

Rozdział 1

O liczbie chromatycznej grafu tablicy Cayleya grupy skończonej

Piotr Grzeszczuk*

Streszczenie. Tablicą Cayleya grupy skończonej G rzędu n nazywa się kwadratową tablicę $n \times n$, której wiersze i kolumny indeksowane są elementami grupy, natomiast pola wypełnione są iloczynami odpowiednich elementów grupy. Każdy wiersz i każda kolumna takiej tablicy nie zawiera powtarzających się elementów. Jest zatem przykładem kwadratu łacińskiego. Z grupą G zwiążemy graf Cayleya $\mathcal{G}_2(G) = \text{Cay}(G^2, \mathbf{S})$, którego wierzchołkami są pary $(g, h) \in G^2$. Symetryczny zbiór wyznaczający krawędzie jest postaci $\mathbf{S} = (G^* \times \{e\}) \cup (\{e\} \times G^*) \cup \{(g, g) \mid g \in G^*\}$. Graf $\mathcal{G}_2(G)$ koduje całkowicie strukturę grupy G . Oznacza to, że dla grup G i H grafy $\mathcal{G}_2(G)$ i $\mathcal{G}_2(H)$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy grupy są izomorficzne. Graf $\mathcal{G}_2(G)$ jest grafem tablicy Cayleya dla odpowiednio dobranych permutacji indeksujących wiersze i kolumny. Głównym celem pracy jest prezentacja wyników dotyczących wyznaczenia liczby chromatycznej grafu $\mathcal{G}_2(G)$ i opis związków tego zagadnienia z hipotezą Halla-Paige’a dla grup skończonych.

Słowa kluczowe: graf, grupa, tablica Cayleya grupy, kwadrat łaciński, liczba chromatyczna

1.1. Kwadraty łacińskie i tablice Cayleya grup skończonych

W pracy rozważamy skończone grafy proste, czyli pary $\mathcal{G} = (V, E)$, gdzie V jest skończonym zbiorem wierzchołków, zaś E zbiorem krawędzi, które będziemy utożsamiać z 2-elementowymi podzbiorami zbioru V . Notacja $u \sim v$ oznaczać będzie, że wierzchołki u i v są połączone krawędzią.

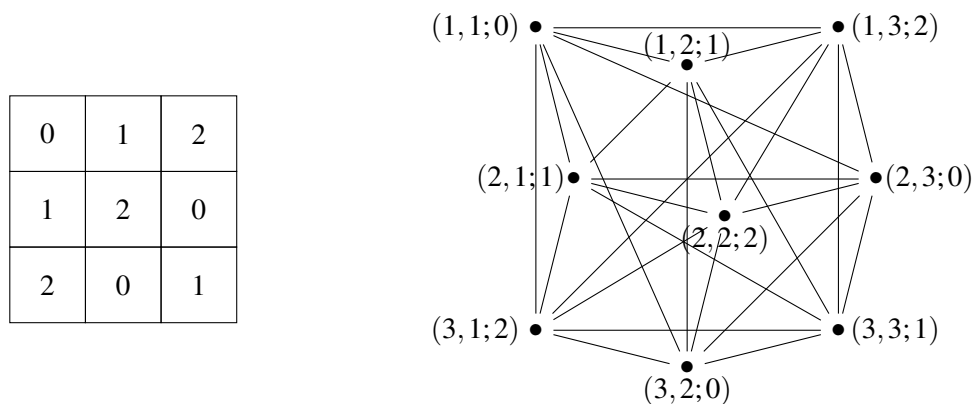
Przyjmijmy oznaczenie $[n] = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Kwadratową tablicę $L = [l_{ij}]$ rozmiarów $n \times n$, gdzie $l_{ij} \in [n]$, nazywa się kwadratem łacińskim rzędu n , jeśli w każdym wierszu i każdej kolumnie tablicy L występują wszystkie elementy zbioru $[n]$. Innymi słowy, każdy wiersz i każda kolumna wypełnione są permutacjami elementów

* Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, Wiejska 45A, 15-351 Białystok, p.grzeszczuk@pb.edu.pl

DOI 10.24427/978-83-68673-08-1_1

zbioru $[n]$. Z każdym kwadratem łacińskim stowarzyszony jest graf $\mathcal{G}(L)$, którego wierzchołkami są trójki $(i, j; l_{ij})$. Dwa wierzchołki $(i, j; l_{ij})$ i $(i', j'; l_{i'j'})$ są połączone krawędzią w $\mathcal{G}(L)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dokładnie jeden z warunków: $i = i'$ lub $j = j'$, lub $l_{ij} = l_{i'j'}$.

$\mathcal{G}(L)$ jest grafem regularnym stopnia $3(n-1)$. Przypomnijmy, że m -kliką w grafie nazywa się podgraf izomorficzny z grafem pełnym K_m . Każda para wierzchołków należących do kliky jest połączona krawędzią. Zbiór wierzchołków grafu kwadratu łacińskiego może być przedstawiony jako rozłączna suma n -klik wierszowych, jako rozłączna suma n -klik kolumnowych oraz jako rozłączna suma n -klik diagonalnych (czyli złożonych z wierzchołków pochodzących od różnych kolumn i wierszy kwadratu). Każdy wierzchołek należy do dokładnie jednej kliky każdego typu.



Rysunek 1.1: Kwadrat łaciński rzędu 3 i jego graf

Przypomnijmy, że jeśli M jest niepustym zbiorem, to mówimy, że graf $\mathcal{G} = (V, E)$ jest M -kolorowalny, jeśli istnieje funkcja $c: V \rightarrow M$ przyjmująca różne wartości dla par wierzchołków połączonych krawędzią. Tak więc

$$\text{jeśli } u \sim v, \text{ to } c(u) \neq c(v).$$

Mówimy wówczas, że funkcja c właściwie koloruje graf. Najmniejszą moc zbioru M takiego, że $\mathcal{G}$ jest M -kolorowalny nazywa się **liczbą chromatyczną** grafu i oznacza $\chi(\mathcal{G})$. Ponieważ graf kwadratu łacińskiego rzędu n zawiera n -klik, mamy oczywistą nierówność $\chi(\mathcal{G}(L)) \geq n$.

Naturalną metodę konstrukcji kwadratów łacińskich dostarczają grupy skończone. Niech G oznacza grupę skończoną rzędu n oraz niech $\sigma: [n] \rightarrow G$ będzie dowolną bijekcją. Możemy wówczas utworzyć kwadratową $n \times n$ tablicę $L_\sigma(G) = [l_{ij}]$ o wyrazach należących do grupy G , gdzie $l_{ij} = \sigma(i)\sigma(j)$. Jest to tablica mnożeń w grupie

G i jest nazywana **tablicą Cayleya**. Ponieważ lewostronne i prawostronne mnożenia przez ustalony element są bijekcjami, tablice Cayleya są kwadratami łacińskimi. Dla dowolnej bijekcji $\tau: [n] \rightarrow G$ możemy zbudować kolejną tablicę $L_{\tau\sigma} = [l'_{ij}]$ taką, że $l'_{ij} = \tau(i)\sigma(j)$. Jest to również kwadrat łaciński. Zauważmy, że odwzorowanie $\varphi: \mathcal{G}(L_\sigma) \rightarrow \mathcal{G}(L_{\tau\sigma})$ dane wzorem $\varphi(i, j; \sigma(i)\sigma(j)) = (\tau^{-1}\sigma(i), j; \sigma(i)\sigma(j))$ jest izomorfizmem grafów. Poniżej przedstawiamy tablice Cayleya dla grup rzędu 4: grupy cyklicznej $\mathbb{Z}_4$ i grupy Kleina $G = \{e, a, b, c\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

0	1	2	3
1	2	3	0
2	3	0	1
3	0	1	2

Rysunek 1.2: Tablica grupy $\mathbb{Z}_4$

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Rysunek 1.3: Tablica grupy Kleina

W powyższych tablicach tym samym kolorem oznaczone są komórki odpowiadające wierzchołkom tworzącym kliki diagonalne w grafach $\mathcal{G}(L(\mathbb{Z}_4))$ i $\mathcal{G}(L(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2))$. Pytanie o liczby chromatyczne tych grafów sprowadza się zatem do wyznaczenia minimalnej liczby symboli potrzebnych do wpisania bez powtórzeń w wiersze, kolumny oraz w komórki tego samego koloru. Poniżej pokazujemy 6-kolorowanie grafu grupy cyklicznej i 4-kolorowanie grafu grupy Kleina.

3	4	0	1
2	3	5	0
1	2	4	5
0	1	3	4

Rysunek 1.4: 6-kolorowanie grafu grupy $\mathbb{Z}_4$

0	1	2	3
2	3	0	1
3	2	1	0
1	0	3	2

Rysunek 1.5: 4-kolorowanie grafu grupy $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Rysunki 1.3 i 1.5 przedstawiają dwa kwadraty łacińskie. Jeśli elementy wpisane w komórki tych kwadratów oznaczmy odpowiednio przez l_{ij} oraz l'_{ij} , to pary (l_{ij}, l'_{ij})

są różne dla różnych par indeksów (i, j) . Takie kwadraty łacińskie nazywa się **ortogonalnymi**. Istnienie ortogonalnego kwadratu łacińskiego dla $L = [l_{ij}]$ jest zatem równoważne n -kolorowalności grafu $\mathcal{G}(L)$.

Grafy kwadratów łacińskich zbudowanych na tablicach mnożeń grup skończonych posiadają opis w terminach grafów Cayleya. Przypomnijmy, że jeśli G jest grupą skończoną, to podzbiór $S \subseteq G \setminus \{e\}$ jest **symetryczny**, jeśli $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $s^{-1} \in S$. **Grafem Cayleya** $\text{Cay}(G, S)$ nazywa się graf, dla którego G jest zbiorem wierzchołków i dwa wierzchołki $x, y \in G$ łączy krawędź wtedy i tylko wtedy, gdy $x = sy$ dla pewnego $s \in S$. W pracy Bagiński i Grzeszczuk (2021) badane były grafy Cayleya $\mathcal{G}_2(G) = \text{Cay}(G^2, S)$, zbudowane na kwadratach kartezjańskich $G^2 = G \times G$ oraz symetrycznych zbiorach postaci

$$S = (G^* \times \{e\}) \cup (\{e\} \times G^*) \cup \{(g, g) \mid g \in G^*\},$$

gdzie $G^* = G \setminus \{e\}$. Zauważmy, że jeśli (x_1, y_1) i (x_2, y_2) są wierzchołkami grafu $\mathcal{G}_2(G)$, to

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ x_1 = x_2 \text{ lub } y_1 = y_2 \text{ lub } (x_2, y_2) = (sx_1, sy_1) \text{ dla pewnego } s \in G^*.$$

W Bagiński i Grzeszczuk (2021) wykazano, że grafy $\mathcal{G}_2(G)$ wyznaczają grupę G . Oznacza to, że dla grup G i H grafy $\mathcal{G}(G)$ i $\mathcal{G}(H)$ są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy grupy są izomorficzne.

Dla dowolnego elementu $g \in G$ niech

$$W_g = \{(g, x) \mid x \in G\}, \quad K_g = \{(x, g) \mid x \in G\}, \quad D_g = \{(xg, x) \mid x \in G\}.$$

Zbiory te tworzą $|G|$ -kliki w grafie $\mathcal{G}_2(G)$ i nazywać je będziemy kolejno klikami wierszowymi, kolumnowymi i diagonalnymi. Wyznaczają one rozbicia zbioru wierzchołków

$$G^2 = \bigcup_{g \in G} W_g = \bigcup_{g \in G} K_g = \bigcup_{g \in G} D_g.$$

Z łatwością można zauważyć, że graf $\mathcal{G}_2(G)$ można identyfikować z rozważanym wyżej grafem tablicy Cayleya $\mathcal{G}(L_{\sigma\tau})$, gdzie $\sigma, \tau: [n] \rightarrow G$ są bijekcjami takimi, że $\tau(i) = \sigma(n - 1 - i)^{-1}$ dla $i \in [n]$.

1.2. Liczba chromatyczna grafu $\mathcal{G}_2(G)$

Ponieważ graf $\mathcal{G}_2(G)$ zawiera $|G|$ -kliki, otrzymujemy oczywiste oszacowanie

$$\chi(\mathcal{G}_2(G)) \geq |G|.$$

Okazuje się, że zagadnienie wyznaczenia liczby chromatycznej grafu $\mathcal{G}_2(G)$ jest ściśle powiązane z teorio-grupową hipotezą Halla-Paige'a o istnieniu kompletnej bijekcji w grupach skończonych.

Przypomnijmy, że jeśli G jest grupą rzędu $p^k m$ (gdzie $p \nmid m$ i p jest liczbą pierwszą) to, zgodnie z twierdzeniem Sylowa, grupa G posiada podgrupę rzędu p^k . Jest to oczywiście maksymalna p -podgrupa grupy G . Nazywa się ją p -podgrupą Sylowa.

Bijekcja $\sigma: G \rightarrow G$ nazywana jest **kompletną**, jeśli odwzorowanie $g \mapsto g\sigma(g)$ jest również bijekcją. M. Hall i L.J. Paige w pracy Hall i Paige (1955) sformułowali następujące przypuszczenie:

Hipoteza Halla-Paige'a: *Skończona grupa G posiada kompletną bijekcję wtedy i tylko wtedy, gdy 2-podgrupa Sylowa w G nie jest cykliczna.*

Związek hipotezy Halla-Paige'a z zagadnieniem kolorowalności grafów $\mathcal{G}_2(G)$ wyjaśnia następujące Stwierdzenie:

Stwierdzenie 1.1. *Jeśli G jest grupą skończoną, to $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$ wtedy i tylko wtedy, gdy grupa G posiada kompletną bijekcję.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$ i niech $c: G \times G \rightarrow G$ oznacza funkcję kolorującą. Dla dowolnego $x \in G^*$ rozważmy klikę diagonalną $D_x = \{(gx, g) \mid g \in G\}$. Ponieważ $|D_x| = |G|$ i wierzchołki należące do D_x mają różne kolory, istnieje dokładnie jeden wierzchołek $(\tau(x)x, \tau(x))$ koloru $c(e, e)$. Zauważmy, że $\tau(x) \neq e$. Rzeczywiście, $(x, e) \sim (e, e)$, więc $c(x, e) \neq c(e, e)$, a stąd $\tau(x) \neq e$.

Odwzorowanie τ jest bijekcją. Jeśli bowiem $\tau(x) = \tau(y)$, to wierzchołki $(\tau(x)x, \tau(x))$ i $(\tau(y)y, \tau(y)) = (\tau(x)y, \tau(x))$ należą do kliki kolumnowej $K_{\tau(x)}$. Ponieważ są one tego samego koloru musi zachodzić równość $x = y$. Ponadto wierzchołki $(\tau(x)x, \tau(x))$ i $(\tau(x)x, \tau(y))$ są w grafie $\mathcal{G}_2(G)$ połączone krawędzią. Zatem $\tau(x)x \neq \tau(y)y$, o ile $x \neq y$. Stąd wynika, że odwzorowania $x \mapsto \tau(x)$ oraz $x \mapsto \tau(x)x$ są bijekcjami. Z łatwością sprawdzamy teraz, że $\sigma = \tau^{-1}$ kompletną bijekcją.

Przypuśćmy, że grupa G posiada kompletną bijekcję σ . Wówczas odwzorowania $\tau = \sigma^{-1}$ oraz $x \mapsto \tau(x)x$ są bijekcjami. Funkcję $c: G \times G \rightarrow G$ kolorującą graf $\mathcal{G}_2(G)$ określimy wzorem

$$c(x, y) = \tau(x)y.$$

Należy pokazać, że dla $s \in G$ każdy z następujących trzech warunków implikuje $s = e$:

- 1) $c(sx, y) = c(x, y)$;
- 2) $c(x, sy) = c(x, y)$;
- 3) $c(sx, sy) = c(x, y)$.

W pierwszym przypadku mamy $\tau(sx)y = \tau(x)y$. To implikuje $\tau(sx) = \tau(x)$, czyli $s = e$.

W drugim przypadku otrzymujemy $\tau(x)sy = \tau(x)y$, a stąd oczywiście wynika, że $s = e$.

W ostatnim przypadku mamy równość $\tau(sx)sy = \tau(x)y$. Stąd wynika, że $\tau(sx)s = \tau(x)$, a więc $\tau(sx)sx = \tau(x)x$. Ponieważ odwzorowanie $x \mapsto \tau(x)x$ jest bijekcją, otrzymujemy $s = e$.

Ostatecznie funkcja $c(x, y) = \tau(x)y$ określa właściwe kolorowanie grafu $\mathcal{G}_2(G)$.

Przedstawimy teraz kilka elementarnych własności umożliwiających wyznaczanie liczb chromatycznych grafów $\mathcal{G}_2(G)$.

Lemat 1.1. *Jeśli H jest podgrupą normalną grupy G , to*

$$\chi(\mathcal{G}_2(G)) \leq \chi(\mathcal{G}_2(H)) \cdot \chi(\mathcal{G}_2(G/H)).$$

W szczególności, jeśli graf $\mathcal{G}_2(H)$ jest $|H|$ -kolorowalny i graf $\mathcal{G}_2(G/H)$ jest $|G/H|$ -kolorowalny, to graf $\mathcal{G}_2(G)$ jest $|G|$ -kolorowalny.

Dowód. Niech $c_H: H \times H \rightarrow M$, $c_{G/H}: G/H \times G/H \rightarrow S$ będą funkcjami kolorującymi odpowiednio grafy $\mathcal{G}_2(H)$ i $\mathcal{G}_2(G/H)$.

Ustalmy zbiór $\{g_0 = e, g_1, \dots, g_{m-1}\}$ reprezentantów warstw grupy G względem podgrupy H . Każdy element $g \in G$ ma jednoznaczne przedstawienie

$$g = hg_i,$$

dla pewnych $i \in [m]$ oraz $h \in H$.

Udowodnimy, że funkcja $c_G: G \times G \rightarrow M \times S$ dana wzorem

$$c_G(h_1g_i, h_2g_j) = (c_H(h_1, h_2), c_{G/H}(g_iH, g_jH))$$

koloruje właściwie graf $\mathcal{G}_2(G)$. W tym celu należy pokazać, że funkcja c_G jest różnowartościowa na klikach kolumnowych, wierszowych oraz diagonalnych. Rozważmy dwa wierzchołki (h_1g_i, h_2g_j) i (h_3g_k, h_4g_l) połączone krawędzią w $\mathcal{G}_2(G)$. Jeśli należą one do tej samej kliki kolumnowej, to $h_2g_j = h_4g_l$, a więc $h_2 = h_4$ i $g_j = g_l$. Jeśli funkcja c_G przyjmuje w tych wierzchołkach równe wartości, to porównanie pierwszych współrzędnych daje równość $c_H(h_1, h_2) = c_H(h_3, h_2)$. Ponieważ $(h_1, h_2) \sim (h_3, h_2)$ (w grafie $\mathcal{G}_2(H)$), otrzymujemy równość $h_1 = h_3$. Porównanie drugich współrzędnych wartości funkcji c_G daje $c_{G/H}(g_iH, g_jH) = c_{G/H}(g_kH, g_lH)$. Ponieważ $j = l$, $(g_iH, g_jH) \sim (g_kH, g_jH)$, wykorzystując fakt, że $c_{G/H}$ jest funkcją kolorującą graf $\mathcal{G}_2(G/H)$, otrzymujemy równość $g_iH = g_kH$, czyli $g_i = g_k$.

Analogicznie rozumiemy, gdy wierzchołki należą do tej samej kliki wierszowej.

Przypuśćmy, że oba rozważane wierzchołki należą do kliki diagonalnej. Mamy wówczas

$$(h_3g_k, h_4g_l) = (hg_t h_1g_i, hg_t h_2g_j),$$

dla pewnych $t \in [m]$ oraz $h \in H$. Ponieważ H jest podgrupą normalną, więc

$$hg_t h_1g_i = h_5g_\alpha \text{ oraz } hg_t h_2g_j = h_6g_\beta,$$

dla pewnych $\alpha, \beta \in [m]$ oraz $h_5, h_6 \in H$. Jeśli funkcja c_G przyjmuje dla tych wierzchołków równe wartości, to porównanie drugich współrzędnych daje

$$c_{G/H}(g_iH, g_jH) = c_{G/H}(g_\alpha H, g_\beta H) = c_{G/H}(g_t H \cdot g_i H, g_t H \cdot g_j H).$$

Ponieważ $(g_iH, g_jH) \sim (g_tH \cdot g_iH, g_tH \cdot g_jH)$ w grafie $\mathcal{G}_2(G/H)$, z powyższego wynika, że $g_tH = H$, czyli $g_t = g_1 = e$. Tak więc,

$$(h_3g_k, h_4g_l) = (hh_1g_i, hh_2g_j).$$

Porównując pierwsze współrzędne wartości funkcji c_G , otrzymujemy

$$c_H(h_1, h_2) = c_H(hh_1, hh_2).$$

Jednak $(h_1, h_2) \sim (hh_1, hh_2)$ w grafie $\mathcal{G}_2(H)$, a więc $h = e$. To kończy dowód.

Z Lematu 1.1 oraz Stwierdzenia 1.1 wynika, że jeśli H jest podgrupą normalną w G oraz H i G/H mają kompletne bijekcje, to grupa G również posiada taką bijekcję. Przedstawimy teraz efektywną konstrukcję takiej bijekcji. Niech bowiem $\sigma: H \rightarrow H$ oraz $\psi: G/H \rightarrow G/H$ będą kompletnymi bijekcjami. Niech τ oznacza permutację zbioru reprezentantów warstw $\{g_1, \dots, g_m\}$ określoną warunkiem

$$\tau(g_i) = g_j \Leftrightarrow \psi(g_iH) = g_jH.$$

Każdy element grupy G ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $xg_i = g_ix'$, gdzie $x, x' \in H$ oraz $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Wówczas odwzorowanie $\vartheta: G \rightarrow G$ dane wzorem

$$\vartheta(g_ix) = \sigma(x)\tau(g_i)$$

jest kompletną bijekcją. Oczywiście ϑ jest bijekcją.

Pozostaje pokazać, że $\delta(g) = g\vartheta(g)$ jest funkcją różnowartościową. Niech więc $g_ix\vartheta(g_ix) = g_jy\vartheta(g_jy)$, czyli

$$g_ix\sigma(x)\tau(g_i) = g_jy\sigma(y)\tau(g_j). \quad (1.1)$$

Działając na powyższą równość kanonicznym epimorfizmem $\eta: G \rightarrow G/H$, otrzymujemy

$$g_i\tau(g_i)H = g_j\tau(g_j)H, \text{ czyli } g_iH\psi(g_iH) = g_jH\psi(g_jH).$$

Stąd wynika, że $g_i H = g_j H$, czyli $i = j$. Z równości (1.1) wynika, że $x\sigma(x) = y\sigma(y)$, czyli $x = y$.

Pokażemy jak konstruować kompletne bijekcje dla grup faktoryzowalnych. Przypomnijmy, że grupą **faktoryzowalną** nazywa się skończoną grupę G posiadającą dwie podgrupy A, B takie, że $A \cap B = \{e\}$ oraz $G = AB = BA$. W takiej grupie każdy element ma jednoznaczne przedstawienie w postaci ab , gdzie $a \in A, b \in B$.

Stwierdzenie 1.2. *Jeśli $G = AB$ jest grupą faktoryzowalną i podgrupy A, B posiadają kompletne bijekcje, to G też posiada kompletną bijekcję.*

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnych elementów $a \in A, b \in B$ istnieją jednoznacznie wyznaczone elementy $a^* \in A$ oraz $b^* \in B$ takie, że

$$ab = b^* a^*.$$

Oczywiście $a^* = a^*(a, b)$ i $b^* = b^*(a, b)$, co oznacza, że są to funkcje zależne od dwóch parametrów. Zauważmy, że element b^* jednoznacznie wyznacza b ; w tym sensie, że jeśli

$$ab_1 = b^* a_1, \tag{1.2}$$

dla pewnych $a_1 \in A, b_1 \in B$, to $b_1 = b$ oraz $a_1 = a^*$. Rzeczywiście, na mocy założeń stwierdzenia oraz równości (1.2) mamy

$$b^* = ab(a^*)^{-1} \text{ oraz } b^* = ab_1 a_1^{-1},$$

czyli $b_1 a_1^{-1} = b(a^*)^{-1}$, a stąd $b_1^{-1} b = a_1^{-1} a^*$. Ponieważ $A \cap B = \{e\}$, otrzymujemy równości $b = b_1$ oraz $a_1 = a^*$.

Niech $\sigma: A \rightarrow A, \tau: B \rightarrow B$ oznaczają kompletne bijekcje. Rozważymy odwzorowanie $\vartheta: G \rightarrow G$ zdefiniowane wzorem

$$\vartheta(ab^*) = \sigma(a)\tau(b).$$

Z udowodnionej wyżej własności wynika, że ϑ jest dobrze określoną bijekcją. Ponadto $\delta(g) = g\vartheta(g)$ jest również bijekcją. Mamy bowiem

$$\delta(ab^*) = ab^* \vartheta(ab^*) = ab^* (\sigma(a))^* \tau(b) = a\sigma(a)b\tau(b).$$

Ponieważ odwzorowania $a \mapsto a\sigma(a), b \mapsto b\tau(b)$ są bijekcjami, z jednoznaczności rozkładu w G wynika, że δ jest bijekcją, a w konsekwencji ϑ jest kompletną bijekcją.

Na mocy Lematu 1.1 oraz powyższego stwierdzenia mamy

Wniosek 1.1. Niech $G = AB$ będzie grupą faktoryzowalną oraz niech $\chi(\mathcal{G}_2(A)) = |A|$ i $\chi(\mathcal{G}_2(B)) = |B|$. Wówczas $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$.

Stwierdzenie 1.3. Następujące grupy posiadają kompletne bijekcje:

- 1) grupy rzędu nieparzystego;
- 2) grupy $\mathbb{Z}_2^n$, gdzie $n > 1$, czyli elementarne 2-grupy rzędu większego od 2;

Dowód. 1) Udowodnimy, że odwzorowanie identycznościowe grupy rzędu nieparzystego jest kompletną bijekcją. W tym celu wystarczy pokazać, że jeśli $s, x \in G$ są takie, że $(sx)^2 = x^2$, to $s = e$. Zauważmy, że wówczas $sxs = x$, a stąd $x^{-1}sx = s^{-1}$. Sprzęganie jest automorfizmem grupy G , więc $x^{-1}s^{-1}x = s$. Mamy zatem

$$x^{-2}sx^2 = x^{-1}(x^{-1}sx)x = x^{-1}s^{-1}x = s,$$

czyli $x^2s = sx^2$. Rozważmy podgrupę $H = \langle s, x \rangle$. Element x^2 należy do jej centrum $Z(H)$. Z nieparzystości rzędu H wnosiśmy, że $x \in Z(H)$. W szczególności $xs = sx$, a więc $s^x = x$ i $s^2 = e$. Grupa G nie zawiera elementów rzędu 2, więc $s = e$. To pokazuje, że identyczność na grupie G jest kompletną bijekcją.

2) Niech G będzie elementarną grupą abelową rzędu 2^n , gdzie $n > 1$. Można ją traktować jako grupę addytywną ciała $\mathbb{F}_{2^n}$. Niech ξ oznacza dowolny element ciała $\mathbb{F}_{2^n}$ nienależący do podciała prostego $\mathbb{Z}_2$. Wówczas odwzorowanie $\sigma: \mathbb{F}_{2^n} \rightarrow \mathbb{F}_{2^n}$, zdefiniowane wzorem $\sigma(x) = \xi x$, jest automorfizmem grupy addytywnej $G = \mathbb{F}_{2^n}^+$. Zauważmy, że jeśli $s + \sigma(s) = 0$, to $(1 + \xi)s = 0$, czyli $s = 0$, gdyż $1 + \xi \neq 0$ w ciele $\mathbb{F}_{2^n}$. Przekształcenie σ jest zatem kompletną bijekcją.

Przypomnijmy, że grupa D_n izometrii własnych n -kąta foremnego (grupa diedralna) ma opis

$$D_n = \langle s, h \mid s^2 = h^n = 1, \quad hs = sh^{-1} \rangle.$$

Przykład 1.1. (a) Grupa permutacji parzystych A_4 posiada kompletną bijekcję. Wystarczy zauważyć, że jest to grupa faktoryzowalna, to jest $A_4 = AB$ dla

$$\begin{aligned} A &= \{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \\ B &= \{e, (1, 2, 3), (1, 2, 4)\} \simeq \mathbb{Z}_3. \end{aligned}$$

(b) Grupa D_4 posiada kompletną bijekcję σ :

x	1	h	h^2	h^3	s	hs	h^2s	h^3s
$\sigma(x)$	1	h	s	hs	h^3	h^2	h^3s	h^2s
$x\sigma(x)$	1	h^2	h^2s	s	hs	h^3s	h^3	h

(c) Grupa kwaternionów $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ posiada kompletną bijekcję σ :

x	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
$\sigma(x)$	1	i	j	$-k$	-1	$-i$	k	$-j$
$x\sigma(x)$	1	$-i$	$-k$	j	$-j$	k	-1	i

(d) Grupa symetryczna S_4 zawiera podgrupę izomorficzną z D_4 (bo każdej izometrii kwadratu odpowiada permutacja zbioru wierzchołków). S_4 jest faktoryzowalna, przy czym $A \simeq D_4$, $B \simeq \mathbb{Z}_3$. Zatem S_4 posiada kompletną bijekcję.

(e) Zauważmy, że grupa A_4 jest w naturalny sposób podgrupą w A_5 oraz S_4 jest podgrupą w S_5 . Mamy rozkłady $A_5 = A_4 \cdot B$, $S_5 = S_4 \cdot B$, gdzie B jest podgrupą cykliczną rzędu 5 (generowaną przez cykl $(1, 2, 3, 4, 5)$). Z powyższych przykładów wynika, że obie grupy, A_5 i S_5 , posiadają kompletne bijekcje.

Stwierdzenie 1.4. *Grupa G posiadająca cykliczną 2-podgrupę Sylowa nie ma kompletnej bijekcji.*

Dowód. Załóżmy, że G jest grupą rzędu $2^k m$, gdzie m jest liczbą nieparzystą. Wykorzystamy twierdzenie Burnside'a o grupach z cyklicznymi 2-podgrupami Sylowa. Mianowicie, jeśli G ma cykliczną 2-podgrupę Sylowa H rzędu 2^k , to istnieje epimorfizm grup $\varphi: G \rightarrow H$. Załóżmy, że $\sigma: G \rightarrow G$ jest kompletną bijekcją. Wówczas $\{x\sigma(x) \mid x \in G\} = G$ oraz w zbiorze $\{\varphi(x\sigma(x)) \mid x \in G\}$ każdy element grupy H występuje z krotnością m . Ponadto grupa H , jako grupa cykliczna, posiada dokładnie jeden element rzędu 2, który oznaczmy przez h . Zauważmy, że w grupie cyklicznej H iloczyn wszystkich jej elementów (niezależnie od kolejności czynników) jest równy h . Tak więc

$$h = h^m = \prod_{x \in G} \varphi(x\sigma(x)) = \prod_{x \in G} \varphi(x) \prod_{x \in G} \varphi(\sigma(x)) = h^m \cdot h^m = e.$$

Uzyskana sprzeczność pokazuje, że G nie ma kompletnej bijekcji.

Korzystając ze Stwierdzenia 1.1 otrzymujemy

Wniosek 1.2. *Jeśli grupa G posiada cykliczną 2-podgrupę Sylowa, to*

$$\chi(\mathcal{G}_2(G)) > |G|.$$

Powyższy wniosek wyjaśnia różnicę między kolorowaniami grafów stowarzyszonych z grupami $\mathbb{Z}_4$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (por. Rysunek 1.2 i Rysunek 1.3).

Lemat 1.2. *Dla dowolnego $n \geq 1$ grupa $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^n}$ posiada kompletną bijekcję.*

Dowód. Rozważmy funkcję $\sigma: \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^n} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^n}$ taką, że

$$\sigma(i, k) = \begin{cases} (0, 2k) & \text{gdy } i = 0, \ 0 \leq k < 2^{n-1}; \\ (1, 2k+1) & \text{gdy } i = 0, \ 2^{n-1} \leq k < 2^n; \\ (0, 2k+1) & \text{gdy } i = 1, \ 0 \leq k < 2^{n-1}; \\ (1, 2k) & \text{gdy } i = 1, \ 2^{n-1} \leq k < 2^n. \end{cases}$$

Oczywiście σ jest bijekcją. Należy pokazać, że funkcja $\delta(i, k) = (i, k) + \sigma(i, k)$ również jest bijekcją. Mamy

$$\delta(i, k) = \begin{cases} (0, 3k) & \text{gdy } i = 0, \ 0 \leq k < 2^{n-1}; \\ (1, 3k+1) & \text{gdy } i = 0, \ 2^{n-1} \leq k < 2^n; \\ (1, 3k+1) & \text{gdy } i = 1, \ 0 \leq k < 2^{n-1}; \\ (0, 3k) & \text{gdy } i = 1, \ 2^{n-1} \leq k < 2^n. \end{cases}$$

Ponieważ dla $k, l \in [2^n]$ mamy $3k \equiv 3l \pmod{2^n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k = l$, odwzorowanie δ jest różnowartościowe, a więc jest bijekcją.

W konsekwencji otrzymujemy opis liczby chromatycznej grafu $\mathcal{G}_2(G)$ dla skończonych grup abelowych.

Twierdzenie 1.1. *Jeśli G jest skończoną grupą abelową, to $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$ wtedy i tylko wtedy, gdy G ma niecykliczną 2-podgrupę Sylowa.*

Dowód. Z Wniosku 1.2 wynika, że jeśli $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$, to 2-podgrupa Sylowa grupy G nie jest cykliczna. Na podstawie Lematu 1.1, Stwierdzenia 1.1 i Stwierdzenia 1.3 wystarczy wykazać, że niecykliczne abelowe 2-grupy mają kompletne bijekcje. Zastosujemy indukcję względem rzędu grupy. Jeśli $G \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^n}$, to na podstawie Lematu 1.2 $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$. Ponadto, jeśli G nie jest postaci $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{2^n}$, to G zawiera podgrupę H izomorficzną z grupą $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ taką, że G/H nie jest cykliczna. Wówczas na podstawie założenia indukcyjnego $\chi(\mathcal{G}_2(G/H)) = |G/H|$ oraz wykorzystując Lemat 1.1 otrzymujemy

$$\chi(\mathcal{G}_2(G)) \leq \chi(\mathcal{G}_2(H))\chi(\mathcal{G}_2(G/H)) = |H| \cdot |G/H| = |G|.$$

Ostatecznie $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$.

Hipoteza Halla-Paige'a badana była przez wielu autorów (por. Evans (2018)). Istotne postępy poczyniono w pracach M. Halla i L.J. Paige'a Hall i Paige (1955) i Paige (1951). Potwierdzono tam jej prawdziwość między innymi w klasach: grup rozwiązalnych, grup symetrycznych S_n ($n > 3$) oraz grup prostych typu A_n . Redukcję hipotezy do sporadycznych grup prostych przeprowadził S. Wilcox w pracy Wilcox (2009). Przypadek sporadycznych grup prostych został zbadany przez A.B. Evansa w pracy Evans (2009) i definitywnie zakończony w Bray, Cai, Cameron, Spiga i Zhang (2020). Hipoteza Halla-Paige'a została zatem pozytywnie potwierdzona. W związku z tym możemy sformułować odpowiedni rezultat o liczbie chromatycznej grafu $\mathcal{G}_2(G)$.

Twierdzenie 1.2. *Jeśli G jest grupą skończoną, to $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = |G|$ wtedy i tylko wtedy, gdy G ma niecykliczną 2-podgrupę Sylowa.*

1.3. Grupy z cyklicznymi 2-podgrupami Sylowa

Zajmiemy się teraz przypadkiem grup z cyklicznymi 2-podgrupami Sylowa. Zgodnie z twierdzeniem Burnside’a są to rozszerzenia grup rzędu nieparzystego przez cykliczne 2-grupy, czyli grupy G zawierające podgrupy normalne H nieparzystego rzędu takie, że G/H jest cykliczną 2-grupą. Sytuacja w całej ogólności jest daleka od kompletnego wyjaśnienia.

W pracy Goddyn, Halasz i Mahmoodian (2019) pokazano

Twierdzenie 1.3. *Jeśli G jest abelową grupą z cykliczną 2-podgrupą Sylowa i $L(G)$ jest grafem tablicy Cayleya grupy G , to $\chi(L(G)) = |G| + 2$.*

Dowód tego faktu jest rachunkowo i kombinatorycznie złożony. Poniżej przedstawimy stosunkowo prosty argument dla grup cyklicznych parzystego rzędu.

Twierdzenie 1.4. *Dla dowolnej liczby naturalnej n , $\chi(\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})) = 2n + 2$.*

Dowód. Dla liczb całkowitych $k < m$ przyjmijmy oznaczenie $[k, m] = \{k, k+1, \dots, m\}$. Zauważmy, że zbiór różnic liczb z dwóch przedziałów jest przedziałem postaci

$$[k, l] - [s, t] = \{x - y \mid x \in [k, l], y \in [s, t]\} = [k - t, l - s].$$

Ponieważ grupa $\mathbb{Z}_{2n}$ nie posiada kompletnej bijekcji, $\chi(\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})) \geq 2n + 1$. Rozważmy iniekcję $\sigma: \mathbb{Z}_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_{2n+2}$, określoną wzorem:

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & \text{jeśli } 0 \leq x \leq n-1, \\ x+1, & \text{jeśli } n \leq x \leq 2n-1. \end{cases}$$

Udowodnimy, że funkcja $c: \mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2n} \rightarrow \mathbb{Z}_{2n+2}$ zdefiniowana wzorem

$$c(x, y) = \sigma(x) + y \pmod{2n+2}$$

jest odwzorowaniem kolorującym właściwie graf $\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})$.

Dla $k \in [2n]$ definiujemy następujące zbiory:

Kliki diagonalne: $D_k = \{(0, 2n-k), (1, 2n-k+1), \dots, (k-1, 2n-1), (k, 0), (k+1, 1), (k+2, 2), \dots, (2n-1, 2n-k-1)\}$;

Kliki wierszowe: $W_k = \{(0, k), (1, k), (2, k), \dots, (2n-1, k)\}$;

Kliki kolumnowe: $K_k = \{(k, 0), (k, 1), (k, 2), \dots, (k, 2n-1)\}$.

Zbiory D_k , W_k , i K_k są parami rozłącznymi klikami maksymalnej mocy w grafie $\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})$, wyznaczającymi rozbiecia zbioru wierzchołków :

$$\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2n} = W_0 \cup W_1 \cup \dots \cup W_{2n-1},$$

$$\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2n} = K_0 \cup K_1 \cup \dots \cup K_{2n-1},$$

oraz

$$\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2n} = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_{2n-1}.$$

Udowodnimy, że funkcja c jest różnowartościowa po ograniczeniu do każdej z tych klik. Zauważmy, że jeśli $(i, k) \in W_k$, to $c(i, k) = \sigma(i) + k \pmod{2n+2}$. Ponieważ σ jest iniekcją, jeśli $i \neq j$, to $c(i, k) \neq c(j, k)$. Podobnie, jeśli $i \neq j$ oraz $(k, i), (k, j) \in K_k$, to

$$c(k, i) = \sigma(k) + i \pmod{2n+2} \neq \sigma(k) + j \pmod{2n+2} = c(k, j).$$

Pozostaje udowodnić, że wierzchołki z kliki diagonalnej D_k mają różne kolory. Rozważmy rozbiecie zbioru wierzchołków $\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2n}$ na dwa rozłączne podzbiory $\mathbb{Z}_{2n} \times \mathbb{Z}_{2n} = L \cup R$, gdzie $L = [0, n-1] \times \mathbb{Z}_{2n}$ i $R = [n, 2n-1] \times \mathbb{Z}_{2n}$.

Przypadek 1: $k \in [0, n-1]$

Zauważmy, że

$$L \cap D_k = \{(j, 2n-k+j) \mid j \in [0, k-1]\} \cup \{(k+i, i) \mid i \in [0, n-k-1]\}.$$

Ponieważ $\sigma(x) = x$ dla $x \leq n-1$, wierzchołki ze zbioru $L \cap D_k$ mają kolory

$$c(j, 2n-k+j) = 2n-k+2j \pmod{2n+2}$$

lub

$$c(k+i, i) = k+2i \pmod{2n+2}.$$

Jednocześnie,

$$R \cap D_k = \{(k+l, l) \mid l \in [n-k, 2n-k-1]\},$$

a ponieważ $\sigma(x) = x+1$ dla $x \geq n$, wierzchołki należące do zbioru $R \cap D_k$ mają kolory

$$c(k+l, l) = k+2l+1 \pmod{2n+2}.$$

Oczywiście kolory wierzchołków ze zbioru $R \cap D_k$ są różne i mają różną parzystość od wierzchołków ze zbioru $L \cap D_k$. W związku z tym nie ma powtórzeń kolorów w zbiorach $L \cap D_k$ oraz $R \cap D_k$.

Wykażemy, że nie ma powtórzeń kolorów w zbiorze $L \cap D_k$. Załóżmy przeciwnie

$$c(j, 2n-k+j) = c(k+i, i),$$

dla pewnych $j \in [0, k-1]$ oraz $i \in [0, n-k-1]$. To implikuje, że

$$2n - k + 2j \equiv k + 2i \pmod{2n+2}$$

co można sprowadzić do

$$2(n-k) \equiv 2(i-j) \pmod{2n+2}.$$

Z drugiej strony, $i-j \in [0, n-k-1] - [0, k-1] = [1-k, n-k-1]$. Zatem

$$2(n-k) - 2(i-j) \in [2, 2n-2]$$

oraz $2(n-k) \not\equiv 2(i-j) \pmod{2n+2}$. W konsekwencji nie ma powtórzeń kolorów w zbiorze $L \cap D_k$.

Przypadek 2: $k \in [n, 2n-1]$

W tym przypadku

$$L \cap D_k = \{(j, 2n-k+j) \mid j \in [0, n-1]\}$$

oraz

$$R \cap D_k = \{(i, 2n-k+i) \mid i \in [n, k-1]\} \cup \{(k+l, l) \mid l \in [0, 2n-k-1]\}.$$

Wierzchołki należące do zbioru $L \cap D_k$ mają kolory

$$c(j, 2n-k+j) = 2n-k+2j \pmod{2n+2},$$

zaś należące do $R \cap D_k$

$$c(i, 2n-k+i) = 2n-k+2i+1 \pmod{2n+2}$$

lub

$$c(k+l, l) = k+2l+1 \pmod{2n+2}.$$

Podobnie jak w Przypadku 1, wystarczy wykazać, że nie ma powtórzeń kolorów wierzchołków w zbiorze $R \cap D_k$. Przypuśćmy przeciwnie, że

$$c(i, 2n-k+i) = c(k+l, l),$$

dla pewnych $i \in [n, k-1]$ oraz $l \in [0, 2n-k-1]$. To implikuje, że

$$2n-k+2i+1 \equiv k+2l+1 \pmod{2n+2},$$

a więc

$$2(n-k) \equiv 2(l-i) \pmod{2n+2}.$$

Zauważmy, że $l - i \in [0, 2n - k - 1] - [n, k - 1] = [1 - k, n - k - 1]$. Stąd,

$$2(n - k) - 2(l - j) \in [2, 2n - 2].$$

To pokazuje, że $2(n - k) \not\equiv 2(i - j) \pmod{2n + 2}$; więc nie ma powtórzeń kolorów w zbiorze wierzchołków $R \cap D_k$.

Funkcja c określa zatem właściwe kolorowanie grafu $\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})$. Tak więc

$$\chi(\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})) \leq 2n + 2.$$

Pozostaje wykluczyć przypadek $\chi(\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2n})) = 2n + 1$. Wynika to z poniższego Stwierdzenia 1.5.

Stwierdzenie 1.5. *Jeśli G jest grupą rzędu n taką, że $\chi(\mathcal{G}_2(G)) > n$, to zachodzi nierówność $\chi(\mathcal{G}_2(G)) \geq n + 2$.*

Dowód. Przypomnijmy najpierw, że podzbiór A zbioru wierzchołków grafu $\mathcal{G}$ nazywa się niezależnym, jeśli żadne dwa wierzchołki z A nie są połączone krawędzią. Przypuśćmy, że $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = n + 1$. Wówczas zbiór $G \times G$ może być podzielony na $n + 1$ niezależnych podzbiorów A_i złożonych z wierzchołków tego samego koloru. Zauważmy, że $|A_i| \geq n$ dla pewnego i . Jeśli przeciwnie, $|A_i| \leq n - 1$ dla wszystkich i , to

$$n^2 = |G \times G| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| \leq (n + 1)(n - 1) = n^2 - 1,$$

co prowadzi do sprzeczności.

Niech teraz $A = A_i$ będzie takim niezależnym podzbiorem, że $|A| \geq n$. Wybierzmy n -elementową klikę C . Dla dowolnego $x \in C$ definiujemy podzbiór $A_x = \{xa \mid a \in A\}$. Oczywiście $|A_x| = |A|$ oraz zbiory A_x są parami rozłączne. Rzeczywiście, jeśli $xa_1 = ya_2$, gdzie $a_i \in A$, $x \neq y$ oraz $x, y \in C$, to

$$y^{-1}x \in \mathcal{S} \text{ i } y^{-1}x = a_2a_1^{-1} \in \mathcal{S},$$

co jest niemożliwe. Ponieważ $|\bigcup_{x \in C} A_x| \geq n^2$ widzimy, że $|A| = n$ i $\bigcup_{x \in C} A_x$ określa rozbiecie zbioru wierzchołków $G \times G$ wyznaczające n -kolorowanie grafu $\mathcal{G}_2(G)$. To przeczy naszemu założeniu, że $\chi(\mathcal{G}_2(G)) = n + 1$. Ostatecznie, $\chi(\mathcal{G}_2(G)) \geq n + 2$.

Przeanalizujemy teraz przypadek grupy nieabelowej minimalnego rzędu, czyli grupy diedralnej D_3 . Grupa ta ma opis

$$D_3 = \langle s, h \mid s^2 = h^3 = 1, sh = h^{-1}s \rangle.$$

Oczywiście D_3 posiada cykliczną 2-podgrupę Sylowa. Zatem $\chi(\mathcal{G}_2(D_3)) \geq 8$.

Rozważmy bijekcje $\sigma, \tau: [6] \rightarrow D_3$:

i	0	1	2	3	4	5
$\sigma(i)$	h^2s	hs	s	h	h^2	1
$\tau(i)$	1	h	h^2	s	hs	h^2s

Wyznaczają one tablicę Cayleya $L_{\sigma\tau}$ przedstawioną na Rysunku 1.6.

h^2s	hs	s	h^2	h	1
hs	s	h^2s	h	1	h^2
s	h^2s	hs	1	h^2	h
h	h^2	1	hs	h^2s	s
h^2	1	h	h^2s	s	hs
1	h	h^2	s	hs	h^2s

Rysunek 1.6: Tablica Cayleya $L_{\sigma\tau}(D_3)$

H^2S	H^3S	H^3	S	HS	H
HS	H^2S	1	H^3S	S	H^2
S	HS	H	H^2S	H^3S	H^3
H^2	H^3	H^3S	1	H	HS
H	H^2	S	H^3	1	H^2S
1	H	HS	H^2	H^3	H^3S

Rysunek 1.7: Kolorowanie grafu $\mathcal{G}_2(D_3)$

Rysunek 1.7 przedstawia 8-kolorowanie grafu $\mathcal{G}_2(D_3)$. Otrzymaliśmy je wykorzystując kompletną bijekcję grupy D_4 , czyli grupy izometrii własnych kwadratu. Grupa ta ma algebraiczny opis:

$$D_4 = \langle S, H \mid S^2 = H^4 = 1, SH = H^{-1}S \rangle.$$

Grupa D_4 posiada kompletną bijekcję σ :

x	1	H	H^2	H^3	S	HS	H^2S	H^3S
$\sigma(x)$	1	H	S	HS	H^3	H^2	H^3S	H^2S
$x\sigma(x)$	1	H^2	H^2S	S	HS	H^3S	H^3	H

Rozważmy iniekcję $v: D_3 \rightarrow D_4$:

x	1	h	h^2	s	hs	h^2s
$v(x)$	1	H	H^2	S	HS	H^2S

Funkcję kolorującą $c: D_3 \times D_3 \rightarrow D_4$ graf $\mathcal{G}_2(D_3)$ określamy wzorem

$$c(x, y) = \sigma^{-1}(v(x)) \cdot v(y).$$

Jej wartości zawierają odpowiednie pola tablicy z Rysunku 1.7. Pola tej tablicy interpretujemy jako elementy iloczynu kartezjańskiego, czyli pary (x, y) , przy czym ustalamy naturalny porządek w D_3 : $1, h, h^2, s, hs, h^2s$. Pola tego samego koloru w kwadracie $L_{\sigma\tau}$ odpowiadają klikom diagonalnym w grafie $\mathcal{G}_2(D_3)$. Tak więc $\chi(\mathcal{G}_2(D_3)) = 8$.

Zauważmy, że grupy diedralne D_{2n} zawierają co najmniej dwa elementy rzędu 2, a więc mają niecykliczne 2-podgrupy Sylowa. Zatem $\chi(\mathcal{G}_2(D_{2n})) = |D_{2n}| = 4n$. Niestety, podobnej metody jak w przypadku grupy D_3 nie można zastosować bezpośrednio dla innych grup diedralnych z cyklicznymi 2-podgrupami Sylowa, czyli grup D_{2n+1} , gdzie $n \geq 2$. W szczególności, sprawdzony został przypadek grafu grupy D_5 . Kompletna bijekcja dla grupy D_6 nie wyznacza kolorowania grafu $\mathcal{G}_2(D_5)$. Otwarte pozostaje zatem pytanie:

Pytanie 1.1. Czy dla liczby nieparzystej n , $\chi(\mathcal{G}_2(D_n)) = 2n + 2$?

Zauważmy, że jeśli grupa G ma cykliczną 2-podgrupę Sylowa, to iloczyn prosty $\hat{G} = G \times \mathbb{Z}_2$ ma niecykliczną 2-podgrupę Sylowa. Ponadto $\mathcal{G}_2(G)$ jest podgrafem w $\mathcal{G}_2(\hat{G})$. Z Lematu 1.1 oraz Twierdzenia 1.2 wynika teraz, że

$$\chi(\mathcal{G}_2(G)) \leq \chi(\mathcal{G}_2(\hat{G})) = |\hat{G}| = 2 \cdot |G|.$$

Lepsze oszacowanie dla liczby chromatycznej grafu $\mathcal{G}_2(G)$ można otrzymać dla grup, których rząd jest podzielny przez 4. Rzeczywiście, jeśli G ma cykliczną 2-podgrupę Sylowa, $|G| = 2^k m$, gdzie $k \geq 2$ i m jest liczbą nieparzystą, to na podstawie twierdzenia Burnside'a G zawiera taką podgrupę normalną H rzędu m , że $G/H \simeq \mathbb{Z}_{2^k}$. Na podstawie Lematu 1.1 oraz Twierdzenia 1.4 otrzymujemy oszacowanie:

$$\chi(\mathcal{G}_2(G)) \leq \chi(\mathcal{G}_2(H))\chi(\mathcal{G}_2(\mathbb{Z}_{2^k})) = m(2^k + 2) = |G| + 2m = \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \cdot |G|.$$

Wniosek 1.3. Jeśli G jest grupą rzędu $2^k m$, gdzie m jest liczbą nieparzystą, to

$$|G| \leq \chi(\mathcal{G}_2(G)) \leq \left(1 + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \cdot |G|.$$

Bibliografia

- Bagiński, C., i Grzeszczuk, P. (2021). On the generic family of cayley graphs of a finite group. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 184, 105495.
- Bray, J. N., Cai, Q., Cameron, P. J., Spiga, P. i Zhang, H. (2020). The hall–paige conjecture, and synchronization for affine and diagonal groups. *Journal of Algebra*, 545, 27-42.
- Evans, A. B. (2009). The admissibility of sporadic simple groups. *Journal of Algebra*, 321(1), 105-116.
- Evans, A. B. (2018). *Orthogonal latin squares based on groups*. Springer International Publishing.
- Goddyn, L., Halasz, K. i Mahmoodian, E. S. (2019). The chromatic number of finite group cayley tables. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 26(1).
- Hall, M., i Paige, L. (1955). Complete mappings of finite groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 5(4), 541-549.
- Paige, L. (1951). Complete mappings of finite groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 1(1), 111-116.
- Wilcox, S. (2009). Reduction of the hall–paige conjecture to sporadic simple groups. *Journal of Algebra*, 321(5), 1407-1428.