyć, że pod całką występuje funkcja złożona, zatem trzeba wykorzystać metodę całkowania przez podstawianie (dotyczy to całek zaznaczonych * i **). Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
 \int (y\sqrt{y^2+2} - y\sqrt{y^2+1}) dy &= \int (y\sqrt{y^2+2} - y\sqrt{y^2+1}) dy = \\
 &= \int y\sqrt{y^2+2} dy^* - \int y\sqrt{y^2+1} dy^{**} = \\
 &= \left(\begin{array}{l} t_1 = y^2 + 2 \\ dt_1 = 2y dy \\ dy = \frac{dt_1}{2y} \end{array} \right), \left(\begin{array}{l} t_2 = y^2 + 1 \\ dt_2 = 2y dy \\ dy = \frac{dt_2}{2y} \end{array} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t_1} dt_1 - \frac{1}{2} \int \sqrt{t_2} dt_2 = \frac{1}{2} \int t_1^{\frac{1}{2}} dt_1 - \frac{1}{2} \int t_2^{\frac{1}{2}} dt_2 = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t_1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t_2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3} \sqrt{t_1^3} - \frac{1}{3} \sqrt{t_2^3} + c = \\
 &= \frac{1}{3} (\sqrt{(y^2+2)^3} - \sqrt{(y^2+1)^3}) + c \\
 \int_0^1 (y\sqrt{y^2+2} - y\sqrt{y^2+1}) dy &= \left[\frac{1}{3} (\sqrt{(y^2+2)^3} - \sqrt{(y^2+1)^3}) \right]_0^1 = \\
 &= \left[\frac{1}{3} (\sqrt{(1^2+2)^3} - \sqrt{(1^2+1)^3}) \right] - \left[\frac{1}{3} (\sqrt{(0^2+2)^3} - \sqrt{(0^2+1)^3}) \right] = \\
 &= \frac{1}{3} (\sqrt{27} - \sqrt{8} - \sqrt{8} - 1) = \frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - \frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

4.4. Całka z funkcji dwóch zmiennych po obszarze normalnym

- Obliczanie całki podwójnej po obszarze normalnym przy zamianie na całkę iterowaną.

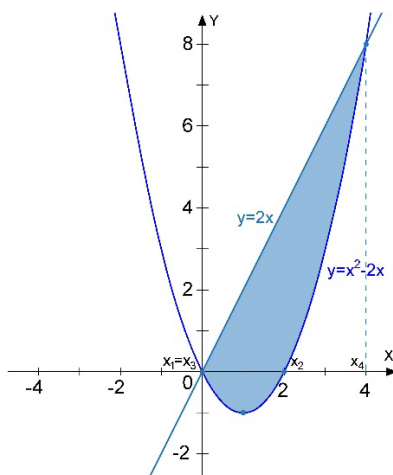
Przykład 4.4.1

Obliczyć podaną całkę podwójną po obszarze normalnym D .

- $\iint_D (2xy - 4y) dydx$, gdy D jest ograniczony liniami $y = x^2 - 2x$ oraz $y = 2x$
- $\iint_D xy dydx$, gdy $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$
- $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, gdy D jest ograniczony liniami $x = 0, y = 1, x+y = 2$
- $\iint_D e^x dx dy$, gdy $D: \{1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \ln|y|\}$

Rozwiązanie:

- $\iint_D (2xy - 4y) dydx$, gdy D jest ograniczony liniami $y = x^2 - 2x$ oraz $y = 2x$



Całkę po obszarze normalnym należy zamienić na całkę iterowaną. Niech będzie to całka iterowana względem osi OX . Zmienna x będzie zatem zmieniała się w stałych granicach. Obszar całkowania po zmiennej x wyznaczają punkty x_1 (miejsce zerowe funkcji $y = x^2 - 2x$) oraz x_4 (punkt przecięcia wykresów funkcji $y = x^2 - 2x$ i $y = 2x$).

$$\begin{array}{ll}
 x^2 - 2x = 0 & \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = 2x \end{array} \right. \\
 x(x - 2) = 0 & \\
 x_1 = 0, x_2 = 2 & x^2 - 2x = 2x \\
 & x^2 - 4x = 0 \\
 & x(x - 4) = 0 \\
 & x_3 = 0, x_4 = 4
 \end{array}$$

Można zatem powiedzieć, że zmienna x zmienia się w stałych granicach od 0 do 4.

Zmienną y w takim przypadku należy uzależnić od zmiennej x . Ustalając granice całkowania dla poszczególnych obszarów po zmiennej y , należy wskazać odpowiednie funkcje ograniczające te obszary od dołu i od góry. Od dołu obszar ten ogranicza funkcja kwadratowa $y = x^2 - 2x$, natomiast od góry funkcja liniowa $y = 2x$.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako całkę iterowaną.

$$\int_0^4 \int_{x^2-2x}^{2x} (2xy - 4y) dy dx$$

Obliczona zostanie najpierw całka wewnętrzna, czyli po zmiennej y (przy traktowaniu zmiennej x jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
 \int (2xy - 4y) dy &= 2x \int y dy - 4 \int y dy = \\
 &= 2x \cdot \frac{1}{2} y^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} y^2 + c = xy^2 - 2y^2 + c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x^2-2x}^{2x} (2xy - 4y)dy &= [xy^2 - 2y^2]_{x^2-2x}^{2x} = \\
&= [x \cdot (2x)^2 - 2 \cdot (2x)^2] - [x \cdot (x^2 - 2x)^2 - 2 \cdot (x^2 - 2x)^2] = \\
&= [4x^3 - 8x^2] - [x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^4 + 8x^3 - 8x^2] = \\
&= -x^5 + 6x^4 - 8x^3
\end{aligned}$$

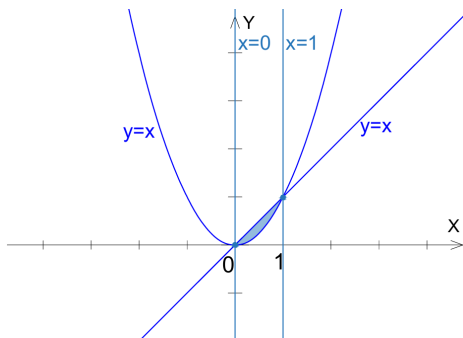
Obliczoną całkę po zmiennej y należy teraz scałkować po zmiennej x . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
\int (-x^5 + 6x^4 - 8x^3)dx &= -\int x^5 dx + 6 \int x^4 dx - 8 \int x^3 dx = \\
&= -\frac{1}{6}x^6 + 6 \cdot \frac{1}{5}x^5 - 8 \cdot \frac{1}{4}x^4 + c = -\frac{1}{6}x^6 + \frac{6}{5}x^5 - 2x^4 + c \\
\int_0^4 (-x^5 + 6x^4 - 8x^3)dx &= \left[-\frac{1}{6}x^6 + \frac{6}{5}x^5 - 2x^4\right]_0^4 = \\
&= \left(-\frac{1}{6} \cdot 4^6 + \frac{6}{5} \cdot 4^5 - 2 \cdot 4^4\right) - \left(-\frac{1}{6} \cdot 0^6 + \frac{6}{5} \cdot 0^5 - 2 \cdot 0^4\right) = \\
&= -\frac{4096}{6} + \frac{1024}{5} - 512 = \frac{512}{15}
\end{aligned}$$

b) $\iint_D xydydx$ gdy $D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$

W podanym przykładzie obszar normalny został już określony i nie ma potrzeby ustalania go jak poprzednio. Z zapisu w nawiasie klamrowym można odczytać funkcje, które ograniczają obszar normalny i są to: $x = 0$ i $x = 1$ (które stanowią stałe granice całkowania po zmiennej x) oraz $y = x^2$ i $y = x$ (które stanowią granice całkowania dla zmiennej y uzależnionej od zmiennej x).

Można zatem naszkicować wykresy celem wizualizacji obszaru D :



Jak widać, jest to obszar zawarty między wykresem funkcji kwadratowej i wykresem funkcji liniowej na przedziale od 0 do 1. Wobec powyższego całkę po wskazanym obszarze normalnym można zapisać jako całkę iterowaną: $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy \, dy \, dx$.

Najpierw zostanie obliczona całka wewnętrzna, czyli po zmiennej y (przy traktowaniu zmiennej x jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int xy \, dy = x \int y \, dy = x \cdot \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{1}{2}xy^2 + c$$

$$\int_{x^2}^x xy \, dy = \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_{x^2}^x = \frac{1}{2}x \cdot x^2 - \frac{1}{2}x(x^2)^2 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5$$

Obliczoną całkę po zmiennej y należy teraz scałkować po zmiennej x . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

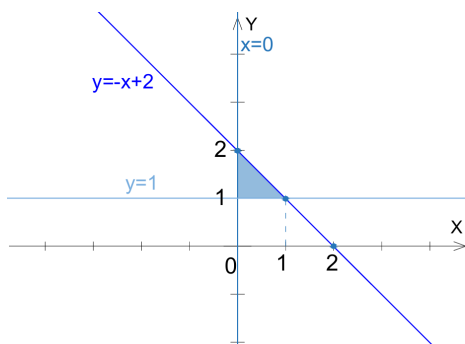
$$\int \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right) dx = \frac{1}{2} \int x^3 dx - \frac{1}{2} \int x^5 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}x^6 + c = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^6 + c$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^5 \right) dx = \left[\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^6 \right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{8} \cdot 1^4 - \frac{1}{12} \cdot 1^6 \right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 0^4 - \frac{1}{12} \cdot 0^6 \right) = \frac{3}{24} - \frac{2}{24} = \frac{1}{24}$$

- c) $\iint_D (x^2 + y) \, dx \, dy$, gdy D jest ograniczony liniami $x = 0$, $y = 1$, $x + y = 2$



Aby właściwie wskazać obszar normalny, należy zwrócić uwagę, że jest to obszar ograniczony wszystkimi wykreślanymi, a zatem zaznaczony na rysunku.

Całkę po obszarze normalnym należy zamienić na całkę iterowaną. Niech będzie to całka iterowana względem osi OX . Zmienna x będzie zatem zmieniała się w stałych granicach. Obszar całkowania po zmiennej x wyznaczają punkty x_1 (wynikający z równania $x = 0$) oraz x_2 (punkt przecięcia wykresów funkcji $y = 1$ i $x + y = 2$).

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$x + 1 = 2$$

$$x_2 = 1$$

Można zatem powiedzieć, że zmienna x zmienia się w stałych granicach od 0 do 1.

Zmienną y w takim przypadku należy uzależnić od zmiennej x . Ustalając granice całkowania dla poszczególnych obszarów po zmiennej y , należy wskazać odpowiednie funkcje ograniczające te obszary od dołu i od góry. Od dołu obszar ten ogranicza funkcja $y = 1$, natomiast od góry funkcja liniowa $x + y = 2$.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako całkę iterowaną: $\int_0^1 \int_1^{2-x} (x^2 + y) dy dx$.

Obliczona zostanie najpierw całka wewnętrzna, czyli po zmiennej y (przy traktowaniu zmiennej x jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

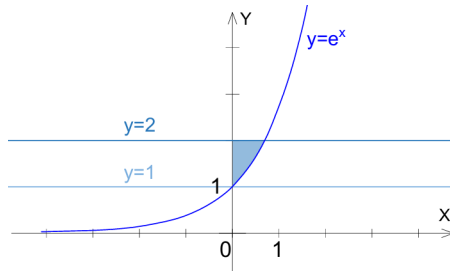
$$\int (x^2 + y) dy = x^2 \int dy + \int y dy = x^2 y + \frac{1}{2} y^2 + c$$

$$\begin{aligned} \int_1^{2-x} (x^2 + y) dy &= \left[x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_1^{2-x} = \\ &= \left[x^2(2-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 \right] - \left[x^2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \right] = \\ &= \left[2x^2 - x^3 + 2 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \right] - \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Obliczoną całkę po zmiennej y należy teraz scałkować po zmiennej x . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\begin{aligned}
& \int \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) dx = \\
& = - \int x^3 dx + \frac{3}{2} \int x^2 dx - 2 \int x dx + \frac{3}{2} \int dx = \\
& = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + c = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x + c \\
& \int_0^1 \left(-x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x \right]_0^1 = \\
& = \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 1^2 + \frac{3}{2} \cdot 1 \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^4 + \frac{1}{2} \cdot 0^3 - 0^2 + \frac{3}{2} \cdot 0 \right) = \\
& = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

d) $\iint_D e^x dx dy$ gdy $D: \{1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \ln|y|\}$



Aby właściwie wskazać obszar normalny, należy zwrócić uwagę, że jest to obszar ograniczony wszystkimi wykresami, a zatem zaznaczony na rysunku.

Całkę po obszarze normalnym należy zamienić na całkę iterowaną. Niech będzie to całka iterowana względem osi OX . Zmienna x będzie zatem zmieniała się w stałych granicach. Obszar całkowania po zmiennej x wyznaczą punkty x_1 (wynikający z równania $x = 0$) oraz x_2 (punkt przecięcia wykresów funkcji $x = \ln|y|$ i $y = 2$).

$$\begin{cases} y = 2 \\ \ln|y| = x \end{cases}$$

$$x = \ln 2$$

$$x_2 = \ln 2$$

Można zatem powiedzieć, że zmienna x zmienia się w stałych granicach od 0 do $\ln 2$.

Zmienną y w takim przypadku należy uzależnić od zmiennej x . Ustalając granice całkowania dla poszczególnych obszarów po zmiennej y , należy wskazać odpowiednie funkcje ograniczające te obszary od dołu i od góry. Od dołu obszar ten ogranicza funkcja $x = \ln|y|$, z czego $y = e^x$, natomiast od góry funkcja liniowa $y = 2$.

Wobec powyższego całkę po obszarze względem osi OX można zapisać jako całkę iterowaną: $\int_0^{\ln 2} \int_{e^x}^2 e^x dy dx$.

Najpierw zostanie obliczona całka wewnętrzna, czyli po zmiennej y (przy traktowaniu zmiennej x jako stałej). Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int e^x dy = e^x \int dy = ye^x + c$$

$$\int_{e^x}^2 e^x dy = [ye^x]_{e^x}^2 = 2 \cdot e^x - e^x \cdot e^x = 2e^x - e^{2x}$$

Obliczoną całkę po zmiennej y należy teraz scałkować po zmiennej x . Podobnie jak poprzednio można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną i do wyznaczonej funkcji pierwotnej wstawić granice całkowania.

$$\int (2e^x - e^{2x}) dx = 2 \int e^x dx - \int e^{2x} dx = 2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

$$\int_0^{\ln 2} (2e^x - e^{2x}) dx = \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln 2} =$$

$$= \left(2e^{\ln 2} - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} \right) - \left(2e^0 - \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0} \right) =$$

$$= \left(2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \right) - \left(2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{1}{2}$$

5. Równania różniczkowe zwyczajne

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału piątego można bez trudu:

- podać pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego,
- wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego,
- wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego z wykorzystaniem zagadnienia początkowego (zagadnienia Cauchy'ego),
- rozwiązać równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych,
- rozwiązać równanie różniczkowe jednorodne i niejednorodne,
- rozwiązać równanie różniczkowe liniowe jednorodne i niejednorodne,
- rozwiązać równanie różniczkowe drugiego rzędu poprzez sprowadzenie go do równania pierwszego rzędu.

5.1. Pojęcie równania różniczkowego zwyczajnego

Przedmiotem analizy będzie zagadnienie związku między zmienną niezależną x , jej funkcją y i pochodnymi y' , y'' , y''' , ..., $y^{(n)}$, który można zapisać pewnym równaniem, zwanym równaniem różniczkowym. Równania różniczkowe dzieli się na:

- zwyczajne – jeżeli niewiadoma funkcja zależy tylko od jednego argumentu i problem sprowadza się do wyznaczenia funkcji jednej zmiennej;
- cząstkowe – jeżeli niewiadoma funkcja zależy od kilku argumentów i problem sprowadza się do wyznaczenia funkcji.

W tej części opracowania omówione zostaną wyłącznie równania różniczkowe zwyczajne.

Definicja równania różniczkowego zwyczajnego

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywa się związek

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (5.1)$$

gdzie:

$y = y(x)$ jest funkcją niewiadomą,

$y', y'', \dots, y^{(n)}$ to kolejne pochodne szukanej funkcji.

W zależności od rzędu najwyższej pochodnej występującej w równaniu określa się rząd równania różniczkowego zwyczajnego.

- **Określanie rzędu równania różniczkowego zwyczajnego.**

Przykład 5.1.1

Określić rząd równania różniczkowego zwyczajnego.

- $y' + 5xy^2 = 10$
- $y'' + 2xy' - x^2y^3 = 5$
- $y^{(4)} + y' = 3xy$
- $y^{(6)} + 2y'' + 1 = 4y$

Rozwiązanie:

a) $y' + 5xy^2 = 10$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego, ponieważ najwyższa pochodna występująca w tym równaniu to pierwsza pochodna.

b) $y'' + 2xy' - x^2y^3 = 5$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego, ponieważ najwyższa pochodna występująca w tym równaniu to druga pochodna.

c) $y^{(4)} + y' = 3xy$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu czwartego, ponieważ najwyższa pochodna występująca w tym równaniu to czwarta pochodna.

d) $1 + 2y'' + y^{(6)} = 4y$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne rzędu szóstego, ponieważ najwyższa pochodna występująca w tym równaniu to szósta pochodna.

5.2. Rozwiązanie równania różniczkowego

Proces znajdowania rozwiązań równań różniczkowych nazywa się całkowaniem. Całką nazywa się jedno lub kilka równań wiążących funkcje niewiadome ze zmiennymi niezależnymi w taki sposób, że po podstawieniu funkcji niewiadomych i ich pochodnych do danego równania różniczkowego jest ono tożsamościowo spełnione.

Rozwiązaniem równania różniczkowego nazywa się całkę wyrażającą w sposób jawny zależność funkcji niewiadomych od zmiennych niezależnych.

Definicja rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego

Rozwiązaniem lub całką równania różniczkowego $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ w przedziale (a, b) nazywa się każdą funkcję zmiennej x wyrażoną w postaci jawnej, $y = \varphi(x)$, lub w postaci uwikłanej: $h(x, y) = 0$, która ma pochodne do rzędu n włącznie i spełnia to równanie dla $x \in (a, b)$.

Funkcję $y = \varphi(x)$ nazywa się rozwiązaniem równania różniczkowego, jeśli staje się ono tożsamością po zastąpieniu y przez $\varphi(x)$, y' przez $\varphi'(x)$, \dots , $y^{(n)}$ przez $\varphi^{(n)}(x)$, przy czym zakłada się (i nie ma specjalnego zastrzeżenia), że rozpatrywane wielkości przyjmują tylko wartości rzeczywiste, a rozpatrywane funkcje są jednoznaczne.

Dla uproszczenia funkcja $\varphi(x)$ będzie oznaczana przez $y(x)$. Wobec tego można powiedzieć, że funkcję $y(x)$ nazywa się rozwiązaniem lub całką równania różniczkowego na przedziale (a, b) , jeżeli jest ona na tym przedziale n -krotnie różniczkowalna i zmienia to równanie w tożsamość.

- **Sprawdzanie, czy podana funkcja jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego.**

Przykład 5.2.1

Sprawdzić, czy podana funkcja jest całką (rozwiązaniem) równania różniczkowego zwyczajnego.

a) $y = 2x, x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

b) $y = 3x^2, \frac{1}{2}y'' + y' - \frac{2y}{x} - 3 = 0$

c) $y = \ln|x|, -x^2 y'' + xy' + \ln|x| = y + 2$

d) $y = \frac{1}{x}, x^2 y'' - 3xy' + 2 = x - 1$

Rozwiązanie:

a) $y = 2x, x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$

Aby sprawdzić, czy funkcja $y = 2x$ jest całką podanego równania różniczkowego, należy obliczyć jej pierwszą i drugą pochodną, a następnie wstawić je do równania, by stwierdzić, czy zachodzi tożsamość.

$$y' = 2, y'' = 0$$

$$x^2 \cdot 0 - 2x \cdot 2 + 2 \cdot 2x = 0$$

$$0 = 0$$

Z równania wynika, że zachodzi tożsamość, zatem podana całka jest rozwiązaniem tego równania.

b) $y = 3x^2, \frac{1}{2}y'' + y' - \frac{2y}{x} - 3 = 0$

Aby sprawdzić, czy funkcja $y = 3x^2$ jest całką podanego równania różniczkowego, należy obliczyć jej pierwszą i drugą pochodną, a następnie wstawić je do równania, by stwierdzić, czy zachodzi tożsamość.

$$y' = 6x, y'' = 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 + 6x - \frac{2 \cdot 3x^2}{x} - 3 = 0$$

$$3 + 6x - 6x - 3 = 0$$

$$0 = 0$$

Z równania wynika, że zachodzi tożsamość, zatem podana całka jest rozwiązaniem tego równania.

c) $y = \ln|x|, -x^2 y'' + xy' + \ln|x| = y + 2$

Aby sprawdzić, czy funkcja $y = \ln x$ jest całką podanego równania różniczkowego, należy obliczyć jej pierwszą i drugą pochodną, a następnie wstawić je do równania, by stwierdzić, czy zachodzi tożsamość.

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$-x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + x \cdot \frac{1}{x} + \ln|x| = \ln|x| + 2$$

$$1 + 1 + \ln|x| = \ln|x| + 2$$

$$\ln|x| + 2 = \ln|x| + 2$$

Z równania wynika, że zachodzi tożsamość, zatem podana całka jest rozwiązaniem tego równania.

d) $y = \frac{1}{x}, x^2 y''' - 3xy' + 2 = x - 1$

Aby sprawdzić, czy funkcja $y = \frac{1}{x}$ jest całką podanego równania różniczkowego, należy obliczyć jej pierwszą i trzecią pochodną, a następnie wstawić je do równania, by stwierdzić, czy zachodzi tożsamość.

$$y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}, y''' = -\frac{6}{x^4}$$

$$x^2 \cdot \left(-\frac{6}{x^4}\right) - 3x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2 = x - 1 - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x} + 2 = x - 1$$

Z równania wynika, że nie zachodzi tożsamość, zatem podana całka nie jest rozwiązaniem tego równania.

5.3. Rozwiązanie ogólne i rozwiązanie szczególne równania różniczkowego

W dalszej części uwaga zostanie skupiona nie na sprawdzaniu, czy podana całka jest rozwiązaniem danego równania, ale na rozwiązywaniu równań różniczkowych zwyczajnych.

Istnieją metody rozwiązywania równań różniczkowych pewnych szczególnych typów, jednak wiele równań różniczkowych nie ma rozwiązań, które dałyby się wyrazić w postaci jawnej. W praktyce matematycznej często informacją ważniejszą od samej postaci rozwiązania jest informacja o jego istnieniu (gdyż nie każde równanie różniczkowe musi je mieć). W przypadku równań różniczkowych, o których wiadomo, że mają rozwiązanie, często (szczególnie w zastosowaniach) wystarczające jest znalezienie rozwiązania przybliżonego (np. stosując metodę aproksymacji). Obecnie prowadzi się wiele badań nad kolejnymi schematami rozwiązywania równań różniczkowych, ponieważ mają one wiele zastosowań praktycznych.

Przy omawianiu zagadnienia rozwiązywania równań różniczkowych pojawiają się pojęcia rozwiązania ogólnego i rozwiązania szczególnego równania.

Definicja rozwiązania ogólnego równania różniczkowego zwyczajnego

Rozwiązaniem ogólnym (lub całką ogólną) równania różniczkowego $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ w przedziale (a, b) nazywa się każdą funkcję mającą postać:

$$y(x, c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{5.2}$$

zależną od zmiennej x i zawierającą n dowolnych stałych c_1, c_2, \dots, c_n spełniających równanie $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ na przedziale (a, b) .

Można zatem powiedzieć, że rozwiązanie ogólne równania różniczkowego jest zależne od n dowolnych stałych c_1, c_2, \dots, c_n .

Definicja rozwiązania szczególnego równania różniczkowego zwyczajnego

Rozwiązaniem szczególnym (lub całką szczególną) równania różniczkowego $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ w przedziale (a, b) nazywa się każdą funkcję mającą postać:

$$y(x) \tag{5.3}$$

zależną od zmiennej x , po wstawieniu w miejsce c_1, c_2, \dots, c_n w równaniu (5.2) konkretnych wartości tak, aby równanie $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ było spełnione na przedziale (a, b) .

Rozwiązanie szczególne można uzyskać, dobierając odpowiednie wartości stałych c_1, c_2, \dots, c_n bądź wyliczając je na podstawie zagadnienia początkowego (zagadnienia Cauchy'ego).

Definicja zagadnienia początkowego (zagadnienia Cauchy'ego)

Zagadnieniem początkowym dla równania różniczkowego $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ nazywa się zagadnienie znalezienia całki szczególnej tego równania, spełniającej jednocześnie warunki początkowe:

$$y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{5.4}$$

gdzie $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ nazywa się wartościami początkowymi.

- **Wyznaczanie rozwiązania ogólnego równania różniczkowego zwyczajnego.**

Przykład 5.3.1

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego zwyczajnego.

- $y' = 3x^2 + 1$
- $y'' = 4x^3 + x + 5$
- $y''' = 5x^4 + \sin x - 3$
- $y'' = \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2}$

Rozwiązanie:

- $y' = 3x^2 + 1$

Jest to równanie pierwszego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je jeden raz. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie pierwszego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawi się tylko jedna stała całkowania, dlatego nie trzeba jej numerować.

Całkując lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int(3x^2 + 1) dx = 3 \int x^2 dx + \int dx = 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 + x + c = x^3 + x + c$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = x^3 + x + c$, czyli rozwiązanie ogólne.

b) $y'' = 4x^3 + x + 5$

Jest to równanie drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int(4x^3 + x + 5) dx = 4 \int x^3 dx + \int x dx + 5 \int dx = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + c_1 = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + c_1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + c_1$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + c_1 \right) dx = \\ &= \int x^4 dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx + 5 \int x dx + c_1 \int dx = \\ &= \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + c_1x + c_2$, czyli rozwiązanie ogólne.

c) $y''' = 5x^4 + \sin x - 3$

Jest to równanie trzeciego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je trzy razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie trzeciego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się trzy stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y''$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int (5x^4 + \sin x - 3) dx = 5 \int x^4 dx + \int \sin x dx - 3 \int dx = \\ &= 5 \cdot \frac{1}{5} x^5 + (-\cos x) - 3x + c_1 = x^5 - \cos x - 3x + c_1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y'' = x^5 - \cos x - 3x + c_1$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int (x^5 - \cos x - 3x + c_1) dx = \\ &= \int x^5 dx - \int \cos x dx - 3 \int x dx + c_1 \int dx = \\ &= \frac{1}{6} x^6 - \sin x - 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c_1 x + c_2 = \frac{1}{6} x^6 - \sin x - \frac{3}{2} x^2 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = \frac{1}{6} x^6 - \sin x - \frac{3}{2} x^2 + c_1 x + c_2$$

Całkując trzeci raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując trzeci raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(\frac{1}{6} x^6 - \sin x - \frac{3}{2} x^2 + c_1 x + c_2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int x^6 dx - \int \sin x dx - \frac{3}{2} \int x^2 dx + c_1 \int x dx + c_2 \int dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} x^7 + \cos x - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = \\ &= \frac{1}{42} x^7 + \cos x - \frac{1}{2} x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{42} x^7 + \cos x - \frac{1}{2} x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, czyli rozwiązanie ogólne.

$$d) \quad y'' = \frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2}$$

Jest to równanie drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawiają się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{2} \right) dx = \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{x^2}{2} dx = 2 \int x^{-2} dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx = \\ &= -2x^{-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + c_1 = -2x^{-1} + \frac{1}{6} x^3 + c_1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = -2x^{-1} + \frac{1}{6} x^3 + c_1$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(-2x^{-1} + \frac{1}{6} x^3 + c_1 \right) dx = -2 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{6} \int x^3 dx + c_1 \int dx = \\ &= -2 \cdot \ln|x| + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} x^4 + c_1 x + c_2 = -2 \ln|x| + \frac{1}{24} x^4 + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = -2 \ln|x| + \frac{1}{24} x^4 + c_1 x + c_2$, czyli rozwiązanie ogólne.

Przykład 5.3.2

Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania różniczkowego.

$$a) \quad y'' = 2e^x + \ln|x|$$

$$b) \quad y'' = x^2 e^x$$

$$c) \quad y' = \frac{\ln|x|}{x}$$

$$d) \quad y''' = e^{3x+2}$$

Rozwiązanie:

a) $y'' = 2e^x + \ln|x|$

Jest to równanie drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawiają się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int (2e^x + \ln|x|) dx = 2 \int e^x dx + \int \ln|x| dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} u = \ln|x| \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = x \end{array} \right) = 2e^x + x \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = \\ &= 2e^x + x \ln|x| - \int dx = 2e^x + x \ln|x| - x + c_1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = 2e^x + x \ln|x| - x + c_1$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int (2e^x + x \ln|x| - x + c_1) dx = \\ &= 2 \int e^x dx + \int x \cdot \ln|x| dx - \int x dx + c_1 \int dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} u = \ln|x| \quad v' = x \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right) = \\ &= 2e^x + \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 = \\ &= 2e^x + \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 = \\ &= 2e^x + \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{3}{4}x^2 + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln|x| - \frac{3}{2} \right) + 2e^x + c_1x + c_2$, czyli rozwiązanie ogólne.

b) $y'' = x^2 e^x$

Jest to równanie drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Niemniej należy zauważyć, że prawa strona równania jest iloczynem, więc przy całkowaniu trzeba wykorzystać metodę całkowania przez części. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawiają się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int x^2 e^x dx = \left(\begin{array}{l} u = x^2 \quad v' = e^x \\ u' = 2x \quad v = e^x \end{array} \right) = x^2 \cdot e^x - 2 \int x \cdot e^x dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = e^x \\ u' = 1 \quad v = e^x \end{array} \right) = x^2 e^x - 2 \left(x \cdot e^x - \int e^x dx \right) = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c_1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c_1$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int (x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c_1) dx = \\ &= \int x^2 e^x dx - 2 \int x e^x dx + 2 \int e^x dx + c_1 \int dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2x e^x + 2e^x + 2e^x + c_1 x + c_2 = \\ &= x^2 e^x - 4x e^x + 6e^x + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = x^2 e^x - 4x e^x + 6e^x + c_1 x + c_2$, czyli rozwiązanie ogólne.

c) $y' = \frac{\ln|x|}{x}$

Jest to równanie pierwszego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je jeden raz. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Niemniej należy zauważyć, że prawa strona równania jest ilorazem, więc przy całkowaniu trzeba wykorzystać metodę całkowania przez części. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie pierwszego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawi się jedna stała całkowania, dlatego nie ma potrzeby jej numerować.

Całkując lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int \frac{\ln|x|}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln|x| & v' = \frac{1}{x} \\ u' = \frac{1}{x} & v = \ln|x| \end{array} \right) =$$
$$= (\ln|x|)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| dx$$

Jak widać, całka, która pojawiła się w wyniku po prawej stronie, jest dokładnie taka sama jak całka po lewej stronie, która jest obliczana. W tym momencie należy przejść na równanie całkowe:

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| dx = (\ln|x|)^2 - \int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| dx$$

$$2\int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| dx = (\ln|x|)^2 + c$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln|x| dx = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + c$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + c$, czyli rozwiązanie ogólne.

d) $y''' = e^{3x+2}$

Jest to równanie trzeciego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je trzy razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Niemniej należy zauważyć, że prawa strona równania jest funkcją złożoną, więc przy całkowaniu trzeba wykorzystać metodę całkowania przez podstawianie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie trzeciego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się trzy stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y''$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int e^{3x+2} dx = \left(\begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right) = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + c_1 = \frac{1}{3} e^{3x+2} + c_1$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y'' = \frac{1}{3} e^{3x+2} + c_1$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(\frac{1}{3} e^{3x+2} + c_1 \right) dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+2} dx + c_1 \int dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right) = \frac{1}{9} \int e^t dt + c_1 x + c_2 = \frac{1}{9} e^t + c_1 x + c_2 = \\ &= \frac{1}{9} e^{3x+2} + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = \frac{1}{9} e^{3x+2} + c_1 x + c_2$$

Całkując trzeci raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując trzeci raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int \left(\frac{1}{9} e^{3x+2} + c_1 x + c_2 \right) dx = \frac{1}{9}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{27} e^{3x+2} + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$, czyli rozwiązanie ogólne.

- Wyznaczanie rozwiązania szczególnego równania różniczkowego zwyczajnego.

Przykład 5.3.3

Wyznaczyć rozwiązanie szczególne równania różniczkowego przy podanym zagadnieniu początkowym.

- a) $y' = 2x^3$ $y(1) = 4$
- b) $y'' = 4$ $y(1) = 4, y'(1) = 3$
- c) $y'' = x^2$ $y(0) = 2, y'(0) = 5$
- d) $y''' = x - 2$ $y(2) = -2, y'(2) = -\frac{5}{3}, y''(2) = 2$

Rozwiązanie:

a) $y' = 2x^3$ $y(1) = 4$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem pierwszego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, wystarczy scałkować je jeden raz. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie pierwszego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawi się jedna stała całkowania, dlatego nie ma potrzeby jej numerować.

Całkując lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int 2x^3 dx = 2 \int x^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} x^4 + c = \frac{1}{2} x^4 + c$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} x^4 + c$ *, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(1) = 4$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(1) = 4$ można więc obliczyć stałą c .

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 1^4 + c \Rightarrow c = \frac{7}{2}$$

Z tego wynika, że wstawiając obliczone $c = \frac{7}{2}$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \frac{1}{2} x^4 + \frac{7}{2}$, czyli rozwiązanie szczególne.

b) $y'' = 4$ $y(1) = 4$, $y'(1) = 3$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int 4 dx = 4 \int dx = 4x + c_1$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = 4x + c_1$$
 *

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int (4x + c_1) dx = 4 \int x dx + c_1 \int dx = \\ = 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c_1 x + c_2 = 2x^2 + c_1 x + c_2$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = 2x^2 + c_1 x + c_2$ **, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(1) = 4, y'(1) = 3$. W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(1) = 3$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$3 = 4 \cdot 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_1 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(1) = 4$ można obliczyć stałą c_2 .

$$4 = 2 \cdot 1^2 + (-1) \cdot 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 3$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = -1$ oraz $c_2 = 3$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = 2x^2 - x + 3$, czyli rozwiązanie szczególne.

c) $y'' = x^2, y(0) = 2, y'(0) = 5$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawiają się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + c_1$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = \frac{1}{3} x^3 + c_1 *$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int \left(\frac{1}{3}x^3 + c_1 \right) dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx + c_1 \int dx = \\ = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}x^4 + c_1x + c_2 = \frac{1}{12}x^4 + c_1x + c_2$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{12}x^4 + c_1x + c_2$ **, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(0) = 2, y'(0) = 5$. W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(0) = 5$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$5 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + c_1 \Rightarrow c_1 = 5$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_1 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(0) = 2$ można obliczyć stałą c_2 .

$$2 = \frac{1}{12} \cdot 0^4 + c_1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = 5$ oraz $c_2 = 2$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \frac{1}{12}x^4 + 5x + 2$, czyli rozwiązanie szczególne.

d) $y''' = x - 2y(2) = -2, y'(2) = -\frac{5}{3}, y''(2) = 2$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem trzeciego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je trzy razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Zważywszy na to, że jest to równanie trzeciego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się trzy stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y''$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int (x - 2) dx = \int x dx - 2 \int dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c_1$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y'' = \frac{1}{2}x^2 - 2x + c_1 *$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + c_1 \right) dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx - 2 \int x dx + c_1 \int dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + c_1x + c_2 \quad **$$

Całkując trzeci raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując trzeci raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + c_1x + c_2 \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int x^3 dx - \int x^2 dx + c_1 \int x dx + c_2 \int dx = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + c_1 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c_2x + c_3 \\ &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3 \quad ***$, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(2) = -2$, $y'(2) = -\frac{5}{3}$, $y''(2) = 2$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y''(2) = 2$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = 4$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_1 oraz danych z zagadnienia początkowego $y'(2) = -\frac{5}{3}$ można obliczyć stałą c_2 .

$$-\frac{5}{3} = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2^2 + 4 \cdot 2 + c_2 \Rightarrow c_2 = -7$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego *** obliczonych c_1, c_2 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(2) = -2$ można obliczyć stałą c_3 .

$$-2 = \frac{1}{24} \cdot 2^4 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^2 + (-7) \cdot 2 + c_3 \Rightarrow c_3 = 6$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = 4$, $c_2 = -7$ oraz $c_3 = 6$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się: $y = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 7x + 6$, czyli rozwiązanie szczególne.

Przykład 5.3.4

Rozwiązać problem Cauchy'ego.

- a) $y'' = 3 \ln|x|$ $y(1) = 3, y'(1) = 0$
- b) $y'' = x \sin x$ $y(0) = 2, y'(0) = 1$
- c) $y' = 3x\sqrt{x^2 + 1}$ $y(0) = 6$
- d) $y''' = e^{2x}$ $y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = 1$

Rozwiązanie:

- a) $y'' = 3 \ln|x|$ $y(1) = 3, y'(1) = 0$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int 3 \ln|x| dx = 3 \int \ln|x| dx = \begin{pmatrix} u = \ln|x| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \left(x \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{x} \cdot x dx \right) = 3x \ln|x| - 3x + c_1$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = 3x \ln|x| - 3x + c_1 *$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 P &= \int (3x \ln|x| - 3x + c_1) dx = \\
 &= 3 \int x \ln|x| dx - 3 \int x dx + c_1 \int dx = \left(\begin{array}{l} u = \ln|x| \quad v' = x \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right) = \\
 &= 3 \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \right) - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c_1x + c_2 = \\
 &= \frac{3}{2}x^2 \ln|x| - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^2 + c_1x + c_2 = \frac{3}{2}x^2 \ln|x| - \frac{9}{4}x^2 + c_1x + c_2
 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x^2 \ln|x| - \frac{9}{4}x^2 + c_1x + c_2$ **, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(1) = 3, y'(1) = 0$. W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(1) = 0$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$0 = 3 \cdot 1 \cdot \ln 1 - 3 \cdot 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 3$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_1 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(1) = 3$ można obliczyć stałą c_2 .

$$3 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 \cdot \ln 1 - \frac{9}{4} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{9}{4}$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = 3$ oraz $c_2 = \frac{9}{4}$, do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \frac{3}{2}x^2 \ln|x| - \frac{9}{4}x^2 + 3x + \frac{9}{4}$, czyli rozwiązanie szczególne.

b) $y'' = x \sin x \quad y(0) = 2, y'(0) = 1$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem drugiego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je dwa razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Zważywszy na to, że jest to równanie drugiego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się dwie stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 P &= \int x \sin x dx = \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right) = -x \cos x + \int \cos x dx = \\
 &= -x \cos x + \sin x + c_1
 \end{aligned}$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = \sin x - x \cos x + c_1 *$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} P &= \int (\sin x - x \cos x + c_1) dx = \int \sin x dx - \int x \cos x dx + c_1 \int dx = \\ &= \left(\begin{array}{l} u = x \quad v' = \cos x \\ u' = 1 \quad v = \sin x \end{array} \right) = \\ &= -\cos x - \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) + c_1 x + c_2 = \\ &= -\cos x - x \sin x - \cos x + c_1 x + c_2 = -x \sin x - 2 \cos x + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = -x \sin x - 2 \cos x + c_1 x + c_2 **$, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(0) = 2, y'(0) = 1$. W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(0) = 1$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$1 = \sin 0 - 0 \cdot \cos 0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_1 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(0) = 2$ można obliczyć stałą c_2 .

$$2 = -(0) \cdot \sin 0 - 2 \cos 0 + 1 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 4$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = 1$ oraz $c_2 = 4$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = -x \sin x - 2 \cos x + x + 4$, czyli rozwiązanie szczególne.

c) $y' = 3x \sqrt{x^2 + 1} \quad y(0) = 6$

Zanim zostanie obliczona całka szczególna, należy wyznaczyć rozwiązanie ogólne.

Podane równanie jest równaniem pierwszego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, wystarczy scałkować je jeden raz. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Niemniej należy zauważyć, że z prawej strony równania występuje funkcja złożona, zatem trzeba skorzystać z metody całkowania przez podstawianie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie pierwszego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawi się jedna stała całkowania, dlatego nie ma potrzeby jej numerować.

Całkując lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int 3x \sqrt{x^2 + 1} dx = \begin{pmatrix} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{pmatrix} = 3 \cdot \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt =$$

$$= \frac{3}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} + c = \sqrt{t^3} + c = \sqrt{(x^2 + 1)^3} + c$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \sqrt{(x^2 + 1)^3} + c$ *, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(0) = 6$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(0) = 6$ można więc obliczyć stałą c .

$$6 = \sqrt{(0^2 + 1)^3} + c \Rightarrow c = 5$$

Stąd, wstawiając obliczone $c = 5$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \sqrt{(x^2 + 1)^3} + 5$, czyli rozwiązanie szczególne.

d) $y''' = e^{2x} y(0) = \frac{1}{4}, y'(0) = \frac{1}{2}, y''(0) = 1$

Jest to równanie trzeciego rzędu, zatem aby znaleźć rozwiązanie, należy scałkować je trzy razy. Równanie jest w takiej postaci, że lewa strona zawiera tylko y , a prawa tylko x , co ułatwia rozwiązanie. Niemniej należy zauważyć, że prawa strona równania jest funkcją złożoną, więc przy całkowaniu trzeba wykorzystać metodę całkowania przez podstawianie. Ponadto, zważywszy na to, że jest to równanie trzeciego rzędu, przy całkowaniu prawej strony pojawią się trzy stałe całkowania (przy każdym całkowaniu po jednej), dlatego należy je ponumerować.

Całkując pierwszy raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y''$$

Całkując pierwszy raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int e^{2x} dx = \begin{pmatrix} t = 2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + c_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + c_1 *$$

Całkując drugi raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y'$$

Całkując drugi raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c_1 \right) dx = \frac{1}{2} \int e^{2x} dx + c_1 \int dx = \left(\begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \int e^t dt + c_1 x + c_2 = \frac{1}{4} e^t + c_1 x + c_2 = \frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2$$

Stąd:

$$L = P \Leftrightarrow y' = \frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2 \quad **$$

Całkując trzeci raz lewą stronę, otrzymuje się:

$$L = y$$

Całkując trzeci raz prawą stronę, otrzymuje się:

$$P = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} + c_1 x + c_2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int e^{2x} dx + c_1 \int x dx + c_2 \int dx = \left(\begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2dx \\ dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{8} \int e^t dt + c_1 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c_2 x + c_3 =$$

$$= \frac{1}{8} e^t + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

Stąd: $L = P \Leftrightarrow y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \quad ***$, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = \frac{1}{2}$, $y''(0) = 1$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y''(0) = 1$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$1 = \frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}$$

W rozwiązaniu zaznaczonym ** występuje stała c_2 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(0) = \frac{1}{2}$ można więc obliczyć stałą c_2 .

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} e^{2 \cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{4}$$

W rozwiązaniu zaznaczonym *** występuje stała c_3 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(0) = \frac{1}{4}$ można więc obliczyć stałą c_3 .

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8}e^{2 \cdot 0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot 0 + c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{8}$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{4}$, $c_3 = \frac{1}{8}$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$, czyli rozwiązanie szczególne.

5.4. Równania o zmiennych rozdzielonych

Dotychczas równania różniczkowe przedstawiane były w postaci, w której po lewej stronie znajdowały się funkcja uzależniona tylko od y i jej pochodne, a po prawej funkcja uzależniona od x . Rozwiązanie takiego równania sprowadzało się do całkowania obu stron tyle razy, ile było konieczne do uzyskania po lewej stronie wyłącznie y . Zazwyczaj jednak równania różniczkowe występują w bardziej skomplikowanej postaci, gdzie funkcja uzależniona od zmiennej x oraz funkcja uzależniona od y i jej pochodne występują po obu stronach i należy je uporządkować. Zakładając, że prawa strona jest iloczynem dwóch funkcji, $f(x)$ i $g(y)$, które są ciągłe w pewnych przedziałach, można zapisać równanie $y' = f(x) \cdot g(y)$ i nazwać je równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Definicja równania o zmiennych rozdzielonych

Równanie, które można zapisać w postaci:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (5.5)$$

nazywa się równaniem o zmiennych rozdzielonych, które w formie różniczkowej przyjmuje postać:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \quad (5.6)$$

gdy $g(y) \neq 0$.

Z uwagi na to, że y' można zapisać jako $\frac{dy}{dx}$ (ponieważ y jest funkcją zmiennej x), równanie (5.6) można zapisać jako $\frac{dy}{g(y)} = f(x)$. Przekształcając je, otrzymuje się:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = f(x) \cdot g(y) \cdot dx$$

Dzieląc obustronnie przez $g(y)$, otrzymuje się:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

W ten sposób uzyskano równanie o zmiennych rozdzielonych, gdzie funkcja po lewej stronie uzależniona jest tylko od zmiennej y , a funkcja po prawej stronie tylko od zmiennej x . Jest to postać równania gotowa do całkowania obu stron po odpowiednich zmiennych.

- **Przekształcanie równania różniczkowego zwyczajnego do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.**

Przykład 5.4.1

Zapisać równanie różniczkowe w postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

- $5x^2y' = 2y$
- $x(y + 1)y' = y$
- $y'(x + y + xy + 1) = 1$
- $(1 + x^2)y' - 2\sqrt{1 - y^2} = 0$

Rozwiązanie:

a) $5x^2y' = 2y$

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$5x^2 \frac{dy}{dx} = 2y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$5x^2 dy = 2y dx$$

Dzieląc obustronnie przez $5x^2$ (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$dy = 2y \frac{dx}{5x^2}$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się: $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{5x^2}$.

Czyli: $\frac{1}{y} dy = \frac{2}{5x^2} dx$, a więc równanie o zmiennych rozdzielonych.

b) $x(y + 1)y' = y$

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$x(y + 1)\frac{dy}{dx} = y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$x(y + 1)dy = y dx$$

Dzieląc obustronnie przez x (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$(y + 1)dy = \frac{y dx}{x}$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{y+1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

c) $y'(x + y + xy + 1) = 1$

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}(x + y + xy + 1) = 1$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$(x + y + xy + 1)dy = dx$$

$$[x(y + 1) + (y + 1)]dy = dx$$

$$(y + 1)(x + 1)dy = dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(x + 1)$ (zał.: $x \neq -1$), otrzymuje się $(y + 1) dy = \frac{1}{x+1} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

d) $(1 + x^2)y' - 2\sqrt{1 - y^2} = 0$

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{1 - y^2}$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$(1 + x^2)dy = 2\sqrt{1 - y^2} dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(1 + x^2)$, otrzymuje się:

$$dy = \frac{2\sqrt{1 - y^2}}{(1 + x^2)} dx$$

Dzieląc obustronnie przez $\sqrt{1-y^2}$ (zał.: $y \in (-1; 1)$), otrzymuje się $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{2}{(1+x^2)} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

- **Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych metodą sprowadzania ich do postaci równań o zmiennych rozdzielonych.**

Przykład 5.4.2

Rozwiązać równanie o zmiennych rozdzielonych.

- $(2 + e^y) y' = e^x$
- $y'(x + 1) + 3 = y$
- $(1 + e^y)yy' = e^x$
- $(1 + x^2)yy' = x(1 + y^2)$

Rozwiązanie:

a) $(2 + e^y) y' = e^x$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$(2 + e^y) \frac{dy}{dx} = e^x$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się $(2 + e^y)dy = e^x dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int (2 + e^y) dy = 2 \int dy + \int e^y dy = 2y + e^y$$

$$P = \int e^x dx = e^x + c$$

Stąd $2y + e^y = e^x + c$, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

b) $y'(x + 1) + 3 = y$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx}(x + 1) + 3 = y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 1) = y - 3$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$(x + 1)dy = (y - 3)dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(x + 1)$ (zał.: $x \neq -1$), otrzymuje się:

$$dy = \frac{(y-3)}{(x+1)} dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(y - 3)$ (zał.: $y \neq 3$), otrzymuje się $\frac{1}{y-3} dy = \frac{1}{x+1} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y-3} dy = \left(\begin{array}{l} t = y - 3 \\ dt = dx \\ dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln |y - 3|$$

$$P = \int \frac{1}{x+1} dx = \left(\begin{array}{l} t = x + 1 \\ dt = dx \\ dx = dt \end{array} \right) = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| = \ln|x + 1| + c$$

Stąd:

$$\ln|y - 3| = \ln|x + 1| + c$$

Ze względu na to, że stała c jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln |c_1|$.

$$\ln|y - 3| = \ln|x + 1| + \ln |c_1|$$

$$\ln|y - 3| = \ln[c_1|x + 1|]$$

Stąd otrzymuje się $y - 3 = c_1(x + 1)$, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

c) $(1 + e^y)yy' = e^x$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$(1 + e^y) y \frac{dy}{dx} = e^x$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się $(1 + e^y) y dy = e^x dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int (1 + e^y) y dy = \int y dy + \int y \cdot e^y dy = \left(\begin{array}{ll} u = y & v' = e^y \\ u' = 1 & v = e^y \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + ye^y - \int e^y dy = \frac{1}{2}y^2 + ye^y - e^y$$

$$P = \int e^x dx = e^x + c$$

Stąd: $\frac{1}{2}y^2 + ye^y - e^y = e^x + c$, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

d) $(1 + x^2)yy' = x(1 + y^2)$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$(1 + x^2)y \frac{dy}{dx} = x(1 + y^2)$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$(1 + x^2)y dy = x(1 + y^2)dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(1 + x^2)$, otrzymuje się:

$$y dy = \frac{x(1 + y^2)}{(1 + x^2)} dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(1 + y^2)$, otrzymuje się $\frac{y}{1+y^2} dy = \frac{x}{1+x^2} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{y}{1+y^2} dy = \left(\begin{array}{l} t = 1 + y^2 \\ dt = 2y dy \\ dy = \frac{dt}{2y} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2)$$

$$P = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left(\begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

Stąd:

$$\frac{1}{2} \ln(1 + y^2) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

Mnożąc obustronnie przez 2, otrzymuje się:

$$\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + c$$

Ze względu na to, że stała c jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln |c_1|$.

$$\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + \ln |c_1|$$

$$\ln(1 + y^2) = \ln[c_1(1 + x^2)]$$

Stąd otrzymuje się $1 + y^2 = c_1(1 + x^2)$, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

Rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych z zagadnieniem początkowym metodą sprowadzania ich do postaci równań o zmiennych rozdzielonych.

Przykład 5.4.3

Rozwiązać równanie o zmiennych rozdzielonych z zagadnieniem początkowym.

- a) $y' = \frac{x-1}{y^2}, y(2) = 3$
- b) $2x^2 - yy' = 0, y(3) = 3\sqrt{2}$
- c) $2xy' = y, y(4) = 2$
- d) $y' + 2xy = x, y(0) = \frac{3}{2}$

Rozwiązanie:

a) $y' = \frac{x-1}{y^2}, y(2) = 3$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y^2}$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = \frac{x-1}{y^2} dx$$

Mnożąc obustronnie przez y^2 , otrzymuje się $y^2 dy = (x-1) dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3$$

$$P = \int (x-1) dx = \int x dx - \int dx = \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

Stąd:

$$\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

Mnożąc obustronnie przez 3, otrzymuje się $y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + c^*$, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(2) = 3$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(2) = 3$ można więc obliczyć stałą c .

$$3^3 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + c \Rightarrow c = 27$$

Stąd, wstawiając obliczone $c = 27$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y^3 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + 27$, czyli rozwiązanie szczególne.

b) $2x^2 - yy' = 0, y(3) = 3\sqrt{2}$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$2x^2 - y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \frac{dy}{dx} = 2x^2$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się $y dy = 2x^2 dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int y dy = \frac{1}{2}y^2$$

$$P = 2 \int x^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

Stąd:

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{3}x^3 + c$$

Mnożąc obustronnie przez 2, otrzymuje się $y^2 = \frac{4}{3}x^3 + c$ *, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(3) = 3\sqrt{2}$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(3) = 3\sqrt{2}$ można więc obliczyć stałą c .

$$(3\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3} \cdot 3^3 + c \Rightarrow c = -18$$

Stąd, wstawiając obliczone $c = -18$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y^2 = \frac{4}{3}x^3 - 18$, czyli rozwiązanie szczególne.

c) $2xy' = y, y(4) = 2$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

$$\text{Niech } y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$2x \frac{dy}{dx} = y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$2x dy = y dx$$

Dzieląc obustronnie przez $2x$ (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$dy = \frac{y}{2x} dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = \frac{1}{2x} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln |x| + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |x| + c$$

Ze względu na to, że stała c jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln |c_1|$.

$$\ln |y| = \ln |\sqrt{x}| + \ln |c_1|$$

$$\ln |y| = \ln |c_1 \sqrt{x}|$$

Stąd otrzymuje się $y = c_1 \sqrt{x}$ *, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(4) = 2$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(4) = 2$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$2 = c_1 \sqrt{4} \Rightarrow c_1 = 1$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = 1$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \sqrt{x}$, czyli rozwiązanie szczególne.

d) $y' + 2xy = x, y(0) = \frac{3}{2}$

Najpierw należy sprowadzić równanie do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 2xy$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = x(1 - 2y)dx$$

Dzieląc obustronnie przez $(1 - 2y)$ (zał.: $y \neq \frac{1}{2}$), otrzymuje się $\frac{1}{1-2y} dy = x dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{1-2y} dy = \left(\begin{array}{l} t = 1 - 2y \\ dt = -2dy \\ dy = -\frac{dt}{2} \end{array} \right) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2} \ln|t| =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|1 - 2y|$$

$$P = \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Stąd:

$$-\frac{1}{2} \ln|1 - 2y| = \frac{1}{2} x^2 + c$$

Mnożąc obustronnie przez 2, otrzymuje się $-\ln|1 - 2y| = x^2 + c$, czyli rozwiązanie ogólne (w postaci uwikłanej).

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe: $y(0) = \frac{3}{2}$.

W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna stała c . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y(0) = \frac{3}{2}$ można więc obliczyć stałą c .

$$-\ln \left| 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} \right| = 0^2 + c \Rightarrow c_1 = -\ln 2$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = -\ln 2$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $-\ln|1 - 2y| = x^2 - \ln 2$, czyli rozwiązanie szczególne.

5.5. Równania liniowe jednorodne i niejednorodne

Szczególnym przypadkiem równania różniczkowego zwyczajnego, w którym występują zmienna x , funkcja y i jej pierwsza pochodna $f(x, y, y')$, jest równanie, w którym pochodna y' występuje tylko w pierwszej potęgde ze współczynnikiem 1, tj. równanie w postaci $y' = \varphi(x, y)$. Zakładając, że prawa strona tego równania jest funkcją postaci $a(x)y + q(x)$, gdzie $a(x)$ i $q(x)$ są funkcjami ciągłymi w pewnym przedziale, równanie $y' = \varphi(x, y)$ przyjmuje postać $y' = a(x)y + q(x)$ lub, po podstawieniu $p(x) = -a(x)$, postać $y' + p(x)y = q(x)$. Nosi wówczas nazwę równania różniczkowego liniowego pierwszego rzędu.

Definicja równania liniowego pierwszego rzędu (jednorodnego i niejednorodnego)

Równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu nazywa się równanie postaci

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad (5.7)$$

Jeżeli $q(x) = 0$, to równanie (5.7) jest równaniem jednorodnym.

Jeżeli $q(x) \neq 0$, to równanie (5.7) jest równaniem niejednorodnym.

Rozwiązywanie równania różniczkowego liniowego rozpoczyna się od identyfikacji, czy dane równanie jest jednorodne, czy niejednorodne.

W przypadku równania liniowego jednorodnego najpierw sprowadza się je do postaci równania o zmiennych rozdzielonych, a następnie wyznacza się rozwiązanie ogólne. Następnie należy wrócić do równania wyjściowego i dokonać właściwego podstawienia celem wyliczenia stałej c .

W przypadku, gdy równanie wyjściowe jest równaniem niejednorodnym, należy je rozwiązywać jako jednorodne, a następnie (po wyznaczeniu rozwiązania ogólnego) wrócić do równania wyjściowego i dokonać właściwego podstawienia celem wyliczenia stałych c_1 i c_2 .

- **Wyznaczanie rozwiązania ogólnego równania różniczkowego liniowego jednorodnego.**

Przykład 5.5.1

Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe.

- $y' + xy = 0$
- $y' = \frac{-x}{\ln|x|} y$
- $y' - \frac{4x-1}{x^3} y = 0$
- $y' - y \sin x = 0$

Rozwiązanie:

a) $y' + xy = 0$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) = 0$, zatem jest to równanie jednorodne. Na początku trzeba je sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = -xy \, dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = -x \, dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = - \int x \, dx = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2 + c}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot e^c$$

Ze względu na to, że e^c jest liczbą (stałą), można ją zastąpić stałą c_1 .

Stąd otrzymuje się $y = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$, czyli rozwiązanie ogólne.

b) $y' = y \ln|x|$

$$y' - y \ln|x| = 0$$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) = 0$, zatem jest to równanie jednorodne. Na początku trzeba je sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} - y \ln|x| = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \ln|x|$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = y \ln|x| dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = \ln|x| dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln|y|$$

$$P = \int \ln|x| dx = \begin{pmatrix} u = \ln|x| & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= x \ln|x| - \int dx = x \ln|x| - x + c$$

Stąd:

$$\ln|y| = x \ln|x| - x + c$$

$$y = e^{x \ln|x| - x + c}$$

$$y = e^{x(\ln|x| - 1)} \cdot e^c$$

Ze względu na to, że e^c jest liczbą (stałą), można ją zastąpić stałą c_1 .

Stąd otrzymuje się $y = c_1 e^{x(\ln|x| - 1)}$, czyli rozwiązanie ogólne.

c) $y' - \frac{4x-1}{x^3} y = 0$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) = 0$, zatem jest to równanie jednorodne. Na początku trzeba je sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4x-1}{x^3} y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x-1}{x^3} y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = \frac{4x-1}{x^3} y dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = \frac{4x-1}{x^3} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = \int \frac{4x-1}{x^3} dx = 4 \int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^3} dx = 4 \int x^{-2} dx - \int x^{-3} dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} - \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{4}{x} + \frac{1}{2x^2} + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} + c$$

$$y = e^{\frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} + c}$$

$$y = e^{\frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x}} \cdot e^c$$

Ze względu na to, że e^c jest liczbą (stałą), można ją zastąpić stałą c_1 .

Stąd otrzymuje się $y = c_1 e^{\frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x}}$, czyli rozwiązanie ogólne.

d) $y' - y \sin x = 0$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) = 0$, zatem jest to równanie jednorodne. Na początku trzeba je sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

Niech $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} - y \sin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y \sin x$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = y \sin x dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = \sin x dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = -\cos x + c$$

$$y = e^{-\cos x + c}$$

$$y = e^{-\cos x} \cdot e^c$$

Ze względu na to, że e^c jest liczbą (stałą), można ją zastąpić stałą c_1 .
Stąd otrzymuje się $y = c_1 e^{-\cos x}$, czyli rozwiązanie ogólne.

- **Wyznaczanie rozwiązania ogólnego równania różniczkowego liniowego niejednorodnego.**

Przykład 5.5.2

Rozwiązać równanie różniczkowe liniowe.

- $xy' = y + 2x$
- $y' - \frac{3y}{x} = x$
- $y' + y = e^{-x}$
- $xy' - 2y = x^3 \cos x$

Rozwiązanie:

- $xy' = y + 2x$
 $xy' - y = 2x$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) \neq 0$, zatem jest to równanie niejednorodne. Na początku trzeba je rozwiązać jako równanie jednorodne ignorując $q(x) = 2x$.

$$xy' - y = 0$$

Uzyskane równanie jednorodne trzeba sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

$$\text{Niech } y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$x \frac{dy}{dx} = y$$

Dzieląc obustronnie przez x (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = \frac{y}{x} dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = \ln |x| + c$$

Ze względu na to, że stała c jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln |c_1|$.

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |c_1|$$

$$\ln |y| = \ln |c_1 \cdot x|$$

$$y = c_1 \cdot x^*$$

W tym momencie należy pamiętać, że równanie wyjściowe było równaniem niejednorodnym i teraz trzeba do niego wrócić, wstawiając obliczony y oraz jego pochodną y' . Z równania * należy zatem obliczyć pochodną iloczynu, traktując c_1 nie jako stałą, ale jako funkcję $c_1(x)$. Dla uproszczenia pomija się zapis $c_1(x)$, zostawiając samo c_1 .

$$y' = c_1' \cdot x + c_1 \cdot x'$$

$$y' = c_1' x + c_1^{**}$$

Do równania wyjściowego należy wstawić * i **.

$$x(c_1' x + c_1) = c_1 \cdot x + 2x$$

$$c_1' x^2 + c_1 x - c_1 x = 2x$$

$$c_1' x^2 = 2x$$

Dzieląc obustronnie przez x^2 (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$c_1' = \frac{2}{x}$$

Aby obliczyć c_1 , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = c_1$$

$$P = \int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \ln |x| + c_2$$

Stąd:

$$c_1 = 2 \ln |x| + c_2$$

Następnie obliczone c_1 należy wstawić do równania *.

$$y = (2 \ln |x| + c_2) \cdot x$$

Stąd otrzymuje się $y = x + 2x \ln |x|$, czyli rozwiązanie ogólne.

$$\text{b) } y' - \frac{3y}{x} = x$$

$$y' - \frac{3}{x}y = x$$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) \neq 0$, zatem jest to równanie niejednorodne. Na początku trzeba je rozwiązać jako równanie jednorodne, ignorując $q(x) = x$.

$$y' - \frac{3}{x}y = 0$$

Uzyskane równanie jednorodne trzeba sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

$$\text{Niech } y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = \frac{3}{x}y dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y}dy = \frac{3}{x}dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = \int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln |x| + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + c$$

Ze względu na to, że stała c jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln |c_1|$.

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + \ln |c_1|$$

$$\ln |y| = \ln |c_1 \cdot x^3|$$

$$y = c_1 \cdot x^3 *$$

W tym momencie należy pamiętać, że równanie wyjściowe było równaniem niejednorodnym i teraz trzeba do niego wrócić, wstawiając obliczony y oraz jego pochodną y' . Z równania * należy zatem obliczyć pochodną iloczynu, traktując c_1 nie jako stałą, ale jako funkcję $c_1(x)$. Dla uproszczenia pomija się zapis $c_1(x)$, zostawiając samo c_1 .

$$y' = c_1' \cdot x^3 + c_1 \cdot (x^3)'$$

$$y' = c_1' x^3 + 3c_1 x^2 **$$

Do równania wyjściowego należy wstawić * i **.

$$c_1'x^3 + 3c_1x^2 - \frac{3c_1 \cdot x^3}{x} = x$$

$$c_1'x^3 + 3c_1x^2 - 3c_1x^2 = x$$

$$c_1'x^3 = x$$

Dzieląc obustronnie przez x^3 (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$c_1' = x^{-2}$$

Aby obliczyć c_1 , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = c_1$$

$$P = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c_2$$

Stąd:

$$c_1 = -\frac{1}{x} + c_2$$

Następnie obliczone c_1 należy wstawić do równania *.

$$y = \left(-\frac{1}{x} + c_2\right) \cdot x^3$$

Stąd otrzymuje się $y = c_2x^3 - x^2$, czyli rozwiązanie ogólne.

c) $y' + y = e^{-x}$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) \neq 0$, zatem jest to równanie niejednorodne. Na początku trzeba je rozwiązać jako równanie jednorodne, ignorując $q(x) = e^{-x}$.

$$y' + y = 0$$

Uzyskane równanie jednorodne trzeba sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

$$\text{Niech } y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$dy = -y dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = -dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = - \int dx = -x + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = -x + c$$

$$y = e^{-x+c}$$

$$y = e^{c-x}$$

$$y = \frac{e^c}{e^x}$$

Ze względu na to, że e^c jest liczbą (stałą), można ją zastąpić stałą c_1 .

$$y = \frac{c_1}{e^x} *$$

W tym momencie należy pamiętać, że równanie wyjściowe było równaniem niejednorodnym i teraz trzeba do niego wrócić, wstawiając obliczony y oraz jego pochodną y' . Z równania * należy zatem obliczyć pochodną ilorazu, traktując c_1 nie jako stałą, ale jako funkcję $c_1(x)$. Dla uproszczenia pomija się zapis $c_1(x)$, zostawiając samo c_1 .

$$y' = \frac{c_1' \cdot e^x - c_1 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{e^x(c_1' - c_1)}{e^{2x}} = \frac{c_1' - c_1}{e^x}$$

$$y' = \frac{c_1' - c_1}{e^x} **$$

Do równania wyjściowego należy wstawić * i **.

$$\frac{c_1' - c_1}{e^x} + \frac{c_1}{e^x} = e^{-x}$$

$$\frac{c_1' - c_1 + c_1}{e^x} = \frac{1}{e^x}$$

$$c_1' = 1$$

Aby obliczyć c_1 , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = c_1$$

$$P = \int dx = x + c_2$$

Stąd:

$$c_1 = x + c_2$$

Obliczone c_1 należy wstawić do równania *.

Stąd otrzymuje się $y = \frac{x+c_2}{e^x}$, czyli rozwiązanie ogólne.

$$d) \quad xy' - 2y = x^3 \cos x$$

Dzieląc równanie obustronnie przez x (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x$$

Jak widać, jest to równanie liniowe w postaci $y' + p(x) \cdot y = q(x)$, przy czym $q(x) \neq 0$, zatem jest to równanie niejednorodne. Na początku trzeba je rozwiązać jako równanie jednorodne, ignorując $q(x) = x^2 \cos x$.

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

Uzyskane równanie jednorodne trzeba sprowadzić do postaci równania o zmiennych rozdzielonych.

$$\text{Niech } y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się

$$dy = \frac{2}{x}y dx$$

Dzieląc obustronnie przez y (zał.: $y \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|$$

$$P = \int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + c = 2 \ln |x| + c$$

Stąd:

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + c$$

Ze względu na to, że stała c jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln |c_1|$.

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + \ln |c_1|$$

$$\ln |y| = \ln |c_1 x^2|$$

$$y = c_1 \cdot x^2 *$$

W tym momencie należy pamiętać, że równanie wyjściowe było równaniem niejednorodnym i teraz trzeba do niego wrócić, wstawiając obliczony y oraz jego pochodną y' . Z równania * należy zatem obliczyć pochodną iloczynu, traktując c_1 nie jako stałą, ale jako funkcję $c_1(x)$. Dla uproszczenia pomija się zapis $c_1(x)$, zostawiając samo c_1 .

$$y' = c_1' \cdot x^2 + c_1 \cdot (x^2)'$$

$$y' = c_1' x^2 + 2c_1 x^{**}$$

Do równania wyjściowego należy wstawić * i **.

$$x(c_1' x^2 + 2c_1 x) - 2c_1 \cdot x^2 = x^3 \cos x$$

$$c_1' x^3 + 2c_1 x^2 - 2c_1 x^2 = x^3 \cos x$$

$$c_1' x^3 = x^3 \cos x$$

Dzieląc obustronnie przez x^3 (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$c_1' = \cos x$$

Aby obliczyć c_1 , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = c_1$$

$$P = \int \cos x \, dx = \sin x + c_2$$

Stąd:

$$c_1 = \sin x + c_2$$

Obliczone c_1 należy wstawić do równania *.

$$y = (\sin x + c_2) \cdot x^2$$

Stąd otrzymuje się $y = x^2 \sin x + x^2 c_2$, czyli rozwiązanie ogólne.

5.6. Równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu

Równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu pojawiły się już na początku tego rozdziału. W przykładzie 5.1.1.b określano rząd takiego równania, a w przykładzie 5.2.1 sprawdzano, czy podana całka jest rozwiązaniem równania. W przykładach 5.3.1.b i d oraz 5.3.2a i b wyznaczano natomiast rozwiązania ogólne, a w przykładach 5.3.3.b i c oraz 5.3.4.a i b rozwiązania szczególne. Równania podane były jednak w takiej postaci, że lewa strona zawierała tylko drugą pochodną funkcji y , a prawa zapisana była z użyciem tylko zmiennej x , co ułatwiało rozwiązanie, gdyż wystarczyło dwukrotnie scałkować obie strony równania, aby dojść do rozwiązania ogólnego. Tym razem uwaga zostanie skupiona na takich przykładach, w których konieczne będzie sprowadzenie równania drugiego rzędu do równania pierwszego rzędu poprzez podstawienie. Dla usystematyzowania rozważanego zagadnienia warto zacząć od podania definicji równania drugiego rzędu.

Definicja równania różniczkowego drugiego rzędu

Równaniem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu nazywa się równanie w postaci

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (5.8)$$

gdzie $y = y(x)$ jest funkcją niewiadomą zmiennej x i w którym występuje pochodna pierwszego i drugiego rzędu tej funkcji, tzn. $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Definicja rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu

Rozwiązaniem (lub całką) równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu $F(x, y, y', y'') = 0$ nazywa się każdą funkcję zmiennej x wyrażoną w postaci jawnej $y = y(x)$ lub w postaci uwikłanej $h(x, y) = 0$, która ma pochodne rzędu n włącznie i spełnia równanie $F(x, y, y', y'') = 0$ dla $x \in (a, b)$.

Definicja rozwiązania ogólnego i szczególnego równania różniczkowego drugiego rzędu

Rozwiązaniem ogólnym (lub całką ogólną) równania $F(x, y, y', y'') = 0$ w obszarze istnienia i jednoznaczności rozwiązań nazywa się rozwiązanie zależne od dwóch dowolnych stałych, c_1 i c_2 , wyrażone w postaci jawnej, $y = y(x, c_1, c_2)$, lub w postaci uwikłanej, $h(x, y, c_1, c_2) = 0$.

Rozwiązanie szczególne (lub całkę szczególną) równania $F(x, y, y', y'') = 0$ uzyskuje się, podstawiając do rozwiązania ogólnego konkretne wartości c_1 i c_2 lub obliczając je przy danym zagadnieniu początkowym.

Jednym z rodzajów równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu są równania sprowadzalne do równań pierwszego rzędu. W takim przypadku, aby rozwiązać równanie różniczkowe rzędu drugiego $F(x, y, y', y'') = 0$, sprowadza się je do równania różniczkowego rzędu pierwszego, stosując podstawienie $y' = u$. Wówczas $y'' = u'$. Otrzymuje się w ten sposób równanie różniczkowe rzędu pierwszego w postaci $F(x, u, u') = 0$, które z łatwością można rozwiązać, uzyskując całkę ogólną $y = y(x, c_1, c_2)$. Przy podanym dodatkowo zagadnieniu początkowym można wyznaczyć całkę szczególną równania $F(x, y, y', y'') = 0$, spełniającą warunki początkowe $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$.

- Wyznaczanie rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu.

Przykład 5.6.1

Rozwiązać równanie różniczkowe rzędu drugiego.

- $y'' - x = \cos x$
- $x^2 y'' = xy'$
- $y'' - 2x - e^x = 0, y(0) = 4, y'(0) = 7$
- $y''(x^2 + 1) = 2xy', y(1) = 6, y'(1) = 2$

Rozwiązanie:

- $y'' - x = \cos x$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Należy zauważyć, że lewa strona zawiera nie tylko drugą pochodną funkcji y , zatem nie wystarczy dwukrotnie scałkować obu stron równania. Najpierw trzeba je uporządkować tak, aby po lewej stronie została tylko pochodna y'' . W kolejnym kroku należy dokonać podstawienia u za y' , aby sprowadzić je do równania pierwszego rzędu, a następnie do równania o zmiennych rozdzielonych.

$$y'' = \cos x + x$$

$$\text{Niech } y' = u.$$

$$u' = \cos x + x$$

$$\text{Niech } u' = \frac{du}{dx}.$$

Stąd:

$$\frac{du}{dx} = \cos x + x$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się $du = (x + \cos x)dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int du = u$$

$$P = \int (\cos x + x)dx = \int \cos x dx + \int x dx = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

Stąd:

$$u = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

Wracając do podstawienia $y' = u$, otrzymuje się:

$$y' = \sin x + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

Aby obliczyć y , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = y$$

$$\begin{aligned} P &= \int \left(\sin x + \frac{1}{2}x^2 + c_1 \right) dx = \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx + c_1 \int dx = \\ &= -\cos x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2 = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd: $y = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + c_1x + c_2$, czyli rozwiązanie ogólne.

b) $x^2y'' = xy'$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Należy zauważyć, że lewa strona zawiera nie tylko drugą pochodną funkcji y , zatem nie wystarczy dwukrotnie scałkować obu stron równania. Najpierw trzeba je uporządkować tak, aby po lewej stronie została tylko pochodna y'' . W kolejnym kroku należy dokonać podstawienia u za y' , aby sprowadzić je do równania pierwszego rzędu, a następnie do równania o zmiennych rozdzielonych.

$$x^2y'' = xy'$$

Dzieląc obustronnie przez x^2 (zał.: $x \neq 0$), otrzymuje się:

$$y'' = \frac{1}{x}y'$$

$$\text{Niech } y' = u.$$

$$u' = \frac{1}{x}u$$

$$\text{Niech } u' = \frac{du}{dx}.$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}u$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$du = \frac{1}{x}u dx$$

Dzieląc obustronnie przez u (zał.: $u \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{u} du = \frac{1}{x} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{u} du = \ln|u|$$

$$P = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c_1$$

Stąd:

$$\ln|u| = \ln|x| + c_1$$

Ze względu na to, że stała c_1 jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln|c_2|$.

$$\ln|u| = \ln|x| + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln|c_2 \cdot x|$$

$$u = c_2 x$$

Wracając do podstawienia $y' = u$, otrzymuje się:

$$y' = c_2 x$$

Aby obliczyć y , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = y$$

$$P = c_2 \int x dx = \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3$$

Stąd: $y = \frac{1}{2} c_2 x^2 + c_3$, czyli rozwiązanie ogólne.

c) $y'' - 2x - e^x = 0, y(0) = 4, y'(0) = 7$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Należy zauważyć, że lewa strona zawiera nie tylko drugą pochodną funkcji y , zatem nie wystarczy dwukrotnie scałkować obu stron równania. Najpierw trzeba je uporządkować tak, aby po lewej stronie została tylko pochodna y'' . W kolejnym kroku należy dokonać podstawienia u za y' , aby sprowadzić je do równania pierwszego rzędu, a następnie do równania o zmiennych rozdzielonych. Ponadto jest to równanie z podanym zagadnieniem początkowym Cauchy'ego, co oznacza, że można wyznaczyć nie tylko rozwiązanie ogólne, ale też rozwiązanie szczególne.

$$y'' = 2x + e^x$$

Niech $y' = u$.

$$u' = 2x + e^x$$

Niech:

$$u' = \frac{du}{dx}$$

Stąd:

$$\frac{du}{dx} = 2x + e^x$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się $du = (2x + e^x)dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int du = u$$

$$P = \int (2x + e^x) dx = 2 \int x dx + \int e^x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 + e^x + c_1$$

Stąd:

$$u = x^2 + e^x + c_1$$

Wracając do podstawienia $y' = u$, otrzymuje się:

$$y' = x^2 + e^x + c_1 \quad *$$

Aby obliczyć y , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = y$$

$$\begin{aligned} P &= \int (x^2 + e^x + c_1) dx = \int x^2 dx + \int e^x dx + c_1 \int dx = \\ &= \frac{1}{3} x^3 + e^x + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

Stąd otrzymuje się $y = \frac{1}{3} x^3 + e^x + c_1 x + c_2$ **, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe $y(0) = 4$ $y'(0) = 7$. W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna niewiadoma c_1 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(0) = 4$ można więc obliczyć stałą c_1 .

$$4 = 0^2 + e^0 + c_1 \Rightarrow c_1 = 6$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_1 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(0) = 4$ można obliczyć stałą c_2 .

$$4 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + e^0 + 6 \cdot 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 3$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_1 = 6$ oraz $c_2 = 3$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \frac{1}{3} x^3 + e^x + 6x + 3$, czyli rozwiązanie szczególne.

d) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(1) = 6$, $y'(1) = 2$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Należy zauważyć, że lewa strona zawiera nie tylko drugą pochodną funkcji y , zatem nie wystarczy dwukrotnie scałkować obu stron równania. Najpierw trzeba je uporządkować tak, aby po lewej stronie została tylko pochodna y'' . W kolejnym kroku należy dokonać podstawienia u za y' , aby sprowadzić je do równania pierwszego rzędu, a następnie do równania o zmiennych rozdzielonych. Ponadto jest to równanie z podanym zagadnieniem początkowym Cauchy'ego, co oznacza, że można wyznaczyć nie tylko rozwiązanie ogólne, ale też rozwiązanie szczególne.

$$y''(x^2 + 1) = 2xy'$$

Dzieląc obustronnie przez $(x^2 + 1)$, otrzymuje się:

$$y'' = \frac{2xy'}{x^2 + 1}$$

Niech $y' = u$.

$$u' = \frac{2xu}{x^2+1}$$

Niech $u' = \frac{du}{dx}$.

Stąd:

$$\frac{du}{dx} = \frac{2xu}{x^2+1}$$

Mnożąc obustronnie przez dx , otrzymuje się:

$$du = \frac{2xu}{x^2+1} dx$$

Dzieląc obustronnie przez u (zał.: $u \neq 0$), otrzymuje się $\frac{1}{u} du = \frac{2x}{x^2+1} dx$, czyli równanie o zmiennych rozdzielonych.

Można teraz przystąpić do scałkowania obu stron (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = \int \frac{1}{u} du = \ln|u|$$

$$P = \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \left(\begin{array}{l} t = x^2 + 1 \\ dt = 2x dx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right) = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + c_1 = \ln(x^2 + 1) + c_1$$

Stąd:

$$\ln|u| = \ln(x^2 + 1) + c_1$$

Ze względu na to, że stała c_1 jest dowolną liczbą, można ją zastąpić przez $\ln|c_2|$.

$$\ln|u| = \ln(x^2 + 1) + \ln|c_2|$$

$$\ln|u| = \ln[c_2 \cdot (x^2 + 1)]$$

$$u = c_2 \cdot (x^2 + 1)$$

Wracając do podstawienia $y' = u$, otrzymuje się:

$$y' = c_2 \cdot (x^2 + 1) *$$

Aby obliczyć y , należy scałkować obie strony (nie dodając do lewej strony stałej całkowania).

$$L = y$$

$$P = c_2 \int (x^2 + 1) dx = c_2 \int x^2 dx + c_2 \int dx = \frac{1}{3} c_2 x^3 + c_2 x + c_3$$

Stąd otrzymuje się $y = \frac{1}{3} c_2 x^3 + c_2 x + c_3$ **, czyli rozwiązanie ogólne.

W tym momencie należy wykorzystać zagadnienie początkowe $y(1) = 6, y'(1) = 2$. W rozwiązaniu zaznaczonym * występuje jedna niewiadoma c_2 . Po wstawieniu do tego równania danych z zagadnienia początkowego $y'(1) = 2$ można więc obliczyć stałą c_2 .

$$2 = c_2 \cdot (1^2 + 1) \Rightarrow c_2 = 1$$

Po wstawieniu do rozwiązania zaznaczonego ** obliczonego c_2 oraz danych z zagadnienia początkowego $y(1) = 6$ można obliczyć stałą c_3 .

$$6 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1^3 + 1 \cdot 1 + c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{14}{3}$$

Stąd, wstawiając obliczone $c_2 = 1$ oraz $c_3 = \frac{14}{3}$ do rozwiązania ogólnego, otrzymuje się $y = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{14}{3}$, czyli rozwiązanie szczególne.

Literatura

1. Bartosiewicz Z., Mozyrska D., Pawłuszewicz E., *Matematyka. Skrypt dla studentów kierunku zarządzanie i marketing*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2003.
2. Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. I, wyd. 7, PWN, Warszawa 1978.
3. Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna 1*, Oficyna Wydawnicza „GiS”, Wrocław 2014.
4. Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna 2*, Oficyna Wydawnicza „GiS”, Wrocław 2014.
5. Gewert M., Skoczylas Z., *Równania różniczkowe zwyczajne. Teoria, przykłady, zadania*, wyd. 16 zm., Oficyna Wydawnicza „GiS”, Wrocław 2025.
6. Gołąbeska E., *Matematyka. Wybrane zagadnienia analizy matematycznej. Skrypt dla studentów kierunków inżynierskich*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2023, <https://www.scribd.com/document/708648736/Wybrane-zagadnienia-analizy-matematycznej> [dostęp: 15.07.2025].
7. Janowski W., *Matematyka. Podręcznik dla wydziałów elektrycznych i mechanicznych politechnik*, t. II, wyd. 2 popr., PWN, Warszawa 1967.
8. Janowski W., *Matematyka. Podręcznik dla wydziałów elektrycznych i mechanicznych politechnik*, t. I, wyd. 5 zm., PWN, Warszawa 1968.
9. Jarocka M., Olszewska A.M., Madras-Kobus B., *Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej. Podręcznik dla studentów studiów licencjackich i inżynierskich*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2024.
10. Krywicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, cz. 1, PWN, Warszawa 2004.
11. Pietrowski I.G., *Równania różniczkowe zwyczajne*, wyd. 2 zm. i uzupełn., PWN, Warszawa 1967.

Spis rysunków

Rys. 1.1.	Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji	7
Rys. 2.1.	Pole trapezu krzywoliniowego jako jednego obszaru.....	31
Rys. 2.2.	Pole trapezu krzywoliniowego jako suma pól dwóch obszarów	31
Rys. 2.3.	Pole trapezu krzywoliniowego jako suma pól trzech obszarów	31
Rys. 2.4.	Pole trapezu krzywoliniowego jako suma pól dziesięciu obszarów	32
Rys. 2.5.	Przykładowy podział odcinka $[a, b]$ na trzy mniejsze	32
Rys. 2.6.	Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	34
Rys. 2.7.	Trapez krzywoliniowy	42
Rys. 2.8.	Trapez krzywoliniowy składający się z trzech obszarów	43
Rys. 2.9.	Pole obszaru między funkcjami $f(x)$ i $g(x)$	49
Rys. 2.10.	Pole obszaru między funkcjami $f(y)$ i $g(y)$	49
Rys. 2.11.	Długość łuku krzywej $y = f(x)$ na odcinku $[a, b]$	57
Rys. 2.12.	Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX na odcinku $[a, b]$	64
Rys. 2.13.	Objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OY na odcinku $[a, b]$	65
Rys. 2.14.	Pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX na odcinku $[a, b]$	68
Rys. 2.15.	Pole powierzchni bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OY na odcinku $[a, b]$	69
Rys. 3.1.	Interpretacja geometryczna funkcji dwóch zmiennych	75
Rys. 4.1.	Interpretacja geometryczna całki podwójnej	111
Rys. 4.2.	Obszar normalny względem osi OX	111
Rys. 4.3.	Obszar normalny względem osi OY	112



Dr ELŻBIETA GOŁĄBESKA, profesor Politechniki Białostockiej, od ponad trzydziestu lat wykłada matematykę i statystykę. Od 2009 roku pracuje na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku, gdzie kieruje również studiami podyplomowymi wycena nieruchomości.

Jest docenianym przez studentów nauczycielem akademickim. Kilkakrotnie została laureatką konkursu na Najlepszego Dydaktyka Politechniki Białostockiej na WBiNŚ i Wykładowcą Roku w plebiscycie „Kuriera Porannego”.

Jest autorką wielu monografii, m.in. *Podmiotowa struktura rynku nieruchomości w kontekście jego profesjonalnej obsługi (cz. 1) – podmioty transakcji nieruchomościowych* (E. Gołąbeska, A. Harasimowicz, 2025), *Podmiotowa struktura rynku nieruchomości w kontekście jego profesjonalnej obsługi (cz. 2) – podmioty obsługi technicznej* (E. Gołąbeska, A. Harasimowicz, 2026) czy *Wybrane problemy związane z realizacją systemów wykorzystujących zieloną energię* (E. Gołąbeska, A. Harasimowicz, 2023). Publikuje również we współautorstwie ze studentami (zarówno książki, jak i artykuły). Są to m.in. takie pozycje, jak: *Odnawialne źródła energii w budownictwie mieszkaniowym* (E. Gołąbeska, M. Gawrychowska, I. Biała, 2025), *Rynek nieruchomości mieszkaniowych w Polsce w ujęciu prawnym, ekonomicznym, ekologicznym i finansowym* (red. E. Gołąbeska, 2024), *Korzyści wynikające z zastosowania OZE w budynkach mieszkalnych* (E. Gołąbeska, M. Gawrychowska, I. Biała, 2024) czy *Wirtualna rzeczywistość, sztuczna inteligencja oraz modelowanie informacji o budynkach jako nowoczesne technologie w marketingu nieruchomości* (E. Gołąbeska, I. Biała, 2023).

Matematyka – wybrane zagadnienia rachunku różniczkowego i całkowego. Skrypt dla studentów kierunków inżynierskich jest kontynuacją dwóch wcześniejszych publikacji: *Matematyka – wybrane zagadnienia algebry liniowej i geometrii analitycznej* oraz *Matematyka – wybrane zagadnienia analizy matematycznej*. Zakres tematyczny książki jest dostosowany do obowiązujących programów nauczania i realizacji założonych efektów uczenia się przedmiotu matematyka 2. Przedstawia podstawowe zagadnienia aparatu matematycznego, skupiając się głównie na ich praktycznym wykorzystaniu. Konstrukcja każdego rozdziału jest jednolita i zawiera przede wszystkim kluczowe definicje, twierdzenia i własności, ze szczególnym uwzględnieniem ich zastosowania w licznych przykładach.