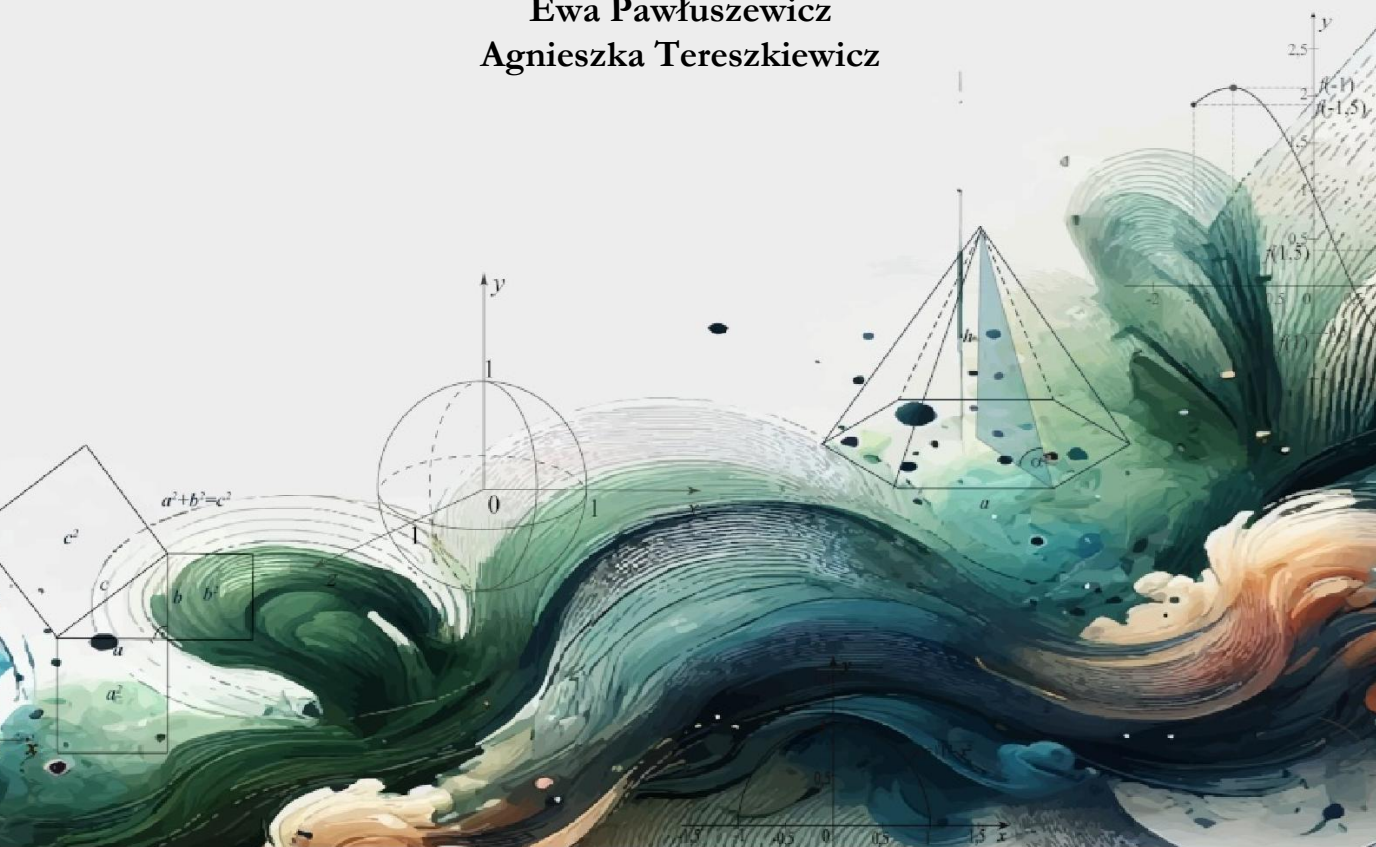


Współczesne problemy kształcenia w zakresie matematyki na uczelniach technicznych

redakcja
Ewa Pawłuszewicz
Agnieszka Tereszkievicz



**Współczesne problemy kształcenia
w zakresie matematyki
na uczelniach technicznych**

**redakcja
Ewa Pawłuszewicz
Agnieszka Tereszkiewicz**

Recenzenci:

dr Tomasz Drwiega
dr Marzena Filipowicz-Chomko
dr hab. inż. Waldemar Hołubowski, prof. PŚ
dr Andrzej Just, prof. PŁ
dr Marta Kornafel
dr hab. Edwin Koźniewski, prof. PB
dr hab. Dorota Mozyrska, prof. PB
dr inż. Anna Małgorzata Olszewska, prof. PB
prof. dr hab. Ewa Pawłuszewicz
dr hab. Jacek Stańdo, prof. PŁ
dr Barbara Wikiel, prof. PG

Redakcja:

Ewa Pawłuszewicz
Agnieszka Tereszkiewicz

Korekta językowa:

Małgorzata Hryniewicka

Skład:

Ewa Pawłuszewicz,
Agnieszka Tereszkiewicz

Okladka:

Anna Małgorzata Olszewska

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2025

ISBN 978-83-68673-09-8 (eBook)
DOI 10.24427/978-83-68673-09-8



Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów
zależnych 4.0 (CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.

Publikacja jest dostępna w internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Spis treści

Wstęp.....	5
Rozdział 1. Matematyka na starcie studiów – wyzwania i strategie wsparcia.....	7
Jak nie zgubić matematyki w drodze na studia?	8
Agnieszka Niedziałkowska	
Matematyka – fundament czy bariera? O zjawisku drop out na uczelniach przyrodniczych.....	15
Małgorzata Graczyk, Ewa Skotarczak	
Peer teaching – inaczej.....	25
Elżbieta Galewska, Gertruda Gwóźdź-Łukawska	
Rozdział 2. Matematyka w świecie technologii i zastosowań praktycznych.....	33
Wybrane algorytmy teorii sterowania wykorzystywane w uczeniu maszynowym.....	34
Wojciech Mitkowski	
Przykłady wykorzystania programów AutoCad i Wolfram Alpha w nauczaniu matematyki.....	49
Edwin Koźniewski	
Wzorce promptów AI w edukacji na przykładzie wybranych zajęć z matematyki wyższej.....	58
Marzena Filipowicz-Chomko, Ewa Girejko, Dorota Mozyrska, Nikos Pappas	
Czy geodezja to matematyka stosowana?	74
Waldemar Łupiński	
Metoda kreowania potrzeby posiadania kompetencji matematycznych oraz wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki.....	86
Agnieszka Lasota	
Rozdział 3. Ocena efektów i doskonalenie akademickiej dydaktyki matematyki.....	99
Próba pomiaru przyrostu wiedzy i umiejętności matematycznych studentów uczelni technicznych	100
Lech Kujawski	
Matematyka w duchu rywalizacji – Turniej MateMaxus jako know-how w rozwijaniu talentów matematycznych.....	107
Marek Siluszyk, Katarzyna Karpiarz, Agnieszka Protasiuk	

Wstęp

Intensywny rozwój techniki i technologii, jaki obserwujemy w ciągu ostatnich lat, jest niewątpliwie przyczyną dużych zmian cywilizacyjnych. Otrzymujemy coraz to nowsze i bardziej zaawansowane narzędzia mające ułatwić codzienne życie, usprawnić procesy produkcyjne, uatrakcyjnić procesy kształcenia i uczenia się. Rozwój nowych technologii niesie ze sobą liczne korzyści, ale także budzi poważne wątpliwości natury moralnej, etycznej, prawnej. Kształtująca się na naszych oczach rzeczywistość stawia przed edukacją nowe wyzwania, sprawia, że kształcenie nowych pokoleń przestało sprowadzać się wyłącznie do realizacji materiału.

Współczesna dydaktyka matematyki akademickiej stoi przed wieloma wyzwaniami, które są wynikiem szybkich, wręcz ekspresowych zmian technologicznych oraz będących ich skutkiem zmian edukacyjnych i społecznych, jak i przemian samej nauki jaką, nie zapominajmy, jest matematyka. Aktualne wyzwania w tej dziedzinie obejmują nie tylko potrzebę ciągłego dostosowywania planów studiów i programów nauczania do dynamicznie zachodzących zmian w szkolnictwie średnim, ciągle zmieniających się programów nauczania, coraz bardziej zróżnicowaną wiedzę kandydatów na studia, konieczność rozwijania interdyscyplinarnych umiejętności studentów, ale również niedostateczne finansowanie uczelni. Jednym ze skutków, coraz bardziej odczuwalnym w środowisku akademickim, jest między innymi niedostatek wykwalifikowanej kadry dydaktycznej oraz z roku na rok coraz bardziej ograniczone możliwości utrzymania nowoczesnego sprzętu laboratoryjnego i programistycznego. Do tego należy dodać stale zmniejszające się wymagania maturalne z przedmiotów ścisłych. To z kolei przekłada się na coraz słabsze przygotowanie kandydatów do podjęcia studiów i coraz większe problemy z ich adaptacją na uczelniach wyższych. Narzędzia takie jak CAS (np. WolframAlpha, GeoGebra, Python, R) stwarzają nowe możliwości nauczycielowi akademickiemu, nie tylko w zakresie dydaktyki matematyki, ale i w obrębie różnych działów samej matematyki. Do tego dochodzą jeszcze powszechnie używana sztuczna inteligencja, możliwości generowania przez modele językowe rozwiązań zadań i niestety, często bezkrytyczne podejście do nich nie tylko samych studentów, ale i kadry akademickiej. Co więcej, student oczekuje spełnienia swoich żądań i roszczeń, szacunku do swojej osoby i sprawnie egzekwuje przysługujące mu prawa. Często też wcale nie dążenie do zdobywania i posiadania wiedzy jest celem studiowania, ale dobre wynagrodzenie w przyszłości i spędzony czas w trakcie studiów. Prawa nauczyciela akademickiego schodzą na drugi plan. Jak w tej sytuacji powinna postępować kadra akademicka? Rodzą się też pytania o to, czy znajomość podstawowych praw natury jest potrzebna? Po co inżynierowi w ogóle jest potrzebna matematyka? Gdzie jest ukryta „wiedza” i czy jest ona potrzebna w przyszłej pracy zawodowej absolwentów uczelni technicznych?

Jak widać, dziś samo przekazanie wiedzy, nauczanie studentów nowych dla nich rzeczy, nowatorskich technik to za mało. Trzeba przekonać ich, że sama wiedza, logiczne i kreatywne myślenie są ważne dziś i będą ważne w przyszłości, że matematyka to nie tylko całki, pochodne, szeroko pojęte rachunki. Zadanie to jest trudne i odpowiedzialne. Czy potrafimy spowodować, żeby nasz przekaz był nie tylko merytoryczny, ale także spójny i atrakcyjny? Czy potrafimy pokazać potrzebę kształcenia matematycznego,

rozbudzić ciekawość studenta? Dyskusje nad rozwiązaniem tych problemów są prowadzone w lokalnych środowiskach. Jednakże zachodzi też potrzeba podjęcia szerszej, konstruktywnej dyskusji w gronie dydaktyków matematyki akademickiej, w szerokim gronie doświadczonych osób dysponujących odpowiednią wiedzą merytoryczną, ale też często i pasją zawodową. Dobrym miejscem do realizacji tego celu jest Ogólnopolska Konferencja Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych. Jest to cykliczne wydarzenie organizowane co dwa lata przez różne uczelnie. Jego głównym celem jest nie tylko doskonalenie jakości kształcenia matematycznego na uczelniach technicznych poprzez wymianę doświadczeń, promowanie nowoczesnych metod dydaktycznych, prezentowanie wyników badań i rozwiązań, które mogą przyczynić się do podniesienia efektywności procesu nauczania, ale i stworzenie platformy umożliwiającej wymianę doświadczeń i dyskusji między innymi na temat stosowanych metod dydaktycznych i pojawiających się problemów w zmieniającym się świecie, w dobie cyfryzacji i niechęci do podejmowania wysiłku intelektualnego. Konferencja jest również doskonałą okazją do nawiązania współpracy pomiędzy różnymi ośrodkami naukowych oraz wymiany najlepszych praktyk w zakresie dydaktyki matematyki akademickiej.

W dniach 11-13 września 2025r na Wydziale Mechanicznym Politechniki Białostockiej odbyła się XXI Ogólnopolska Konferencja Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych. W monografii *Współczesne problemy kształcenia w zakresie matematyki na uczelniach technicznych* prezentujemy wybrane artykuły powstałe na podstawie wygłoszonych w czasie tej konferencji referatów. Zostały one podzielone na trzy rozdziały. Rozdział pierwszy *Matematyka na starcie studiów – wyzwania i strategie wsparcia* jest dedykowany problemom adaptacji studentów do procesu uczenia się i kształcenia w zakresie matematyki na początku studiów oraz strategiom dydaktycznym wspierającym proces uczenia się – od pracy w grupie po mentoring i wzajemne nauczanie. W rozdziale drugim *Matematyka w świecie technologii i zastosowań praktycznych* omawiane są wybrane współczesne zastosowania matematyki w technice, sztucznej inteligencji i inżynierii oraz dyskutowane są propozycje łączenia teorii z praktyką w dydaktyce akademickiej. Rozdział trzeci *Ocena efektów i doskonalenie akademickiej dydaktyki matematyki* poświęcony jest analizie skuteczności działań wspierających nauczanie matematyki, sposobom diagnozy postępów studentów oraz znaczeniu motywacji i rywalizacji w procesie kształcenia.

Ewa Pawłuszewicz,
Agnieszka Tereszkieńicz

Rozdział 1.
**Matematyka na starcie studiów – wyzwania
i strategię wsparcia**

Jak nie zgubić matematyki w drodze na studia?

Agnieszka Niedziałkowska

Politechnika Łódzka, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej,
e-mail: agnieszka.niedzialkowska@p.lodz.pl

Streszczenie

Przejście od matematyki szkolnej do akademickiej stanowi istotne wyzwanie dla wielu młodych ludzi. W celu jego ułatwienia kluczowe jest zidentyfikowanie najważniejszych kompetencji matematycznych, jakie uczniowie powinni posiadać przed rozpoczęciem studiów, a także typowych braków wyniesionych ze szkoły średniej. Świadome wdrożenie odpowiednich strategii dydaktycznych i organizacyjnych może znacząco zmniejszyć ryzyko „zagubienia” na początku studiów i zapewnić bardziej płynne przejście między poziomami edukacji. Dlatego tak ważne jest, aby szkoły średnie i uczelnie wyższe podejmowały wspólne działania na rzecz lepszego przygotowania uczniów do nowych wyzwań. Diagnostyka poziomu umiejętności oraz wsparcie w pierwszych miesiącach studiów mogą zdecydowanie zwiększyć szanse na sukces akademicki studentów pierwszego semestru.

Słowa kluczowe: matematyka akademicka, matematyka szkolna, dydaktyka, uczeń, student.

Wstęp

Wejście w obszar matematyki akademickiej po etapie szkolnym jest dla wielu uczniów znacznie trudniejsze, niż początkowo zakładali. Zmienia się nie tylko poziom trudności materiału, ale również sposób jego prezentacji, tempo pracy oraz oczekiwania wykładowców. Na studiach matematyka przestaje być jedynie zbiorem procedur i algorytmów do opanowania, a staje się narzędziem do samodzielnego rozwiązywania problemów, wymagającym krytycznego myślenia, umiejętności abstrahowania i łączenia wiedzy z różnych dziedzin. Aby ten etap przejść możliwie płynnie, niezwykle istotne jest wcześniejsze przygotowanie – zarówno w zakresie twardych kompetencji, takich jak biegłość rachunkowa, swobodne posługiwanie się symboliką matematyczną czy rozumienie pojęć teoretycznych, jak i w obszarze kompetencji miękkich: organizacji pracy własnej, wytrwałości w rozwiązywaniu zadań oraz gotowości do samodzielnego poszukiwania rozwiązań. Niestety, praktyka pokazuje, że absolwenci szkół średnich często wkraczają na uczelnię z określonymi brakami: od niewystarczającego opanowania podstawowych technik obliczeniowych, po trudności w rozumieniu złożonych definicji i dowodów. Dlatego tak ważne jest, by szkoły średnie i uczelnie wyższe działały w ścisłej współpracy, diagnozując faktyczny poziom przygotowania kandydatów oraz wspólnie tworząc mechanizmy wsparcia. Mogą to być testy wstępne, kursy pomostowe, zajęcia wyrównawcze czy system tutoringu w pierwszych miesiącach studiów. Otwarta komunikacja pomiędzy nauczycielami a wykładowcami, świadome budowanie pomostu między programami nauczania oraz indywidualne wsparcie studentów rozpoczynających

edukację akademicką mogą znacząco zwiększyć ich szanse na sukces i pomóc im nie „zgubić” matematyki w pierwszych, często najtrudniejszych tygodniach na uczelni.

Celem artykułu jest wskazanie treści nauczania, które zostały usunięte z podstawy programowej od roku 2024/2025, a tym samym określenie najczęściej występujących braków wyniesionych przez uczniów ze szkoły średniej. Ponadto dążymy do wskazania skutecznych strategii dydaktycznych i organizacyjnych, które mogą ułatwić studentom płynne przejście między poziomami edukacji. Analiza ma również na celu sformułowanie rekomendacji dla szkół średnich i uczelni wyższych w zakresie współpracy na rzecz lepszego przygotowania kandydatów do studiów matematycznych i kierunków technicznych.

W badaniu wykorzystałam zróżnicowany zestaw metod, łączących analizę materiałów źródłowych z danymi pozyskanymi bezpośrednio od uczniów, studentów oraz nauczycieli i wykładowców. Moje źródło danych to przede wszystkim moja praktyka dydaktyczna, obserwacja i analiza prac uczniów i studentów. Udało mi się dzięki temu uchwycić obiektywny poziom kompetencji matematycznych zarówno uczniów jak i studentów oraz subiektywne odczucia i doświadczenia uczestników procesu dydaktycznego.

Od sali lekcyjnej do sali wykładowej – obserwacje i wnioski

Jako wykładowca matematyki na uczelni technicznej, w analizie problematyki opieram się przede wszystkim na własnym, wieloletnim doświadczeniu dydaktycznym, a jako nauczycielka matematyki w liceum ogólnokształcącym, realizuję program na poziomie podstawowym i rozszerzonym w klasach 1–4. Doskonale znam wymagania programowe obu poziomów, a wnioski na temat faktycznego poziomu kompetencji uczniów wyciągam z systematycznej analizy ich prac pisemnych, obserwacji postępów podczas zajęć oraz sposobu, w jaki posługują się językiem matematycznym, także w trakcie rozwiązywania zadań przy tablicy. Podobny sposób oceny stosuję wobec studentów. Dodatkowym źródłem informacji jest moja rola kierownika Zespołu ds. szkół patronackich w jednostce uczelni, w której pracuję. Funkcja ta umożliwia mi stały kontakt z dyrekcją, nauczycielami i uczniami szkół średnich objętych patronatem Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej. Dzięki temu mam szerokie grono rozmówców i obserwatorów, co pozwala na konfrontowanie własnych spostrzeżeń z opiniami innych praktyków edukacji.

Znajomość programu nauczania matematyki w liceum, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym, pozwala dostrzec, jak wiele zmieniło się w ostatnich latach w zakresie treści, wymagań i akcentów dydaktycznych. Dla nauczyciela akademickiego, który nie ma na co dzień kontaktu z realiami szkolnej matematyki, może to być zaskakujące – zwłaszcza w kontekście oczekiwań wobec studentów pierwszego roku.

W kolejnych częściach artykułu wskażę, które elementy zostały usunięte z poziomu podstawowego, a które przesunięto do poziomu rozszerzonego. Ta analiza pozwoli lepiej zrozumieć, dlaczego absolwenci liceów wchodzą na studia z określonymi brakami – i dlaczego pewne umiejętności, kiedyś oczywiste dla większości pierwszorzecznych studentów, dziś wymagają dodatkowego wsparcia.

Podstawą niniejszej analizy są oficjalne zmiany w podstawie programowej z matematyki, określone w Rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. [5]. Dokument ten precyzuje zakres treści kształcenia obowiązujący od roku szkolnego 2024/2025 w liceach ogólnokształcących oraz technikach, zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym. Analizując zmiany programowe posłużyłam się podręcznikami wydawnictwa Nowa Era dla klas 1–4 liceum ogólnokształcącego i technikum, które na co dzień wykorzystuję w pracy dydaktycznej [1], [2], [3], [4].

Co zniknęło z zakresu podstawowego i rozszerzonego nauczania matematyki w klasie pierwszej liceum ogólnokształcącego i technikum?

Z poziomu podstawowego usunięto przekształcenie wykresu funkcji przez symetrię względem osi Ox i Oy – treść ta została przeniesiona do zakresu rozszerzonego [1]. Dla studentów, którzy zdali maturę z matematyki na poziomie podstawowym, brak umiejętności przekształcania wykresu funkcji względem osi Ox i Oy będzie stanowiło utrudnienie w temacie bardziej złożonych przekształceń funkcji.

Ponadto z poziomu podstawowego i rozszerzonego usunięto twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie [1]. Dla studenta brak tej treści oznacza utratę jednego z elementów geometrii klasycznej, który wspiera rozwój myślenia dedukcyjnego i umiejętność stosowania zależności geometrycznych w dowodach.

Z poziomu rozszerzonego usunięto układy nierówności liniowych [1]. Dla studenta oznacza to brak doświadczenia w pracy z geometryczną interpretacją rozwiązań nierówności, co jest szczególnie istotne w zadaniach optymalizacyjnych i wstępie do programowania liniowego.

W efekcie tych zmian powstaje luka, której uczniowie często nie są świadomi. Dopiero na studiach zderzają się z treściami, których nigdy formalnie nie omawiali lub które znają wyłącznie fragmentarycznie. Dla wykładowców akademickich oznacza to konieczność diagnozowania braków już w pierwszych tygodniach zajęć oraz ewentualnego wprowadzania elementów wyrównawczych.

A jakie zmiany w klasie drugiej?

Analizując zmiany w podstawie programowej matematyki dla klas drugich liceum, można zauważyć znaczące przesunięcia treści między poziomem podstawowym a rozszerzonym, a także całkowite usunięcia niektórych zagadnień. Kierunek tych modyfikacji wskazuje na stopniowe ograniczanie liczby tematów realizowanych na poziomie podstawowym, co może wpływać na spójność i ciągłość kształcenia matematycznego.

Do poziomu rozszerzonego przeniesiono [2]:

- równania sprowadzalne do równań kwadratowych,
- układy równań, w których jedno równanie jest kwadratowe, a drugie liniowe (wcześniej poziom podstawowy),
- wzory skróconego mnożenia: sześcian sumy i sześcian różnicy, sumę sześcianów i różnicę sześcianów,

- rozkład wielomianu na czynniki w przypadkach wymagających zastosowania wzoru na sumę lub różnicę sześcianów oraz wzoru na sześcian sumy lub sześcian różnicy,
- dzielenie wielomianów,
- twierdzenie Bezouta,
- dodawanie i odejmowanie wyrażeń wymiernych,
- nierówności z wartością bezwzględną typu $|x - 2| < 3$,
- twierdzenie sinusów.

Jednocześnie z poziomu rozszerzonego usunięto [2]:

- układy równań, w których oba równania są kwadratowe,
- pierwiastki wymierne wielomianu,
- w temacie funkcji wymiernych – przekształcenia wykresu funkcji typu $|f(x)|$,
- w temacie funkcji wykładniczej – przekształcenia, w których we wzorze pojawia się wartość bezwzględna,
- własności funkcji wykładniczej.

Skala i charakter tych przesunięć powodują, że uczniowie poziomu podstawowego tracą kontakt z wieloma narzędziami algebraicznymi, które wcześniej były w ich zasięgu, natomiast uczniowie poziomu rozszerzonego muszą zmierzyć się z większą liczbą tematów wymagających umiejętności łączenia różnych technik obliczeniowych i dowodowych. W praktyce oznacza to, że luka pomiędzy dwoma poziomami nauczania powiększa się, co może mieć istotne konsekwencje w kontekście przygotowania maturzystów do studiów o profilu ścisłym lub technicznym.

Bierzemy pod lupę klasę trzecią

Analiza zmian w programie nauczania matematyki dla klas trzecich liceum ujawnia kolejne obszary, w których doszło do redukcji lub przesunięcia treści między poziomem podstawowym a rozszerzonym. Szczególnie widoczne jest to w trzech działach: funkcje trygonometryczne, geometria analityczna i statystyka. W zakresie funkcji trygonometrycznych z poziomu rozszerzonego usunięto temat przekształceń wykresów funkcji, w których we wzorze pojawia się wartość bezwzględna, np. $f(x) = |\sin x|$, $f(x) = \cos|x|$, $f(x) = |2\cos x - 1|$ [3]. Zrezygnowano również z omawiania nierówności trygonometrycznych, co ogranicza możliwości stosowania trygonometrii w kontekście problemów nierównościowych [3].

W dziale geometria analityczna z poziomu podstawowego wycofano i przeniesiono do poziomu rozszerzonego zagadnienie odległości punktu od prostej [3]. Natomiast z poziomu rozszerzonego całkowicie usunięto temat „koło w układzie współrzędnych”, co zmniejsza zakres zastosowań analitycznych metod w geometrii [3].

Zmiany objęły także statystykę. Z poziomu rozszerzonego usunięto zagadnienia takie jak skala centylowa oraz odchylenie standardowe, które dotychczas pozwalały uczniom na praktyczne wykorzystanie narzędzi statystycznych do analizy danych [3].

Wspólną cechą tych modyfikacji jest ograniczenie części materiału, który rozwijał umiejętność modelowania i interpretowania problemów matematycznych w szerszym kontekście. Dla uczniów oznacza to mniejsze możliwości ćwiczenia zadań wymagających łączenia różnych obszarów matematyki, natomiast dla nauczycieli akademickich – konieczność uwzględnienia, że kandydaci na studia mogą nie znać narzędzi, które jeszcze kilka lat temu były standardem na poziomie rozszerzonym.

Co się zmienia w klasie czwartej?

W klasie czwartej liceum zmiany programowe objęły zarówno treści związane z rachunkiem prawdopodobieństwa, jak i z geometrią przestrzenną, w tym bryłami obrotowymi.

W dziale rachunek prawdopodobieństwa z poziomu rozszerzonego usunięto zagadnienie wartości oczekiwanej zmiennej losowej [4]. Oznacza to rezygnację z jednego z kluczowych narzędzi statystycznych, które pozwalało na praktyczne szacowanie wyników w sytuacjach losowych i było istotnym elementem wprowadzającym do bardziej zaawansowanego rachunku prawdopodobieństwa na studiach.

W geometrii przestrzennej z poziomu podstawowego przeniesiono do rozszerzenia zagadnienie przekrojów graniastosłupów, co podwyższa próg trudności tego tematu i ogranicza jego dostępność dla uczniów wybierających jedynie maturę podstawową [4].

Najwięcej zmian dotyczy jednak działu bryły obrotowe. Z poziomu rozszerzonego całkowicie usunięto treści związane z bryłami opisanymi na kuli, bryłami wpisanymi w kulę oraz innymi bryłami wpisanymi lub opisanymi na kuli [4]. Tym samym uczniowie nie mają już okazji do rozwijania umiejętności łączenia własności figur przestrzennych z elementami geometrii kuli, co jeszcze do niedawna stanowiło ważny element kształcenia geometrycznego na poziomie rozszerzonym.

W efekcie tych zmian uczniowie opuszczający liceum mają ograniczone przygotowanie do zadań przestrzennych wymagających bardziej złożonych konstrukcji geometrycznych oraz narzędzi rachunku prawdopodobieństwa stosowanych w praktyce.

Zmiany programowe – bilans zysków i strat

Zmiany w programie nauczania matematyki w szkołach średnich, o których mowa powyżej, znacząco przeorganizowały zarówno zakres materiału na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym. W praktyce oznacza to przesunięcia wielu treści między poziomami nauczania, całkowite usunięcie niektórych zagadnień oraz zmianę proporcji czasu poświęcanego na poszczególne działy. Analiza tych modyfikacji pozwala dostrzec zarówno elementy, które mogą pozytywnie wpłynąć na proces kształcenia, jak i te, które stwarzają nowe wyzwania – szczególnie w kontekście przygotowania uczniów do studiów wyższych.

Z punktu widzenia nauczyciela liceum, zmiany w podstawie programowej nie są jedynie suchymi zapisami w dokumentach – realnie przekładają się one na codzienną pracę z uczniami. Przenoszenie wybranych treści z poziomu podstawowego do rozszerzonego powoduje, że grupa uczniów realizująca wyłącznie program podstawowy ma obecnie mniejszy kontakt z zagadnieniami wymagającymi głębszego rozumowania matematycznego. Dotyczy to między innymi przekształceń wykresów funkcji, wzorów skróconego mnożenia czy rozkładu wielomianów na czynniki. Te elementy, choć mogą

wydawać się techniczne, w praktyce stanowią fundament do rozwiązywania bardziej złożonych problemów matematycznych na poziomie akademickim.

Z drugiej strony, przesunięcie części materiału do rozszerzenia może pozwolić nauczycielowi na większe skupienie się w klasach realizujących podstawę na umiejętnościach praktycznych i stosowaniu matematyki w codziennych kontekstach. Może to być korzystne dla uczniów, którzy nie planują dalszej edukacji matematycznej. Jednak dla tych, którzy po maturze chcą podjąć studia techniczne, przyrodnicze lub ekonomiczne, brak kontaktu z niektórymi treściami już na etapie liceum może oznaczać konieczność intensywnego nadrabiania zaległości.

Z perspektywy nauczyciela akademickiego, obserwującego pierwszorzecznych studentów, wyraźnie widać konsekwencje tych zmian. Część studentów wchodzi na uczelnię z ograniczonym zasobem pojęć i metod, które jeszcze kilka lat temu były oczywistością po ukończeniu szkoły średniej. Dotyczy to chociażby geometrii analitycznej (odległość punktu od prostej), zaawansowanych operacji na wielomianach czy elementów rachunku prawdopodobieństwa, takich jak wartość oczekiwana zmiennej losowej. Wykładowca, chcąc zapewnić studentom równy start, często musi poświęcić część czasu przeznaczonego na materiał akademicki, aby uzupełnić te braki.

Nie można jednak pominąć pozytywnych aspektów zmian. Bardziej przejrzysty podział materiału pomiędzy poziomami podstawowym a rozszerzonym daje nauczycielowi większą elastyczność w doborze metod pracy i pozwala lepiej dostosować tempo nauki do możliwości uczniów. Zmniejszenie zakresu rozszerzenia o niektóre bardzo specjalistyczne zagadnienia (np. przekształcenia funkcji trygonometrycznych z modulem czy nierówności trygonometryczne) może umożliwić głębsze omówienie pozostałych tematów i solidniejsze ich utrwalenie.

Bilans zmian jest więc złożony. Zyskujemy bardziej klarowny program i większą możliwość różnicowania poziomu nauczania, ale jednocześnie rośnie ryzyko, że uczniowie kończący szkołę na poziomie podstawowym będą mieli trudności w dalszej edukacji wymagającej matematyki. Wymaga to od nauczycieli większej czujności i indywidualnego podejścia, szczególnie wobec uczniów deklarujących chęć kontynuowania nauki na kierunkach ścisłych.

Nie bez znaczenia jest także aspekt psychologiczny. Uczniowie realizujący poziom podstawowy, którzy spotykają się na studiach z pojęciami dla nich zupełnie nowymi, mogą czuć się zniechęceni i mniej pewni swoich możliwości. Brak wcześniejszego oswajania z pewnymi narzędziami matematycznymi powoduje, że ich pierwsze doświadczenia akademickie bywają frustrujące. W tym miejscu rola uczelni jest kluczowa – konieczne jest zapewnienie mechanizmów wsparcia. Dlatego na początku kształcenia warto przeprowadzić diagnozę kompetencji matematycznych w formie krótkiego testu wstępnego, który nie będzie oceniany, lecz posłuży do rozpoznania poziomu wiedzy studentów. Wyniki takiego testu mogą stać się podstawą do utworzenia zróżnicowanych grup zajęciowych lub dostosowania tempa pracy. Dodatkowym rozwiązaniem mogłyby być kursy wyrównawcze, organizowane w formie krótkich zajęć poprzedzających semestr lub jako moduły e-learningowe. Istotne wsparcie może zapewnić także tutoring akademicki, w ramach którego starsi studenci prowadzą konsultacje i warsztaty powtórkowe dla pierwszorzecznych.

Z punktu widzenia praktyka pracującego zarówno w liceum, jak i w środowisku akademickim, szczególnie cenne okazuje się utrzymywanie stałego dialogu między szkołami średnimi a uczelniami. Wspólne inicjatywy, spotkania nauczycieli

i wykładowców, analiza wymagań egzaminacyjnych oraz wzajemne poznawanie realiów pracy mogą pomóc w minimalizowaniu skutków rozbieżności programowych. Dodatkowym atutem jest bezpośredni kontakt z dyrekcją, nauczycielami i uczniami szkół patronackich, który pozwala nie tylko obserwować efekty zmian, ale także szybko reagować na pojawiające się trudności.

Ostatecznie, bilans zysków i strat zmian programowych zależy w dużej mierze od tego, jak szkoły i uczelnie poradzą sobie z nową rzeczywistością. Zmiany te, same w sobie, nie są gwarantem poprawy ani pogorszenia jakości kształcenia. Kluczowe są metody pracy, sposób wdrażania zmian i elastyczność w dostosowywaniu procesu nauczania do potrzeb uczniów i studentów.

W pracy dydaktycznej warto postawić na metody aktywizujące, które kształtują rozumienie, a nie tylko biegłość rachunkową. Uczenie przez rozumienie powinno opierać się na budowaniu intuicji i kontekstu praktycznego, z naciskiem na zrozumienie sensu pojęć i wzorów. Skuteczną metodą może być także odwrócona klasa, w której studenci samodzielnie zapoznają się z teorią przed zajęciami, a czas kontaktowy z prowadzącym służy dyskusji i rozwiązywaniu problemów. Dobrym rozwiązaniem jest praca w parach lub małych grupach, w duchu „peer instruction”, czyli uczenia się poprzez tłumaczenie zagadnień innym. Warto też łączyć różne kanały poznawcze — korzystać z wizualizacji, oprogramowania matematycznego (GeoGebra, Desmos, SymPy) oraz interaktywnych symulacji, które wspierają rozumienie abstrakcyjnych pojęć.

Na poziomie organizacyjnym warto rozważyć wydłużenie kursów matematycznych o kilka godzin w semestrze oraz zwiększenie liczby zajęć ćwiczeniowych kosztem wykładów teoretycznych. Uczelnie mogłyby również zacieśnić współpracę ze szkołami średnimi, aby lepiej rozpoznawać przygotowanie kandydatów i wspólnie wypracowywać strategię wyrównawcze.

Podsumowując, zmiany w programie nauczania matematyki w liceum są faktem, z którym zarówno nauczyciele, jak i wykładowcy muszą się zmierzyć. Niezbędne jest uważne monitorowanie ich skutków, wymiana doświadczeń między różnymi etapami edukacji oraz tworzenie rozwiązań wspierających uczniów w płynnym przechodzeniu z jednego poziomu kształcenia na kolejny. Tylko wtedy można mieć nadzieję, że matematyka nie „zgubi się” w drodze na studia, a uczniowie – przyszli studenci – będą mogli w pełni wykorzystać swój potencjał.

Bibliografia

- [1] Babiński W., Chańko L., Janowicz J., Ponczek D., Szmytkiewicz E., Wej K., NOWA MATeMATyka. Podręcznik dla liceum i technikum dla klasy 1, zakres podstawowy i rozszerzony, Nowa Era, 2024
- [2] Babiński W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G., Ponczek D., Wesolowska J., MATeMATyka. Podręcznik dla liceum i technikum dla klasy 2, zakres podstawowy i rozszerzony, Nowa Era, 2024
- [3] Babiński W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G., Ponczek D., Wesolowska J., MATeMATyka. Podręcznik dla liceum i technikum dla klasy 3, zakres podstawowy i rozszerzony, Nowa Era, 2024
- [4] Babiński W., Chańko L., Czarnowska J., Wesolowska J., MATeMATyka. Podręcznik dla liceum i technikum dla klasy 4, zakres podstawowy i rozszerzony, Nowa Era, 2024
- [5] Dz.U. Rzeczypospolitej Polskiej, Warszawa, 5 lipca 2024 r., poz. 996

Matematyka – fundament czy bariera?

O zjawisku drop out na uczelniach przyrodniczych

Małgorzata Graczyk, Ewa Skotarczak

Uniwersytet Przyrodniczy w Poznaniu, Katedra Metod Matematycznych
i Statystycznych,
e-mail: malgorzata.graczyk@up.poznan.pl, ewa.skotarczak@up.poznan.pl

Streszczenie

Zjawisko drop out, czyli rezygnacja ze studiów na wczesnym etapie kształcenia, stanowi istotne wyzwanie dla uczelni wyższych — zarówno w wymiarze dydaktycznym, jak i społecznym. Dość powszechnie można spotkać się z twierdzeniem, że jedną z głównych przyczyn rezygnacji studentów początkowych semestrów kierunków przyrodniczych jest niepowodzenie w nauce przedmiotów ścisłych, zwłaszcza matematyki. Warto podkreślić, że kierunki przyrodnicze, takie jak rolnictwo, leśnictwo czy zootechnika, jeśli są realizowane w ramach studiów inżynierskich, mają w programie kształcenia matematykę w zakresie analizy matematycznej (podstawy rachunku różniczkowego i całkowego).

W pracy przedstawiono wnioski z badania przeprowadzonego na Uniwersytecie Przyrodniczym w Poznaniu dotyczącego przyczyn zjawiska wczesnego drop out w uczelni. Wnioski oparto na danych sprawozdawanych przez uczelnię do systemu POLon oraz GUS za lata 2022-2024. Ponadto, w trakcie roku akademickiego 2024/25 przeprowadzono badania sondażowe i ankietowe wśród młodzieży biorącej udział w targach edukacyjnych, nocy naukowców, a także studentów oraz pracowników uczelni. W artykule przedstawiono wnioski z tych badań opracowane przez uczelniane Centrum Wsparcia i Rozwoju (CWR) oraz wybrane działania podjęte w celu wsparcia studentów w pokonywaniu trudności matematycznych, w tym organizację kursu przygotowawczego dla przyjętych na pierwszy rok oraz inicjatywy towarzyszące pierwszym semestrom studiów.

Słowa kluczowe: drop out, niepowodzenia dydaktyczne, strategie wsparcia studentów.

Wstęp

Matematyka odgrywa kluczową rolę w kształceniu studentów kierunków przyrodniczych, stanowiąc fundament zrozumienia procesów biologicznych i środowiskowych. Jest nieodzownym narzędziem wykorzystywanym na innych przedmiotach, specjalistycznych dla przyrodniczych i technicznych kierunków studiów. Jednocześnie, dla uczniów szkół technicznych o profilu rolniczym oraz dla studentów uczelni przyrodniczych, matematyka bywa postrzegana jako jedna z największych barier edukacyjnych na początku studiów. Z reguły przedmioty podstawowe takie jak matematyka, chemia, fizyka są umieszczane w programie studiów na pierwszym roku. U studentów rodzi to poczucie, że wymarzone studia są jedynie przedłużeniem szkoły średniej, a nie zdobywaniem wiedzy specjalistycznej dla danego kierunku. Z naszych

wieloletnich obserwacji w pracy na uniwersytecie przyrodniczym wynika, że wielu kandydatów, a później nowo przyjętych studentów na kierunki przyrodnicze, przyznaje, że nie spodziewało się zajęć z matematyki na wybranym przez siebie kierunku studiów. Jest to „zaskoczenie” wspólne zarówno dla studentów kierunku Biologia stosowana, jak i np. Ekoenergetyka, czyli kierunku, który kończy się uzyskaniem stopnia inżyniera. Ten negatywny wśród pewnej grupy abiturientów wizerunek matematyki wraz z najczęściej występującym rozłożeniem siatki godzin, tzn. realizacją przedmiotu analiza matematyczna lub matematyka od pierwszego semestru studiów powodują, że trudności właśnie z tym przedmiotem są wymieniane na kierunkach przyrodniczych wśród podstawowych powodów rezygnacji ze studiów przed uzyskaniem dyplomu, czyli zjawiska drop-out.

Warto podkreślić, że nawet niedokończone studia przynoszą korzyści dla rozwoju zarówno jednostki, jak i całego społeczeństwa. Podjęcie studiów oznacza nawiązanie nowych kontaktów międzyludzkich, wyjazd z rodzinnej miejscowości daje możliwość częściowego usamodzielnienia się młodych ludzi. Nawet krótkotrwały wysiłek edukacyjny prowadzi do poszerzenia wiedzy i zdobycia nowych kompetencji [4]. Czas spędzony na studiach, nawet niedokończonych, nie jest czasem straconym, jednak nie zawsze jest tak odbierany przez społeczność np. rodzinę, do której powraca student rezygnujący z dalszej nauki. Negatywne reakcje, podkreślanie porażki edukacyjnej mogą obniżać poczucie własnej wartości i sprawczości, a także powodować zaniechanie prób ponownego rozpoczęcia studiów.

W uczelniach o profilu przyrodniczym zjawisko wczesnego drop out, czyli rezygnacji już w pierwszym semestrze nauki może być szczególnie dotkliwe. Nowoprzyjęci studenci rezygnują bowiem ze studiowania zanim pojawią się w programie studiów przedmioty specjalistyczne dla danych kierunków, a często właśnie taka tematyka decyduje o wyborze uczelni i profilu kształcenia. Trudno jednak tak zaplanować plan kierunku, aby podstaw chemii, fizyki, matematyki i statystyki uczyć na semestrach ostatnich, bowiem zdobyta na przedmiotach ścisłych wiedza podstawowa jest niezbędna do zdobycia bardziej specjalistycznych kompetencji.

W niniejszym opracowaniu przedstawiamy wybrane działania podjęte w Uniwersytecie Przyrodniczym w Poznaniu (UPP) mające na celu zdiagnozowanie przyczyn zjawiska wczesnego drop out. Działania te są częścią projektu FERS 6 – Studiuj dla klimatu! realizowanego w UPP [2]. Ponadto prezentujemy sposoby przeciwdziałania tym rezygnacjom, które wynikają z niepowodzeń edukacyjnych w przedmiotach ścisłych, a zwłaszcza matematyce. Opisane metody zostały zaproponowane i są realizowane przez pracowników Katedry Metod Matematycznych i Statystycznych UPP.

1. Przegląd literatury

Według danych OECD z badania przeprowadzonego w osiemnastu krajach, że aż 31% studentów nie ukończyło rozpoczętych studiów [6]. Dla Polski oszacowany poziom rezygnacji w tym okresie był jeszcze wyższy i wynosił 39% [6]. Na zlecenie MNiSW w 2020 roku powstał raport „Zjawisko dropoutu na polskich uczelniach” [7]. W raporcie wskazano, na podstawie danych z systemu POLon, że w latach 2012-2020 nawet 40% całkowitej liczby studentów zrezygnowało z rozpoczętych studiów i w ciągu roku od skreślenia z listy studentów nie powróciło na ten sam kierunek, przy czym na studiach pierwszego stopnia ten odsetek był wyższy i wynosił aż 46%. Uwzględniając osoby

studiujące więcej niż jeden kierunek jednocześnie, zjawisko to dotknęło w podanych latach aż 1.3 mln studentów.

W analizie Kehm i in. [5] wyróżniono dziewięć zaobserwowanych przyczyn rezygnacji ze studiów. Wśród nich wymienia się zarówno powody ze strony uczelni, takie jak organizacja zajęć (tematyka wykładów, liczba studentów w grupach, plan), integracja ze społecznością akademicką, jak również powody osobiste: indywidualna motywacja do nauki, podejmowanie pracy zarobkowej równoległe ze studiowaniem, a także tło społeczno-demograficzne (miejsce urodzenia, miasto lub wieś, poziom wykształcenia rodziców itp.). Wyniki badań potwierdzają, że płeć jest istotnie różnicującym czynnikiem dla poziomu drop out [6]. W niemal wszystkich krajach UE kobiety rzadziej niż mężczyźni rezygnują ze studiów, a największa różnica dotyczy polskich studentów. Mężczyzn porzucających studia jest bowiem w Polsce niemal dwukrotnie więcej niż kobiet (26% i 15% odpowiednio).

Warto w tym miejscu powiązać ten wynik ze specyfiką kierunków studiów wybieraną w zależności od płci. Powszechnie, to mężczyźni częściej podejmują studia na kierunkach inżynierskich i tzw. ścisłych. Ten fakt w połączeniu z wysokim odsetkiem rezygnacji przez mężczyzn wzbudza w odbiorze społecznym wrażenie, że za zjawiskiem drop out stoją problemy ze sprostaniem wymaganiom na matematyce, fizyce i przedmiotach technicznych. Badania jednak pokazują, że czynników wpływających na podjęcie decyzji o rezygnacji ze studiowanego kierunku jest więcej i są one zróżnicowane, a porażka egzaminacyjna jest tylko jednym z nich.

W artykule Álvarez-Ferrándiz i in. [1] przeprowadzono przegląd literatury naukowej opublikowanej w latach 2018-2022 poświęconej głównym czynnikom wpływającym na porzucanie studiów. Poza wymienionymi już powyżej powodami autorzy wymieniają również problemy w sferze akademickiej i społecznej, stres studentów, względy zdrowotne, rolę nauczycieli oraz zmiany w systemie edukacyjnym.

2. Metodyka badań

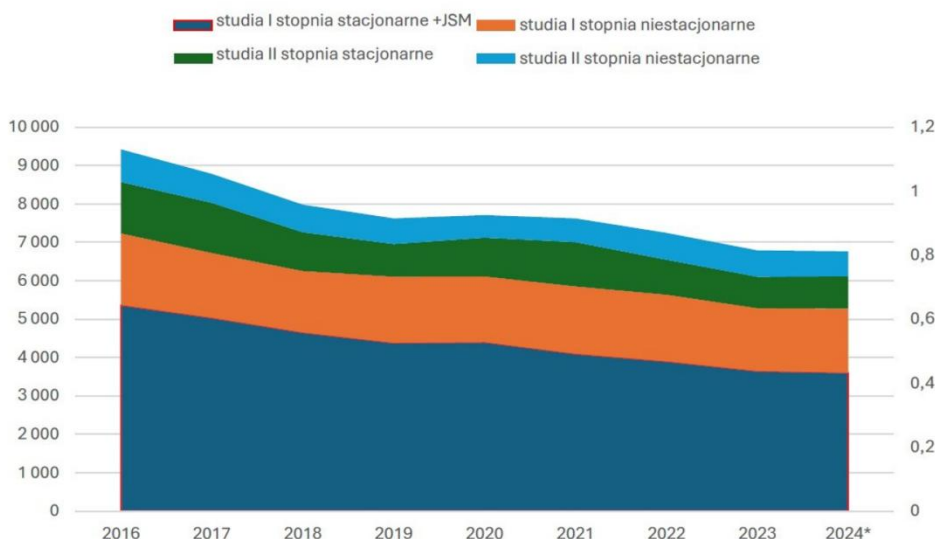
Przeciwdziałanie rezygnacjom z podjętych studiów, zwłaszcza w trakcie ich pierwszego semestru, może być realizowane przez uczelnie w sposób kompleksowy. W UPP już od kilku lat prowadzone są działania mające na celu poznanie przyczyn wczesnego drop out oraz poszukiwania sposobów na skuteczne zmniejszenie skali tego zjawiska. Uczelniane Centrum Wsparcia i Rozwoju przeprowadziło w latach 2021-2024 wewnętrzne badania na temat przyczyn wczesnego drop-out w uczelni. Badanie oparto o rejestry administracyjne uczelni (system POLon, sprawozdania do GUS) określające liczbę rezygnacji ze studiów w latach akademickich: 2021/22, 2022/23, 2023/24, badanie sondażowe wśród uczestników targów edukacyjnych i innych wydarzeń promocyjnych oraz o badanie ankietowe w grupie studentów UPP przeprowadzone w 2024 roku. Ankieta skierowana była do osób studiujących w UPP, a więc tych, którzy nie doświadczyli zjawiska drop-out. Osoby rezygnujące ze studiowania rzadko pozostają w kontakcie z uczelnią, a po skreśleniu z list studentów uczelnia traci prawo do przetwarzania ich danych osobowych. W ankiecie pytano więc przede wszystkim o powody wyboru akurat tej uczelni oraz źródła informacji o kierunkach studiów oferowanych przez UPP. W styczniu 2025 przeprowadzono również badanie ankietowe wśród pracowników UPP. Ta ankieta zawierała jedynie pytania otwarte. Pracowników zapytano głównie o to, jakie widzą możliwości zwiększenia zainteresowania ofertą

edukacyjną uniwersytetu oraz zwiększenia odsetka studentów broniących pracę dyplomową w UPP. CWR przeprowadziło również rozmowy z 21 doradcami zawodowymi ze szkół średnich.

Kierownik CWR przeprowadziła również wywiady z doradcami zawodowymi w szkołach średnich oraz ówczesnymi kierownikami katedr prowadzących w uczelni dydaktykę przedmiotów ścisłych: Katedry Metod Matematycznych i Statystycznych, Katedry Chemii oraz Katedry Fizyki i Biofizyki.

3. Wyniki badań

W latach 2016-2024 na Uniwersytecie Przyrodniczym w Poznaniu obserwuje się względnie stałą liczbę osób trafiających na studia drugiego stopnia i studia niestacjonarne oraz malejącą liczbę osób podejmujących studia pierwszego stopnia (Rys. 1). Na podstawie analizy danych raportowanych do systemu POLon oraz do GUS można stwierdzić, że w zależności od kierunku, największy procent rezygnacji notuje się na pierwszym roku studiów, a zwłaszcza w ciągu początkowych trzech miesięcy od rozpoczęcia pierwszego roku akademickiego [8]. W badanych latach procent rezygnacji waha się od 10 do 40 w odniesieniu do osób przyjętych na pierwszy rok studiów (Rys.1).



Rys. 1. Liczba studentów UPP w latach 2016-2023
Źródło: [Salis-Maciejewska, Władczyk, 2025, s. 51].

Najwyższy poziom rezygnacji ze studiów w UPP odnotowano na kierunkach inżynierskich oraz tych, które znajdują się w ofercie innych uczelni w mieście, w tym niepublicznych, takich jak ekonomia czy dietetyka. Dane dotyczące odsetka rezygnacji dla wybranych kierunków studiów przedstawiono w Tabeli 1.

Tab.1. Procentowy udział osób kontynuujących naukę w liczbie osób przyjętych na studia

I.p.	Kierunek	Średni udział osób kontynuujących	Rok akademicki 2024/2025	Rok akademicki 2023/2024	Rok akademicki 2022/2023	Rok akademicki 2021/2022
1	Ekonomia	61%	41%	58%	57%	87%
2	Biotechnologia	70%	79%	69%	67%	67%
3	Dietetyka	71%	68%	71%	70%	73%
4	Finanse i rachunkowość	72%	64%	74%	67%	85%
5	Jakość i bezpieczeństwo żywności	76%	92%	38%	90%	83%
6	Infotmatyka i inżynieria danych	76%	81%	62%	82%	80%
7	Technologia drewna	82%	84%	91%	73%	79%
8	Architektura krajobrazu	82%	80%	88%	78%	85%
9	Projektowanie mebli	83%	81%	81%	91%	90%
10	Gospodarka Przestrzenna	83%	87%	68%	84%	93%
11	Zootechnika	84%	79%	92%	81%	84%
12	Inżynieria środowiska	84%	84%	72%	84%	96%

Źródło: [Salis-Maciejewska, Władczyk, 2025, s. 51].

Spośród sześciu kierunków studiów, na których poziom rezygnacji przekraczał 20%, aż pięć to kierunki, które oferują też inne poznańskie uczelnie: ekonomia, finanse i rachunkowość, biotechnologia, dietetyka i informatyka. Kierunki unikatowe, specyficzne dla uniwersytetu przyrodniczego, takie jak technologia drewna, zootechnika, architektura krajobrazu, charakteryzują się znacząco mniejszym odsetkiem rezygnacji, mniejszym niż 20% w odniesieniu do liczby osób rozpoczynających studia na tych kierunkach.

W badaniu sondażowym przeprowadzonym w 2024 roku wśród potencjalnych kandydatów na studia - uczestników targów edukacyjnych, Nocy Naukowców, warsztatów organizowanych na UPP, uzyskano odpowiedzi od 1001 osób. Jako źródło pozyskiwania informacji o ofercie edukacyjnej UPP, najwięcej osób (365) wskazało na tzw. marketing szeptany, czyli ustny przekaz innych osób z prywatnego otoczenia. Za sposób najbardziej skuteczny w przekazywaniu informacji o ofercie uczelni ponad połowa (510) osób uznała bezpośredni kontakt z pracownikami uczelni podczas różnych akcji promocyjnych prowadzonych w szkołach oraz podczas zajęć warsztatowych czy lekcji organizowanych w uczelni. Jako czynniki wskazane za najważniejsze przy wyborze uczelni respondenci uznali perspektywę pracy po studiach (703 osoby), ciekawe kierunki studiów (640 osób), zajęcia praktyczne (592 osoby), ciekawe praktyki i staże (540 osób) oraz atmosferę studiowania (530 osoby). W ankiecie przeprowadzonej wśród osób studiujących w UPP wzięło udział 240 osób. Ponad połowa z nich (139 osób) wskazała, że wybrała kierunek studiów świadomie i zgodnie z zainteresowaniem, jednak ponad 10% (27 osób) odpowiedziało, że trudno to ocenić, albo wręcz nie dokonało tego wyboru świadomie. Połowa (120 osób) zaznaczyła, że na decyzję o wyborze kierunku studiów

miała wpływ opinia znajomych lub członków rodziny. Na ankietę przeprowadzoną przez CWR wśród nauczycieli UPP w styczniu 2025 roku odpowiedziało 50 pracowników. Jak wcześniej wspomniano, ta ankieta zawierała jedynie pytania otwarte. Kluczowe kwestie, na które wskazano w odpowiedziach, to niewystarczająca promocja zewnętrzna uniwersytetu, niezadowalające warunki socjalne oraz brak kontaktu osób aktualnie studiujących z absolwentami uczelni.

Z kolei doradcy zawodowi, którzy wzięli udział w rozmowach z CWR wskazali, że niezdecydowanie uczniów związane z wyborem przyszłego kierunku kształcenia jest spowodowane w dużej mierze brakiem zainteresowań, a także brakiem wsparcia ze strony najbliższych.

W niniejszym opracowaniu chcemy się skoncentrować na przedstawieniu podjętych w UPP działań w zakresie wsparcia studentów w pokonywaniu trudności z przedmiotami podstawowymi. Jako pracownicy Katedry Metod Matematycznych i Statystycznych włączyliśmy się w prace CWR i podjęliśmy działania mające na celu pomoc studentom. Matematyka jest fundamentem w zrozumieniu zjawisk występujących w otaczającym nas środowisku, ich modelowaniu i opisanu, jak również w wykorzystaniu ich na takich przedmiotach podstawowych jak fizyka i chemia. Zatem trudności w zrozumieniu i dalszym wykorzystaniu zagadnień omawianych podczas spacialistycznych kursów są widoczne zwłaszcza podczas zajęć z matematyki. Obiektywne problemy i niedoprecyzowanie niektórych pojęć implikują trudności w rozumieniu terminów przedstawianych podczas zajęć specjalistycznych dla danych kierunków studiów. Nauczyciele zwracali uwagę na to, że nieumiejętność uczenia się może być jedną z przyczyn trudności studentów w pierwszych miesiącach nauki. Te problemy są ściśle powiązane z niedostatecznym opanowaniem materiału omawianego w szkole ponadpodstawowej, brakiem biegłości obliczeniowej i sprawności w posługiwaniu się wzorami, które były dostępne podczas pisania egzaminu maturalnego.

Jednym z pierwszych działań realizowanych przez KMMiS UPP były tzw. kursy wyrównawcze z matematyki. Były to zajęcia dodatkowe i nieobowiązkowe, w wymiarze 20h, realizowane w pierwszym semestrze studiów pierwszego stopnia, a więc jednocześnie z realizacją przedmiotu matematyka lub analiza matematyczna w ramach toku studiów. Zajęcia były częściowo odpłatne, ale wysokość opłaty dla studentów była symboliczna. Zajęcia prowadzili pracownicy KMMiS, a więc nauczyciele doświadczeni, doskonale znający poziom wymagań na poszczególnych kierunkach studiów. Niewątpliwą zaletą tej formy pomocy było tempo pracy dostosowane do potrzeb studentów. Zajęcia nie wymagały realizacji określonego programu, ich tematyka mogła być dostosowywana do poziomu oraz potrzeb studentów biorących udział w cotygodniowych spotkaniach. Niestety, taka forma wsparcia studentów miała wiele niedoskonałości, przede wszystkim organizacyjnych. Trudno było w planach poszczególnych kierunków studiów dobrać odpowiadający wszystkim termin. To co było zaletą, czyli grupy łączące studentów z różnych kierunków, stało się też utrudnieniem w sytuacji, kiedy tempo realizacji programu na regularnych ćwiczeniach z matematyki na różnych kierunkach było niejednakowe.

Począwszy od roku akademickiego 2022/23, w miejsce kursu odbywającego się w trakcie pierwszego semestru, nowoprzyjętym studentom pierwszego roku zaproponowano kursy przygotowawcze z matematyki i chemii. Na zajęcia przeznaczono jeden tydzień września, po 4h dziennie dla jednego przedmiotu. Oddzielnie utworzono również grupy weekendowe dla studentów przyjętych na studia niestacjonarne. Zajęcia

z matematyki zaoferowano zarówno w formie stacjonarnej, jak i online, a decyzję o wyborze trybu uczestnik podejmował zapisując się na kurs. Informacje o otwarciu kursów przygotowawczych umieszczano zarówno na stronach internetowych uczelni, jak również w formie folderu przesyłano osobom przyjętym na pierwszy rok studiów wraz z potwierdzeniem przyjęcia. Uczestnikom kursu umożliwiono także wynajęcie miejsca w domu studenckim na czas trwania kursu. Dotychczas odbyły się trzy edycje kursu przygotowawczego, a we wrześniu 2025 roku planowana jest kolejna, przy czym ofertę rozszerzono w tym roku o zajęcia z fizyki.

Program kursu przygotowawczego z matematyki zawiera podstawowe pojęcia z zakresu szkoły średniej: działania na potęgach, wyrażenia algebraiczne i wyrażenia wymierne, równania i nierówności: z wartością bezwzględną, wymierne, wielomianowe, wykładnicze, logarytmiczne. Obok tych zagadnień powtarzane są również pojęcia związane z ciągami, szeregami geometrycznymi. Przypominane są podstawowe pojęcia związane z funkcjami elementarnymi i ich wykresami. Przyszli studenci mają możliwość powtórzenia wiadomości dotyczących podstawowych zależności trygonometrycznych, algebry wektorów na płaszczyźnie, równania prostej i okręgu. Ostatnie spotkania są poświęcone zagadnieniom związanym z prawdopodobieństwem zdarzeń losowych. Na pierwszych zajęciach studenci rozwiązywali pre-test, a na ostatnich post-test, przy czym zadania na testach były analogiczne. Porównując wyniki z obu testów odnotowano poprawę w sposobie oraz liczbie rozwiązanych zadań. Zajęcia prowadzone podczas tego kursu mają charakter wykładowo-warsztatowy, uczestnicy wszystkich grup, również stacjonarnych, zostają zapisani do zespołów na MS Teams, gdzie mają dostępne materiały z kursu, jak i zadania do samodzielnej pracy.

W pierwszej edycji kursu przygotowawczego z matematyki, we wrześniu 2022 roku, wzięło udział 101 osób. W kolejnych latach liczba uczestników zwiększała się osiągając wartości 131 osób w 2023 roku oraz 144 w 2024 roku, przy czym liczba osób na zajęciach niestacjonarnych stanowiła około 11% wszystkich biorących udział w zajęciach. Po trzech edycjach warto zauważyć, że zdecydowanie więcej osób wybiera zajęcia w sali, w formie stacjonarnej. Jest to wspólne zarówno dla osób przyjętych na studia dziennie jak i niestacjonarne. Na zajęcia zapisują się osoby głównie po tzw. maturze podstawowej z matematyki (79%).

Niestety, liczba uczestników kursów przygotowawczych jest ciągle bardzo niska w stosunku do liczby osób przyjmowanych na pierwszy rok studiów. Obserwując trwającą jeszcze rekrutację na kurs w bieżącym roku akademickim nie można oczekiwać, że pojawi się tu jakaś znacząca zmiana i studenci masowo będą chcieli uczestniczyć w kursach wrześniowych. Nauczyciele prowadzący kurs przygotowawczy otrzymują w trakcie trwania semestru informację zwrotną od studentów, że przeznaczenie całego tygodnia września, czyli przed rozpoczęciem roku akademickiego, jest dla większości zbyt dużym obciążeniem ze względu na różne osobiste powody. Propozycja zajęć wrześniowych umożliwiających z jednej strony powtórzenie materiału ze szkoły średniej, z drugiej zapoznanie się z uczelnią i integrację ze środowiskiem akademickim nie spotkała się z dużym zainteresowaniem. Studenci w rozmowach z nauczycielami podkreślali, że nie dotarła do nich informacja o kursie i że nie wzięli udziału z powodu okresu wakacyjnego albo podjętej pracy zarobkowej. Zaskakujące jest, że studenci w trakcie trwania pierwszego semestru studiów bardzo często przyznają, że nie zainteresowali się kursem przygotowawczym, bo nie wiedzieli, że na wybranym przez nich kierunku studiów będzie realizowany przedmiot matematyka. Widać więc potrzebę zwiększenia

wysiłków w kierunku bardziej świadomej rekrutacji i przedstawiania szczegółowej oferty wraz z opisem wymagań na poszczególnych kierunkach studiów. Jest to zadanie dla doradców zawodowych i tutaj należy wskazać potrzebę zwiększenia współpracy.

Na stronie internetowej uczelni, na której znajdują się wszystkie informacje o kursie przygotowawczym, zawarte są również nazwy kierunków studiów, na których realizowane są poszczególne przedmioty podstawowe. Jednakże taka informacja dociera głównie do osób, które zainteresują się możliwością uzupełnienia wiadomości ze szkoły ponadpodstawowej.

W trakcie analizy zjawiska drop out przeprowadzone zostały wywiady z kierownikami: Katedry Metod Matematycznych i Statystycznych, Katedry Chemii oraz Katedry Fizyki i Biofizyki. Kierownicy katedr zwrócili uwagę na problemy studentów związane z niedostatecznym zrozumieniem tematyki omawianej w szkole średniej. Miało to często przełożenie na trudności podczas początkowych zajęć i wpływało demotywująco na dalszy przebieg studiów. W opinii nauczycieli akademickich zauważalne jest zniechęcenie studentów do dalszej nauki w sytuacji, gdy nie otrzymują zaliczenia z więcej niż jednego przedmiotu. Zgodnie z programem studiów, możliwość ponownego wzięcia udziału w zajęciach jest możliwa dopiero z kolejnym rocznikiem studentów. Taki schemat implikuje, że młodzi ludzie szybko zapominają omówiony materiał i mają wrażenie, jakby uczyli się na nowo. Podkreślono również, że władze uczelni chętnie wspierają działania mające na celu pomoc studentom, zwłaszcza w pierwszym etapie ich akademickiej kariery. Stąd na Uniwersytecie Przyrodniczym w Poznaniu pojawiły się kolejne starania mające na celu pomoc studentom w opanowaniu materiału z matematyki i chemii. Będą one podjęte w ramach projektu „Studiuj dla klimatu”. Pilotażowo, już w semestrze letnim roku akademickiego 2024/25, zaproponowano studentom, którzy nie uzyskali zaliczenia z matematyki w semestrze zimowym, zajęcia uzupełniające. Celem wspomnianych zajęć było i będzie w kolejnych latach, umożliwienie studentom bezpłatnego powtórzenia materiału, z którym zapoznawali się na matematyce w pierwszym semestrze trwania studiów, ale jednak nie opanowali go w wystarczającym stopniu do uzyskania zaliczenia. Taka forma wsparcia dla studentów będzie rozwijana, pierwszy semestr ujawnił jednak problemy organizacyjne związane znów z włączeniem dodatkowych ćwiczeń z matematyki do planu zajęć regularnych w danym semestrze. Studenci bardzo niechętnie zapisywali się na zajęcia dodatkowe organizowane w piątki, co ze względów na plan różnych kierunków studiów oraz dostępność sal dydaktycznych wydawało się dogodnym terminem. Studenci zwrócili też uwagę, że sam kurs powtórzeniowy, bez możliwości uzyskania zaliczenia, nie jest dla nich interesujący. Być może należy rozważyć możliwość włączenia do sesji letniej ponownego przystąpienia do zdawania matematyki dla uczestników kursu.

4. Dyskusja wyników

Badanie przyczyn wczesnych rezygnacji jest problematyczne, ponieważ studenci po przerwaniu studiów nie są skłonni do pozostawania w kontakcie z uczelnią, czy choćby wypełniania kwestionariuszy. W powszechnej opinii do najważniejszych powodów rezygnacji zalicza się niewystarczające przygotowanie z matematyki, chemii i fizyki. Jako szczególnie obciążające studenci wskazują zajęcia prowadzone w laboratorium. Zajęcia takie wymagają precyzji, samodzielności i umiejętności odpowiedniego używania sprzętu

laboratoryjnego. Studenci wskazują, że obecnie niewielu absolwentów techników, a nawet liceów ogólnokształcących miało w czasie nauki w szkole średniej lekcje chemii lub fizyki prowadzone w laboratorium wyposażonym w profesjonalny sprzęt. Tego typu zajęcia, choć bardzo wyczekiwane, są dużym wyzwaniem ze względu na swoją specyfikę. Młodzi ludzie często nie potrafią sprostać oczekiwaniom związanym z samodzielnością, precyzją wykonywanych doświadczeń oraz wymaganiom odnoszącym się do przygotowania raportu z badań. Kolejnym przyczynkiem jest również zdawanie na maturze matematyki jedynie na tzw. poziomie podstawowym, z jednoczesnym zakończeniem lekcji chemii i fizyki na co najmniej rok przed maturą. Jednak, nie tylko przedmioty ścisłe odbierane są jako trudne. Studenci kierunków nieinżynierskich, społeczno-ekonomicznych wskazują na trudności w analizie tekstów oraz pracy z ludźmi. Warto podkreślić, że w badaniu przeprowadzonym przez CWR UPP, trudności z opanowaniem materiału na tzw. przedmiotach ścisłych nie były wymieniane przez studentów jako najważniejsze przyczyny rezygnacji z podjętych studiów. Wiele osób nie kontynuuje nauki na wyższej uczelni ponieważ studiowanie nie spełnia ich oczekiwań oraz nie widzą możliwości pogodzenia aktualnych wyzwań związanych ze studiami z życiem rodzinnym i zawodowym.

Podsumowanie

Badania pokazują, że czynników wpływających na podjęcie decyzji o rezygnacji ze studiowanego kierunku jest wiele i są one zróżnicowane, a porażka egzaminacyjna jest tylko jednym z nich.

Z analizowanych wyników badań ankietowych nie wynika jednoznacznie, aby przedmioty ścisłe, a w szczególności matematyka, stanowiły barierę dla studentów uczelni technicznych i przyrodniczych. Nauczyciele akademicki jednak zauważają, że studenci pierwszego roku mają często duże problemy z tempem pracy na zajęciach z matematyki, a także z odtwarzaniem wiedzy, która powinna być zdobyta w szkole średniej. Studenci starszych lat, mimo początkowych trudności, potrafią wykorzystywać zdobyte umiejętności na przedmiotach bardziej specjalistycznych, a więc zauważają fundamentalne znaczenie matematyki.

Obszarem, w którym należy z pewnością zapewnić interwencję, są zrekrutowani studenci/tki pierwszego roku studiów pierwszego stopnia, którzy trafiają na uczelnię niewystarczająco przygotowani, a ponadto często w nieświadomy sposób dokonują wyboru kierunku studiów. Warto podkreślić rolę centrów doradztwa zawodowego, które są miejscem, gdzie może być prezentowana przygotowana przez uczelnie szersza informacja nie tylko o rodzajach kierunków, ale też o przebiegu studiów. Liczne działania na rzecz świadomej rekrutacji, promocji kierunków i ograniczania rezygnacji ze studiów są już przez uczelnie obecnie podejmowane, zarówno w oparciu o środki własne, jak i zewnętrzne. Współpraca uczelni ze szkołami średnimi jest pierwszym krokiem do lepszego i bardziej świadomego ukierunkowania młodych ludzi na to, co chcą studiować. Odsetek rezygnacji na kierunkach specjalistycznych jest niższy niż na kierunkach proponowanych przez wiele uczelni. Warto zauważyć, że wielu studentów podejmuje studia kierując się pasją, zaangażowaniem i tradycjami rodzinnymi, jak to się często zdarza np. na kierunku Leśnictwo. Warto promować takie postawy oraz zwiększyć działania na rzecz współpracy aktualnych studentów uczelni z jej absolwentami. Wtedy wybrany kierunek studiów może być spełnionym marzeniem, wynikiem zainteresowań i pasji.

Kształtowanie świadomości młodych ludzi na temat ich wyborów dotyczących dalszej ścieżki edukacyjnej jest zadaniem priorytetowym dla całego społeczeństwa.

Podziękowania

Podziękowania oraz wyrazy wdzięczności kierujemy do Pani mgr Karoliny Salis-Maciejewskiej, kierownik Centrum Wsparcia i Rozwoju Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu, która zebrała informacje niezbędne do zdiagnozowania zjawiska drop out, jak również zaplanowała działania ujęte w projekcie FERS 6 – Studiuj dla Klimatu!

Bibliografia

- [1] Álvarez-Ferrándiz, D., Vazquez, L. M., Rodríguez Sabiote, C., & Úbeda Sánchez, Á. M. Bibliometric review of factors influencing university dropout (2018-2022): An analysis of scientific literature. *European Journal of Educational Research*, 14(1), 167-183, 2025
- [2] FERS 6 – STUDIUM DLA KLIMATU. Program wspierania motywacji studentów do studiowania na Uniwersytecie Przyrodniczym w Poznaniu. FERS.01.05-IP.08-0117/25.
- [3] Larsen, M. R., Sommersel, H. B., & Larsen, M. S., Evidence on dropout phenomena at universities. Brief version. Copenhagen, Denmark: Danish Clearinghouse for Educational Research, 2013
[pobrano 26, 2018, https://edu.au.dk/fileadmin/edu/Udgivelser/Clearinghouse/Review/Evidence_on_dropout_from_universities_brief_version.pdf]
- [4] Instytut Badań Edukacyjnych. Interwencja 2.1. Wzmacnianie poczucia własnej skuteczności uczniów [Opis interwencji]. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych, 2015
- [5] Kehm, B. M., Larsen, M. R., & Sommersel, H. B., Student dropout from universities in Europe: A review of empirical literature. *Hungarian Educational Research Journal*, 9(2), 147-164, 2019
- [6] OECD. Education at a Glance 2008: OECD Indicators. Paris: OECD Publishing, 2008
- [7] Ośrodek Przetwarzania Informacji – Państwowy Instytut Badawczy. Zjawisko drop-outu na polskich uczelniach. Warszawa: OPI PIB, 2020.
https://irsw.pl/wp-content/uploads/2024/04/DROP-OUT_RAPORT-OPI-PIB.pdf
- [8] Salis-Maciejewska, K., Władczyk, J., Raport pn. Zjawisko drop-outu na Uniwersytecie Przyrodniczym w Poznaniu. Wyniki analizy i diagnoza przyczyn zjawiska przedwczesnego kończenia nauki i przerywania kształcenia na uczelni. Centrum Wsparcia i Rozwoju Uniwersytetu Przyrodniczego w Poznaniu, 2025

Peer teaching – inaczej

Elżbieta Galewska, Gertruda Gwóźdź-Łukawska

Politechnika Łódzka, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki,
e-mail: elzbieta.galewska@p.lodz.pl, gertruda.gwozdz-lukawska@p.lodz.pl

Streszczenie

Celem niniejszego artykułu jest prezentacja dwóch modeli peer teaching: pierwszego – wprowadzanego na kursowych zajęciach i drugiego – dodatkowego, wprowadzanego jako aktywność niezwiązana bezpośrednio z zajęciami. Przedstawione zostaną obserwacje nauczycieli oraz samych studentów. Analiza wad i zalet modelu zajęciowego zostanie przeprowadzona w oparciu o subiektywne odczucia grupy badawczej wyrażone w ankietach po ostatnich zajęciach.

Słowa kluczowe: peer teaching, nauczanie rówieśnicze, praca w grupie, projekt.

1. Wstęp

Peer teaching, czyli nauczanie rówieśnicze, jest jedną z nowoczesnych metod dydaktycznych polegającą na wzajemnym uczeniu się od siebie rówieśników poprzez wymianę wiedzy, doświadczeń i umiejętności. Metoda ma na celu zwiększenie stopnia zaangażowania osób uczących się, rozwój umiejętności komunikacyjnych oraz umiejętności działania w grupie i współpracy [1]. Umożliwia kształtowanie kompetencji istotnych dla pracy zespołowej i przydatnych zarówno w procesie kształcenia, jak i w przyszłej pracy zawodowej. Może być wykorzystana na uczelniach wyższych w zajęciach dydaktycznych każdego przedmiotu na kilka sposobów w zależności od wieku i doświadczenia studentów oraz formy zajęć. Wyróżnia się takie modele nauczania rówieśniczego jak: peer tutoring i proctoring (bardziej doświadczony student uczy mniej doświadczonego rówieśnika), surrogate teaching (starszy wiekiem student uczy młodszego), collaborative (cooperative) learning (studenci pracują nad wspólnymi projektami) [2] [3], reciprocal peer tutoring (wzajemne uczenie się w parach). Są one bardzo korzystnymi i skutecznymi metodami dydaktycznymi zwłaszcza podczas zajęć grupowych czy projektowych.

2. Realizacja peer teaching na zajęciach dydaktycznych

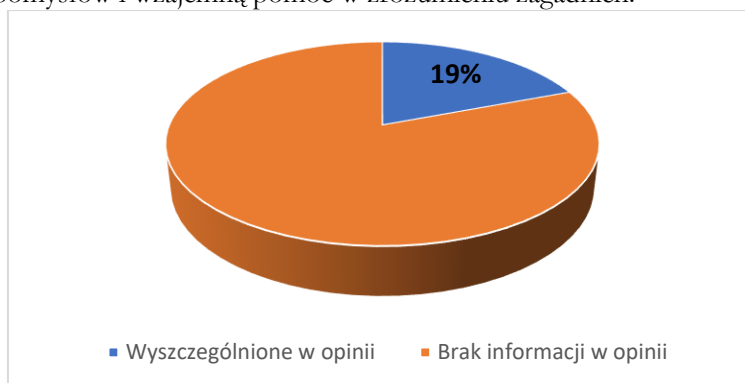
W tym paragrafie przedstawione zostaną doświadczenia z pracy autorek ze studentami w ramach zajęć dydaktycznych wykorzystujących różne odmiany peer teaching.

2.1. Projekty grupowe ze statystyki

Studenci pierwszego roku studiów inżynierskich mieli możliwość wykonania projektów w kilkusobowych grupach na zadany temat ze statystyki. Była to nieobowiązkowa forma zaliczenia pewnych zagadnień zastępująca tradycyjne rozwiązywanie zadań na kolokwium w sali wykładowej. Spotkała się z dużym

zainteresowaniem studentów, którzy prześcigali się w oryginalnych pomysłach i staranności wykonania prac. Sprawdzanie poprawności wykonania takich projektów było czasochłonne, ale też pozytywnie zaskakujące atrakcyjnością realizacji. Zagadnienia, których miały dotyczyć projekty, były najpierw dokładnie omawiane na wykładzie ze wskazaniem przykładowych rozwiązań, a następnie analizowane przez studentów w kolejnych zadaniach na ćwiczeniach. Wyjaśnione zostały wymagania i poszczególne etapy realizacji projektów, a wszystkie instrukcje i kryteria oceniania udostępnione na platformie e-learningowej. W opinii studentów zasady te były zrozumiałe, a czas wykonania projektów odpowiedni. Studenci sami dobierali się w grupy i w dowolnej formie pisemnej przedstawiali wyniki swojej pracy (plakaty, prezentacje, odręczne, wydruki komputerowe). Ponadto zamieszczali zrealizowane projekty na platformie, za pośrednictwem której otrzymywali informację zwrotną i ocenę.

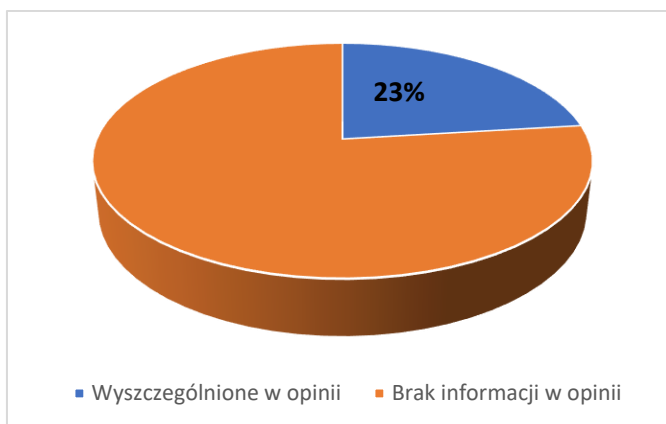
Jak studenci postrzegają pracę grupową z projektami? Na zakończenie zajęć z przedmiotu podzielili się swoimi opiniami, pozytywnie ocenili współpracę z rówieśnikami wskazując na wiele korzyści płynących z metody peer teaching. Przede wszystkim podkreślili rozwój umiejętności miękkich, kreatywności i pracy w grupie, wymiany pomysłów i wzajemną pomoc w zrozumieniu zagadnień.



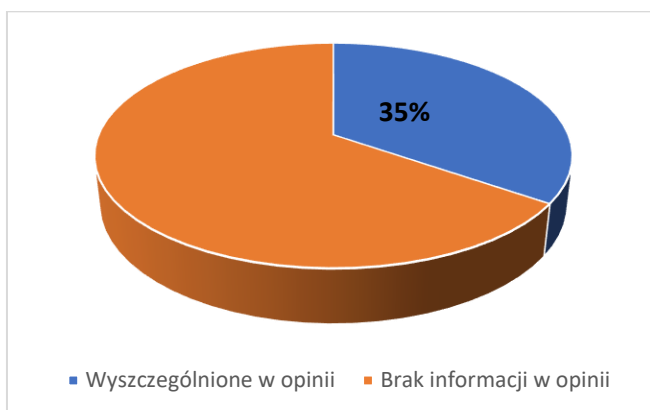
Rys. 1. Udział procentowy studentów, którzy wskazali w ankiecie kreatywność jako zaletę peer teaching (projekty bez prezentacji)

Zródło: opracowanie własne.

Przyznali, że wspólne opracowywanie tematów ułatwia im przyswojenie materiału, jest okazją do dzielenia się zainteresowaniami oraz lepszego poznania się nawzajem. Nie tylko integracja, ale też aktywizacja i zmniejszenie stresu czynią pracę zespołową przy realizacji projektu bardziej przyjazną i skuteczniejszą od tradycyjnej metody zaliczania zadań.



Rys. 2. Udział procentowy studentów, którzy wskazali w ankiecie integrację jako zaletę peer teaching (projekty bez prezentacji)
Źródło: opracowanie własne.



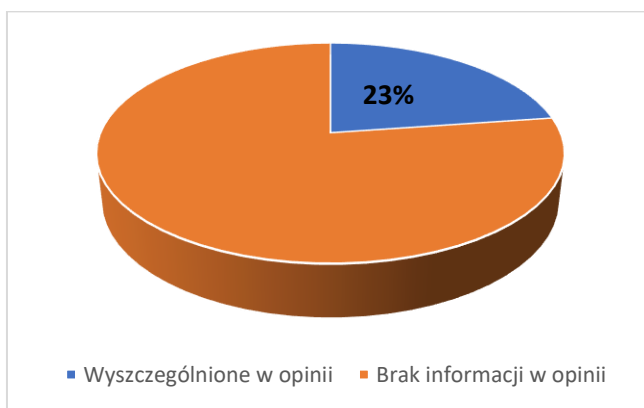
Rys. 3. Udział procentowy studentów, którzy wskazali w ankiecie zmniejszenie stresu jako zaletę peer teaching (projekty bez prezentacji)
Źródło: opracowanie własne.

Ponadto na plus wymieniana jest inwencja twórcza, możliwość wyboru badania statystycznego w ramach danego tematu, która ma wpływ na rozwój wyobraźni oraz wzrost zainteresowania wykonaniem zadania. Studenci postrzegali pracę grupową nad projektami jako urozmaicenie zajęć dydaktycznych, alternatywę dla tradycyjnych metod i możliwość ciekawego spojrzenia na matematykę, z innej perspektywy. Doceniali praktyczne podejście do zagadnień odsłaniające szerokie zastosowania matematyki i statystyki w codziennym życiu. Zaletą wymienianą przez studentów było też rozwijanie umiejętności pracy w zespole, nauka odpowiedzialności za wykonanie powierzonego zadania i umiejętności zarządzania czasem. Można zatem uznać, że wady metody peer teaching, omówione szeroko w [4], nie wystąpiły w badanej grupie studentów.

W kolejnym roku realizacji projektów zespołowych przez studentów pierwszego roku studiów inżynierskich dołożony został element prezentacji własnego projektu przed pozostałymi grupami. Studenci podzielili pozytywne opinie swoich poprzedników

dotyczące współpracy rówieśniczej. Ponadto wskazali na korzyści i trudności związane z prezentowaniem wyników na forum publicznym. Odebrali wystąpienia jako pożyteczną naukę przedstawiania w sposób interesujący wyników własnej pracy oraz doskonalenia umiejętności prezentacji przed publicznością, przydatnej w ich przyszłości. Ważne były: możliwość przećwiczenia sposobów wypowiedzi, nabieranie doświadczenia, zrozumienie swoich mocnych i słabych stron. Prezentacje innych grup nie tylko w ciekawy sposób traktowały różne tematy, ale pozwalały również na uczenie się na cudzych błędach. Na plus studenci ocenili wpływ prezentowania projektów na wzrost zaangażowania całej grupy do działania, otwieranie się na grupę i rozwój umiejętności społecznych. Jednak nie dla wszystkich wystąpienia publiczne stanowiły dodatkową zaletę metody peer teaching realizowanej w formie projektowej. Niektórzy z powodu stresu wskazywali konieczność prezentacji projektu na forum publicznym jako wadę. Była to jedyna słaba strona metody peer teaching wymieniona w ankietach studentów.

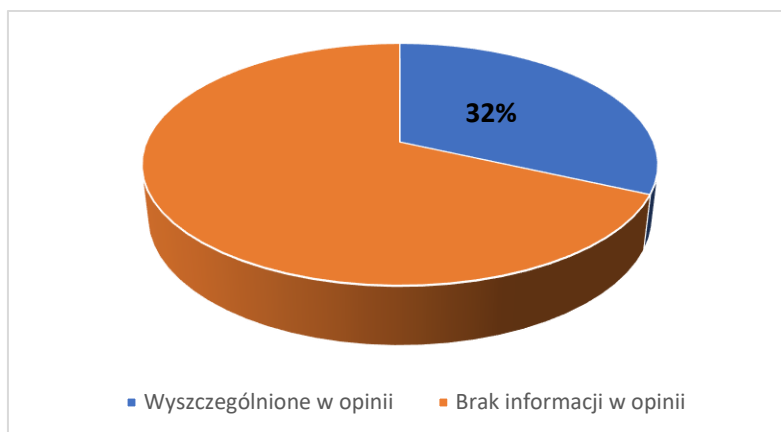
Z punktu widzenia nauczyciela bardzo ważne jest przyswojenie wiedzy. Dobrze wprowadzona na zajęciach metoda dydaktyczna nie służy jedynie aktywizacji studentów, ale ma także bezpośredni, pozytywny wpływ na przyswajanie przez nich wiedzy. W opinii co najmniej 23% studentów poszerzenie wiedzy w obrębie nowego materiału dotychczas poznanego na wykładach i ćwiczeniach, a także ogólnie ich rozwój w ramach przedmiotu, były jednymi z podstawowych zalet rówieśniczej pracy grupowej nad projektami.



Rys. 4. Udział procentowy studentów, którzy wskazali w ankiecie rozwój (rozwój/przyswojenie materiału/poszerzenie wiedzy) jako zaletę peer teaching (projekty z prezentacją)

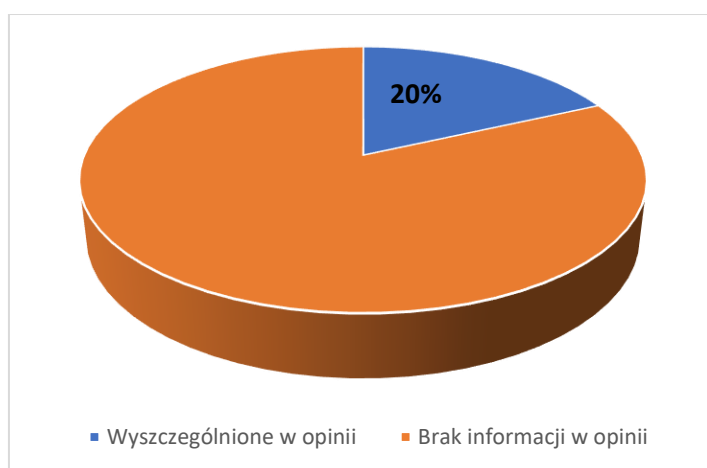
Źródło: opracowanie własne.

Aż 32% studentów wyraźnie wskazało na bardzo ważny aspekt, jakim jest kreatywność. W ich odczuciu, projekty dały im dużą dowolność zarówno co do wyboru badania statystycznego, jak i formy jego przedstawienia. Tradycyjne zajęcia oraz zaliczenia nie pozwalają na taką swobodę; nauczyciel musi przekazać konkretną wiedzę, a student nabyć konkretne umiejętności.



Rys. 5. Udział procentowy studentów, którzy wskazali w ankiecie kreatywność jako zaletę peer teaching (projekty z prezentacją)
 Źródło: opracowanie własne.

Wolność wyboru członków grupy, tematu projektu i sposobu prezentowania swojego projektu spotkała się z dobrym przyjęciem prawie 20% studentów.



Rys. 6. Udział procentowy studentów, którzy wskazali w ankiecie możliwość wyboru jako zaletę peer teaching (projekty z prezentacją)
 Źródło: opracowanie własne.

2.2. Prezentacje z równań różniczkowych

Podobną, aczkolwiek inną wersją metody peer teaching było przygotowywanie w parach prezentacji na temat zastosowań równań różniczkowych. Studenci sami szukali pomysłów na te zastosowania, a następnie przygotowywali i wygłaszali prezentacje przed kolegami z innych grup.

Na uwagę zasługują następujące zalety oraz wady metody pracy:

– kreatywność:

- studenci znajdowali bardzo ciekawe zastosowania całkowicie wykraczające poza program zajęć nie tylko samym tematem, jaki został omówiony, ale też typem równania,
- prezentacje były przygotowane bardzo różnie, w różnych programach i przedstawiały zadany temat na bardzo różne sposoby,
- w dwóch prezentacjach pojawiły się również dodatkowe gadżety, które wprowadzały w klimat prezentacji,
- jedynie dwie prezentacje były zrobione bez polotu i kreatywnego podejścia (zawierały teorię z zajęć, a następnie trywialne zastosowania); na uwagę jednak zasługuje fakt, że były to prezentacje przygotowane indywidualnie, a nie w parach – można stąd wysnuć wniosek, że przygotowywanie wystąpienia wspólnie z kolegą/koleżanką daje większe możliwości pojawienia się ciekawych pomysłów, a zatem jest bardzo rozwijające;

– praca w grupie (podział zadań):

- mimo, że nie było narzuconego schematu prezentowania (oprócz formy, jaką była prezentacja Pecha-Kucha), studenci sami podzielili się omawianymi slajdami i w każdej grupie każda osoba przedstawiała połowę, zaś druga osoba wspierała ją technicznie,
- nie dało się wyodrębnić żadnej szczególnej linii podziału prezentacji na dwie części – zazwyczaj (oprócz jednej prezentacji) zmiana prezentującego związana była z dojściem do połowy omawianego tematu;

– zarządzanie czasem:

- obserwowanie wystąpień studentów pokazało, że nie jest to umiejętność, którą posiadają wszyscy; prezentacje Pecha-Kucha mają swój rytm i czas trwania (20 slajdów, 20 sekund na każdy slajd), którego nie potrafili (w dużej części) przypilnować referujący;

– dogłębne przeanalizowanie zagadnienia:

- nie wszyscy referujący zdawali się dobrze rozumieć omawiane zagadnienia,
- na zadawane (dotyczące prezentacji) pytania zazwyczaj odpowiadała osoba, która omawiała slajd dotyczący aspektu, o który pytano;

– stres:

- prezentowanie przed innymi objawiało się bardzo wycofanym, cichutkim wygłaszaniem prezentacji,
- połowa wystąpień była odczytywana z przygotowanych tekstów z kartki bądź tabletu.

2.3. Perspektywy

Analiza wyników pracy studentów w ramach uczenia się koleżeńskie pokazuje, że w kolejnej odsłonie warto omówić ze studentami sposób prezentowania przed ich wystąpieniami tak, by prezentacje te zarówno sprawiały jeszcze większą przyjemność słuchaczom, jak i były wygłaszane z większym zaangażowaniem i przekonaniem, że autorzy świetnie rozumieją temat.

Warto też wprowadzić element zadawania pytań, dzięki któremu albo prezentujący będą mogli dopytać o coś słuchaczy i bardziej przyciągnąć ich uwagę, albo słuchacze będą aktywnie słuchać i dopytywać o szczegóły prezynterów. To z pewnością podniosłoby jakość całego przekazu i sprawiłoby, że wszyscy więcej wynieśli by z zajęć.

3. Inaczej – model pozazajęciowy

Z obserwacji studentów wynika, że młodzi ludzie chętniej słuchają swoich rówieśników niż wykładowców. Dlatego na koniec warto wspomnieć o całkowicie pozazajęciowym peer teaching, jaki odbywa się podczas każdej konferencji studenckiej.

Wnioski autorek wysnute są na podstawie wielokrotnie odbywającej się już studenckiej Konferencji Zastosowań Matematyki. Podczas takiego wydarzenia studenci (najczęściej wyższych lat) prezentują swoim młodszy kolegom wyniki swoich badań lub opowiadają o zagadnieniach, które ich interesują. Słuchaczami są również studenci, dzięki czemu zachodzi wymiana informacji pomiędzy rówieśnikami.

Nie zawsze można oczekiwać, że bierni uczestnicy konferencji wyjdą z wydarzenia z nowo nabytą wiedzą, ale z pewnością dowiedzą się o wachlarzu możliwości wykorzystania wiedzy zdobytej na studiach, co sprawi, że chętniej będą zdobywać tę wiedzę.

Ciekawe są również wystąpienia grupowe, podczas których, inaczej niż w przypadku prezentowania projektów na zajęciach, przejścia pomiędzy referującymi są przemyślane, związane z innym ujęciem tematu, przejściem od teorii do praktyki lub zmianą spojrzenia na to samo zagadnienie.

Nie jest to wersja peer teaching, podczas której następuje faktyczne uczenie kogoś lub uczenie się; główny nacisk kładziony jest na zaciekawianie i otwieranie oczu na to, czego często nie usłyszą słuchacze na przedmiotach kursowych.

Bezcenne jest zdobywanie doświadczenia z zakresu umiejętności miękkich, tak ważnego w życiu i pracy każdego człowieka. Obserwowanie wystąpień rówieśników pokazuje, że można przygotować ciekawą i angażującą prezentację nawet na trudny temat. Przyglądanie się kilku takim wystąpieniom daje możliwość zauważenia, jaki styl prezentowania (czytanie notatek czy swobodna narracja) lepiej przemawia do widza, jak język (nie tylko i wyłącznie fachowy) potrafi przyciągnąć uwagę, które elementy graficzne wspomagają uważność, a które jej przeszkadzają. I takie właśnie wartości dodane daje peer teaching.

4. Wnioski

Podsumowując, peer teaching jest efektywną metodą w dydaktyce akademickiej, którą z powodzeniem można stosować zarówno na zajęciach, jak i poza zajęciami. Wpływa na wzrost zaangażowania, rozwija umiejętność pracy zespołowej i kompetencje miękkie.

Porównanie dwóch modeli (zajęciowego i pozazajęciowego) wskazuje na większe doświadczenie w organizacji pracy w grupie i w zarządzaniu czasem podczas prezentacji konferencyjnych niż projektowych. Być może jest to spowodowane prestiżem związanym z występowaniem przed dużą publicznością oraz faktem, że prelegenci są studentami wyższych lat studiów. W przyszłości można dokonać pogłębionej analizy wad i zalet metody nauczania rówieśniczego, konstruując bardziej szczegółowe ankiety lub przeprowadzając wywiady ze studentami.

Oba modele mogą być wykorzystane zarówno do nauczania, jak i interesującego wprowadzenia w temat, uzmysłowienia pewnych faktów lub zaciekawienia przedstawianymi zagadnieniami. Nawet jeżeli będzie to peer teaching bez nauczania, to nie bez efektów.

Bibliografia

- [1] Leżucha M., Peer learning – efektywne uczenie przez dzielenie się wiedzą. Homo et Societas, nr 9, 2024, s. 87–105.
- [2] Barkley E. F., Cross K. P., Major C. H., Collaborative Learning Techniques: A Handbook for College Faculty, 2005
- [3] Slavin R. E., Cooperative Learning: Theory, Research, and Practice (2nd ed.), 1995
- [4] Guido M., BLOG: 15 Easy Peer Teaching Strategies to Help Students
<https://www.prodigygame.com/main-en/blog/advantages-disadvantages-peer-teaching-strategies>, 2017

Rozdział 2.

Matematyka w świecie technologii i zastosowań praktycznych

Wybrane algorytmy teorii sterowania wykorzystywane w uczeniu maszynowym

Wojciech Mitkowski

AGH Kraków, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii
Biomedycznej, Katedra Automatyki i Robotyki,
e-mail: wojciech.mitkowski@agh.edu.pl

Streszczenie

Uczenie maszynowe jest to stosunkowo nowy obszar badawczy, różnie rozumiany. Między innymi uczenie maszynowe to metoda analizy danych pomiarowych, która automatyzuje tworzenie modeli analitycznych. Jest to gałąź sztucznej inteligencji oparta na założeniu, że systemy mogą uczyć się na podstawie danych, identyfikować wzorce i podejmować decyzje przy minimalnej interwencji człowieka. W tych rozważaniach postaramy się uporządkować metody teorii sterowania z punktu widzenia uczenia maszynowego. Celem tego rodzaju uporządkowania jest zwrócenie uwagi na fundamentalne przemyslenia zawarte w teorii sterowania i jej znaczenie w rozwoju uczenia maszynowego.

Słowa kluczowe: teoria sterowania, algorytmy sterowania, uczenie maszynowe.

1. Wprowadzenie

Uczenie maszynowe jest to stosunkowo nowy obszar badawczy, różnie rozumiany. Między innymi uczenie maszynowe porządkuje metody, które z danych pomiarowych pozwalają automatycznie tworzyć modele analityczne. Analityczne modele matematyczne pozwalają przewidywać przyszłość w skończonym horyzoncie czasu.

W nauczaniu matematyki w Uczelniach Technicznych należy zwracać uwagę na metody, które automatyzują tworzenie modeli analitycznych. Wydarzenia historyczne stanowią pewien proces rozwijający się w czasie [23], [27]. Z tego powodu przy analizie zagadnień związanych z edukacją matematyki warto sięgać do doświadczeń z przeszłości, by nie popełniać błędów naszych poprzedników [31]. Kolejni reformatorzy często przyjmują postawy, które mogą sugerować, że wszystko zaczyna się od ich obecnych pomysłów lub zmieniają swoje poglądy z zaskakująco dużą częstotliwością [29]. Przy tworzeniu planów strategicznych trzeba wykorzystać fakt oczywisty, że nauka i edukacja stanowią podstawowy fundament państwa i narodu [17]. Konieczne jest kształtowanie postaw ([9], [38], s. 5 i 6), a troska o jakość sumienia powinna być podstawowym zadaniem ludzi nauki. W tym opracowaniu wykorzystałem moje wcześniejsze przemyslenia [28, 29, 30, 33, 35], odpowiednio je rozszerzając i uzupełniając.

Od pewnego czasu obserwujemy szybki rozwój różnego typu narzędzi informatycznych. Łatwo dostępne szybko działające komputery umożliwiają analizę i syntezę bardzo złożonych układów sterowania. Sterowanie, czyli oddziaływanie na wybrany obszar rzeczywistości, powinno odbywać się tak, by poprawiać/ulepszać jego działanie. Automatyczne działanie zapewnia formułowanie praw sterowania w postaci sprzężeń zwrotnych, najlepiej z jednoznacznie określonymi parametrami.

Jednoznaczność uzyskuje się poprzez formułowanie odpowiednich zadań optymalizacji [26], [32]. W dyscyplinie informatyka pojawiło się pojęcie „uczenie maszynowe”, które łączy teoretyczną matematykę z praktycznymi rozwiązaniami, umożliwiając dokładne modelowanie i obliczenia w nauce, technologii i dyscyplinach opartych na danych. Uczenie maszynowe jest to stosunkowo nowy obszar badawczy, różnie rozumiany. Między innymi uczenie maszynowe to metoda analizy wielu danych pomiarowych, która automatyzuje tworzenie modeli analitycznych, które pozwalają przewidywać przyszłość w skończonym horyzoncie czasu. Jest to gałąź sztucznej inteligencji [19] oparta na założeniu, że systemy mogą uczyć się na podstawie danych, identyfikować wzorce i podejmować decyzje przy minimalnej interwencji człowieka. W tych rozważaniach postaramy się uporządkować metody teorii sterowania w punktu widzenia uczenia maszynowego. Celem tego rodzaju uporządkowania jest zwrócenie uwagi na fundamentalne przemyslenia zawarte w teorii sterowania [22], [24], [26], [32] i jej znaczenie w rozwoju uczenia maszynowego. Zastosowania koncentrują się na aproksymacji złożonych funkcji lub danych za pomocą prostszych, bardziej zrozumiałych form.

Praca jest zorganizowana następująco. W sekcji 2 omawiamy relację pomiędzy rzeczywistością a jej modelem matematycznym oraz wyjaśniamy pojęcie równoważności topologicznej. W sekcji 3 podajemy algorytm wyznaczania macierzy stanu z danych pomiarowych. W sekcji 4 rozważamy klasę sterowań stałowartościowych i omawiamy zagadnienie wyznaczania stanów ustalonych wyjścia z czasowego układu liniowego pobudzanego sterowaniami stałowartościowymi. W sekcji 5 omawiamy problem równoważności macierzy prostokątnych (rozkład SVD) oraz algorytm wyznaczania wartości osobliwych dla macierzy prostokątnych (sekcja 6). W sekcji 7 omawiamy problemy modelowania przebiegów przejściowych pomiędzy stanami ustalonymi w układach dynamicznych. Sekcja 8 dotyczy budowy modeli statycznych z dyskretnych danych pomiarowych. Omawiamy różne metody aproksymacji. W sekcji 9 omawiamy krótko metody porównywania modeli matematycznych i wybór najlepszej metody budowania modelu w odpowiednim sensie. Praca kończy się uwagami końcowymi (sekcja 10) i wykazem literatury.

2. Relacja pomiędzy rzeczywistością a modelem matematycznym

Fundamenty nauki rozumianej, jako poszukiwanie prawdy dobrze ilustruje obszar nauk ścisłych, do którego zalicza się przede wszystkim matematykę i fizykę. Prawdopodobnie już Platon 380 lat przed Chrystusem umiejscawiał matematykę między abstrakcyjnymi pojęciami naszego umysłu i realnym światem fizycznym. Matematyka rozwija się jako symboliczne odbicie wszechświata. Wielu badaczy uważa, że to wszechświat narzuca ludzkości matematykę. Stąd skuteczność matematyki w różnych dziedzinach nauki, w szczególności w naukach przyrodniczych. Ta filozofia jest znana od wielu lat i pięknie opisana w książce [4], wydawanej wielokrotnie z pewnymi uzupełnieniami od roku 1941. Kolejne spostrzeżenia [8, 10, 12, 15, 21, 35] zbliżają nas już do określenia nauk inżynierijno-technicznych: matematyczna struktura rzeczywistości pozwala skutecznie projektować np. układy sterowania. Matematyka okazuje niezwykłą skuteczność w naukach przyrodniczych oraz w naukach inżynierijno-technicznych, pomimo pozornego odcinania się od badań eksperymentalnych. Jednym z motorów

napędzającym w dużym stopniu rozwój matematyki są potrzeby wynikające z zastosowań (zob. np. [26], [20]).

W teorii optymalizacji istotnym zagadnieniem jest problem istnienia rozwiązania. Jeszcze w XIX wieku problem istnienia rozwiązania był bagatelizowany i uważany za oczywisty. Stosowano tak zwaną zasadę Dirichleta (1805 – 1859; Peter Gustaw Lejeune Dirichlet, niemiecki matematyk pochodzenia francuskiego), której istotą było przyjmowanie na wiarę równoważności pewnych zjawisk fizycznych z zagadnieniami matematycznymi. Zasadę tę zaatakował Karl Weierstrass (1815 – 1897; matematyk niemiecki; Jego popiersie znajduje się na 4 piętrze IMPAM w Warszawie), analizując krytycznie pracę doktorską Bernarda Riemanna (1826 – 1866; niemiecki matematyk i fizyk), ucznia Dirichleta w Getyndze, o teorii funkcji zespolonych. Obecnie do udowodnienia istnienia ekstremum pewnych funkcjonalów stosuje się właśnie twierdzenie Weierstrassa, powstałe w wyniku krytycznej analizy pracy Riemanna.

W tym miejscu warto odwołać się do precyzyjnie zdefiniowanych pojęć stosowanych w matematyce, która zawiera liczne przemyślenia z lat poprzednich. Jednym z takich pojęć jest równoważność topologiczna, która jest wykorzystywana w następującej podstawowej hipotezie badawczej stosowanej w naukach inżyniersko-technicznych: *układ rzeczywisty i jego liniowe przybliżenie są lokalnie równoważne topologicznie*.

Nie wchodząc w szczegóły możemy powiedzieć, że dwa układy dynamiczne są równoważne topologicznie, gdy pomiędzy trajektoriami czasowymi tych układów istnieje w pewnym otoczeniu zera odwzorowanie (funkcja h) wzajemnie jednoznaczne i takie, że h oraz h^{-1} są ciągłe. Praktycznie ważnym problemem jest poszukiwanie efektywnych metod wyznaczania przekształcenia h . Poincare w pracy doktorskiej rozważał zamianę zmiennych (wielomianową), która prowadziła do przekształcenia równania nieliniowego w równanie liniowe. Równoważność topologiczna jest dobrze określona/zilustrowana w Twierdzeniu Grobmana-Hartmana (zob. np. [7, s. 13, 18], [37, s. 221], [32, s. 124], dotyczącym dwóch układów dynamicznych generowanych odpowiednimi równaniami różniczkowymi).

Rozważmy dwa systemy dynamiczne (1) i (3) generowane odpowiednimi równaniami różniczkowymi przedstawionymi poniżej. Układ (1) ma postać

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad F(0) = 0 \quad (1)$$

przy czym stan układu $x(t)$ należy do odpowiedniej przestrzeni stanów, np. R^n . W metodzie linearyzacji prawą stronę równania (1) przedstawia się w następującej postaci:

$$F(z) = Az + \phi(z), \quad \phi(0) = 0, \quad (2)$$

$$\|z\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\phi(z)\| / \|z\| \rightarrow 0$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową.

Następujący system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (3)$$

jest nazywany liniowym przybliżeniem układu nieliniowego (1). Zwykle macierz $A = F'(0)$ i często jest nazywana macierzą Jacobiego. Jeżeli rzeczywista macierz A nie posiada wartości własnych na osi urojonej, czyli gdy

$$\det[j\omega I - A] \neq 0, \quad \omega \in R, \quad j^2 = -1 \quad (4)$$

to istnieje otoczenie zera w R^n , w którym układy (1) i (3) są równoważne topologicznie (mają ten sam typ portretów fazowych; Twierdzenie Grobmana-Hartmana ([37], s. 221), ([32], s. 124)). Warto zauważyć, że jeżeli spełniony jest warunek (4), to $\det A \neq 0$.

Układ sterowany. W rzeczywistości często spotykamy się ze strukturą sterowanych układów dynamicznych, której dobrymi modelami matematycznymi są równania różniczkowe różnych typów. Dla przykładu równanie różniczkowe nieliniowe ze sterowaniem u i dodatkowo z równaniem wyjścia y (rozważane w odpowiednich przestrzeniach)

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad y(t) = g(x(t)) \quad (5)$$

(nie wchodząc w szczegóły) jest „równoważne topologicznie” układowi liniowemu o następującej postaci:

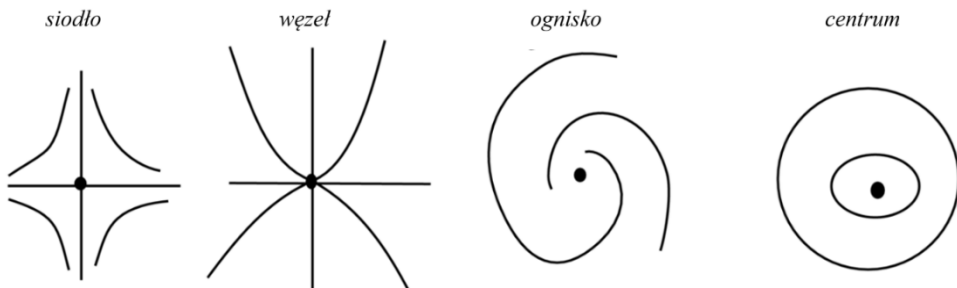
$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad x(t) \in R^n, \quad u(t) \in R^r, \quad y(t) \in R^m \quad (6)$$

Jeżeli układ (6) jest sterowalny w klasycznym sensie (para $(A; B)$ jest sterowalna) i obserwowalny (para $(C; A)$ jest obserwowalna), to do opisu układu (6) można stosować transmitancję macierzową

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B = L(s) / M(s) \quad (7)$$

w której mianownik $M(s)$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy stanu A , $L(s)$ jest prostokątną macierzą wielomianową o wymiarach $m \times r$. Jeżeli $\det A \neq 0$, to układ $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ma dokładnie jeden punkt równowagi $x = 0$.

Przykład 1. Rozważmy układ (6) przy $n = 2$. W tym przypadku typowe portrety fazowe układu (3) przy różnych wartościach własnych macierzy A zostały pokazane na Rys.1.



Rys.1. Typowe portrety fazowe układu (3) dla $n = 2$.

Portret fazowy typu centrum przy wartościach własnych $\lambda_{1,2} = \pm j$, $j^2 = -1$ nie spełnia założenia (4). W pozostałych przypadkach istnieją otoczenia punktów równowagi układu (5), w których układy (5) i (6) mają ten sam typ portretów fazowych; zob. Twierdzenie Grobmana-Hartmana ([37], s. 221), ([32], s. 124)).

3. Wyznaczanie macierzy stanu A

Powstaje pytanie: czy na podstawie odpowiednich pomiarów można wyznaczyć macierz stanu A liniowego przybliżenia (6) procesu rzeczywistego. Poniżej odpowiemy pozytywnie na to pytanie formułując proste zadanie identyfikacji.

Proste zadanie identyfikacji można sformułować w następujący sposób: znając stan układu $x(t)$ i jego pochodne po czasie w pewnej chwili czasu t , wyznaczyć macierz stanu A ([3], s. 106), ([32, s. 480). Oznaczmy przez S następującą macierz kwadratową $n \times n$ dla pewnego t :

$$S^t = [x(t) \ x^{(1)}(t) \ \dots \ x^{(n-1)}(t)], \quad x(t) \in R^n. \quad (8)$$

Pomiarowo dostępny mamy stan układu $x(t) \in R^n$ najczęściej w wybranych chwilach czasu. Pochodne $x^{(i)}(t) \in R^n$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ można wyliczyć różniczkując odpowiednie aproksymacje różniczkowalne otrzymane z dyskretnych wartości stanu $x(t) \in R^n$. Dalej oznaczmy przez v_i^T wektor wierszowy o następującej postaci:

$$\begin{aligned} v_i^T &= [x_i^{(1)} \ x_i^{(2)} \ x_i^{(3)} \ \dots \ x_i^{(n)}], \quad i = 1, 2, \dots, n \\ x(t)^T &= [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Niech $a_i \in R^n$, $i = 1, 2, \dots, n$ będą kolumnami macierzy A^T , czyli

$$A^T = [a_1, a_2 \ \dots \ a_n]. \quad (10)$$

Różniczkując $n-1$ razy równanie $\dot{x} = Ax(t)$ otrzymujemy

$$x^{(1)}(t) = Ax(t), \quad x^{(2)}(t) = Ax^{(1)}(t), \quad \dots, \quad x^{(n)}(t) = Ax^{(n-1)}(t) \quad (11)$$

przy czym $x^{(i)}(t)$ oznacza i -tą pochodną po czasie t . Przy oznaczeniach (8), (9), (10) układ równości (11) można zapisać w następującej postaci:

$$Sa_i = v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Jeżeli $\det S \neq 0$ (co zachodzi, gdy para $(A; x(t))$ jest sterowalna), to kolumny macierzy A^T (zob. równość (10)) obliczamy z następujących równości:

$$a_i = S^{-1}v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. Klasa sterowań stałowartościowych

Rozważmy stacjonarny układ liniowy skończenie wymiarowy o postaci (6). Jeżeli $u(t) = u = \text{const.}$ oraz $\det A \neq 0$, to wyjście y ustalone przyjmie wartość stałą o następującej postaci:

$$y = G(0)u, \quad (13)$$

przy czym $G(s) = C[sI - A]^{-1}B = L(s)/M(s)$ jest macierzą (zob. (7)) prostokątną o wymiarach $m \times r$ nazywaną transmitancją macierzową układu (6). Jeżeli układ (6) jest sterowalny i obserwowalny, to do opisu układu (6) można stosować transmitancję macierzową $G(s)$.

Powstaje naturalne pytanie: Jak osiągać wyznaczone cele? Prowadzi to do sformułowania prostego następującego zadania sterowania:

Zadanie sterowania. Mając dane y i $G(0)$, szukamy takiego u , żeby $y = G(0)u$. Z warunku Capelliego (zob. np. [32], s. 217) wiemy, że istnieje rozwiązanie względem u równania liniowego (13) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\text{rzęd } G(0) = \text{rzęd}[G(0) : y]. \quad (14)$$

Sterowalność układu zależy od klasy dopuszczalnych sterowań. Warunek (14) można interpretować, jako warunek sterowalności układu (6) klasą sterowań stałowartościowych. W tym sensie układ (6) jest sterowalny, gdy dla każdego stałego y istnieje stałe sterowanie u takie, że zachodzi (13).

Rozwiązanie równania (13) można przedstawić w następującej postaci:

$$u = G(0)^+ y \quad (15)$$

gdzie $G(0)^+$ jest tak zwaną macierzą pseudo-odwrotną. Jeżeli $G(0)$ jest nieosobliwą macierzą kwadratową, to $G(0)^+ = G(0)^{-1}$. Jeżeli $m \geq r = \text{rzęd} G(0)$, to $G(0)^+ = [G(0)^T G(0)]^{-1} G(0)^T$. Dodatkowo zachodzi

$$[G(0)^+]^+ = G(0), [G(0)^+]^T = [G(0)^T]^+ \text{ oraz } [c G(0)]^+ = \frac{1}{c} G(0)^+, \quad c \neq 0.$$

Można podać metodę poszukiwania rozwiązania równania (13) formułując następujące zadanie optymalizacji: szukamy u w taki sposób, by zachodziło

$$\min_u \|y - G(0)u\| \quad \text{oraz} \quad \min \|u\| \quad (16)$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą euklidesową. Okazuje się (zob. np. [32], s. 222), że istnieje dokładnie jedno rozwiązanie u zadania optymalizacji (16) i ma ono postać (15). Można podać następującą interpretację wzoru (15):

- Jeżeli spełniony jest warunek (14) istnienia rozwiązania, to otrzymane u dane wzorem (15) jest rozwiązaniem o minimalnej normie $\|u\|$ równania (13).
- Jeżeli nie zachodzi warunek istnienia (14), to otrzymane przybliżone rozwiązanie u minimalizuje tak zwane residuum $\|y - G(0)u\|$ równania (13).

5. Macierz pseudoodwrotna i rozkład SVD

Wykorzystując (zob. Rys.2) twierdzenie o faktoryzacji (zob. np. [32], s. 224, 225) macierzy prostokątnej rzędu p , można wyprowadzić wzory na macierz pseudo-odwrotną.

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \\ o & o & o & o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rys.2. Faktoryzacja macierzy prostokątnej 3×4 rzędu $p = 2$.

Macierze $[*], [o]$ kwadratowe nieosobliwe (zob. Rys.2) można różnie wybierać. W klasycznym twierdzeniu o faktoryzacji ([32], s. 224) macierze $[*], [o]$ są tak wybrane, by $d_i = 1$. Szczególnie interesujący jest tak zwany rozkład SVD (singular value

decomposition) macierzy prostokątnej (zob. np. [32], s. 225), w którym $d_i = \sigma_i$ i σ_i jest i -tą wartością osobiwą (singularną) macierzy $[O]$ (zob. Rys.2).

Szczególnie interesujący jest tak zwany rozkład SVD (singular value decomposition) macierzy prostokątnej (zob. np. [32], s. 225). Nie wchodząc w szczegóły mamy efektywne wzory na rozwiązanie u układu (15) o następującej postaci:

$$\begin{aligned} u &= G(0)^+ y, \quad \text{rzęd } G(0) = p, \\ G(0)^+ &= V \Sigma^+ U^T, \\ \Sigma^+ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{p \times p}^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{p \times p}^+ = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_p} \right), \quad (17) \\ \sigma_i &= \sqrt{\lambda_i(G(0)^T G(0))}, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0, \end{aligned}$$

gdzie σ_i jest i -tą wartością osobiwą (singularną) macierzy $G(0)$, $\lambda_i(G(0)^T G(0))$ jest wartością własną macierzy kwadratowej symetrycznej $G(0)^T G(0)$. Ortonormalne wektory własne v_i macierzy $G(0)^T G(0)$ stanowią kolumny macierzy V . Kolumny macierzy U tworzą wektory $G(0)v_i / \sigma_i$ uzupełnione ortonormalizacją Grama-Schmidta.

6. Wyznaczanie wartości osobiwych

Wartości osobiwe $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(G(0)^T G(0))}$ macierzy prostokątnej $G(0)$ można wyznaczyć wykorzystując Iloraz Rayleigha $R(x)$ i Twierdzenie Couranta-Fischera (np. [32], s. 333). Algorytm obliczania kolejnych $\lambda_i(G(0)^T G(0))$ pokazano na Rys.3.

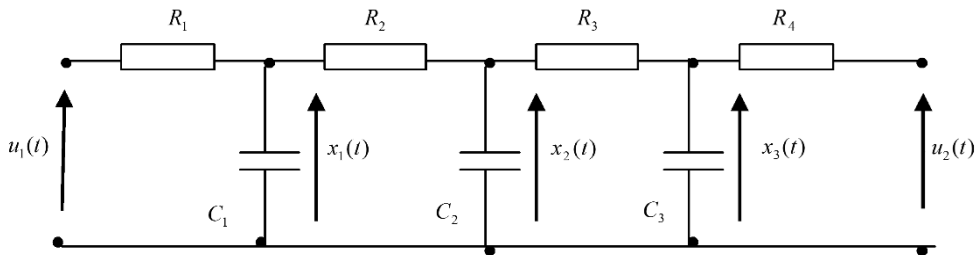
Iloraz Rayleigha - Twierdzenie Couranta - Fischera

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{x^T G(0)^T G(0) x}{x^T x}, \quad x \neq 0 \\ \lambda_i(G(0)^T G(0)) &\geq \lambda_{i+1}(G(0)^T G(0)), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max \{ R(x) : x \neq 0 \}, \\ \lambda_2 &= \min \left\{ \max \{ R(x) : x \neq 0, z_1^T x = 0 \} : z_1^T z_1 = 1 \right\} \\ \lambda_3 &= \min \left\{ \max \{ R(x) : x \neq 0, z_1^T x = 0, z_2^T x = 0 \} : z_1^T z_1 = 1, z_2^T z_2 = 1 \right\}, \\ \lambda_4 &= \dots \end{aligned}$$

Rys.3. Algorytm wyznaczania wartości własnych $\lambda_i(G(0)^T G(0))$.

Przykład 2. Rozważmy łańcuchowy (drabinkowy) obwód elektryczny RC pokazany na Rys.4. Dla uproszczenia przyjmujemy $R_i = R$, $C_i = C$ oraz $RC = 1$. Układy elektryczne tego typu można wykorzystać do modelowania odpowiednich układów o parametrach rozłożonych.



Rys.4. Drabinkowy obwód elektryczny typu RC .

Nasz układ elektryczny przedstawiony na Rys.4 można opisać równościami (6), przy czym (dodatkowo ustalmy, że wyjście $y(t)$ jest całym stanem układu $x(t)$). W równościach (6) należy w rozważanym przypadku podstawić

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Z równości (18) można zauważyć, że $\det A \neq 0$. Z równości (7) dla $s = 0$ mamy

$$G(0) = -CA^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.7500 & 0.2500 \\ 0.5000 & 0.5000 \\ 0.2500 & 0.7500 \end{bmatrix}, \quad G(0)^+ = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0.3333 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0.3333 & 1.3333 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Przy obliczaniu macierzy $G(0)^+$ wykorzystano faktoryzację (17) oraz funkcję *Matlaba* $[U, S, V] = \text{svd}(G0)$. Szczegółowe macierze występujące w równościach (17) mają następujące postacie:

$$U = \begin{bmatrix} -0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ -0.5774 & 0.0000 & -0.8165 \\ -0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.2247 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5000 \\ 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}, \quad \Sigma^+ = \begin{bmatrix} 0.8165 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 2.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Rząd macierzy $G(0)$ z równości (19) jest równy $p = 2$. Z warunku Capelliego (14) widać, że by osiągnąć zadane z góry y wektor y musi być kombinacją liniową kolumn macierzy $G(0)$, czyli (bo wtedy spełniony jest warunek istnienia rozwiązania równania (13))

$$y = c_1 \begin{bmatrix} 0.7500 \\ 0.5000 \\ 0.2500 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0.2500 \\ 0.5000 \\ 0.7500 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Dla przykładu dla

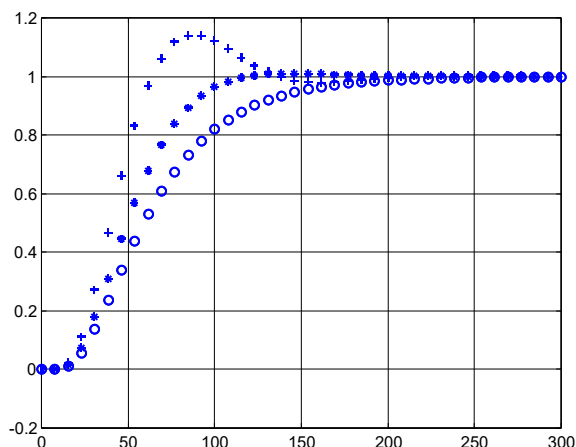
$$c_1 = c_2 = 1 \text{ mamy } y = \begin{bmatrix} 0.7500 \\ 0.5000 \\ 0.2500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2500 \\ 0.5000 \\ 0.7500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Wyjście y określone w równości (23) jest osiągnięte sterowaniem stałowartościowym (zob. (15))

$$u = G(0)^+ y = \begin{bmatrix} 1.3333 & 0.3333 & -0.6666 \\ -0.6666 & 0.3333 & 1.3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

7. Przebiegi przejściowe pomiędzy stanami ustalonymi

Przy przechodzeniu z jednego stanu ustalonego do drugiego w układzie występują przebiegi przejściowe (zob. Rys.5), które w asymptotycznie/wykładniczo stabilnym układzie regulacji zanikają do zera. Charakter stanów przejściowych jest określony wartościami własnymi rzeczywistej macierzy stanu A wymiaru $n \times n$ układu liniowego (6).



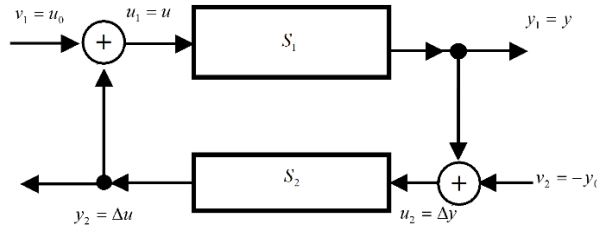
Rys.5. Przykładowe przebiegi przejściowe.

Dokładniej, przebiegi przejściowe pomiędzy odpowiednimi stanami ustalonymi, które otrzymujemy w wyniku stosowania klasy sterowań stałowartościowych (zob. Rozdział 4), są generowane następującymi funkcjami elementarnymi układu (3):

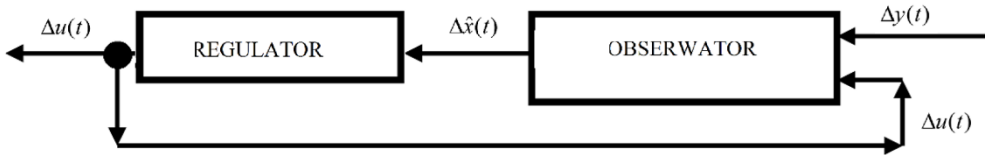
$$t^m e^{\lambda t}, \quad t^m e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad t^m e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad (25)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ lub } \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda = \alpha + j\beta, \quad \bar{\lambda} = \alpha - j\beta, \quad j^2 = -1, m < n.$$

Tłumienie trajektorii układu (3) zależy od $\text{Re } \lambda_i$. Gdy $\text{Re } \lambda_i < 0, \forall i$, to układ (3) jest wykładniczo stabilny. Częstości drgań własnych układu (3) stanowią liczby $\text{Im } \lambda_i$.



Rys.6. Schemat układu regulacji nadążnej za procesem (y_o, u_o) .



Rys.7. Struktura systemu S_2 .

Do stabilizacji procesu czasowego, często stałych w czasie wielkości, wejście-wyjście (y_o, u_o) można zastosować klasyczny dobrze znany układ regulacji nadążnej pokazany schematycznie na Rys.6. System S_1 jest opisany równościami (6). Dynamiczne sprzężenie zwrotne S_2 stanowi liniowy regulator macierzowy o wzmacnieniu K i obserwator o wzmacnieniu G (zob. Rys.7). Zwykle obserwator jest obserwatorem Luenbergera odpowiedniego rzędu, który odtwarza stan układu w sposób asymptotyczny. Parametry regulatora K i obserwatora G można wyznaczyć z dwóch odpowiednich algebraicznych równań Riccatiego (26) o następujących postaciach (zob. np. [32], s. 531 i dalej, s. 801):

$$\begin{aligned} A^T D + DA - DBR^{-1}B^T D + C^T V C &= 0, & K &= -R^{-1}B^T D \\ AL + LA^T - LC^T S^{-1}CL + BTB^T &= 0, & G &= LC^T S^{-1} \end{aligned} \quad (26)$$

Nie wchodząc w szczegóły (szczegóły zob. [32], s. 532, 539; zainteresowanych można również odesłać np. do pozycji literatury ([24], s. 147) lub ([22], s. 93), gdzie jest przeprowadzona pełna analiza), parametry wyznaczone z równań (26) określają optymalne sprzężenie zwrotne S_2 w sensie odpowiednich zagadnień liniowo-kwadratowych. Stabilizowalność i wykrywalność układu S_1 gwarantują asymptotyczną/wykładniczą stabilność systemu zamkniętego pokazanego na Rys.6.

Dla porządku przypomnimy definicje stabilizowalności i wykrywalności układu (6). Układ (6) jest stabilizowalny (para $(A; B)$ jest stabilizowalna) gdy

$$\begin{aligned} \exists K: \operatorname{Re} \lambda(A + BK) &< 0 \Leftrightarrow (A; B) \text{ stabilizowalna} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rank}[s_i I - A : B] = n, \forall s_i \in \lambda(A): \operatorname{Re} s_i \geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

przy czym symbol $\operatorname{rank}[W] = \text{rzęd}[W]$, gdzie W jest macierzą.

Z zasady dualności układ (6) jest wykrywalny (para $(C; A)$ jest wykrywalna) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(A^T; C^T) \text{ stabilizowalna} \Leftrightarrow \operatorname{rank}[s_i I - A^T : C^T] = n, \forall s_i \in \lambda(A^T): \operatorname{Re} s_i \geq 0. \quad (28)$$

8. Budowa modeli matematycznych z dyskretnych danych pomiarowych

Ograniczmy się do budowy MODELU STATYCZNEGO $x = f(u)$ z danych doświadczalnych (np. [34]). Niech (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, będą wielkościami doświadczalnymi uzyskanymi z pomiarów, spełniającymi nieznaną hipotetyczną zależność $x_i = f(u_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Zmienne x_i są uzyskiwane z czujników pomiarowych zainstalowanych na badanym obiekcie. Zmienne u_i są wybranymi wielkościami wejściowymi (sterowaniami) do rozważanego obiektu. Niech W będzie zbiorem aproksymant, czyli zbiorem funkcji aproksymujących naszą nieznaną zależność $x = f(u)$.

Zadanie aproksymacji. W zbiorze aproksymant W szukamy funkcji $g(u)$ takiej, że spełniony jest warunek w przypadku normy l^2 (metoda najmniejszych kwadratów)

$$\sum_{i=0}^N |x_i - g(u_i)|^2 = \inf_{v \in W} \left\{ \sum_{i=0}^N |x_i - v(u_i)|^2 \right\} \quad (29)$$

albo warunek w przypadku normy supremum (metoda minimaksymalizacji)

$$\max_{0 \leq i \leq N} |x_i - g(u_i)| = \inf_{v \in W} \left\{ \max_{0 \leq i \leq N} |x_i - v(u_i)| \right\} \quad (30)$$

Aproksymacja wielomianami. Jak wybierać zbiór W ? Czyli jakimi funkcjami aproksymować nieznaną funkcję $f(u)$? Warto pamiętać o twierdzeniu Weierstrassa ([14], s. 335), ([18], s. 38), ([36], s. 70), również ([32], s. 241), nazywanym również klasycznym twierdzeniem Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłych wielomianami.

Zwykle podaje się dwie konstrukcje ciągu wielomianów jednostajnie zbieżnego do danej funkcji ciągłej f w pewnym przedziale. Są to ciągi wielomianów Tonelliego i Bersteina ([18], s. 38 i 40), zob. również ([2], s. 452, 662, 1020). Warto również wspomnieć o tym, że dla każdej funkcji f ciągłej, rzeczywistej i okresowej o okresie 2π istnieje odpowiedni ciąg wielomianów trygonometrycznych rzeczywistych ([14], s. 338) zbieżny jednostajnie do f w przedziale $[0, 2\pi]$ ([36], s. 73).

Klasyczne twierdzenie Weierstrassa „podpowiada”, by zbiór aproksymant W był zbiorem odpowiednich wielomianów. Teoria jest dobrze znana, gdy zbiór aproksymant W jest zbiorem wielomianów rzeczywistych stopnia $n \leq N$ następującej postaci ([5], s. 13 i dalej):

$$W_n(u) = W_n(u; a) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n \quad (31)$$

przy czym $a = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]^T \in R^{n+1}$ jest wektorem rzeczywistym współczynników wielomianu (3) stopnia $n \leq N$, $N+1$ jest liczbą pomiarów. Współczynniki $a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n$ wielomianu (31) można wyznaczyć w różny sposób. Przy opracowywaniu danych doświadczalnych zwykle stosuje się dwie następujące metody: metodę najmniejszych kwadratów, żądając spełnienia warunku (29), albo metodę minimaksymalizacji polegającą na spełnieniu warunku (30).

Zadanie interpolacji. W zbiorze funkcji interpolujących W szukamy funkcji g takiej, że spełniony jest warunek

$$g(u_i) = x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (32)$$

Funkcja interpolująca g jest funkcją najlepiej aproksymującą (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ i to w każdej normie. Dla funkcji interpolującej g oba wskaźniki jakości aproksymacji (29) i (30) przyjmują wartość najmniejszą z możliwych, bo równą zeru.

Zadanie interpolacji jest ważne w zastosowaniach, ale ma nieskończenie wiele rozwiązań, bowiem przez punkty (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, można przeprowadzić nieskończenie wiele krzywych. Natomiast zadanie posiada jednoznaczne rozwiązanie, gdy poszukiwaną funkcją przechodzącą przez punkty (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, będzie wielomian możliwie najniższego stopnia $n \leq N$ ([16], s. 91).

Rozważa się również inną interpolację, tak zwaną interpolację Czebyszewa. W przypadku interpolacji Czebyszewa nie żąda się dokładnego przechodzenia wielomianu przez punkty (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, ale żąda się, by współczynniki wielomianu stopnia co najwyżej $n = N - 1$ były dobrane tak, aby spełniony był warunek (2). Okazuje się, że w interpolacji Czebyszewa istnieje dokładnie jeden wielomian spełniający warunek (2). Wielomian ten omija punkty (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, w taki sposób, że odległość w pionie tego wielomianu od punktów (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$ jest jednakowa (występowanie tak zwanego alternansu).

Wielomiany optymalne. Teraz zajmiemy się wyznaczaniem współczynników wielomianów optymalnych w sensie kryterium (30). Dalej założymy, że wartości argumentu naszej hipotetycznej funkcji f są uporządkowane w następujący sposób:

$$u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_N \quad (33)$$

Dla każdego wielomianu $W_n(u) = W_n(u; a) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n$ stopnia $n \leq N$ istnieje tak zwane ([5], s. 13) maksymalne odchylenie i jego wartość minimalna ρ określone w następujący sposób:

$$\max_{0 \leq k \leq N} |x_k - W_n(u_k; a)|, \quad \rho = \inf_a \max_{0 \leq k \leq N} |x_k - W_n(u_k; a)|. \quad (34)$$

Wielomian $W_n(u; a^*)$, dla którego maksymalne odchylenie osiąga wartość minimalną ([5], s. 13), czyli gdy

$$\max_{0 \leq k \leq N} |x_k - W_n(u_k; a^*)| = \rho \quad (35)$$

nazywamy wielomianem optymalnym (wielomianem najlepszego przybliżenia).

Istnieją algorytmy, które pozwalają wyznaczać wielomiany optymalne przy różnych $n \leq N$, gdzie $N + 1$ jest liczbą punktów (33), stanowiących wartości argumentu poszukiwanej zależności f . Podstawowy w różnego rodzaju zastosowaniach jest przypadek, gdy $N = n$, czyli wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego $x_k = W_n(u_k; a)$.

Wielomian optymalny $W_n(u; a^*)$, przy $n = N - 1$, jest wielomianem Czebyszewa (interpolacja Czebyszewa). Okazuje się, że jeżeli dobierzemy odpowiednio węzły interpolacji u_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, to wtedy można podać analityczny wzór określający wielomian optymalny w interpolacji Czebyszewa. Wykorzystując interpolację Czebyszewa, można konstruować wielomiany optymalne w przypadku, gdy $n < N - 1$.

Zadany kształt funkcji $x = g(u, c)$, $c \in R^p$. W zastosowaniach, np. przy opracowywaniu statystycznym danych pomiarowych, przyjmuje się zadany kształt funkcji $g(u, c)$, $c \in R^p$, uzależniając ją od p stałych parametrów c_k , $k = 1, 2, \dots, p$, przy czym

$p \leq N + 1$. W tym przypadku zadanie aproksymacji sprowadza się wtedy do wyznaczenia współczynników c_k , $k = 1, 2, \dots, p$, w taki sposób, by spełnić warunek (29) lub (30).

Różne typy sieci neuronowych i inne modele. Ostatnio, wykorzystując odpowiednie gotowe pakiety programowe, funkcję g Wpisz tutaj równanie.modeluje się za pomocą odpowiedniej wielowarstwowej sieci neuronowej z odpowiednimi wagami. Ciekawym podejściem do modelowania funkcji g jest wykorzystanie tak zwanego „lasu losowego”, którego struktura składa się z odpowiednich drzew decyzyjnych [1].

9. Porównanie metod budowy modelu i wybór najlepszej metody

Niech (u_i, x_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, N$, będą wielkościami doświadczalnymi uzyskanymi z pomiarów, spełniającymi nieznaną hipotetyczną zależność $x_i = f(u_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. Poszukiwanie aproksymacji funkcji $x = f(u)$ na podstawie danych pomiarowych można przeprowadzić na wiele sposobów metodami opisanymi powyżej. Niech $\hat{x} = \hat{f}(u)$ będzie odpowiednią aproksymacją funkcji $x = f(u)$. Funkcję $\hat{x} = \hat{f}(u)$ otrzymujemy różnymi metodami. Metody można porównywać obliczając dla każdej stosowanej metody tak zwany średni błąd kwadratowy (MSE):

$$MSE = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (x_i - \hat{x}_i)^2. \quad (36)$$

Wybierany jest algorytm wyznaczania $\hat{x} = \hat{f}(u)$ z najniższym średnim błędem kwadratowym (MSE).

10. Uwagi końcowe

Praca była częściowo przedstawiona w ramach Konferencji OKNMUT 2025 (XXI Ogólnopolska Konferencja Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych, Białystok, 11-13 września 2025 r.). Zatem kilka uwag o nauczaniu matematyki na kierunkach technicznych, zob. np. [31], których ze względu na ograniczenia czasowe nie zdążyłem przedstawić. Czego uczyć z matematyki na Uczelniach Technicznych, zob. np. [26], [32], [39]. Uwagi o zarządzaniu nauką, zob. np. [28], [29]. Matematyczna teoria sterowania zawiera w sobie uniwersalne kwanty wiedzy wykorzystywane w różnych dziedzinach nauki, w szczególności w naukach inżynierjno-technicznych.

Przy analizie procesów czasowych różnej natury powstają dwa podstawowe problemy: 1. Wyznaczyć u by uzyskać zadaną wartość y . 2. Odpowiednio zamodelować stany przejściowe przy przejściu pomiędzy dwoma zadanymi różnymi wyjściami y . W pracy zaproponowano rozwiązania powyższych problemów, wykorzystując teorię sterowania i teorię macierzy.

Skuteczność rozwiązania pierwszego problemu jest zależna od umiejętności wyznaczenia macierzy pseudo-odwrotnej. Macierz pseudo-odwrotną (17) można wyznaczyć wykorzystując metodę rozkładu macierzy prostokątnej SVD (Singular Value Decomposition). Drugi problem można sprowadzić do rozwiązywania dwóch algebraicznych równań Riccatiego typu (26). Dobrze uporządkowana teoria może być

wykorzystana do tworzenia algorytmów stosowanych w uczeniu maszynowym. Warto również zastanowić się nad przemyśleniami zawartymi w książkach ([8-13]). W zastosowaniach ważnym zagadnieniem jest budowa modeli matematycznych z dyskretnych danych pomiarowych. Problemy te zostały skrótowo omówione w rozdziałach 8 i 9.

Przedstawiony w pracy przykład 2 elektrycznego układu łańcuchowego można wykorzystać przy modelowaniu i analizie układów o parametrach rozłożonych aproksymowanych schematami skończenie wymiarowymi. W przykładzie 1 zilustrowano pojęcie równoważności topologicznej.

Bibliografia

- [1] Bakdi A., Kristensen B. N., and Stakkeland M., "Multiple instance learning with random forest for event logs analysis and predictive maintenance in ship electric propulsion system," *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 18, no. 11, pp. 7718-7728, 2022
- [2] Bronsztejn, I. N., Siemiendajew, K. A., Musiol, G. i Muhlig, H., *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN, Warszawa, 2024, [oryg. Taschenbuch der Mathematik, Verlag, 2001]
- [3] Bublik, B.H. i Kiriczenko, H.F., *Osnovy teorii uprawlenija*, Wysszaja Szkoła, Kijew, 1975
- [4] Courant R., Robbins H., *Co to jest matematyka.*, Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998
- [5] Diemianow, W.F. i Małoziemow, W.N., *Wstęp do metod minimaksymalizacji*, WNT, Warszawa, 1975 [oryg. w j. rosyjskim, Nauka, Moskwa, 1972]
- [6] Gantmacher F.R., *The theory of matrices*, Nauka, Moscow, (oryg. w j. rosyjskim), 1988
- [7] Guckenheimer J., Holmes P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. 4-ed, Springer, New York, 1993
- [8] Heller M. *Ostateczne wyjaśnienie wszechświata*. Universitas, Krakow, 2008
- [9] Heller, M., *Jak być uczonym?*, Znak, Kraków, 2009
- [10] Heller M., *Podglądanie Wszechświata*. Znak, Krakow, 2011
- [11] Heller M., *Filozofia przypadku. Kosmiczna fuga z preludium i codą*. Copernicus Center Press, Krakow, 2012
- [12] Heller M., *Granice nauki*. Copernicus Center Press. Kraków, s. 1-350, 2014
- [13] Heller M., *Sens życia i sens wszechświata*. Studia z teologii współczesnej. Copernicus Center Press. Kraków, s. 1-264, 2014
- [14] Kołodziej, W., *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, PWN, Warszawa, Biblioteka Matematyczna, t. 36, 1970
- [15] Lasota A., Mackey M.C., *Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1994
- [16] Leja, F., *Rachunek różniczkowy i całkowy ze wstępem do równań różniczkowych*, PWN, Warszawa, 1956
- [17] Lewicki A., *Zarys historii Polski*. Gebethner i Wolff. Opracował i uzupełnił Jan Friedberg, wydanie szkolne dwunaste, Warszawa, 1925
- [18] Łojasiewicz, S., *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, Biblioteka Matematyczna, tom 46, 1976
- [19] Maciąg K. i Świtalski M. Red., *Sztuczna inteligencja w teorii i praktyce – szanse, wyzwania, etyka*. Wydawnictwo Naukowe TYGIEL sp. z o.o. Lublin, 2025
- [20] Mitkowski P., *Double Composite Bridge Girders Under Thermal Loads*. ECCM 2010, IV European Conference on Computational Mechanics, Palais des Congres, Paris, France, 2010
- [21] Mitkowski P.J., *Mathematical Structures of Ergodicity and Chaos in Population Dynamics*. Studies in Systems, Decision and Control 312, Springer 2020, ss. XII, 97, 2020
- [22] Mitkowski W., *Stabilizacja systemów dynamicznych*. WNT, Warszawa, s. 1-272, 299, 1991

- [23] Mitkowski W., 75 lat AGH w Krakowie. Odczyt w Towarzystwie Miłośników Historii i Zabytków Krakowa w dniu 7.06.94. Tekst publikowany: 75 lat Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. „Rocznik Krakowski”, t. LXI, 1995, s. 117-124. Zob. również „Biuletyn Informacyjny Pracowników AGH”, Nr 28, 25.04.1996, s. 28-30 oraz Nr 29, 29.05.1996, s. 21-23, 1995
- [24] Mitkowski W., Stabilizacja systemów dynamicznych, Wydawnictwa AGH, Kraków, 1996
- [25] Mitkowski W., Metody stabilizacji (Stabilisation methods). XV Krajowa Konferencja Automatyki, Warszawa, 27-30.06.2005, KaiR PAN, IBS PAN oraz również PW, PIAP, PolSPAiR, Red. Z. Bubnicki, R. Kulikowski i J. Kacprzyk, tom 1, s. 169-178, 005
- [26] Mitkowski W., Równania macierzowe i ich zastosowania. AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne, Kraków, s. 1-204, 2012
- [27] Mitkowski W., Wpływ przeszłości na teraźniejszość (Influence of the past on the present). Materiały Konferencji zorganizowanej z okazji 90-lecia AGH, Kraków, 28-29.05.2009, s. 33-36, 2009
- [28] Mitkowski W., Czy zarządzanie nauką jest możliwe? (Is the science management possible?). Pierwsza Międzynarodowa Konferencja „Zarządzanie Nauką”, KUL i LSB, Lublin, listopad 2009, t. 1, red. P. Kawalec i P. Lipski, Wyd. LSB, s. 85-93, 2009
- [29] Mitkowski W., Uwagi o kierunkach zmian szkolnictwa wyższego w Polsce. I Konferencja Akademickiego Klubu Obywatelskiego im. Prezydenta Lecha Kaczyńskiego w Krakowie. Nauka Polska Prawda jest najważniejsza. Rozważania o stanie szkolnictwa uniwersyteckiego w Polsce., s. 65-76, 2012
- [30] Mitkowski W., Fundamenty i granice możliwości nauk technicznych. Prace Komisji Nauk Technicznych PAU, t. VI, 2013, 15-26, 2013
- [31] Mitkowski W., Matematyka na Wydziale Elektrycznym AGH oraz uwagi o Szkolnictwie Wyższym. „Maszyny Elektryczne – Zeszyty Problemowe”, Nr 4/2018 (120), s. 155-162, 2018
- [32] Mitkowski W., Zarys teorii sterowania. Wydawnictwa AGH, Kraków, KU0688, s. 1-899, 2019
- [33] Mitkowski W., Wydział Elektryczny AGH. Krótka historia i fundamenty matematyczne, Wydawnictwa AGH, Kraków 2023, s. 1-175, 2023
- [34] Mitkowski W., Budowa modeli matematycznych z dyskretnych danych pomiarowych. Mat. Konf. ASMOR 24, AMW, Gdynia, s. 72-79, 2024
- [35] Mitkowski W., Fundamenty, ograniczenia i granice możliwości nauk inżyniersko-technicznych. Śląskie Wiadomości Elektryczne, Rok XXVI, Nr 2'2025 (158), s.13-20, 2025
- [36] Musielak, J., Wstęp do analizy funkcjonalnej, PWN, Warszawa, 1976
- [37] Ombach, J., Wykłady z równań różniczkowych wspomagane komputerowo – Maple, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków, 1999
- [38] Ratzinger J., Czas przemian w Europie. Miejsce Kościoła i Świata. Wydawnictwo M. Kraków, 2025
- [39] Turowicz A., Teoria Macierzy. Wykłady na Studium Doktoranckim w zakresie automatyki i elektrotechniki w roku 1970/71 spisał Wojciech Mitkowski, Wydawnictwo AGH, Kraków, s. 1-244, 2005

Przykłady wykorzystania programów AutoCAD i Wolfram Alpha w nauczaniu matematyki

Edwin Koźniewski

Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Nauk o Środowisku,
e-mail: e.kozniewski@pb.edu.pl

Streszczenie

W rozdziale tym podano przykłady zastosowania ogólnie dostępnych, wybranych narzędzi komputerowych w nauczaniu matematyki na studiach technicznych. Skoncentrowano się na wykorzystaniu dwóch programów: programu Wolfram Alpha jako usługi obliczeniowej i bazy wiedzy, który operuje w chmurze i potrafi przetwarzać zapytania w języku naturalnym, w tym proponując przekształcenia symboliczne wyrażeń algebraicznych, konkretne analizy i wizualizacje; oprogramowania AutoCAD, które umożliwia precyzyjne tworzenie rysunków, projektów i modeli 2D oraz 3D i ogólnie tworzenie i edycję dokumentacji technicznej w dziedzinach takich jak architektura, inżynieria i budownictwo.

Słowa kluczowe: macierz, współrzędne jednorodne, hiperboloida jednopowłokowa, AutoCAD, zagadnienie brzegowe, Wolfram Alpha.

1. Wstęp

Nauczanie matematyki (przedmiotu stanowiącego podstawowy prerekwizyt na uczelni technicznej) stawia przed nauczycielami wiele pytań. Oto niektóre z nich. Które obszary wiedzy matematycznej należy eksponować i w jakim zakresie? Jak wprowadzać nowe pojęcia: od przykładu do teorii, czy przykład ma być ilustracją wprowadzanych a priori faktów? Z jakich pomocy korzystać? W szczególności jak wykorzystać wiedzę i narzędzia dostępne w przestrzeni wirtualnej?

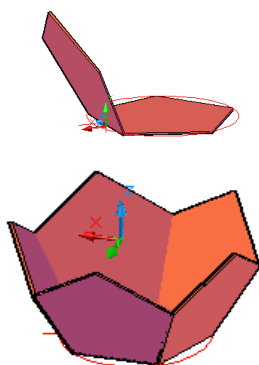
Celem artykułu jest zachęta nauczyciela i studentów do poszukiwania w innych przedmiotach (proponowanej w ramach wykładu z matematyki wiedzy akademickiej) obszarów nawiązujących do matematyki lub ilustrujących ją. Każda okazja tworząca skojarzenia faktów z różnych dziedzin, a następnie wyabstrahowanie ogólnych pojęć jest niezmiernie ważna w kształceniu umysłu przyszłego inżyniera. Stefan Banach mawiał o matematykach: „Dobry matematyk potrafi dostrzegać fakty, matematyk wybitny – analogie między faktami, zaś matematyk genialny – analogie między analogiami” [1]. Rzecz w tym, by nie przegapić żadnej okazji do zauważenia powiązań wykładanego materiału z wiedzą z innych obszarów, np. z przyrody, z ekonomii, ... i ogólnie z praktyki poznawczej człowieka.

W niniejszym opracowaniu przedstawiamy trzy przykłady. Pierwszy przykład dotyczy ilustracji wykorzystania algebry macierzy w grafice komputerowej i przy okazji nawiązania do pojęć geometrii rzutowej. W drugim pokazuje się niekonwencjonalne wykorzystanie programu AutoCAD (wersji edukacyjnej dostępnej dla studentów i nauczycieli) do

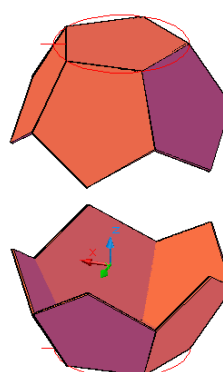
rozwiązania zadania dotyczącego hiperboloidy jednopowłokowej. Trzeci przykład – to zastosowanie programu o otwartym dostępie w wykonywaniu żmudnych przekształceń symbolicznych w rozwiązaniu zagadnienia brzegowego, czyli w jakimś sensie „kontrolowane” wykorzystanie sztucznej inteligencji (dokładniej: computational intelligence), gdzie rozwiązujący świadomie korzysta z dobrodziejstw dostępnego oprogramowania.

2. Przykłady mnożenia macierzy w poleceniach AutoCAD-a

Algebra macierzy, czy ogólniej algebra i geometria liniowa jest istotnym elementem programu matematyki na studiach technicznych. Na wielu kierunkach stanowi oddzielny przedmiot nauczania. Na pierwszym roku, a niekiedy nawet już na pierwszym semestrze student wykorzystuje, w ramach programu AutoCAD, polecenia będące implementacją przekształceń geometrycznych takich jak przesunięcie, obrót, symetria osiowa, jednokładność. Przekształcenia te można zrealizować (numerycznie) posługując się mnożeniem macierzy. Przy okazji, w celu uzyskania liniowości przesunięcia, dokonuje się interesującego zabiegu przejścia na współrzędne jednorodne. Można to zrobić na dwa sposoby. Pierwszy to potraktowanie punktów (x_1, x_2) przestrzeni R^2 jako punkty $(x_1, x_2, 1)$ płaszczyzny $x_3 = 1$ w przestrzeni R^3 (i odpowiednio punktów (x_1, x_2, x_3) przestrzeni R^3 jako punkty $(x_1, x_2, x_3, 1)$ hiperpłaszczyzny $x_4 = 1$ w przestrzeni R^4) [2]. Drugi sposób, to zanurzenie przestrzeni euklidesowej R^2 (R^3) w przestrzeni rzutowej P^2 (P^3). Krótko, zapisujemy to za pomocą schematu:



Rys. 1. Obrót dookoła prostej, modelowanie dwunastościanu w środowisku AutoCAD-a.
Źródło: opracowanie własne na podstawie [3]



Rys. 2. Odbicie symetryczne, obrót dookoła osi i przesunięcie, modelowanie dwunastościanu w środowisku AutoCAD-a (cd.).
Źródło: opracowanie własne na podstawie [3]

$$(x, y, z) \in R^3 \xrightarrow{x=\frac{x_1}{x_4}, y=\frac{x_2}{x_4}, z=\frac{x_3}{x_4}, x_4=1} (x_1, x_2, x_3, x_4) (= (x, y, z, 1)) \in R^4. \quad (1)$$

Wówczas równania opisujące przesunięcie

$$x' = x + t_x, y' = y + t_y, z' = z + t_z \quad (2)$$

zapisujemy w postaci macierzowej

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}, \quad (2m)$$

równania opisujące obrót dookoła osi OZ

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi, z' = z \quad (3)$$

zapisujemy w postaci macierzowej

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3m)$$

oraz równania opisujące skalowanie (dla $s = s_x = s_y = s_z$ jest to jednokładność względem punktu (0,0,0) o skali s)

$$x' = s_x x, y' = s_y y, z' = s_z z \quad (4)$$

zapisujemy w postaci macierzowej

$$[x', y', z', 1] = [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4m)$$

Zatem, skalowanie względem dowolnego punktu (x_0, y_0, z_0) może być zapisane w postaci iloczynu macierzy

$$\begin{aligned} [x', y', z', 1] &= \\ &= [x, y, z, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & -z_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5m)$$

Przykłady (2m), (3m), (4m) mogą (jako ćwiczenie na zapis macierzowy przekształceń) być uzupełnione o obroty względem pozostałych osi układu, symetrie płaszczyznowe względem płaszczyzn układu współrzędnych, symetrie osiowe, następnie (jako ćwiczenie na mnożenie macierzy) wzorem (5m) mogą być zapisane wszystkie przekształcenia implementowane z środowiska AutoCAD-a.

3. Parametry hiperboloidy obrotowej w AutoCAD-zie

Interesującym przykładem zastosowania powierzchni stopnia drugiego w technice jest hiperboloida obrotowa (Rys. 3-5), którą otrzymujemy jako efekt obrotu prostej wokół innej prostej, gdy obie są skośne (Rys. 6, 7). Podstawowymi parametrami identyfikującymi hiperboloide są promienie trzech okręgów (dolny, górny, szyjny) i ich położenie względem siebie. Mając dane te dwie proste (Rys. 7) potrafimy znaleźć promienie i położenie tych okręgów. Przy czym, głównym zadaniem jest wyznaczenie położenia okręgu szyjnego (zwężenia) hiperboloidy. Można to rozwiązać dwoma sposobami. Pokażemy to na przykładzie o danych z Rys. 7c.



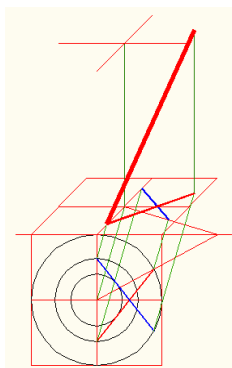
Rys. 3. Wieża ciśnień w Ciechanowie, obecnie park nauki.
Fot. B. Koźniewski



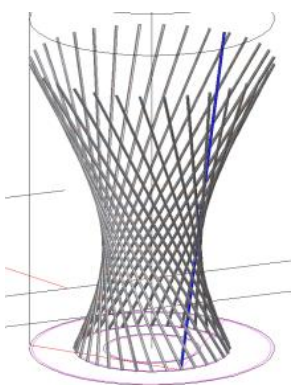
Rys. 4. Wieża widokowa „Kaszubskie Oko” w Gnieźnie.
Fot. W. Reglińska

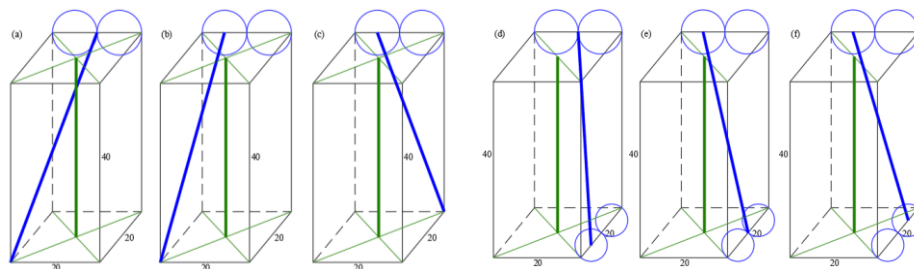


Rys. 5. Budowa chłodni kominowej w elektrowni Jaworzno III.
Źródło: [4]



Rys. 6. Modelowanie wieży ciśnień w Ciechanowie w środowisku AutoCAD-a.
Źródło: [5]





Rys. 7. Założenia do konstrukcji hiperboloidy w środowisku AutoCAD-a poprzez obrót prostej dookoła innej prostej jako osi.
Źródło: opracowanie własne

Rozwiązanie algebraiczne (przykład c):

Po odpowiednim przyjęciu układu współrzędnych mamy: $A = (-10, 10, 0)$, $B = (-10, -5, 40)$. Znajdujemy wektor kierunkowy $\overrightarrow{AB} = [0, -15, 40]$ prostej AB oraz jej równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = -10 \\ y = 10 - 15t \\ z = 40t \end{cases} \quad (6)$$

Następnie zapisujemy równania powierzchni obrotowej (ogólnie: $x^2 + y^2 = x(t)^2 + y(t)^2$, $z = z(t)$) (por. [3]) w postaci

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 + 100 - 300t + 225t^2 \\ z = 40t \end{cases} \quad (7)$$

Rozwiązanie polega na przekształceniu otrzymanych równań do postaci

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1. \quad (8)$$

Równania (6) przekształcamy do postaci

$$x^2 + y^2 = 100 + 100 - 300t + 225t^2,$$

$$z = 40t \rightarrow t = \frac{z}{40}$$

i dalej przekształcamy odpowiednio zapisując część wielomianu zawierającą zmienną z w postaci kwadratu sumy:

$$x^2 + y^2 = 200 - \frac{15z}{2} + \left(\frac{15}{40}\right)^2 z^2 \leftrightarrow x^2 + y^2 = 200 - \frac{15z}{2} + \left(\frac{3}{8}\right)^2 z^2,$$

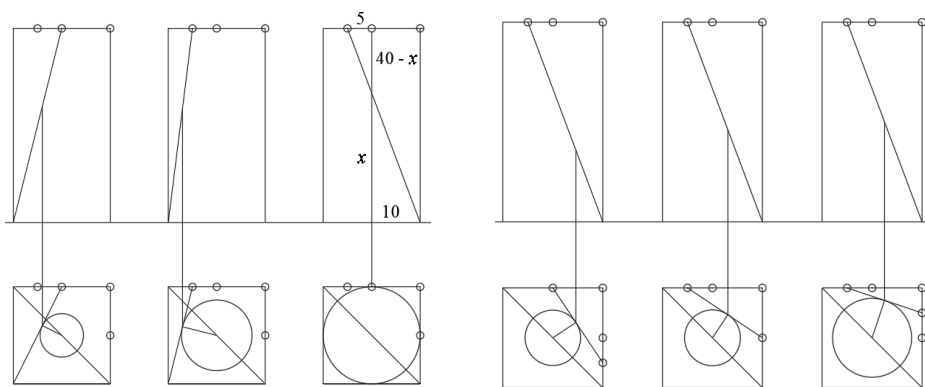
$$x^2 + y^2 = 200 - \frac{15z}{2} + \left(\frac{3}{8}z\right)^2,$$

$$x^2 + y^2 = 200 - 2p \frac{3}{8}z + \left(\frac{3}{8}z\right)^2 + p^2 - p^2, \quad -2p \frac{3}{8}z = -\frac{15z}{2} \rightarrow p = 10$$

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 200 - 2p \frac{3}{8} z + \left(\frac{3}{8} z\right)^2 + 100 - 100 \leftrightarrow x^2 + y^2 = \\
&= \underbrace{\left(\frac{3}{8} z\right)^2 - 2p \frac{3}{8} z + 10^2}_{\left(\frac{3}{8} z - 10\right)^2} + 100, \\
x^2 + y^2 &= \left(\frac{3}{8} z - 10\right)^2 + 100 \leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{3}{8} \left(z - \frac{80}{3}\right)\right)^2 + 100 \leftrightarrow x^2 + y^2 = \\
&= \frac{9}{64} \left(z - \frac{80}{3}\right)^2 + 10^2 \leftrightarrow \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{10^2} - \frac{\left(z - \frac{80}{3}\right)^2}{\left(\frac{80}{3}\right)^2} = 1 \rightarrow z_0 = \frac{80}{3}.
\end{aligned}$$

Wartość $z_0 = \frac{80}{3}$ wskazuje na odległość (wysokość) okręgu zwężenia względem położenia dolnego okręgu.

Rozwiązanie geometryczne (w środowisku AutoCAD-a):



Rys. 8. Założenia z rysunku 7 w postaci rzutów, zrealizowane w środowisku AutoCAD-a.
Źródło: opracowanie własne

Rozwiązanie polega na konstruowaniu 2D w rzutach Monge'a w środowisku AutoCAD-a. Dwie wyjściowe proste przedstawia się za pomocą dwóch rzutów prostokątnych (widok z góry i z przodu). Znajduje się okrąg styczny do rzutu poziomego prostej (widok z góry). Punkt styczności odnosi się do rzutu pionowego (widok z przodu). Odległość zmierzona (precyzyjnie) w AutoCAD-zie jest szukaną wartością z_0 . Podobnie mierzymy promień okręgu dolnego i górnego, które łatwo narysować, biorąc pod uwagę rzut poziomy obu punktów.

4. Rozwiązanie zagadnienia brzegowego ze wspomaganie Wolfram Alpha

Skorzystanie z ogólnodostępnego środowiska Wolfram Alpha zilustrujemy na przykładzie zagadnienia wymiany masy i ciepła (jest to rozwiązanie zagadnienia brzegowego związanego z równaniem Laplace'a) [5].

Wyznamy stacjonarne pole wilgotnoŝci $w(x,y)$ w cieie porowatym o ksztaicie nieskończenie długiego graniastosłupa o przekroju kwadratowym, gdy dana jest stała w czasie wilgotnoŝć ŝcian bocznych.

Funkcja $w(x,y)$ spełnia równanie Laplace'a w obszarze $Q = (0,a) \times (0,a)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (9)$$

oraz warunki brzegowe

$$w(0,y) = 0, \quad w(a,y) = \frac{w_0}{a} y, \quad \text{dla } y \in (0,a), \quad (10)$$

$$w(x,0) = 0, \quad w(x,a) = \frac{w_0}{a} x, \quad \text{dla } x \in (0,a), \quad (11)$$

gdzie $w_0 > 0$. Dla funkcjonału o następującej postaci

$$J[w] = \int_0^a \int_0^a \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (12)$$

równanie (9) jest warunkiem koniecznym optymalnoŝci. Rozwiązując sformułowane zagadnienie brzegowe metodą Ritza dokonujemy aproksymacji funkcji wielomianem postaci

$$w_{MN}(x,y) = \varphi_0(x,y) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \varphi_{mn}(x,y). \quad (13)$$

Funkcja $\varphi_0(x,y)$ musi spełniać warunki brzegowe (10) i (11), zaś $\varphi_{mn}(x,y)$ spełnia zerowe warunki brzegowe. Przyjmujemy

$$\varphi_0(x,y) = \frac{w_0}{a^2} xy, \quad (14)$$

$$\varphi_{mn}(x,y) = x^m y^n (x-a)(y-a), \quad (15)$$

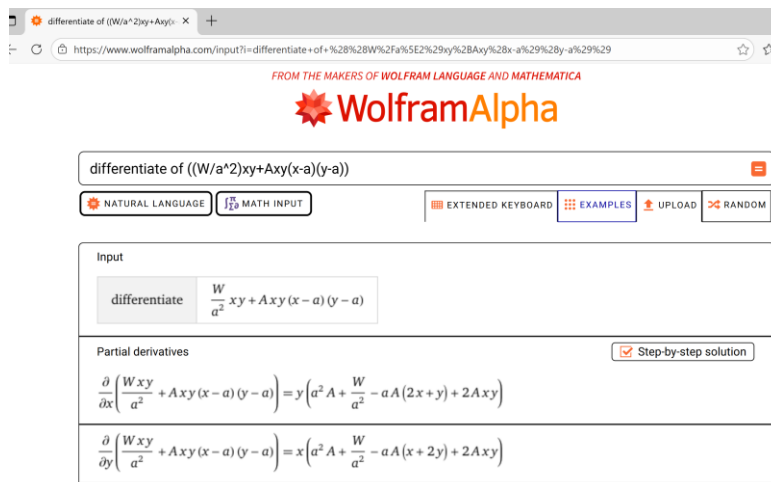
zaŝ współczynniki A_{nm} dobieramy tak aby funkcjonał

$$J[w_{MN}] = \int_0^a \int_0^a \left[\left(\frac{\partial w_{MN}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{MN}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (16)$$

osiagał minimum. W dalszych obliczeniach ograniczamy się do rozwiązania (13) w postaci ($M=1, N=1$)

$$w_{11}(x,y) = \frac{w_0}{a^2} xy + A_{11} xy(x-a)(y-a), \quad (17)$$

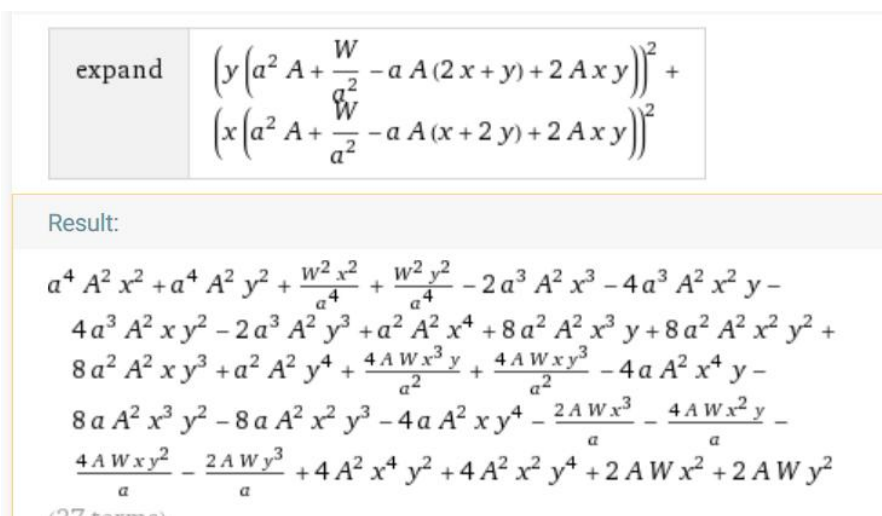
a więc do wyznaczenia (jedynego) współczynnika A_{11} . Nawet przy „skapej” precyzji ($M=1, N=1$) mamy do czynienia z rozwiniętym wielomianem, wymagającym żmudnych przekształceń. Możemy tu właŝnie wykorzystać program Wolfram Alpha, najpierw obliczając pochodne cząstkowe (Rys. 9).



Rys. 9. Obliczenie pochodnych cząstkowych.

Źródło: [5]

Dalej, w celu podniesienia do kwadratu, stajemy przed koniecznością podniesienia do kwadratu wyrażeń postaci $(p + q + r + s + t)$. Tę czynność można z powodzeniem „zlecić” programowi Wolfram Alpha (Rys. 10). Obliczone pochodne cząstkowe podnosimy do kwadratu, sumujemy i rozwijamy (Rys. 10).



Rys. 10. Rozwinięcie kwadratów pochodnych cząstkowych.

Źródło: [5]

W wyniku obliczenia całki (16) dla w_{11} otrzymamy funkcję F zmiennej A_{11} postaci:

$$J[w_{11}] = F(A_{11}) = B + CA_{11}^2. \quad (18)$$

Funkcja ta osiąga ekstremum dla $A_{11} = 0$. Zatem $w_{11}(x, y) = \frac{w_0}{a^2}xy$ jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego. Stąd funkcja $w(x, y) = \frac{w_0}{a^2}xy$ opisuje stacjonarne pole wilgotności.

5. Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono trzy przykłady odwołania się, w rozwiązywaniu zadań sformułowanych na zajęciach z matematyki, do innych obszarów wiedzy. Inne przykłady można znaleźć w monografii [5]. Zdaniem autora, wszystkie te przykłady mogą zainspirować nas do poszukiwania innych, może nawet bardziej spektakularnych przykładów uświadamiających studentów o fundamentalnym znaczeniu matematyki w zdobywaniu wiedzy inżynierskiej.

Bibliografia

- [1] <http://matematyka.wroc.pl/book/o-matematykach> [dostęp: 15-08-2025]
- [2] Jankowski M., Elementy grafiki komputerowej, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1990
- [3] Koźniewski E., Monge Method in Creating Regular Polyhedrons, The Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics, 16, 2014
- [4] <https://uniserv.pl/oferta/chlodnie-kominowe/> [dostęp: 15-08-2025]
- [5] Koźniewski E., Tereszkievicz A., Matematyka w przykładach z budownictwa i architektury, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, 2023

Wzorce promptów AI w edukacji na przykładzie wybranych zajęć z matematyki wyższej

Marzena Filipowicz-Chomko ¹, Ewa Girejko ¹ Dorota Mozyrska ¹,

Nikos Pappas ²

¹ Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki, Białystok, Polska

e-mail: m.filipowicz@pb.edu.pl, e.girejko@pb.edu.pl, d.mozyrska@pb.edu.pl

² Technical University of Crete, School of Electrical and Computer Engineering,

Chania, Grecja,

e-mail: pappas@tuc.gr

Streszczenie

W artykule przedstawiono wybrane *wzorce promptów* (prompt patterns), wykorzystywane w dydaktyce matematyki wyższej z zastosowaniem modeli językowych sztucznej inteligencji. Szczególną uwagę poświęcono wzorcom wspierającym budowanie wiedzy, ćwiczenie umiejętności obliczeniowych oraz rozwój refleksji metakognitywnej studentów. Praca wpisuje się w badania realizowane w ramach międzynarodowego projektu MAESTRO-AI, którego celem jest opracowanie i wdrożenie innowacyjnych metod kształcenia w zakresie matematyki i programowania przy wykorzystaniu narzędzi sztucznej inteligencji. W części empirycznej pracy omówiono wyniki zajęć eksperymentalnych oraz refleksje studentów wynikające z pracy z przygotowanymi modelami dydaktycznymi.

Słowa kluczowe: sztuczna inteligencja w edukacji, sztuczna inteligencja w dydaktyce, dydaktyka matematyki, edukacja akademicka, projekt Maestro-AI.

1. Wstęp

Dynamiczny rozwój technologii sztucznej inteligencji (AI) w ostatnich latach znacząco wpływa na sposób, w jaki nauczana i przyswajana jest matematyka w szkolnictwie wyższym. Modele językowe nowej generacji, takie jak ChatGPT czy Google Gemini, coraz częściej wykorzystywane są zarówno przez studentów, jak i nauczycieli akademickich jako wsparcie w rozwiązywaniu problemów, wyjaśnianiu pojęć czy generowaniu materiałów dydaktycznych [1, 2]. Autorzy w pracy [2] podkreślają, iż matematyka przyszłości może wymagać umiejętności pracy współdzielonej z AI, interpretacji wyników generowanych automatycznie, a także głębszego zrozumienia narzędzi formalizacji. Jak pokazują badania przeprowadzone wśród studentów kierunków technicznych w Polsce, narzędzia AI zyskują coraz większą popularność – ponad jedna trzecia studentów pierwszego roku deklaruje ich systematyczne użycie w procesie uczenia się, a ChatGPT stanowi zdecydowanie najczęściej wybierane narzędzie [1].

Jednocześnie pojawia się szereg wyzwań związanych z krytycznym podejściem do treści generowanych przez AI. Wyniki badań wskazują, że studenci często oceniają odpowiedzi chatbotów wyżej niż rozwiązania prezentowane przez nauczycieli, nawet jeśli

zawierają one błędy merytoryczne [1]. Może to prowadzić do niebezpieczeństwa nadmiernego zaufania wobec technologii i osłabienia kompetencji analitycznych, które w naukach ścisłych są fundamentem rozwoju. Z tego względu istotne staje się wypracowanie metod dydaktycznych, które pozwolą nie tylko efektywnie korzystać z AI, ale także rozwijać zdolność do weryfikacji, refleksji i krytycznego myślenia.

Jednym z proponowanych rozwiązań są *wzorce promptów* (Prompt Patterns), tzn. zestawy sprawdzonych strategii formułowania pytań i poleceń dla systemów AI, które pozwalają na bardziej świadome i celowe wykorzystanie ich potencjału w edukacji [3]. Wyróżnia się dwa główne poziomy takich wzorców:

- 1) ogólne wzorce inżynierii promptów, np. Zero-Shot (pytanie bez kontekstu), Few-Shot (pytanie z przykładami), Chain of Thought (ujawnianie kroków rozumowania) czy Persona-Based (AI odgrywa określoną rolę, np. nauczyciela lub ucznia);
- 2) wzorce edukacyjne, dostosowane do potrzeb dydaktyki, np. Socratic Reversal (uczeń uczy AI), Feynman Prompt (tłumaczenie trudnych pojęć prostym językiem), Show-Then-Do (AI pokazuje przykład, a następnie student wykonuje zadanie), Error Injection (wprowadzenie celowych błędów do analizy przez ucznia) czy Confidence Check (refleksja nad poziomem pewności własnych odpowiedzi).

W kontekście dydaktyki matematyki wyższej wzorce te otwierają nowe możliwości. Mogą być wykorzystywane zarówno do wspierania budowania wiedzy teoretycznej (np. poprzez porównywanie definicji i metod), jak i do rozwijania umiejętności praktycznych (np. rozwiązywania równań, analizy błędów krok po kroku, tworzenia quizów adaptacyjnych). Szczególnie istotne stają się w przypadku zajęć z matematyki dla studentów kierunków technicznych, gdzie łączenie zadań rachunkowych z rozumieniem teoretycznym ma kluczowe znaczenie [1, 2].

Celem niniejszej pracy jest analiza wybranych wzorców promptów oraz wskazanie ich potencjalnych zastosowań w dydaktyce matematyki wyższej. Punktem odniesienia są zarówno wyniki badań empirycznych nad wykorzystaniem chatbotów w edukacji matematycznej [1,4], jak i koncepcje teoretyczne opisujące wzorce interakcji z AI [3,5,6,7]. Przyjęta perspektywa zakłada, że sztuczna inteligencja – właściwie stosowana – nie powinna zastępować tradycyjnych metod kształcenia, lecz wspierać je poprzez stymulowanie aktywności studentów, rozwijanie krytycznego myślenia i umożliwienie bardziej spersonalizowanego procesu uczenia się.

Przedstawione badania realizowane są w ramach międzynarodowego projektu MAESTRO-AI – Math and Programming Education with Smart Teaching and Robust Outreach using AI at Universities. Projekt ten, finansowany ze środków programu Erasmus+ (Akcja 2 – sektor szkolnictwo wyższe, Partnerstwa na rzecz współpracy), obejmuje okres od września 2024 r. do stycznia 2027 r. i jest koordynowany przez Politechnikę Białostocką. W skład konsorcjum wchodzi ponadto: Technical University of Crete (Grecja), West University of Timișoara (Rumunia) oraz Instituto Politécnico de Viseu (Portugalia). Głównym celem projektu jest opracowanie i wdrożenie innowacyjnych metod nauczania matematyki i programowania z wykorzystaniem narzędzi sztucznej inteligencji.

W ramach przedsięwzięcia przeprowadzono m.in. eksperymentalne zajęcia dydaktyczne na Politechnice Białostockiej, w których studenci pierwszego roku kierunków matematyka stosowana oraz informatyka, korzystali z narzędzi takich jak ChatGPT czy Google Gemini podczas zajęć z algebry liniowej i analizy matematycznej.

Stosowano podejście oparte na storytellingu z ChatGPT, polegające na wprowadzaniu narracji w wyjaśnianiu złożonych zagadnień (np. liczb zespolonych, zbieżności szeregów liczbowych). Wyniki ankiet pokazały, że część studentów preferuje klasyczny model nauczania, obawiając się utraty kontroli nad treściami generowanymi przez sztuczną inteligencję (AI). Z kolei studenci kierunków informatycznych częściej deklarowali gotowość do pracy z narzędziami takimi jak ChatGPT czy Copilot, choć bywało, że bezrefleksyjnie akceptowali fragmenty kodu wygenerowane przez AI. Ważną częścią projektu są również działania wspierające nauczycieli akademickich, którzy – zgodnie z założeniami MAESTRO-AI – powinni odgrywać rolę mentorów i doradców, a nie być zastępowani przez sztuczną inteligencję.

Istotnym wnioskiem z dotychczasowych doświadczeń jest to, że wstępne eksperymenty polegające na bezpośrednim uczeniu z pomocą chatbota, bez zastosowania ustrukturyzowanych wzorców promptów, nie przyniosły oczekiwanych rezultatów. Podkreśla to konieczność projektowania świadomych strategii interakcji człowiek–AI, które pozwolą nie tylko lepiej wykorzystać potencjał technologii, lecz także uchronią studentów przed ryzykiem bezrefleksyjnego przyjmowania treści.

2. Ogólne wzorce promptów

W celu przygotowania dedykowanych modeli lekcji został przygotowany dokument 'Prompt Patterns AI in Education', który opisuje różne strategie formułowania promptów (czyli poleceń, pytań lub instrukcji), które umożliwiają skuteczniejsze korzystanie z systemów sztucznej inteligencji w edukacji. Dokument ten zawiera zarówno ogólne wzorce interakcji z AI, jak i wzorce zorientowane *stricte* na nauczanie i uczenie się. Stosowanie przedstawionych metod pozwala nie tylko uzyskać trafniejsze odpowiedzi, ale także wspiera aktywne, refleksyjne i krytyczne podejście do wiedzy. Wczytanie wspomnianego dokumentu i scenariuszy kolejnych zajęć pozwala na stworzenie dedykowanego modelu.

Ogólne wzorce interakcji z AI to uniwersalne strategie, które można stosować w różnych kontekstach. Nie odnoszą się one bezpośrednio do dydaktyki, lecz pokazują, w jaki sposób kierować modelem AI, aby uzyskać odpowiedzi bardziej spójne, precyzyjne i dopasowane do potrzeb użytkownika. Do najważniejszych należą:

1. Zero-Shot – AI odpowiada bez wcześniejszych przykładów; strategia ta testuje ogólną wiedzę i intuicję modelu.
2. Few-Shot – AI otrzymuje kilka przykładów, co pozwala lepiej dopasować styl, strukturę oraz kontekst odpowiedzi.
3. Chain of Thought – AI ujawnia kroki swojego rozumowania, a nie tylko wynik końcowy, co sprzyja przejrzystości myślenia.
4. Persona-Based – AI przyjmuje określoną rolę, np. nauczyciela, ucznia, postaci historycznej czy trenera, co wpływa na styl i ton wypowiedzi.
5. Constraint-Based – odpowiedzi są ograniczone formą np. listą punktów, długością lub strukturą akapitu.
6. Negative Prompting – użytkownik wskazuje, czego AI ma unikać, np. żargonu technicznego lub niepotrzebnych dygresji.
7. Data-Driven – AI analizuje podane dane, liczby, tabele lub fragmenty kodu, aby opracować oparte na nich wnioski.

8. Game-Play – interakcja ma formę gry, quizu, zagadki, wyzwania, co zwiększa zaangażowanie uczestnika.
9. Template – odpowiedź jest tworzona zgodnie z góry ustalonym szablonem, co zapewnia spójność formy.
10. Cognitive Verifier – AI nie tylko udziela odpowiedzi, lecz także sprawdza poprawność rozwiązania lub wnioskowania.
11. Adaptive Quiz – model dynamicznie dopasowuje poziomu trudności pytań do wiedzy i postępów ucznia.

2.1. Wzorce edukacyjne

Wzorce edukacyjne można rozumieć jako adaptacje ogólnych metod nauczania, świadomie dopasowane do określonych celów dydaktycznych. Stanowią one powtarzalne schematy pracy z uczniem, które wspierają rozwijanie wiedzy, umiejętności oraz refleksji nad własnym uczeniem się. W Tab.1 przedstawiono cztery główne kategorie wzorców wraz z opisami działań i celami dydaktycznymi.

Tab. 1. Kategorie wzorców edukacyjnych wraz z opisem działań i celami dydaktycznymi

Kategoria	Wzorec	Opis działania	Cel dydaktyczny / Efekt
Budowanie wiedzy	Socratic Reversal	Uczeń przejmuje rolę nauczyciela i tłumaczy materiał AI.	Pogłębienie rozumienia poprzez werbalizację i uzasadnianie.
	Feynman Prompt	Uczeń wyjaśnia treści w sposób maksymalnie uproszczony, jak dla początkującego.	Weryfikacja poziomu zrozumienia i identyfikacja luk w wiedzy.
	Gap Finder	AI analizuje odpowiedzi ucznia i wskazuje obszary wymagające uzupełnienia.	Diagnostyka trudności i indywidualizacja wsparcia.
	Concept Contrast	Porównywanie pojęć o podobnych znaczeniach lub funkcjach.	Kształtowanie umiejętności analizy i strukturyzacji wiedzy.
Aktywne ćwiczenie	Show-Then-Do	AI prezentuje poprawny przykład, a uczeń wykonuje analogiczne zadanie.	Przenoszenie wiedzy do samodzielnej praktyki.
	Error Injection	AI celowo wprowadza błąd, a uczeń musi go zidentyfikować i poprawić.	Rozwijanie umiejętności autokorekty i myślenia krytycznego.
	Test Me	AI generuje quizy sprawdzające postępy ucznia.	Utrwalanie wiedzy i bieżąca kontrola postępów.
	Rewrite Challenge	Uczeń przekształca poprawne rozwiązanie w równoważną formę.	Rozwijanie elastyczności poznawczej i głębszego rozumienia treści.
Myślenie twórcze	Many Ways	Poszukiwanie różnych sposobów rozwiązania jednego problemu.	Pobudzanie kreatywności i myślenia dywergencyjnego.
	Analogy Builder	Tworzenie analogii dla wyjaśnienia trudnych pojęć.	Transfer wiedzy i pogłębione rozumienie treści abstrakcyjnych.

Kategoria	Wzorzec	Opis działania	Cel dydaktyczny / Efekt
	Debate Simulation	AI prezentuje dwa przeciwstawne stanowiska w formie debaty.	Kształtowanie argumentacji i oceny różnych perspektyw.
Refleksja i metauczenie się	Confidence Check	Uczeń ocenia swoją pewność odpowiedzi, a AI udziela komentarza.	Rozwijanie świadomości poznawczej i samoregulacji.
	AI-as-Coach	AI pełni funkcję mentora wspierającego planowanie nauki.	Wzmacnianie autonomii i strategii uczenia się.
	Reverse Role Play	Uczeń przyjmuje rolę nauczyciela, AI rolę ucznia.	Pogłębienie refleksji i doskonalenie umiejętności wyjaśniania.
	Learning Diary	Uczeń prowadzi dziennik refleksji z pomocą AI.	Systematyczna autorefleksja i rozwijanie kompetencji metapoznawczych.

Zródło: opracowanie własne na podstawie dokumentu 'Prompt Patterns AI in Education' [5].

2.2. Wzorce dla nauczycieli

Wykorzystanie sztucznej inteligencji w edukacji może znacząco odciążyć nauczyciela, wspierając planowanie lekcji, dostosowanie materiałów dydaktycznych oraz proces oceniania. W praktyce można wyróżnić powtarzalne schematy jej zastosowania, określane mianem wzorców dydaktycznych. Poniżej przedstawiono wybrane przykłady z dwóch kluczowych obszarów: projektowania nauczania oraz oceny i informacji zwrotnej.

W kontekście projektowania nauczania szczególnie przydatne okazują się następujące wzorce:

- **Curriculum Generator**, w którym AI wspiera nauczyciela w planowaniu kursu lub cyklu lekcji, biorąc pod uwagę cele kształcenia, podstawę programową oraz czas, jakim dysponuje nauczyciel, a następnie proponuje kolejność tematów oraz odpowiednie materiały dydaktyczne.
- **Misconception Map**, pozwalający na identyfikację najczęstszych błędnych przekonań i typowych pomyłek uczniów związanych z danym zagadnieniem. Pozwala to nauczycielowi przewidzieć potencjalne trudności i przygotować strategie ich wyjaśniania, zwiększając tym samym skuteczność nauczania.
- **Scaffold Builder**, który generuje sekwencję zadań lub przykładów o rosnącym poziomie trudności. Uczniowie mogą rozwijać nowe umiejętności w sposób płynny, unikając zbyt gwałtownych przeskoków poznawczych, które mogłyby obniżyć motywację.
- **Differentiation Designer** umożliwia dostosowanie tych samych treści do różnych poziomów umiejętności uczniów. AI modyfikuje m.in. długość tekstu, zakres słownictwa czy liczbę wskazówek, wspierając tym samym indywidualizację nauczania.

Równie istotny obszar stanowi ocena i informacja zwrotna, gdzie sztuczna inteligencja wspiera nauczyciela w zapewnieniu uczniom spersonalizowanego wsparcia. Przykładami takich wzorców są:

- **Rubric-Based Feedback**, w którym AI ocenia pracę ucznia na podstawie zdefiniowanych wcześniej kryteriów, generując opisową informację zwrotną wskazującą mocne strony oraz obszary wymagające poprawy. Nauczyciel zachowuje kontrolę nad procesem, zatwierdzając lub modyfikując sugestie AI.
- **Adaptive Test Generation**, pozwalający tworzyć testy automatycznie dopasowujące poziom trudności do umiejętności ucznia. Umożliwia to precyzyjniejsze określenie poziomu wiedzy i wspiera indywidualny rozwój edukacyjny.
- **AI as Peer Reviewer**, w którym system przyjmuje rolę „rówieśnika”. Zamiast formalnego oceniania skupia się na wspieraniu, sugerowaniu zmian i zachęcaniu do poprawy pracy, dzięki czemu proces ewaluacji jest mniej stresujący i bardziej wspierający.

2.3. Rekomendacje dotyczące wzorców

Sztuczna inteligencja może pełnić rolę nie tylko narzędzia wspierającego, lecz także partnera w procesie uczenia się. Odpowiednio zaprojektowane wzorce promptów umożliwiają nauczycielowi świadome kierowanie interakcją w sposób sprzyjający refleksji i rozwojowi poznawczemu ucznia. Zamiast podawania gotowych odpowiedzi, AI może prowadzić dialog edukacyjny – zadawać pytania, tłumaczyć krok po kroku i wspierać samodzielne myślenie.

Najważniejsze rekomendacje dotyczące efektywnego wykorzystania wzorców obejmują:

- łączenie różnych wzorców, np. quizów, refleksji i coachingu, w celu zwiększenia zaangażowania ucznia;
- dopasowanie wzorca do poziomu i potrzeb ucznia, aby uniknąć przeciążenia poznawczego;
- unikanie nadmiernej sztywności – AI powinna wspierać kreatywność i elastyczne myślenie;
- kształcenie krytycznego podejścia do odpowiedzi AI, co wzmacnia kompetencje metapoznawcze i cyfrowe.

3. Opis scenariuszy zajęć z modułu „Podstawy operacji na liczbach zespolonych”

W ramach eksperymentu przygotowano trzy powiązane scenariusze dydaktyczne, które wspólnie tworzą moduł wprowadzający studentów do pracy z liczbami zespolonymi przy wsparciu systemów AI (ChatGPT, Google Gemini). Każdy ze scenariuszy realizuje odrębny cel poznawczy i wykorzystuje inne zestawy wzorców promptów, zgodnych z zasadami opisanymi w m. in. w [3], oraz w dokumentacji [4]. Poniżej omówiono kolejne scenariusze proponowanego modułu.

3.1. Część 1 — Wprowadzenie do liczb zespolonych

Pierwszy scenariusz ma charakter koncepcyjny i pełni funkcję wprowadzającą do zagadnienia liczb zespolonych. Jego głównym celem jest uświadomienie studentom potrzeby poszerzenia zbioru liczb rzeczywistych o liczby urojone oraz zrozumienie znaczenia jednostki i , definiowanej jako liczba spełniająca równanie $i^2 = -1$. Zajęcia przyjmują formę krótkiego, prowadzonego dialogu koncepcyjnego oraz zestawu zadań praktycznych, w których AI zapewnia natychmiastową informację zwrotną.

Lekcja rozpoczyna się od analizy równania $x^2 + 1 = 0$, które na gruncie liczb rzeczywistych nie ma rozwiązań. Punkt ten stanowi naturalną motywację do wprowadzenia nowego typu liczby oraz odwołuje się do historycznych analogii — podobnie jak kiedyś poszerzono zbiór liczb o liczby ujemne i niewymierne, tak teraz wprowadza się liczby urojone. Następnie studenci wykonują podstawowe działania na liczbach zespolonych zapisanych w postaci algebraicznej $z = a + bi$, przechodząc od przykładów z prezentacją rozwiązania do samodzielnego wykonywania obliczeń. Lekcja kończy się krótkim quizem i refleksją, podczas których studenci wyjaśniają własnymi słowami rozwiązanie oraz identyfikują błędne rozumienia.

3.2. Część 2 — Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Drugi scenariusz koncentruje się na geometrycznej interpretacji liczb zespolonych oraz przejściu od postaci algebraicznej do trygonometrycznej. Pozwala to przedstawić liczbę zespoloną jako punkt lub wektor na płaszczyźnie, co ułatwia rozumienie operacji rachunkowych.

Lekcja rozpoczyna się narracyjnym wprowadzeniem dotyczącym roli Gaussa i koncepcji płaszczyzny zespolonej. Następnie studenci obliczają moduł, argument liczby oraz zapisują ją w postaci $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Operacje mnożenia i dzielenia liczb w tej postaci sprowadzają się odpowiednio do dodawania lub odejmowania argumentów oraz mnożenia lub dzielenia modułów, co znacząco upraszcza obliczenia. Pod koniec zajęć studenci dokonują krótkiej samooceny pracy i formułują wnioski dotyczące znaczenia argumentu liczby zespolonej.

3.3. Część 3 — Zbiory liczb zespolonych

Trzeci scenariusz ma charakter zastosowań geometrycznych i wizualnych. Uczestnicy poznają różne typy zbiorów na płaszczyźnie zespolonej, opisane za pomocą warunków na moduł i argument liczby z .

AI prowadzi interaktywny dialog w trybie Flipped Interaction – zadaje pytania, proponuje opisy obszarów i prosi studentów o wskazanie właściwych obiektów oraz uzasadnienie wyboru. Zajęcia obejmują trzy etapy:

1. Flipped diagnosis – AI diagnozuje wstępny poziom wiedzy pytaniami typu „Co oznacza zapis $|z| = 2$?”.
2. Modelowanie i praktyka – rozpoznawanie i opisywanie zbiorów typu koło, pierścień, półpłaszczyzna, wycinek; praca z błędnymi przykładami (Error

Injection) i pytaniami typu What-If („Jak zmieni się zbiór, jeśli dodamy warunek $|z| < 4$?”).

3. Refleksja i projektowanie – opis własnego przykładu zbioru i uzasadnienie jego kształtu (AI-as-Coach, Reflection Prompt).

Studenci uczą się interpretować warunki geometryczne, argumentować swoje wybory i korygować błędne rozumowania.

3.4. Podsumowanie modułu

Trzy scenariusze tworzą spójną ścieżkę dydaktyczną, od wprowadzenia koncepcji liczby zespolonej, przez opis jej reprezentacji geometrycznej, aż po analizę zbiorów na płaszczyźnie zespolonej.

Każdy etap wykorzystuje inne wzorce promptów wspierające aktywne uczenie się, refleksję i rozwijanie samodzielnego myślenia matematycznego przy wsparciu sztucznej inteligencji. Porównanie scenariuszy zajęć modułu „Podstawy operacji na liczbach zespolonych” zawarto w Tab. 2.

Tab. 2. Porównanie scenariuszy zajęć modułu „Podstawy operacji na liczbach zespolonych”

Część/Temat zajęć	Czas trwania	Forma i organizacja zajęć	Główne wzorce promptów AI	Cele i efekty uczenia się
Część 1. Wprowadzenie do liczb zespolonych	30 min	Odkrywanie pojęcia · Dialog z AI · Ćwiczenia rachunkowe · Refleksja	Feynman Prompt, Concept Contrast, Show-Then-Do, Prompt Me First, Step-by-Step Debugger, Test Me, Explain-Back, What Did I Miss	Student rozumie potrzebę wprowadzenia liczb urojonych, zna definicję i , potrafi wykonywać działania na liczbach zespolonych w postaci $a + bi$, wyjaśnia własnymi słowami sens rozszerzenia zbioru liczb rzeczywistych.
Część 2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	60 min	Odkrywanie pojęć · Praca z wykresem · Ćwiczenia z AI · Quiz	Storytelling Prompt, Predict–Observe–Explain, Show-Then-Do, Prompt Me First, Step-by-Step Debugger, Test Me, What Did I Miss	Student rozumie interpretację geometryczną liczby zespolonej, umie obliczać moduł i argument, przedstawia liczby zespolone w różnych postaciach, poprawnie stosuje reguły mnożenia i dzielenia w postaci trygonometrycznej.
Część 3. Zbiory liczb zespolonych	30 min	Dialog AI ↔ student · Aktywna praktyka · Ilustracje i quizy	Flipped Interaction, Show-Then-Do, Error Injection, What-If Scenarios, AI-as-Coach, Reflection Prompt	Student rozpoznaje i opisuje zbiory określone warunkami na $ z $ i $\arg(z)$, potrafi przypisać im kształt geometryczny (okrąg, pierścień, półpłaszczyzna, wycinek), argumentuje i koryguje błędy w opisach.

Źródło: opracowanie własne na podstawie przygotowanych scenariuszy dydaktycznych (Część 1–3).

Analiza wyników ankiety ewaluacyjnej po wykonanym eksperymencie

Po zakończeniu pracy z modulem studenci oceniali proponowane w ramach eksperymentu rozwiązania dydaktyczne, wypełniając ankietę ewaluacyjną. Treść ankiety, która składała się z pięciu części (A-E) zamieszczono w załączniku. Celem ankiety było uzyskanie informacji zwrotnej dotyczącej mocnych stron i ewentualnych ograniczeń zastosowanego podejścia, a także opinii studentów na temat użyteczności systemów AI w procesie uczenia się matematyki. Wyniki uzyskane z analizy odpowiedzi studentów przedstawiono poniżej. Anketę wypełniło 28 studentów.

3.5. Doświadczenie uczestników z narzędziami AI

W pierwszej części (A) ankiety zapytano uczestników o ich dotychczasowe doświadczenia w korzystaniu z narzędzi AI. Większość studentów zadeklarowała sporadyczne korzystanie z takich systemów jak ChatGPT czy Google Gemini, natomiast około jedna trzecia przyznała, że używa ich regularnie. Rozkład odpowiedzi przedstawiał się następująco: Sporadycznie – 14 osób, Regularnie – 11 osób, Nigdy – 3 osoby. Kilku studentów po raz pierwszy zetknęło się z narzędziami AI właśnie podczas tych zajęć. Wyniki te wskazują, że grupa była zróżnicowana pod względem kompetencji cyfrowych i doświadczenia w pracy z modelami językowymi, co mogło wpływać na sposób odbioru całego modułu dydaktycznego. Osoby z większym doświadczeniem częściej oceniały wykorzystanie AI pozytywnie, dostrzegając jego potencjał edukacyjny, natomiast uczestnicy mający pierwszy kontakt z tego typu technologią częściej zwracali uwagę na trudności w komunikacji i ograniczoną wiarygodność niektórych odpowiedzi. Ten podział respondentów według poziomu doświadczenia w pracy z AI zostanie uwzględniony w dalszych analizach wyników ankiety.

3.6. Ocena zaangażowania studentów i przydatności AI w procesie dydaktycznym

Zaangażowanie studentów oraz postrzegana przydatność narzędzi AI w procesie dydaktycznym zostały ocenione na podstawie dwóch kolejnych części ankiety. W części B umieszczono dziesięć stwierdzeń (B1–B8) opisujących wpływ wykorzystania AI na zaangażowanie, zrozumienie materiału oraz rozwój umiejętności samodzielnego myślenia matematycznego. Część C obejmowała pięć stwierdzeń (C1–C5) odnoszących się do oceny poszczególnych modułów dydaktycznych. Odpowiedzi udzielano w pięciostopniowej skali Likerta. W części B wartość 1 oznaczała „*zdecydowanie się nie zgadzam*”, a 5 – „*zdecydowanie się zgadzam*”. W części C natomiast skala przyjmowała znaczenie od 1 – „*nieprzydatna*” do 5 – „*bardzo przydatna*”.

Wśród najwyższej ocenionych (wg. średniej) w części B stwierdzeń znalazły się:

- AI zachęcało mnie do samodzielnego myślenia i wyjaśniania rozwiązań (B5) -średnia 3.75 (N=28, udział ocen 4–5: 67.9%),

- Uczenie się z wykorzystaniem AI było dla mnie angażujące (B1) - średnia 3.57 (N=28, udział ocen 4–5: 50%),
- AI pomagało mi lepiej zrozumieć pojęcie liczby zespolonej (B2) - średnia 3.50 (N=28, udział ocen 4–5: 50%).

Najniżej ocenione pozycje (wg średniej) w części B stanowiły:

- Wzorce pracy (np. „Najpierw pokaż, potem zrób”, „Wyjaśnij własnymi słowami”) ułatwiały mi naukę (B4) - średnia 3.25 (N=28, udział ocen 4–5: 39.3%)
- Dzięki pracy z AI szybciej zauważałem(-am) własne błędy w obliczeniach (B3) - średnia 3.18 (N=28, udział ocen 4-5: 46.4%)
- Praca z AI była lepszym doświadczeniem niż tradycyjne ćwiczenia bez AI (B7) - średnia 2.61 (N=28, udział ocen 4-5: 21.4%, udział oceny 1-2: 50%)

Analiza wyników części C pokazała, że studenci najwyżej ocenili pierwszy moduł (C1) - średnia 4.43 (N=28, udział ocen 4–5: 92.9%) oraz Quizy i interaktywne testy z AI (C4) - średnia 3.82 (N=28, udział ocen 4–5: 53.6%). Największy udział odpowiedzi 1-2 (21,4%) dotyczył modułu 3 (C3), choć 50% oceniło go wybierając odpowiedzi 4-5 (średnia 3.43).

3.7. Najczęstsze motywy w odpowiedziach otwartych

W ankiecie znalazł się również zestaw pytań otwartych (część D), pozwalających studentom swobodnie opisać swoje doświadczenia z wykorzystaniem AI w nauce liczb zespolonych. Uczestnicy odpowiadali na pytania:

- A. Co najbardziej pomogło Ci w zrozumieniu tematu liczb zespolonych podczas pracy z AI?
- B. Co sprawiło Ci największą trudność podczas pracy z AI?
- C. Jak oceniasz rolę AI jako „tutora” w porównaniu z tradycyjnym prowadzącym?
- D. Jakie wzorce lub formy pracy (np. quizy, poprawianie błędów, dialog) były dla Ciebie najbardziej wartościowe?

Ogólną analizę udzielonych odpowiedzi oraz przykłady odpowiedzi uznanych za reprezentatywne przedstawiono w Tab. 3. Większość badanych zwróciła uwagę na błędy merytoryczne („halucynacje”) oraz ograniczenia narzędzi (np. limity zapytań, brak kontekstu graficznego). Część studentów zauważyła, że AI bywało „zbyt pewne siebie”, „upierało się przy błędach” lub „zadawało dziwne pytania”. Jednocześnie doceniano dialogowy charakter pracy, umożliwiający zadawanie dodatkowych pytań, poprawianie błędów i wspólne dochodzenie do rozwiązań. Dla wielu uczestników właśnie ta możliwość prowadzenia rozmowy i autorefleksji stanowiła najcenniejszy element pracy z AI.

Najczęściej wskazywanymi przez studentów wartościowymi formami pracy były:

- quizy (interaktywne testy i pytania w stylu „sprawdź sam”),
- poprawianie błędów (autorefleksja po uzyskaniu informacji zwrotnej),

- dialog i wyjaśnianie rozwiązań własnymi słowami.

Wypowiedzi otwarte (Tab. 3) sugerują, że właśnie te formy wzmacniały zaangażowanie i poczucie sprawstwa – studenci mieli wrażenie, że uczestniczą w procesie uczenia się, a nie tylko odbierają gotowe informacje.

Tab. 3. Główne motywy pojawiające się w odpowiedziach otwartych uczestników

Motyw/opis motywu	Liczba wzmianek	Przykłady, skrótowe opisy
podstawowe uwagi	58	Nauka korzystania z AI jako osoba, która nigdy nie miała z tym styczności • Własny udział w naukę a nie samo słuchanie • Fajny zamiennik
poprawianie błędów / feedback	23	Różne przykłady oraz tłumaczenie błędów • Błędy AI oraz upieranie się przy swoich błędach • Sam dialog był bardzo pomocny oraz poprawianie błędów dzięki którym można było się więcej nauczyć
preferencja tradycyjnych zajęć	12	AI na razie nie zastąpi tradycyjnego prowadzącego • AI było bardzo pomocne, lecz w moim odczuciu nie da się tego porównać do tradycyjnych form • Tradycyjny prowadzący jest zdecydowanie lepszy, wymaga to od nas większego skupienia
dialog / interakcja z AI	8	Komunikowanie się z chatem, czasem zadawał głupie pytania albo bezsensowne odpowiedzi • Sam dialog był bardzo pomocny oraz poprawianie błędów dzięki którym można było się więcej nauczyć • Dialog i możliwość wykonania zadania, które zostanie sprawdzone
halucynacje / brak zaufania	6	Halucynacje ChataGPT, wymyślanie faktów i głupot • Brak zaufania co do poprawności tłumaczenia tematu przez niego • AI nie współpracowało, kazało wybierać jedno z nieistniejących zdjęć
zrozumiałość / przejrzystość	6	Przejrzystość przekazywanych informacji • Pomogła mi przejrzystość, z jaką AI formułuje notatki. Informacje były jasno uporządkowane • Wyjaśnienia konkretne, a trudne pojęcia przedstawione w prosty i zrozumiały sposób. Dzięki temu łatwiej
analogie/ przykłady	5	Różne przykłady oraz tłumaczenie błędów • Przykład równania $x^2 = -1$ które jest nierozwiązywalne w R i analogia do liczb ujemnych • Analogie, opowiadanie jak na LLM przystało

Źródło: opracowanie własne na podstawie wyników ankiety.

Zebrane opinie ukazują więc zróżnicowany odbiór pracy z AI. Część studentów doceniała przejrzystość przekazu, dialog, szybkie wyjaśnienia i możliwość uczenia się na błędach. Inni wskazywali jednak na ograniczone zaufanie do modelu - błędne odpowiedzi, brak kontekstu i mniejsze zaangażowanie niż podczas tradycyjnych zajęć. Opinie te potwierdzają, że skuteczność wykorzystania AI w dydaktyce zależy w dużym stopniu od doświadczenia użytkowników, ich kompetencji cyfrowych oraz umiejętności krytycznej oceny generowanych treści.

3.8. Ocena ogólna i perspektywy

W części E ankiety ewaluacyjnej studenci zostali poproszeni o ocenę ogólnego wrażenia z pracy z AI w skali od 1 do 10 (1 – bardzo negatywne, 10 – bardzo pozytywne). Średnia ocena końcowa wyniosła 6.96, przy czym wyniki były rozproszone w szerokim zakresie od 3 do 10. Najwyższe oceny przyznawali studenci, którzy regularnie korzystali z ChatGPT, potrafili precyzyjnie formułować pytania i doceniali możliwość pracy w indywidualnym tempie. Najniższe oceny wystawili natomiast ci, którzy napotkali błędy AI, mieli trudności z interpretacją poleceń i nie ufali poprawności merytorycznej odpowiedzi. Pomimo zgłaszanych trudności i krytycznych uwag, ponad połowa studentów zadeklarowała chęć uczestniczenia w podobnych zajęciach z wykorzystaniem AI w innych przedmiotach matematycznych, co wskazuje na pozytywne nastawienie wobec dalszej integracji sztucznej inteligencji w procesie kształcenia.

3.9. Wpływ doświadczenia na uzyskiwane wyniki – analiza statystyczna

W celu zrozumienia czynników wpływających na ocenę zajęć z AI przez studentów przeprowadzono analizę statystyczną zależności między ich doświadczeniem w korzystaniu z narzędzi sztucznej inteligencji a ocenami poszczególnych aspektów zajęć. Doświadczenie uczestników eksperymentu zostało określone na podstawie ich deklaracji i podzielone na trzy grupy:

- G1. osoby, które nigdy wcześniej nie korzystały z narzędzi AI,
- G2. osoby korzystające z narzędzi AI sporadycznie,
- G3. osoby posiadające już doświadczenie w pracy z AI (np. ChatGPT, Gemini, Copilot).

Do oceny poszczególnych aspektów zajęć przyjęto stwierdzenia B1-B8 oraz C1-C5 zawarte w częściach B i C ankiety (w skali 1-5) oraz ocenę końcową (część E) w skali 1-10. Średnie ocen w grupach G1-G3 przedstawiono w Tab. 4.

Tab. 4. Średnie oceny poszczególnych aspektów zajęć z AI w grupach o różnym poziomie doświadczenia (G1–G3)

Doświadczenie	G1 („Nigdy”)	G2 („Sporadycznie”)	G3 („Tak”)
B1	3.67	3.21	4.00
B2	3.00	3.07	4.18
B3	3.00	3.07	3.36
B4	3.67	2.64	3.91
B5	3.00	3.57	4.18
B6	3.00	3.07	4.00
B7	1.67	2.14	3.45
B8	4.00	2.93	3.91

Doświadczenie	G1 („Nigdy”)	G2 („Sporadycznie”)	G3 („Tak”)
C1	3.67	4.43	4.64
C2	3.67	3.57	4.00
C3	3.33	3.07	3.91
C4	3.67	3.71	4.00
C5	4.00	3.71	3.64
Ocena końcowa	8.00	6.14	7.73

Zródło: opracowanie własne na podstawie wyników ankiety ewaluacyjnej (patrz Załącznik).

Analiza wyników wskazuje wyraźny wpływ doświadczenia w pracy z narzędziami AI na postrzeganie zajęć. Grupa G3 („Tak”) uzyskiwała najwyższe średnie oceny w większości analizowanych aspektów (części B i C) oraz w ocenie końcowej (7.73), podczas gdy grupa G2 („Sporadycznie”) uzyskiwała najniższe wartości (6.14). Interesujące jest, że grupa G1 („Nigdy”) osiągnęła średnio najwyższą ocenę końcową (8.00), co może wynikać z subiektywnej percepcji zajęć przez osoby całkowicie nowe w obszarze AI – brak wcześniejszych doświadczeń mógł skutkować wyższą satysfakcją z poznawanych treści.

W celu określenia czy poziom doświadczenia w pracy z narzędziami AI wpływa na ogólne postrzeganie zajęć, obliczono średnie oceny każdego respondenta na podstawie wszystkich 13 pytań (B1–B8 i C1–C5), co pozwoliło uzyskać jeden wskaźnik reprezentujący ogólną ocenę zajęć. Następnie przeprowadzono nieparametryczny test Kruskala–Wallisa, będący odpowiednikiem jednoczynnikowej analizy wariancji (ANOVA) dla danych porządkowych. Wynik testu ($H = 6.38$; $p = 0.041$) wskazuje na istotne statystycznie różnice pomiędzy grupami. Dodatkowy test post-hoc wykazał, że studenci posiadający doświadczenie („Tak”) oceniali zajęcia istotnie wyżej niż osoby korzystające z AI sporadycznie ($p = 0.041$). Różnice pomiędzy grupami „Nigdy” i „Sporadycznie” nie były istotne statystycznie.

Uzyskane rezultaty wskazują, że doświadczenie stanowi istotny czynnik różnicujący poziom wyników w badanych zmiennych, co może świadczyć o jego znaczącej roli w rozwijaniu kompetencji i efektywności badanych osób.

Wnioski końcowe

Przeprowadzona analiza wykazała, że wcześniejsza znajomość sposobu działania modeli generatywnych oraz praktyczne obycie z narzędziem zwiększają efektywność procesu uczenia się. AI w roli tutora matematycznego zostało ocenione jako pomocne i wspierające narzędzie dydaktyczne, które nie zastępuje jednak nauczyciela, lecz wzmacnia proces kształcenia poprzez natychmiastową informację zwrotną, dialog i możliwość indywidualnego dostosowania tempa nauki.

Najefektywniejsze strategie dydaktyczne obejmowały:

- dialog edukacyjny z modelem,
- quizy i zadania problemowe rozwijające myślenie analityczne,
- pracę na błędach oraz refleksję nad procesem rozwiązywania zadań.

Kluczowe dla skuteczności wykorzystania AI okazały się zaufanie i świadomość ograniczeń modeli. Wymaga to odpowiedniego przygotowania studentów do pracy z technologiami generatywnymi oraz rozwijania ich kompetencji cyfrowych. Istotnym rezultatem zajęć była również refleksyjność i metapoznanie. Studenci podkreślali, że AI „zmuszało do myślenia”, „pomagało zauważyć własne błędy” i sprzyjało samoregulacji procesu uczenia się.

W celu zwiększenia efektywności dydaktycznej zaleca się:

- łączenie pracy z AI z krótkimi mini-wykładami i metodą „pokaż → zrób”,
- standaryzację sposobu zapisu odpowiedzi (pierwiastki, potęgi) oraz stosowanie szybkiego sprawdzenia,
- naprzemienne wykorzystywanie quizów, dialogu i refleksji nad błędem.

Bibliografia

- [1] Stańdo J., Fechner Ż., Dąbrowicz-Tlalka A., Kujawska K., Musielak M. M., Exploring AI Chatbots for Learning Mathematics: Students' Perspectives on Accuracy and Educational Value, 2025
- [2] Naskręcki B., Ono K., Mathematical discovery in the age of artificial intelligence, Nat. Phys. 21, 1504-1506, 2025
- [3] Sahoo, P., Singh, A.K., Saha, S., Jain, V., Mondal, S.S., Chadha, A., A Systematic Survey of Prompt Engineering in Large Language Models: Techniques and Applications, 2024, ArXiv, abs/2402.07927
- [4] Yi L., Liu D., Jiang T., Xian Y., The effectiveness of AI on K-12 students' mathematics learning: A systematic review and meta-analysis, International Journal of Science and Mathematics Education, 2024
- [5] <https://box.biaman.pl/d/87d019d56edc47419764/>
- [6] Mohamed, M. Z. b., Hidayat, R., Suhaizi, N. N. b., Sabri, N. b. M., Mahmud, M. K. H. b., Baharuddin, S. N. b., Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review, International Electronic Journal of Mathematics Education, Vol. 17, No. 3. 2022, em0694
- [7] White, J., Fu, Q., Hays, S., Sandborn, M., Olea, C., Gilbert, H., Elnashar, A., Spencer-Smith, J., Schmidt, D.C., A Prompt Pattern Catalog to Enhance Prompt Engineering with ChatGPT, 2023. ArXiv, abs/2302.11382

Załącznik: Ankieta ewaluacyjna po zajęciach z modułu „Podstawy operacji na liczbach zespolonych”

Część A. Informacje ogólne

Czy wcześniej korzystałeś/-aś z narzędzi AI (np. ChatGPT, Copilot, Gemini)?

☐ Tak, regularnie ☐ Sporadycznie ☐ Nigdy

Część B. Ocena pracy z AI podczas modułu

Wskaż, w jakim stopniu zgadzasz się z poniższymi stwierdzeniami (1 – zdecydowanie się nie zgadzam, 5 – zdecydowanie się zgadzam).

Nr	Stwierdzenie	1	2	3	4	5
B1	Uczenie się z wykorzystaniem AI było dla mnie angażujące.	☐	☐	☐	☐	☐
B2	AI pomagało mi lepiej zrozumieć pojęcie liczby zespolonej.	☐	☐	☐	☐	☐
B3	Dzięki pracy z AI szybciej zauważałem(-am) własne błędy w obliczeniach.	☐	☐	☐	☐	☐
B4	Wzorce pracy (np. „Najpierw pokaż, potem zrób”, „Wyjaśnij własnymi słowami”) ułatwiały mi naukę.	☐	☐	☐	☐	☐
B5	AI zachęcało mnie do samodzielnego myślenia i wyjaśniania rozwiązań.	☐	☐	☐	☐	☐
B6	Interakcja z AI była zrozumiała i logiczna.	☐	☐	☐	☐	☐
B7	Praca z AI była lepszym doświadczeniem niż tradycyjne ćwiczenia bez AI.	☐	☐	☐	☐	☐
B8	Zajęcia rozwijały moją umiejętność refleksji nad własnym myśleniem matematycznym.	☐	☐	☐	☐	☐

Część C. Ocena poszczególnych elementów modułu

Oceń poszczególne części zajęć w skali 1–5 (1 – nieprzydatna, 5 – bardzo przydatna).

Nr	Element zajęć	1	2	3	4	5
C1	Część 1 – Wprowadzenie do liczb zespolonych	☐	☐	☐	☐	☐
C2	Część 2 – Postać trygonometryczna	☐	☐	☐	☐	☐
C3	Część 3 – Zbiory liczb zespolonych	☐	☐	☐	☐	☐
C4	Quizy i interaktywne testy z AI	☐	☐	☐	☐	☐
C5	Refleksja i omówienie błędów	☐	☐	☐	☐	☐

Część D. Pytania otwarte

1. Co najbardziej pomogło Ci w zrozumieniu tematu liczb zespolonych podczas pracy z AI?
2. Co sprawiło Ci największą trudność podczas pracy z AI?

3. Jak oceniasz rolę AI jako „tutora” w porównaniu z tradycyjnym prowadzącym?
4. Jakie wzorce lub formy pracy (np. quizy, poprawianie błędów, dialog) były dla Ciebie najbardziej wartościowe?
5. Czy chciał(a)byś, aby podobne zajęcia z AI pojawiły się także w innych przedmiotach matematycznych? ☐ Tak ☐ Nie ☐ Nie mam zdania
Uzasadnij krótko:

Część E. Refleksja końcowa

Na zakończenie oceń ogólne wrażenie z pracy z AI w skali 1–10 (1 – bardzo negatywne, 10 – bardzo pozytywne).

Twoja ocena: [] /10

Czy geodezja to matematyka stosowana?

Waldemar Łupiński

Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Nauk o Środowisku,
e-mail: w.lupinski@pb.edu.pl

Streszczenie

Matematyka jest niezbędna w życiu człowieka. Towarzyszy mu od początku istnienia gatunku *Homo Sapiens*. Niektórzy dowodzą nawet, że nie jest to domena „naczelnych”, ale inne gatunki przyrody ożywionej, też w swoim zakresie potrafią liczyć czy kalkulować. Geodezja w sensie nowożytnym wywodzi się wprost, jako odrębna dyscyplina naukowa, z matematyki i astronomii. W niniejszej pracy zostanie przedstawionych szereg zagadnień w skondensowanej formie: zakres zainteresowań geodezji jako dziedziny naukowej i w wymiarze praktycznym, główne techniki i narzędzia pomiarowe, problematyka opracowania wyników pomiaru. Główną częścią opracowania będzie opis zakresu aparatu matematycznego stosowanego przez geodetę w rozwiązywaniu podstawowych zadań ukierunkowanych na określenie wyznaczanych wielkości oraz dokładność tych obliczeń. Jest to tematyka występująca na poziomie średnim szkolnictwa zawodowego, m. in. w specjalnościach: technik geodeta, technik drogownictwa, technik inżynierii środowiska oraz na wydziałach geodezyjnych i niektórych wydziałach niegeodezyjnych w systemie szkolnictwa wyższego.

Słowa kluczowe: geodezja, matematyka stosowana, rachunki i obliczenia inżynierskie, jednoznacznie wyznaczalne konstrukcje geodezyjne.

1. Wstęp

Według „Wikipedii” [1]: „**Geodezja** (z jęz. greckiego: γῆ *gē* „ziemia”, δαίω *daio* „dzielić”) – nauka zajmująca się gromadzeniem, przetwarzaniem i udostępnianiem danych o Ziemi oraz określaniem położenia i wzajemnych relacji przestrzennych punktów na jej powierzchni. Zadaniem geodezji jest stworzenie modelu powierzchni Ziemi oraz matematycznego opisu punktów na jej powierzchni, pozwalającego na ich jednoznaczne określenie w przestrzeni. Wynikiem geodezyjnych pomiarów terenowych i prac kameralnych (działania polegające na przeniesieniu wykonanych wcześniej pomiarów terenowych na mapę) są różnego typu opracowania graficzne np. mapy czy profile, ale także dokumenty tekstowe o charakterze prawnym (np. podczas rozgraniczenia nieruchomości).”

W praktyce, metodami geodezyjnymi opracowujemy też i inne „relacje przestrzenne”, wykraczające poza jedynie „powierzchnię Ziemi”. Na początek „pod powierzchnią ziemi” (przez małe „z”) - są to pomiary związane z gleboznawczą klasyfikacją gruntów, na potrzeby rolnictwa i leśnictwa. Dokonujemy też pomiarów realizacyjnych i inwentaryzacyjnych pod powierzchnią Ziemi, wykonując prace związane z podziemnym uzbrojeniem terenu (czego owocem jest prowadzona przez geodetów Geodezyjna Ewidencja Sieci Uzbrojenia Terenu, w skrócie GESUT). Specyficznym

działem geodezji jest geodezja górnicza. Geodezja górnicza zajmuje się ona pomiarami związanymi z metodami odkrywcowymi np. przy wydobyciu węgla brunatnego, torfu, piasku, żwiru, gliny itp., ale też realizacją tuneli podziemnych, jak również tyczeniem realizacyjnym oraz inwentaryzacją: szybów, korytarzy i wyrobisk w kopalniach głębinowych surowców naturalnych i mineralnych jak np. węgiel kamienny, czy też rudy metali - w tym miedzi, cynku, ołowiu, srebra, złota, platyny itp.

Od tysięcy lat interesujemy się badaniem też i tego co znajduje się ponad powierzchnią, czyli atmosferą Ziemi, zwłaszcza z jej górnymi partiami w postaci termosfery, gdzie mamy większość sztucznych satelitów. Od czasów faraonów (a może i wcześniej) badamy kosmos. Sporo obiektów w pobliżu Ziemi w naszym Układzie Słonecznym zostało poddanych badaniom (na przykład technikami optycznymi, radiowymi i innymi z powierzchni naszej planety, czy to za pośrednictwem obserwacji z satelitów na orbicie, czy to bezzałogowych czy załogowych misji kosmicznych).

Wspomniane tu wielokrotnie kwestie użycia metod geodezyjnych wymagają w konsekwencji użycia metod matematycznych. Bo sam pomiar, nawet wykonany z największą precyzją i staraniem, będzie miał wartość zerową - bez jego odpowiedniego opracowania. Na to zwracamy uwagę w dydaktyce.

2. Jakie elementy mierzymy w geodezji

Chociaż wstępny rozdział zawiera wiele elementów dotyczących zakresu naszych zainteresowań, prac, ich nieograniczonej przestrzeni, to w tym opracowaniu możemy skromnie zapisać, że naszymi głównymi przedmiotami pomiarów są:

- odległości,
- kąty (poziome i pionowe),
- przewyższenia.

Cele osiągamy w różny, zawsze empirycznie sprawdzony sposób. Możemy np. stosować pomiary bezpośrednie np. bezpośrednio przykładając przymiar w postaci taśmy stalowej, a jak przymiar jest zbyt krótki - to go wielokrotnie odkładamy, dbając o szczegóły, jak odpowiednie wytyczenie w mierzoną linię pomiarową, odpowiednią siłę naciągu itp. Zwykle zależy nam na odległościach zredukowanych do poziomu, więc w terenie pochyłym - mierzymy „metodą schodkową”. Pojawia się tu motyw dokładności pomiaru. Jako miarę dokładności podajemy błąd względny pomiaru. Kształtuje się on od 1:2000 (użycie taśmy ze szpilkami, którymi zaznaczamy kolejne odłożenia taśmy) do 1:10000. Jeżeli podczas pomiaru taśmą zamiast szpilek użyjemy wskaźników, do naciągania taśmy użyjemy dynamometru oraz zmierzmy temperaturę taśmy podczas pomiaru i wprowadzimy poprawkę na rozszerzalność liniową stali - w tzw. „temperaturze komparacji” taśma stalowa powinna mieć standardowo długość 20,000 m. W skrajnie niskich czy wysokich temperaturach może mieć mniejszą lub większą faktyczną długość. Są też taśmy o długości 50,000 m, tam te wyniki „są ciekawsze”, zwłaszcza jak przy pomiarach kolejowych położymy upalnym latem taśmę na szynie. Metoda pomiaru taśmą w geodezji, szczerze mówiąc, posiada dziś charakter historyczny. Przy prostych pomiarach wykorzystujemy ruletki geodezyjne (Rys. 1).



Rys. 1. Przykładowa ruletka geodezyjna, Nivel System ST-50B

Źródło: prospekt reklamowy sklepu firmy Topcon [2].

Przykład szpilki geodezyjnej jest przedstawiony na Rys.2 Standardowe długości to 30 lub 50 cm.



Rys. 2. Szpilki geodezyjne

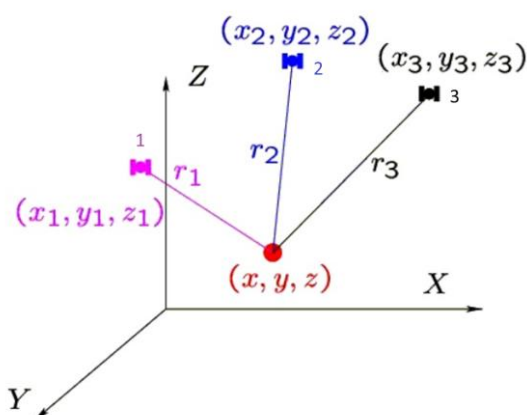
Źródło: prospekt reklamowy sklepu firmy Pomiar24 [3].

Istnieje też wiele pośrednich metod pomiarów odległości, gdzie wykorzystywane są podstawowe właściwości optyki związane ze zjawiskiem paralaksy. Nowocześniejsze metody pomiarów wykonujemy przy użyciu dalmierzy. Jest całe spektrum rozwiązań konstrukcji tych dalmierzy, opartych na różnych ideach z zakresu zjawisk fizycznych: mierzą czas między wyjściem fali emitowanej przez dalmierz, odbiciem się od mierzonego celu i powrotem do instrumentu; badają różnice faz między falą wychodzącą i powracającą; mierzą stopień rozproszenia fali wychodzącej i odbitej.

Podobnie, różne techniki i technologie wykorzystywane są przy pomiarach kątowych oraz pomiarach wysokościowych czy skaningu laserowym. Podobnie jest z pomiarami w technologii GPS. Problem sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań z trzema niewiadomymi w jednoznacznie wyznaczalnym minimalnym wariancie, jak we wzorach poniżej:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} &= r_1 \\ \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2} &= r_2 \\ \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2 + (z_3 - z)^2} &= r_3\end{aligned}\tag{1}$$

Geometria tak rozwiązywanego układu podana jest na Rys. 3, gdzie mierzony punkt wyraża trójka szukanych współrzędnych (x, y, z) , jak też satelity: 1, 2, 3 o znanych współrzędnych, na bieżąco podawanych i korygowanych przez globalny układ obserwacji i konserwacji tego systemu geocentrycznego. W efekcie, po określeniu wartości wektorów r_1, r_2 i r_3 , potrafimy określić współrzędne dowolnego punktu na powierzchni Ziemi.



Rys. 3. Geometryczna idea pomiarów GPS

Źródło: opracowanie własne

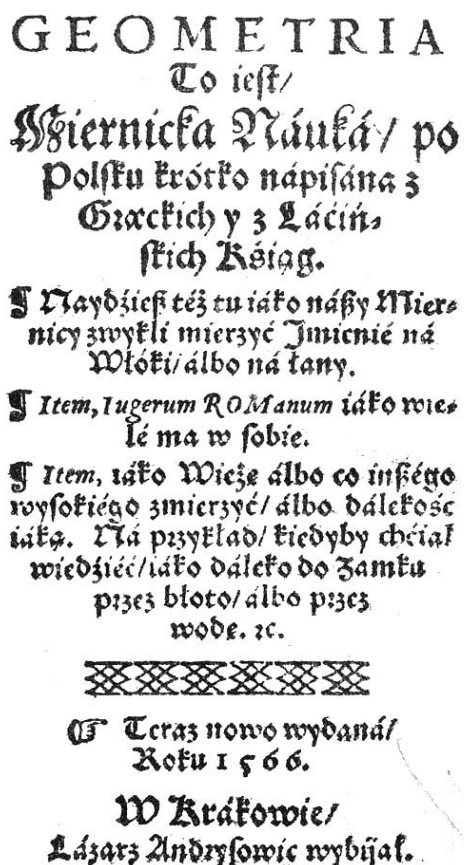
Oczywiście tych „widocznych” satelitów podczas pomiaru mamy kilkanaście, czasami i więcej. Pierwotnie zakładano liczbę 24 satelitów, aby pomiary w systemie GPS były możliwe (zakładał to system amerykański, obecnie jest w nim 50 satelitów). Mamy też do dyspozycji system GLONASS, zarządzany przez Wojska Kosmiczne Federacji Rosyjskiej z 24 satelitami oraz rozbudowywany projekt Europejskiej Agencji Kosmicznej (ESA), noszący nazwę „Galileo”, z 30 satelitami. Istnieje też chiński projekt „Compass” i indyjski Indian Regional Navigational Satellite System (IRRSS). Obserwacje nadliczbowe są wykorzystywane do podniesienia dokładności wykonanych pomiarów oraz do analizy błędów i wyznaczenia dokładności określenia pozycji punktów.

Oczekujemy na kolejną generację tej technologii satelitarnej. Wewnątrz budynków, w zacieleniu przez drzewa, przy tym podobnych przeszkodach, odbiorniki satelitarne dotychczasowych generacji nie radziły sobie, albo radziły sobie... dość średnio. Wdrażany jest system odporny na te problemy, możliwy do zastosowania nawet wewnątrz pomieszczeń w budynkach o konstrukcji żelbetowej lub kilka czy kilkanaście metrów pod ziemią.

3. Geodezja a matematyka

Jak już wyżej wspomniano, geodezja jako odrębna dziedzina, wyłoniła się z matematyki i astronomii. Można tu przytoczyć wiele przykładów wybitnych uczonych, między innymi: Arystotelesa (wprowadził pojęcie „geodezji”), Pitagorasa, G. Merkatora, P. Nuneza, J. F. Fernela, W. Sneliusa, C. F. Gaussa, J. L. Lagrange’a, P. de Laplace’a, A. Cauchy’ego. Na polskim gruncie znaczącą rolę odegrał J. Brożek, tworząc w 1610

roku Katedrę Geodezji na Akademii Krakowskiej. Osobnej uwagi wymaga postać S. Grzepskiego, który w roku 1566 opublikował pierwszą książkę techniczną wydaną w języku polskim: „Geometria to jest miernicka nauka” Rys. 4.



Rys. 4. Karta tytułowa książki Stanisława Grzepskiego
Źródło: [4].

Współcześnie, rozwiązując matematyczne problemy w geodezji, korzystamy z książek i podręczników publikowanych w języku polskim przez wybitnych profesorów: S. Hausbrandta [5], A. Skórczyńskiego [6] i [7], K. A. Czarneckiego [8], J. T. Wędzonego [9]. Ciekawą pozycję stanowi też książka Z. Kurałowicza [10].

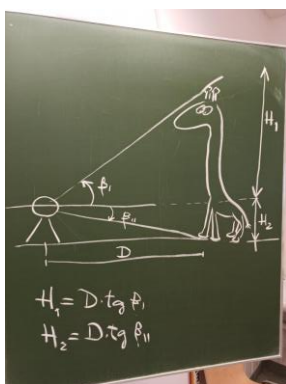
4. Jakich działów matematyki potrzebujemy?

Aktualnie autor pracy prowadzi zajęcia na kierunku *Budownictwo*, z przedmiotu „Geodezja inżynierska”, na kierunku *Inżynieria środowiska* z przedmiotu „Geodezja i GIS” na kierunku *Architektura krajobrazu* z przedmiotu „Geodezja (kartografia i fotointerpretacja)” oraz na kierunku *Gospodarka przestrzenna* z przedmiotów: „Mapy numeryczne”, „Gospodarka nieruchomościami”, „Kataster nieruchomości”, „Rynek

nieruchomości”, „Zarządzanie nieruchomościami”, „Urządzanie terenów rolnych i leśnych”. Wszystkie te działania są związane z koniecznością stosowania metod matematycznych. Poniżej podano hasłowo działy matematyki realizowane podczas zajęć prowadzonych przez autora tego artykułu:

- algebra: w zakresie umiejętności rozwiązywania równań liniowych i kwadratowych;
- geometria: zależności miarowe podstawowych figur i brył;
- trygonometria: posługiwanie się funkcjami trygonometrycznymi w obliczeniach, twierdzenia: sinusów, cosinusów, Pitagorasa;
- geometria analityczna: głównie na płaszczyźnie: współrzędne punktu, równanie prostej, punkt przecięcia prostych, równanie okręgu, obliczenie powierzchni konturu wyznaczonego łamaną zamkniętą ze wzoru Gaussa;
- rachunek różniczkowy: pochodne cząstkowe, niezbędne do użycia w Prawie Gaussa przenoszenia się błędów średnich.

Jest to mocno uproszczony spis. Przykładowo prawo Gaussa przenoszenia błędów średnich jest wykorzystywane podczas analizy dokładności już wykonanych pomiarów albo jeszcze na etapie ich planowania. Te zadania, z punktu widzenia matematyka, mają charakter trywialny. Pokazano tu jednak użyteczność tego, czego się dotychczas studenci nauczyli lub co powinni opanować (zdobywając „kompetencje matematyczne”). Standardowo otrzymują „zadanie z żyrafą”. Zadanie polega na wyznaczeniu wysokości obiektu, mając trzy zmierzone wielkości oraz błędy średnie ich wyznaczenia (równie dobrze - może to być wysokość np. drzewa, budynku, komina), Rys. 5. Najlepiej radzą tu sobie studenci z kierunku architektura krajobrazu i kierunku gospodarka przestrzenna. Taką „bieżącą notatkę” prowadzi tylko ok. 30% studentów, do tego ok. 20% prowadzi „dokumentację fotograficzną”, wykonując zdjęcia komórkami lub tabletami.



Rys. 5. Autorski rysunek na tablicy „obrazek z żyrafą”, prezentujący użyteczność niwelacji metodą trygonometryczną. Zmierzone D, β_1, β_2 . $H_{zyrafy} = H_1 + H_2$, potem wyprowadzamy analizę błędów opierając się o prawo przenoszenia błędów Gaussa
Źródło: archiwum prywatne.

Oprócz przedmiotu „Mapy numeryczne”, gdzie mamy pracownię komputerową z adekwatnym oprogramowaniem (bazujemy tu głównie na programie *WinKalk* - do podstawowych obliczeń XY oraz XYH współrzędnych punktów wyznaczonych na podstawie pomiarów różnymi metodami, z możliwościami projektowania w rozsądnym

zakresie tematycznym, jak też programie *MikroMap* - tu wykonujemy część graficzną opracowania projektu, wraz z automatyczną interpolacją warstw), posilkujemy się kalkulatorami naukowymi. No i tu też się wspólnie uczymy pewnych funkcji kalkulatora. Studenci pracują na własnych kalkulatorach, różnych firm, w różnych konfiguracjach. Często bazują na tych zainstalowanych w smartfonach czy i-phonach. Na poziomie dodawania czy odejmowania sobie radzą. Gorzej jest z obliczaniem wartości funkcji trygonometrycznych. Chodzi tu o jednostki w jakich wyrażamy wartości kątów. W standardzie szkoły podstawowej i średniej - jest to miara stopniowa (tak mają wyskalowane kątomierze), coś też słyszeli o radianach, wiedzą że 14 marca obchodzony jest *Dzień Liczby π* . Podczas zajęć wprowadzamy też dodatkową jednostkę kątową dziesiątą w postaci gradów. Każdy kalkulator naukowy posiada możliwość zmiany trybu jednostek kątowych. Ewentualne przeliczenia też są proste: $2\pi = 360^\circ = 400^g$. Czyli wprost: $1^g = 0,9^\circ$. Albo $1^\circ = 10/9^g$. Podobnie jak w jednym radianie mamy $63,6620^g$ w mierze gradowej.

Powyższe wywody wydają się „sztuką dla sztuki”, ale w standardach jednostek kątowych używanych w Polsce w geodezji - mamy miarę gradową. Stąd wszystkie wytwarzane dokumenty np. w toku budowy i załączane do dziennika budowy będą miały kąty wyrażone w gradach. Taka jest specyfika zawodów inżynierskich.

Odnosnie geometrii analitycznej... To wszystkie nasze opracowania są z nią związane. Realizacja obiektów inżynierskich odbywa się w powiązaniu z granicami nieruchomości, zdefiniowanymi przez współrzędne ortogonalne prostokątne w aktualnie obowiązującym *Państwowym Układzie 2000*. Podstawy tego układu opracował prof. dr inż. Jan Panasiuk (zainteresowanych tematem odsyłam do [11]). Profesor Panasiuk zajmował się głównie kartografią matematyczną, teorią odwzorowań kartograficznych i innymi pobocznymi zagadnieniami w tej tematyce.

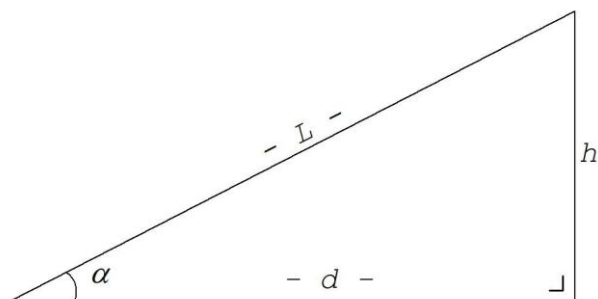
5. Inne nasze zadania

Od kilku lat uczestniczymy w Ogólnopolskim Konkursie „Matematyka stosowana”. Jest on skierowany do uczniów szkół średnich. W finale Konkursu kilkadziesiąt zespołów dwuosobowych (około 25 zespołów, w zależności od wyników kwalifikacji +/- 10) rozwiązuje w sumie siedem zadań, [12]. Stanowimy jeden z etapów Konkursu - na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku, czyli obsługujemy 1/7 Finału Konkursu. Zwykle zadania te są związane z geodezją, mają wymiar teoretyczny (wstęp, wyjaśnienie problemu), czasami są związane z pomiarem w dostępnej podczas pracy przestrzeni, czasami trzeba coś pomierzyć na mapie, bywa też że są już jakieś dane pomiarowe. W każdym z przypadków trzeba dokonać adekwatnych obliczeń (najczęściej związanych z określaniem wartości funkcji trygonometrycznych). Na ile uważamy to za stosowne - podajemy wzory do obliczeń (bo uczestnicy mogą mieć ze sobą tablice matematyczne).

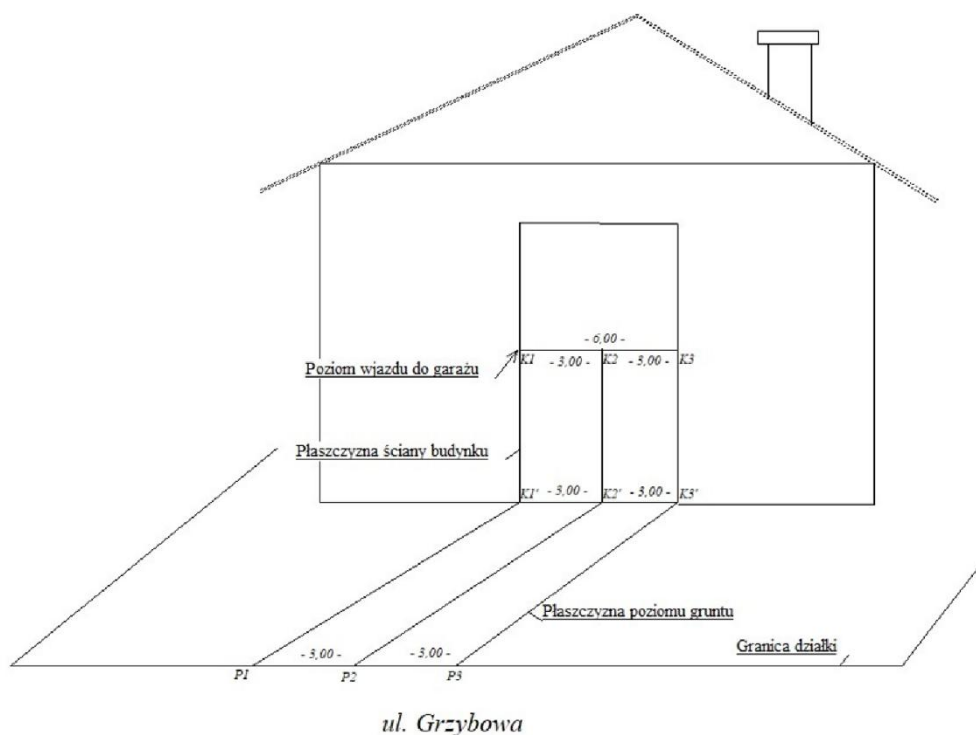
Poniżej przedstawiam kilka przykładów zadań konkursowych. Pierwsze związane jest z niwelacją linii kolejowej dwutorowej.

Zadanie 1. Określ wysokości (rzędnych) charakterystycznych punktów podtorza, nasypów, odwodnień (punkty zaznaczone na czerwono na Rys.6). Odległości podano w metrach, odczyt z laty „1296” jest w milimetrach. Nachylenia zostały podane jako tangens spadku lub w procentach.

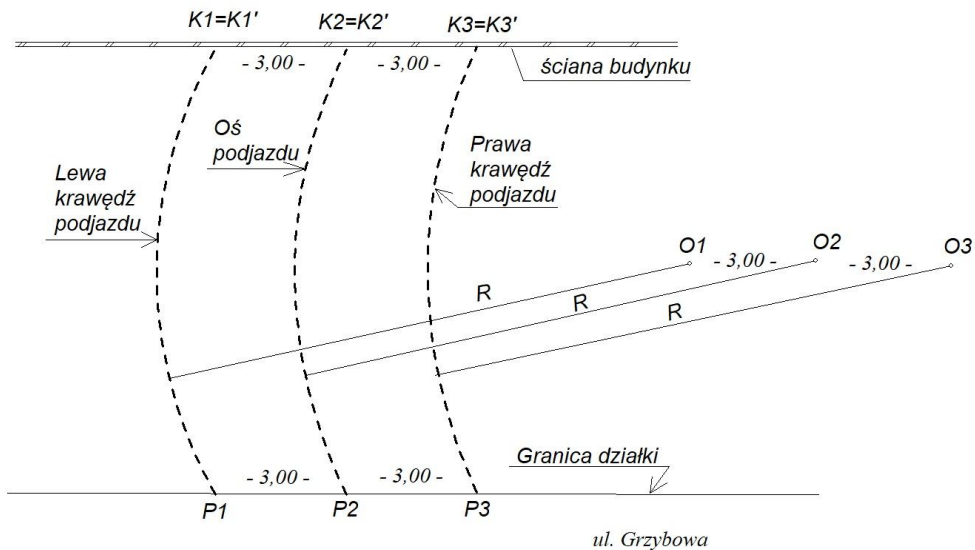
Tego typu rozwiązania stosowane są powszechnie, np. przy podjazdach na wiadukt. Ostrość spadku podjazdu redukuje się łukiem kołowym bądź krzywymi przejściowymi.



Rys. 8. Schemat problemu. Lewy dolny punkt (przy kącie α) jest w granicy działki z drogą. Prawy górny punkt - tam musimy dotrzeć z podjazdem
Źródło: archiwum prywatne.

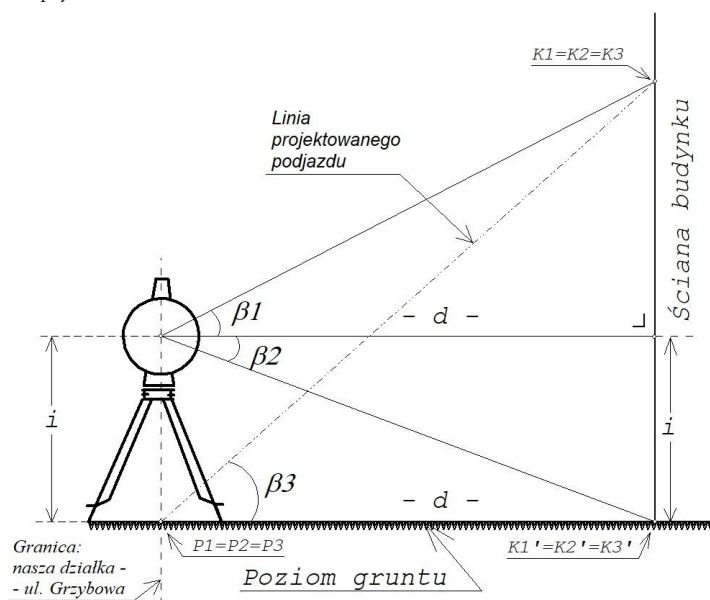


Rys. 9. Przestrzenny widok problemu obliczeniowego
Źródło: archiwum prywatne.



Rys. 10. Proponowane złagodzenie nachylenia podjazdu poprzez poprowadzenie go nie w linii prostej ale po łuku

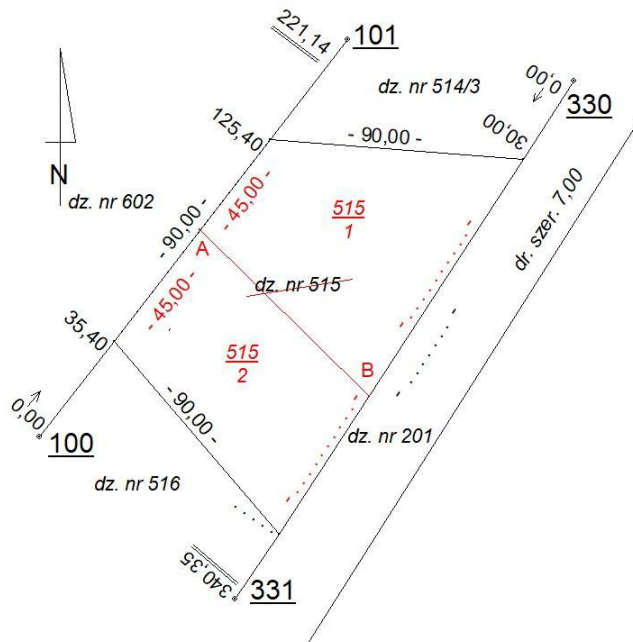
Źródło: archiwum prywatne.



Rys. 11. W toku zadania uczestnicy dokonywali pomiaru kątów pionowych wg schematu

Źródło: archiwum prywatne.

Zadanie 3. (Podział działki nr 515) Należy obliczyć powierzchnię działki 515 oraz wynikowych działek 515/1 i 515/2. Wpisać na szkicu miary, tzw. czołówki w liniach wykropkowanych. Dane są współrzędne punktów 100, 101, 330, 331 (Rys.12). Wynikowe działki 515/1 i 515/2 mają być trapezami, przy czym działka 515/2 ma być równoległobokiem.

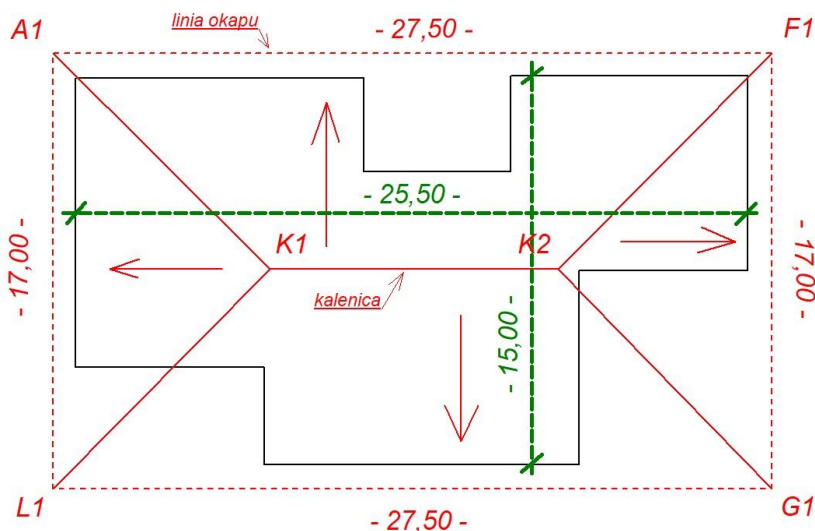


Rys. 12. Zadanie: podział działki nr 515. Dane były współrzędne punktów 100, 101, 330, 331. Wynikowe działki 515/1 i 515/2 miały być trapezami, przy czym działka 515/2 miała być równoległobokiem. Należało obliczyć powierzchnię działki 515 oraz wynikowych działek 515/1 i 515/2 oraz wpisać na szkicu miary, tzw. czołówki w liniach wy kropkowanych
Źródło: archiwum prywatne.

W jednym z prostszych zadań, pokusiliśmy się o obliczenie powierzchni połaci dachowych, w prostym w konstrukcji dachu kopertowym Rys. 13.

Zadanie 4. Oblicz powierzchnię połaci dachowych zwymiarowanych na Rys. 13. oraz koszt zakupu dachówki.

Zadaliśmy w mierze stopniowej spadki połaci dachowych. Dodaliśmy też problem gąsiorów. Kolejnym zadaniem było zakupienie blachodachówki z 25% zapasem, zakup gąsiorów o odpowiedniej długości (tu też podaliśmy orientacyjne koszty zakupu tych materiałów budowlanych). Zgodnie z katalogami wyceny robót budowlanych (prace dekarские), podaliśmy też cennik wykonania tych prac, co uczestnicy Konkursu powinni uwzględnić (bo ostatecznym efektem były te koszty, z tolerancją $\pm 15\%$).



Rys. 13. Obliczenie powierzchni połaci dachowych i kosztu ich wykonania
Źródło: archiwum prywatne.

Bibliografia

- [1] Wikipedia, [dostęp 11.09.2025]
- [2] Ze strony internetowej firmy Topcon, <https://tpi.com.pl/produkt/st-50b>, [dostęp 11.09.2025]
- [3] Ze strony internetowej firmy Pomiar24, https://pomiar24.pl/pl/produkt/szpilki-geodezyjne-300-mm-11-szt-15857.html?gad_source=1&gad_campaignid=22596000130&gbraid=0AAAAACUV7dlpmg4wWpGY0knPDZ13ilk62&gclid=Cj0KCQjwrJTGBhCbARIsANFBfgvVnqyEyz_5Xv-AKpnHULUFE_oHleKgtydmoA8cZM4BmSYuRxb2u9QaAIA1EALw_wcB, [dostęp 11.09.2025]
- [4] <https://www.lodz.sgp.geodezja.org.pl/box/grzepski2017.pdf>, [dostęp 11.09.2025]
- [5] Hausbrandt S., Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne; tom I, Wydawnictwo PPWK Warszawa 1970; tom II, Wydawnictwo PPWK Warszawa, 1971
- [6] Skórczyński A., Podstawy obliczeń geodezyjnych; Wydawnictwo PPWK Warszawa, 1983
- [7] Skórczyński A., Rachunek wyrównawczy; Wydawnictwo PPWK Warszawa, 1985
- [8] Czarnecki K.A., Geodezja współczesna w zarysie; Wydawnictwo Wiedza i Życie, 1994
- [9] Wędzony J.T., Ćwiczenia z rachunku wyrównawczego i metod obliczeń geodezyjnych: skrypty dla studentów wyższych uczelni technicznych; Wydawnictwo PWN Warszawa, 1971
- [10] Kurałowicz Z., Podstawowe obliczenia oraz wybrane ćwiczenia; Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, 2022
- [11] Panasiuk J., Balcerzak J., Pokrowska U.: Wybrane zagadnienia z teorii odwzorowań kartograficznych; Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1999
- [12] Stasiewicz R., W poszukiwaniu matematyki, Problemy dydaktyki matematyki. XX Ogólnopolska Konferencja Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych, Gdynia, 2023

Metoda kreowania potrzeby posiadania kompetencji matematycznych oraz wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki

Agnieszka Lasota

Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Matematyki,
e-mail: a.lasota@im.uz.zgora.pl

Streszczenie

W czasach cyfrowej młodzieży w artykule poddano analizie dwa istotne obszary zagadnień, których opracowanie zostało poprzedzone przeprowadzeniem badania celowego wśród 270 uczniów technikum. Pierwszy umożliwił poddanie analizie poczucia stopnia wykorzystania wiedzy uczniów z matematyki w przyszłości, natomiast drugi ukierunkowany został na poddanie analizie umiejętności wykorzystania sztucznej inteligencji przez uczniów w edukacji. W artykule zaproponowano schemat postępowania według zasady małych kroków ukazujący uczniom potrzebę posiadania kompetencji matematycznych wraz z omówionym przykładem na poziomie kształcenia studentów pierwszego stopnia. Zaproponowany został również algorytm wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki opracowany na bazie wyników przeprowadzonego badania.

Słowa kluczowe: zastosowanie matematyki, schemat przyrostowego kreowania potrzeby, zasada wg małych kroków, kreowanie potrzeby, wykorzystanie AI w nauce matematyki.

1. Wstęp

Pierwszy kontakt z przedmiotem matematyka następuje dopiero w klasie 4 szkoły podstawowej mimo, iż od przedszkola, a następnie w klasach 1-3 realizowana jest edukacja matematyczna w ramach nauczania zintegrowanego. Fakt zetknięcia się, w klasie 4, z matematyką często powoduje weryfikację kompetencji matematycznych ucznia. Jeżeli dochodzi do blokady matematycznej w klasach 4-7, to uczeń stający przed egzaminem ósmoklasisty czuje się bezradny, a rodzice aby rozwiązać problem wysyłają dziecko na korepetycje. Kolejny szok następuje w szkole ponadpodstawowej, w szczególności w technikach i szkołach branżowych. Wśród uczniów króluje twierdzenie: „po co mi to”, „po co mi ta matematyka”, „przecież umiem liczyć”, „poradzę sobie w sklepie”. W momencie zwątpienia uczeń przeważnie otrzymuje informację zwrotną, iż taki jest program nauczania i chcąc ukończyć szkołę musi znać treści programowe. Z kolei w technikach oraz w liceach dodatkowy argument to fakt konieczności zdania matury z obowiązkowej matematyki w zakresie podstawowym, by móc pójść na studia.

Mankamentem poczynionym u podstaw nauczania matematyki jest brak uzmysłowienia uczniom, iż uczą się tego przedmiotu, ponieważ jest on niezbędny w życiu zawodowym. Tym samym absolwent szkoły branżowej, technikum, liceum oraz uczelni

wyższej zobowiązany jest posiadać niezbędny zakres kompetencji matematycznych zgodny z zawodem, który wykonuje. Skoro podstawą istnienia każdego z zawodów jest matematyka, co potwierdza, iż jest ona królową wszystkich nauk, to dlaczego obserwuje się tak globalną niechęć do poznawania treści matematycznych i pozyskiwania kompetencji matematycznych? Kluczem do rozwiązania problemu z pewnością może być wykazanie uczniom i studentom potrzeby nauki matematyki. Dodatkowym składnikiem demotywującym uczniów i przyszłych studentów do poszerzania swoich kompetencji w zakresie umiejętności matematycznych jest obecna łatwość poszukiwania rozwiązań z wykorzystaniem AI, jednak bez gwarancji ich poprawności.

2. Podręczniki i ich transformacje

Wstęp do matematyki [1], *Rachunek różniczkowy i całkowy dla potrzeb przyrodników i techników* z 1936 roku [3], czy *Rachunek różniczkowy i całkowy* z 1929 roku [2], to podręczniki odzwierciedlające jak zmienia się podejście społeczne do nauczania matematyki. Analizując niniejsze podręczniki poznajemy przez kolejne strony klasyczne, rzeczowe i szczegółowe wyjaśnienie poszczególnych zagadnień matematyki, w ówczesnym czasie obowiązujących na tym samym poziomie dla różnych etapów edukacyjnych. Co więcej tylko w jednej z nich, występują tylko dwa nawiązania potwierdzające wykorzystanie prezentowanych treści w codzienności, a mianowicie rozważony został przypadek ugięcia pręta [3, s. 141-142], gdy obciążenie usytuowane jest na końcu pręta oraz w jego środku. Skoro publikacja ta dowodzi braku eksponowania praktycznego zastosowania matematyki w życiu codziennym i zawodowym to dlaczego społeczeństwo pragnęło zagłębiać się w tajniki matematyki a dziś nie? Sedno problemu leży w motywacji, potrzebie i powszechnej wygodzie. Gdy prym wiodła łacina było w dobrym tonie akcentowanie swego wykształcenia humanistycznego i nawet swej matematycznej nieudolności, jednak okres 1960-1980 zmienił podejście społeczne do kompetencji matematycznych. Społeczeństwo uznało za kluczowe dla statusu społecznego powoływanie się na ukończenie szkoły średniej w prestiżowych klasach z matematyką jako głównym przedmiotem [4]. Obecna seria akademicka wydawnictwa GIS to jeden z najbardziej rozpoznawalnych zestawów podręczników w Polsce w środowiskach politechnicznych i uniwersyteckich.

Tab. 1. Porównanie struktur podręczników do matematyki w latach czterdziestych XX wieku z podręcznikami publikowanymi w latach dwudziestych XXI wieku

	Podręcznik do matematyki lata czterdzieste XX wieku	Podręcznik do matematyki lata dwudzieste XXI wieku
Podejście	Podejście formalne i klasyczne – dominowały definicje, twierdzenia i dowody bez kontekstu praktycznego	Podejście problemowe i kontekstowe - matematyka jako narzędzie do rozwiązywania realnych problemów.
Poziomy	Brak rozróżnienia poziomów - podręczniki były pisane dla „wszystkich zdolnych”, bez wyraźnego podziału na poziom podstawowy i rozszerzony.	Zróżnicowanie poziomów i ścieżek edukacyjnych: zakres podstawowy, rozszerzony, podstawowy, ponadpodstawowy (branżowy, technika, licea ogólnokształcące), zawodowy, akademicki.

	Podręcznik do matematyki lata czterdzieste XX wieku	Podręcznik do matematyki lata dwudzieste XXI wieku
Nacisk	Nacisk na pamięciowe opanowanie materiału - uczniowie musieli znać wzory i twierdzenia „na wtyki”.	Wspieranie myślenia, nie pamięci: uczniowie mogą korzystać z tablic wzorów, kalkulatorów, aplikacji.
Zadania	Zadania typowo abstrakcyjne = „udowodnij, że ... „- bez odniesienia do życia codziennego.	Zadania osadzone w rzeczywistości: np. „Oblicz koszt leasingu samochodu przy oprocentowaniu 5%”.
Forma i dostępność	Druk typograficzny: książki były czarno-białe, często bez ilustracji lub ręcznie rysowane. Brak dostępu do źródeł: podręcznik był jedynym źródłem wiedzy.	Kolorowe wydania z grafiką komputerową: wykresy, schematy, infografiki. E-booki, aplikacje, platformy edukacyjne a podręcznik to tylko jedno z wielu narzędzi. Interaktywność: zadania z kodami QR, dostęp do filmów, symulacji, quizów.

Źródło: opracowanie własne

Od 2000 roku seria ta przeszła szereg zmian — zarówno merytorycznych, jak i edytorskich — które odzwierciedlają ewolucję potrzeb edukacyjnych studentów kierunków ścisłych i technicznych. Seria *Analiza matematyczna* autorstwa M. Gewerta i Z. Skoczylasa do 2025 roku [5-8] to przede wszystkim rozbudowa struktury serii. Od początku XXI wieku każdy z tomów doczekał się wielokrotności wydań, co świadczy o ich ciągłej aktualizacji i popularności. Z istotnych zmian merytorycznych należy wskazać ujednolicenie definicji i twierdzeń – w nowszych wydaniach (po 2015 r.) wprowadzono bardziej spójne oznaczenia i precyzyjne sformułowania twierdzeń. Można też dostrzec dodanie przykładów praktycznych, ponieważ od około 2018 roku w zadaniach pojawiają się konteksty fizyczne, ekonomiczne i techniczne (np. przepływ cieczy, optymalizacja kosztów, modelowanie temperatury). Nastąpiło również rozszerzenie działów o zastosowania – np. w rozdziale o całkach oznaczonych dodano zadania dotyczące zastosowań w geometrii i fizyce. Seria podręczników GIS to przykład podręczników, które nie tylko przetrwały próbę czasu, ale też aktywnie dostosowywały się do zmieniających się potrzeb edukacyjnych. Dzięki regularnym aktualizacjom, dodawaniu praktycznych kontekstów i rozbudowie struktury, książki te pozostają obecnie istotnym narzędziem nauczania analizy matematycznej. Serię podręczników z analizy matematycznej uzupełnia równie rozbudowana i doceniana seria podręczników z algebry liniowej i geometrii analitycznej autorstwa T. Jurlewicz i Z. Skoczylas [9-12]. Do 2020 roku kolejne wydania to przede wszystkim aktualizacja treści i rozbudowywanie struktury serii. Dodano więcej zadań egzaminacyjnych i praktycznych, np. z zastosowaniami w fizyce, informatyce, ekonomii, projektowaniu technicznym. Kolejne wydania obu serii ewaluowały z klasycznej, akademickiej prezentacji treści do układu bardziej modularnego, z podziałem na bloki tematyczne. Wydania niestety mają nadal ograniczony zasięg praktyczny, ponieważ obecnie przykładowe zastosowania prezentowane są w zadaniach na końcu omawianego materiału co potwierdza brak czynnika motywacyjnego do przyswajania treści.

Istotną różnicą w motywacji pomiędzy uczniem a studentem jest fakt, iż uczeń do 18 roku życia ma obowiązek nauki, a student chcąc uzyskać wyższe wykształcenie

w obranym przez siebie kierunku musi zaliczyć każdy obowiązkowy i obrany kurs, więc traktuje matematykę jako niezbędne zło konieczne. Brak uzmysłowienia praktycznego zastosowania matematyki dostrzegany jest w literaturze jako jeden z czynników demotywujących do nauki matematyki, usprawiedliwiany jednocześnie faktem występowania w społeczeństwie tzw. „humanistów” i „umysłów ścisłych” [13]. Z kolei [14] podaje, jako istotny motywacyjny czynnik kreowania kompetencji matematycznych, motywację autonomiczną opartą na dokonywaniu wyboru, samodzielnym myśleniu, wzmacnianiu poczucia kompetencji i przynależności, oceny własnych pomysłów, ale i rozwiązywaniu zadań problemowych i otwartych z realnymi sytuacjami. Strategie rozwijania motywacji autonomicznej poddane analizie oraz wzmocnienie samoukierunkowania potwierdziły zasadność prezentacji treści matematycznych w sytuacjach odzwierciedlających życie. Choć zaszła ogromna zmiana (Tab.1), która redefiniuje rolę szkoły, nauczyciela i samej nauki, zapoczątkowana w latach czterdziestych XX wieku, nadal wymagana jest dalsza transformacja. Wiedza, do której kiedyś dostęp mieli nieliczni, dziś jest powszechnie dostępna.

Tab. 2. Porównie założeń nauczania matematyki w latach czterdziestych XX wieku oraz w latach dwudziestych XXI wieku

Aspekt	Lata czterdzieste XX wieku	Lata dwudzieste XXI wieku
Rola nauczyciela	Autorytet, Wykładowca	Mentor, Przewodnik, Moderator
Rola ucznia	Odbiorca wiedzy	Aktywny uczestnik procesu uczenia
Cel nauczania	Opanowanie teorii	Rozwiązywanie problemów, stosowanie wiedzy, kompetencje
Zastosowanie matematyki	Głównie akademickie	Praktyczne, zawodowe, interdyscyplinarne

Źródło: opracowanie własne

Zmieniła się również forma prezentacji, gdyż przestała być już wartością narzuconą z góry przez nauczyciela. Obecnie uczeń poszukuje powodów dla których musi lub powinien się nauczyć wskazanych treści. Uczniowie poszukują odpowiedzi na pytanie „po co mi to?”, gdyż nauczyciel przestał być niekwestionowanym autorytetem (Tab.2).

Warto zauważyć, że skoro struktura klasyfikacji zawodów zawarta w Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 2019 roku [15] w sprawie ogólnych celów i zadań kształcenia w zawodach szkolnictwa branżowego oraz klasyfikacji zawodów szkolnictwa branżowego obowiązuje od 1 września 2019 roku, uwzględnia specyfikę umiejętności zawodowych lub zakres, w jakim umiejętności te są wykorzystywane podczas wykonywania zadań zawodowych, to równie istotnym jest pokazanie przyszłym absolwentom ich zapotrzebowania na wiedzę matematyczną. W dobie Przemysłu 4.0 wykorzystującego interdyscyplinarne zastosowanie matematyki, uczniowi jest jeszcze trudniej to dostrzec. Uczeń potrzebuje uzmysłowienia na przykładach jakim narzędziem jest matematyka, i że z jej pomocą możliwe jest rozwiązanie problemów w zawodzie, w którym się kształci.

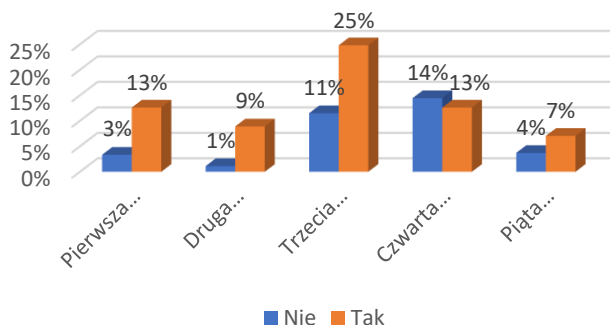
3. Opis próby badawczej

W ramach anonimowej ankiety skierowane do uczniów zostały dwa obszary zagadnień. Pierwszy umożliwił poddanie analizie poczucia wykorzystania wiedzy uczniów w przyszłości, natomiast drugi ukierunkowany został na poddanie analizie umiejętności wykorzystania sztucznej inteligencji w edukacji. Analiza wskazanych zagadnień została przeprowadzona na próbie celowej. Celowość próby została określona ze względu na fakt istotności dotarcia do młodzieży kształcącej się w szkołach ponadpodstawowych, w szczególności określonej wstępnie zawodowo. Taką młodzieżą są osoby uczące się w technikach czyli osoby, które po zakończeniu pięcioletniego cyklu kształcenia i zdaniu egzaminów w wymaganych kwalifikacjach uzyskują tytuł technika w zawodzie, w którym się kształcą oraz mają możliwość przystąpienia do matury. Po jej zdaniu mogą aplikować na studia. Badanie zostało przeprowadzone z wykorzystaniem anonimowej ankiety przesłanej do wszystkich uczniów szkoły za pośrednictwem dziennika. W badaniu wzięło udział 270 uczniów. Spośród respondentów 127 osób stanowiły kobiety co stanowi 47% oraz 143 mężczyzn (53%). Szacowana średnia wieku respondentów to 17 lat uwzględniając liczbę respondentów w poszczególnych klasach i ustawowy wiek ucznia w danej klasie, natomiast odchylenie standardowe wyniosło 3,79. Badanie zostało przeprowadzone w pierwszym tygodniu września 2025 w jednym z techników w województwie lubuskim.

3.1. Poczucie możliwości wykorzystania wiedzy matematycznej w życiu zawodowym

Absolwent szkoły ponadpodstawowej, po zdaniu matury, podejmując studia powinien z optymizmem patrzeć w swoją przyszłość i z przeświadczeniem potrzeby posiadania wiedzy kroczyć przez cały okres studiów.

Celem badania było określenie przeświadczenia uczniów technikum wobec zasadności nauki matematyki względem jej wykorzystania w przyszłej pracy zawodowej.



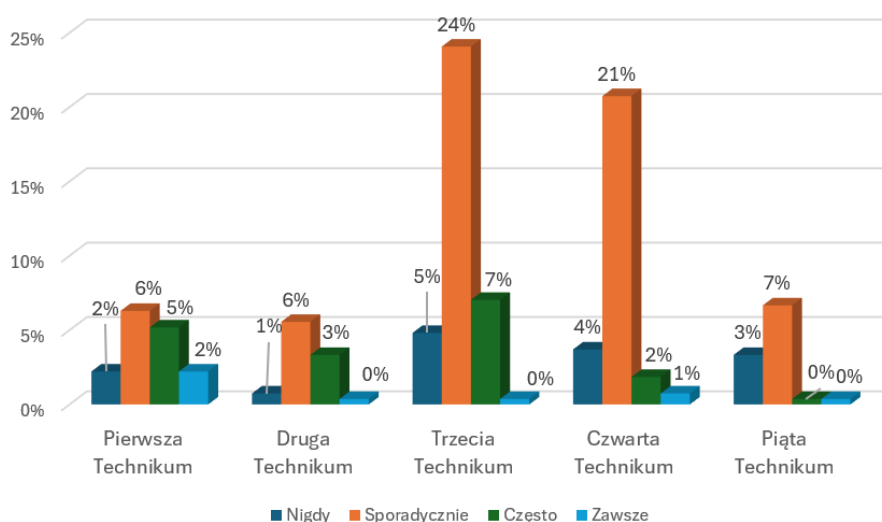
Rys. 1. Poczucie wśród uczniów czy matematyka będzie miała praktyczne wykorzystanie w zawodzie w którym uczniowie się kształcą z uwzględnieniem klasy do której uczęszcza uczeń

Źródło: opracowanie własne na podstawie badania.

Podejmując wskazany cel badań postawiono następującą hipotezę, iż uczniowie klas czwartych i piątych technikum w większym stopniu niż uczniowie klas młodszych (1–3)

dostrzegają zasadność nauki matematyki w kontekście jej wykorzystania w przyszłej pracy zawodowej.

Badania wykazały, iż poczucie potrzeby wykorzystania wiedzy matematycznej w życiu zawodowym ma zaledwie 66% badanych (Rys.1), a tylko 22% określa fakt potrzeby wykorzystywania wiedzy matematycznej jako częsty lub stały (Rys. 2). Postawiona hipoteza okazała się błędna, ponieważ to klasy trzecie w największym stopniu dostrzegają możliwość wykorzystania przyswajanej wiedzy w przyszłości, natomiast nawet łącznie klasy czwarte i piąte nie odnotowały takiej dysproporcji jak w klasach trzecich, w których przeważająca większość jest przekonana o wykorzystaniu umiejętności w pracy zawodowej (Rys. 1).



Rys. 2. Przekonanie uczniów jak często w pracy zawodowej uczniowie będą wykorzystywać to czego uczą się na matematyce z uwzględnieniem stopnia wykorzystania.

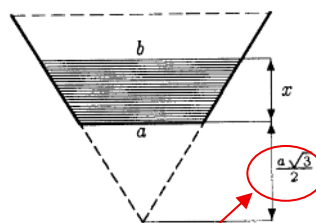
Źródło: opracowanie własne na podstawie badania.

Odmienne sytuacja jednak się kształtuje, jeżeli podda się analizie stopień wykorzystania wiedzy matematycznej w pracy zawodowej, ponieważ zarówno klasy trzecie, czwarte i piąte uważają, że wiedza ta będzie wykorzystywana sporadycznie. Mając na względzie stopień wykorzystania, wiedzy największe przeświadczenie o dalszym wykorzystaniu umiejętności matematycznych posiadają klasy pierwsze, drugie i trzecie (Rys. 2). Uzyskane rezultaty pokazują, iż uczniowie wraz z trwaniem nauki tracą przeświadczenie o jej zasadności.

3.2. Gotowość prezentacji potrzeby znajomości matematyki

Gotowość prezentacji potrzeby znajomości i zastosowania matematyki w pracy zawodowej jest podnoszona w podręcznikach do matematyki zarówno na poziomie ponadpodstawowym jak i akademickim.

Woda płynie w kanale z prędkością $v = 2$ m/s. Znaleźć funkcję określającą ilość wody, jaka przepływa przez ten przekrój w ciągu sekundy, w zależności od głębokości wody. Narysować wykres tej funkcji;



Rys. 3. Przykład 0.10a, Dział Zbiory i funkcje liczbowe str.15
Źródło: [6].

Wzór na wysokość trójkąta równobocznego o boku a

Rozwiązanie

a) W rozwiązaniu stosujemy oznaczenia podane na rysunku. Pole przekroju poprzecznego kanału jest określone wzorem $P(x) = \frac{a+b}{2}x$. Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego mamy $\frac{a\sqrt{3}}{2} + x = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, stąd $b = a + \frac{2}{\sqrt{3}}x$.

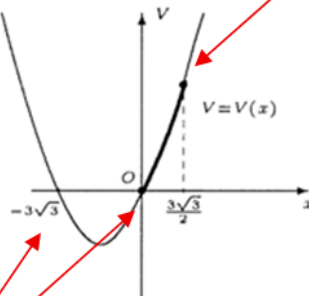
Pole przekroju poprzecznego jest zatem równe

$$P(x) = \frac{a + a + \frac{2}{\sqrt{3}}x}{2}x = \frac{x^2}{\sqrt{3}} + ax,$$

gdzie $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ilość wody, jaka przepływie przez kanał w ciągu sekundy, jest więc równa

$$V(x) = P(x) \cdot v = \left(\frac{x^2}{\sqrt{3}} + 3x\right)2 = \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 6x,$$

gdzie $0 \leq x \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Wykres funkcji V (łuk paraboli) przedstawiono na rysunku.



$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 6x &= 0 \\ x\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + 6\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 \text{ i } \frac{2}{\sqrt{3}}x_2 + 6 = 0 \\ x_1 &= 0 \text{ i } x_2 = -3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias, by uzyskać postać iloczynową równania

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{3}}x^2 + 6x &= 0 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 36 - 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 \\ \sqrt{\Delta} &= 6 \\ x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ i } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 &= \frac{-6 - 6}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} \text{ i } x_2 = \frac{-6 + 6}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}} \\ x_1 &= 0 \text{ i } x_2 = -3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Wyznaczenie x_1 i x_2 tj. pierwiastków równania kwadratowego wg wzoru poprzedzone obliczeniem delty Δ

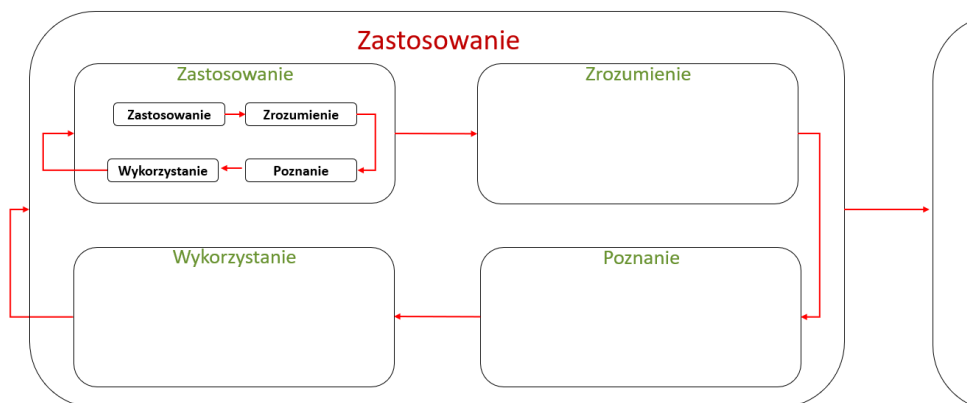
Rys. 4. Opracowanie własne przyrostowego sposobu prezentacji potrzeby na podstawie rozwiązania przykładu 0.10a, Dział Zbiory i funkcje liczbowe, str.15-16
Źródło: [6].

Niestety przykłady praktycznego zastosowania matematyki są umiejscowione w podsumowaniu działów lub w zadaniach rozszerzających treści programowe. Analiza matematyczna 1 Przykłady i zadania [5-7] w pierwszym rozdziale „Zbiory i funkcje

liczbowe” prezentują pierwszy przykład zastosowania omawianej w rozdziale wiedzy dopiero w dziesiątym i jedenastym przykładzie co stanowi dwa ostatnie przykłady. Poddając analizie pierwszy przykład 0.10a, (Rys. 3) zgodnie z zasadą prezentacji zadań przyjętą przez autorów publikacji podany jest przykład a następnie po przejściu do rozwiązań, prezentowane jest rozwiązanie przykładu. Tradycyjnie ideą rozwiązania jest podanie kluczowych kroków niezbędnych do uzyskania wyniku końcowego, co też uczynili autorzy i co jest słusznym podejściem. Jednak w koncepcji prezentacji potrzeby, głównym założeniem ma być prezentacja potrzebnej do poznania wiedzy umożliwiającej w przyszłości wykonywanie tego typu zadań, a także zadań opartych na wiedzy, która zostanie pozyskana podczas nabywania umiejętności rozwiązania danego typu zadania. Przytoczony przykład 0.10a, (Rys. 3), i przytoczone jego rozwiązanie przez autorów (Rys. 4) zostało uzupełnione o komentarz kolorem czerwonym (Rys. 4). Celem działania nie było dyskredytowanie zaproponowanego rozwiązania tylko podanie propozycji prezentacji jak wytłumaczyć słuchaczom potrzebę poznania treści programowych. Przytoczony przykład doskonale nadaje się do wygenerowania zainteresowania osób pragnących w przyszłości być m.in. hydraulikami, geodetami, budowlancami, projektantami architektury w tym architektury zieleni, gdyż w każdym z tych zawodów istotna jest umiejętność wyznaczenia takich parametrów jak szerokość przepływu czy przepustowość przepływu. Słuchacz otrzymuje zadanie, otrzymuje do niego rozwiązanie, a głównym przesłaniem prezentacji treści słuchaczowi nie jest to jak szczegółowo rozwiązać zadanie, ponieważ nie posiada on jeszcze takich kompetencji by zrozumieć sposób rozwiązania, lecz posiada wystarczające kompetencje by zrozumieć tok postępowania. Słuchaczowi należy wskazać, iż by mógł poradzić sobie w przyszłości i by posiadał niezbędne umiejętności w zawodzie, w którym się kształci musi przyrostowo poznać umiejętności, jak w omawianym przykładzie począwszy od pól figur płaskich, poprzez pola i objętość oraz przekrój poprzeczny brył, równania kwadratowe, funkcje kwadratowe, itd.

2.3. Zasada małych kroków – kreowanie potrzeby wykorzystania wiedzy matematycznej w pracy zawodowej

Ze względu na fakt, iż obecnie poczucie potrzeby poszukiwania i przyswajania wiedzy wśród młodzieży jest bardzo często niszczone w wyniku kuszenia treściami i informacjami nacechowanymi przesłaniem, iż po co się męczyć jak można uzyskać ten sam efekt bez zbędnego wysiłku, zasadnym jest wprowadzenie niniejszej koncepcji wg zasady małych kroków. Schemat Zastosowanie – Zrozumienie – Poznanie – Wykorzystanie (Rys. 5) obrazuje zasadę postępowania wg małych kroków. Problem generowania w słuchaczach potrzeby nie zaistniał obecnie wyłącznie na poziomie akademickim, lecz występuje już w szkole podstawowej. Największe jego nasilenie następuje jednak na poziomie ponadpodstawowym. Z tego względu zostało przeprowadzone badanie pilotażowe w technikum. Zostało wykazane na tym poziomie edukacyjnym, że u uczniów występuje szczególnie potrzeba wskazania potrzeby uczenia. Zasada postępowania według małych kroków, zaproponowana zgodnie z opracowanym schematem, zakłada ukazanie słuchaczowi na każdym z kroków, gdy następuje wprowadzanie nowych działów, związku konieczności nabycia podawanych treści z jego przyszłością.



Rys. 5. Schemat przyrostowego kreowania potrzeby Zastosowanie – Zrozumienie – Poznanie – Wykorzystanie

Źródło: Opracowanie własne

Zestawiając opis prezentacji treści (Rys. 5) z zaproponowanym schematem małych kroków (Rys.6) należy wskazać, iż schemat prezentuje przyrostowy sposób uczenia. Zgodnie z zaproponowanym schematem słuchacz na wstępie wprowadzania tematu pola figur dowie się, że dzięki temu będzie mógł obliczyć ilość potrzebnej do zakupu podłogi, co powinno go zmotywować do zrozumienia, dlaczego tyle pól figur musi potrafić liczyć. Dalej motywacja będzie działać na etapie poznawania treści, co przyczyni się do nabycia umiejętności niezbędnych do wykorzystywania wiedzy w praktyce. Zainicjowany cykl przyrostowo wyzwalany będzie do wprowadzania kolejnych treści, np. pola i objętości brył wraz z ich przekrojami. Treści te zostaną poprzedzone ponownie zobrazowaniem praktycznych zastosowań, niezbędnym słuchaczom w ich dalszym życiu bądź w pracy. Odnosząc się do przytoczonego przykładu (Rys. 5) zasadnym jest aby nauczyciel chcąc wprowadzić funkcje kwadratowe, najpierw pokazać uczniom ich zastosowanie. Może to uczynić na przykładzie zawodu hydraulika czy inżyniera środowiska regulującego koryto rzeczne. Chcąc wyznaczyć ilość wody jaka przepływa przez przekrój w ciągu sekundy, należy wyznaczyć funkcję kwadratową. Jednak wcześniej, korzystając ze wzoru na pole trapezu, pole trójkąta, można wyznaczyć wzór na pole przekroju poprzecznego a dalej na objętość co umożliwi wyznaczenie pierwiastków równania kwadratowego dla przyjętej szerokości kanału. Wyznaczenie wskazanych parametrów oraz przebiegu funkcji pozwoli na narysowanie przebiegu funkcji kwadratowej. Jednak by możliwym było przeprowadzenie w ten sposób rozwiązania, każdy w pierwszej kolejności powinien wykazać się umiejętnościami obliczeń na ułamkach. Posiadając te kompetencje, można poznać treści związane z obliczaniem pól figur płaskich. Te umiejętności pozwolą każdemu poradzić sobie ze zrozumieniem zagadnieniem przekroju poprzecznego. Przekrój poprzeczny to również obliczenie wysokości figury, którą uczeń uczy się wraz z poznawaniem pól figur. By móc przejść do funkcji kwadratowej, konieczna jest jeszcze umiejętność wykonywania działań na wyrażeniach algebraicznych. Przytoczony sposób prezentacji zadania pokazuje również sposób przyrostu kompetencji jakie osoba musi osiągnąć, by rozwiązać postawiony problem. Opisany sposób będzie posiadał istotnie mniej składników do rozwiązania zadania na poziomie szkoły podstawowej, więcej na poziomie szkoły

ponadpodstawowej i komplet kompetencji na poziomie akademickim. Dokładnie tak jak działa zasada szczebli edukacyjnych działa zasada schematu małych kroków, z tą tylko istotną różnicą, że uczeń za każdym razem w pierwszej kolejności dla postawionego problemu zakotwiczonego w gospodarce dostrzega jakie kompetencje matematyczne musi posiadać a jakie już posiada. Na podstawie tak wytłumaczonego problemu uczeń posiada motywację do uzupełnienia wiedzy, co stanowi kolejny pakiet do rozbudowania. Czyli na bazie kolejnego przykładu zastosowania uczeń poznaje koncepcję rozwiązania problemu zawodowego lub życiowego i uzupełnia swoją wiedzę o te fragmenty wiedzy których jeszcze nie zna.

3.3. Wykorzystanie sztucznej inteligencji w edukacji

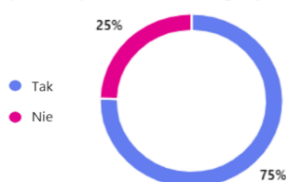
Opisana w punkcie 2.1 grupa respondentów została poddana analizie świadomości wykorzystania sztucznej inteligencji przez młodzież. Celem badania było określenie poziomu świadomości uczniów technikum w zakresie oceny poprawności odpowiedzi generowanych przez sztuczną inteligencję w kontekście nauki matematyki. Postawiono następujące hipotezy w zakresie AI:

Hipoteza nr 1. Uczniowie weryfikujący poprawność podanego przez sztuczną inteligencję rozwiązania czynią to każdorazowo.

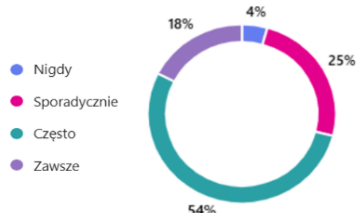
Hipoteza nr 2. Uczniowie są przekonani, że rozumieją sposób rozwiązania prezentowany przez sztuczną inteligencję.

Poczucie potrzeby cyfrowej nie ukształtowało się samoistnie. Dzieci od pierwszego roku życia widywane są z komórką w dłoni, czyli od małości nacechowane są bodźcami cyfrowymi. Wykształcona potrzeba bodźców cyfrowych rozwija się, jednocześnie unicestwiając skłonność osób do skupienia uwagi przez dłuższy czas. Czynniki ten oraz rozwój sztucznej inteligencji dający szybką odpowiedź bez konieczności jej poszukiwania zadecydował o zapotrzebowaniu młodzieży na AI w edukacji (Rys. 6). Fakt ten zadecydował również o konieczności zmiany modelu pracy ze studentem, który już w szkole oczekiwał krótkich zadań i szybkich odpowiedzi. Jednak by zapewnić zasadę prawidłowego wykorzystania AI (Rys. 7) bez uszczerbku dla merytorycznej wiedzy tj. bez przyswojenia sobie halucynacji AI jako błędnego stanu faktycznego należy wyposażyć studentów w umiejętność krytycznego myślenia, ponieważ ograniczenie wykorzystania AI w szkole nie przynosi efektów ze względu na fakt nagminnego, nieudolnego korzystania w domu z AI, którego nie da się kontrolować. Brak krytycznego myślenia tworzy zdezinformowane osoby już dziś, co przełoży się na brak rozwoju Polski w przyszłości. Krytyczne myślenie to ograniczenie „analfabetyzmu” społeczeństwa w przyszłości.

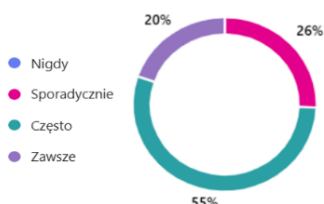
Czy sprawdzasz w podręczniku czy podane odpowiedzi przez sztuczną inteligencję są prawidłowe?



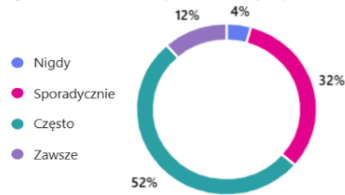
Czy rozumiesz sposób rozwiązania podany przez sztuczną inteligencję?



Jak często sprawdzasz poprawność odpowiedzi sztucznej inteligencji?



Czy zadania rozwiązane przez sztuczną inteligencję są rozwiązywane zgodnie z materiałem prezentowanym przez nauczyciela?



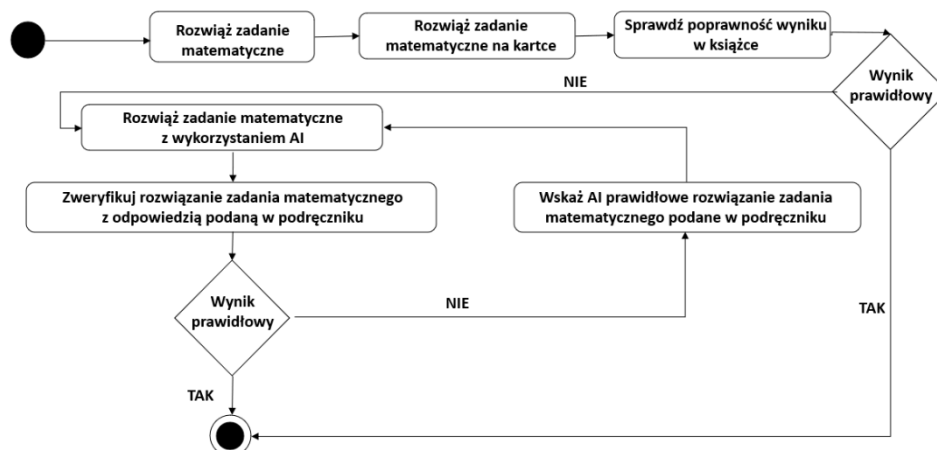
Rys. 6. Stopień współpracy ucznia z AI

Źródło: Opracowanie własne na podstawie badania

Analiza uzyskanych rezultatów wykazała, iż spośród 75% procent respondentów deklarujących, że weryfikują poprawność uzyskiwanych od AI wyników tylko 20% z nich deklaruje, że zawsze sprawdza zwracany wynik. Oznacza to, że postawiona hipoteza nr 1 nie znalazła uzasadnienia. Optymistycznie należy traktować wynik 55% osób często weryfikujących poprawność odpowiedzi uzyskanej od AI. Oznacza to, że osoby te skłonne są zmienić swoje nawyki w celu uzyskania istotnych dowodów. Uzasadnieniem dla tej grupy uczniów będzie ukazanie im jakie błędy popełniać może AI w przypadku, gdy korzystanie z AI nie będzie wiązać się z umiejętnością krytycznego myślenia. Szczególna grupa, która wymaga dodatkowej uwagi to osoby, które deklarują fakt sprawdzania wyników zwracanych przez AI (25% z 75%) jednak w stopniu sporadycznym. Sposobem redukcji zagrożenia z tytułu wiedzy nie opartej na faktach i nauce jest wdrożenie wśród uczniów algorytmu wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki (Rys.7), który pozwoli wyeliminować już na wstępie istotną ilość błędów. Grupa ta może być traktowana w tożsamy sposób z osobami, które deklarowały, że nie sprawdzają wyników, co stanowi 44%.

Hipoteza nr 2 została potwierdzona częściowo, ponieważ ponad 50% respondentów twierdzi, że rozumie sposób rozwiązania podany przez sztuczną inteligencję oraz to, że sposób rozwiązania podany przez AI odpowiada sposobowi podanemu w klasie przez nauczyciela. Do grupy tej należy również zaliczyć osoby deklarujące taki stan jako nieprzerwany. Zagrożenie dla właściwych zachowań poznawczych z pewnością stanowi grupa 25% respondentów, która sporadycznie rozumie treści podawane przez AI. Z kolei 32% respondentów potwierdza, że sposób rozwiązania podany przez sztuczną inteligencję nie jest spójny z tokiem prezentowanym przez nauczyciela. Algorytm wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki zmusza ucznia do weryfikacji odpowiedzi AI w sprawdzonym źródle informacji jak podręcznik. Dodatkowo wskazuje uczniowi, że powinien uprzednio zweryfikować swoje umiejętności poprzez samodzielne rozwiązanie zadania w pierwszej kolejności, następnie zweryfikować rozwiązanie

w książce w odpowiedziach, a dopiero później skorzystać z pomocy AI. Uczeń tak długo powinien weryfikować i dopytywać AI o rozwiązanie, dopóki wynik podany przez AI nie jest zgodny z wynikiem podanym w podręczniku.



Rys. 7. Algorytm wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki

Źródło: Opracowanie własne

Podsumowanie

Wdrożenie zasady małych kroków zgodnie ze schematem postępowania Zastosowanie – Zrozumienie – Poznanie – Wykorzystanie (Rys. 5) na poziomie akademickim to doskonały moment i jednocześnie ostatni na uświadomienie studentom jak istotna w ich życiu jest matematyka i jak niezbędne miejsce w ich zawodzie znajduje. Jest to ten moment edukacji, w którym student wkracza w całki, różniczkę i szereg równie istotnych pojęć, jak liczby zespolone. Tym trudniej bez zrozumienia praktycznego zastosowania treści matematycznych koniecznych do poznania jest studentowi je zapamiętać i zrozumieć. Zarówno schemat postępowania wg małych kroków, jak i algorytm wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki nie wymaga żadnych zmian ustawowych, zmian w podstawach programowych czy innych rozporządzeń. Zaproponowane rozwiązanie jednak zmienia społeczną świadomość i kształtuje od nowa potrzebę przynależności do środowiska, w którym przez kolejne lata będzie kształtować się i rozwijać dana osoba. Co więcej metoda małych kroków wraz z algorytmem wykorzystania sztucznej inteligencji w nauce matematyki zwiększa odpowiedzialność jednostki. Algorytm pozwoli podążać za korzyściami płynącymi z faktu, iż sztuczna inteligencja przyspiesza proces przygotowania materiałów, opracowania zagadnień dla osób, które posiadają wiedzę dziedzinową. Dzięki temu AI będzie mogła być wykorzystywana w procesie kształcenia będąc przydatna w obszarze zrozumienia zagadnień pod warunkiem sprawdzenia przez korzystającego minimum wyniku końcowego w rzetelnym źródle.

Bibliografia

- [1] Whitehead A. N., Wstęp do matematyki, Biblioteka Naukowa Wendego, 1914
- [2] Banach S., Rachunek różniczkowy i całkowy tom I, Wydawnictwo Zakładu Narodowego Imienia Ossolińskich, Lwów, 1929
- [3] Łomnicki A., Rachunek różniczkowy i całkowy dla potrzeb przyrodników i techników tom III Szeregi nieskończone – równania różniczkowe, geometria różniczkowa, Polska Akademia Umiejętności, Kraków, 1936
- [4] Krygowska Z., Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie. Prace monograficzne Nr XLVI, 1981
- [5] Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory, Wydanie XI, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2001
- [6] Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Wydanie X, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2001
- [7] Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1. Definicje, twierdzenia, wzory, Wydanie XXXI, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2024
- [8] Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1. Przykłady i zadania, Wydanie XXX, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2024
- [9] Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory, Wydanie VIII, Wrocław, 2001
- [10] Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania, Wydanie VII, Wrocław, 2001
- [11] Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory, Wydanie XXV, Wrocław, 2024
- [12] Jurlewicz T., Skoczylas Z., Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania, Wydanie XXV, Wrocław, 2024
- [13] Baczko–Dombi A., Ucieczka od matematyki. Rekonstrukcja procesu w kontekście społecznego wizerunku przedmiotu, „Edukacja”, 1 (140), 39–54, 2017
- [14] Oszwa U., Motywacja w edukacji matematycznej, Perspektywa teorii samoukierunkowania, Wydawnictwo Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej, 2025
- [15] Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 15 lutego 2019 r. w sprawie ogólnych celów i zadań kształcenia w zawodach szkolnictwa branżowego oraz klasyfikacji zawodów szkolnictwa branżowego, Dz.U. 2019 poz. 316

Rozdział 3.

Ocena efektów i doskonalenie akademickiej dydaktyki matematyki

Próba pomiaru przyrostu wiedzy i umiejętności matematycznych studentów uczelni technicznych

Lech Kujawski

Politechnika Gdańska, Centrum Matematyki,
e-mail: lech.kujawski@pg.edu.pl

Streszczenie

Począwszy od 2007 roku na Politechnice Gdańskiej przeprowadzany jest sprawdzian wiedzy z matematyki zwany *testem kompetencji* sprawdzający wiedzę „wyściową” nowo przyjętych studentów. Pomiar wyników uzyskiwanych w teście kompetencji oraz wyników egzaminu po pierwszym semestrze pozwalają na próbę oceny przyrostu wiedzy i umiejętności matematycznych studentów pierwszego roku. Celem artykułu jest próba pomiaru przyrostu wiedzy i umiejętności matematycznych studentów Politechniki Gdańskiej po pierwszym semestrze zajęć z matematyki w roku akademickim 2024/2025. Do pomiaru nieobserwowalnej zmiennej jaką jest wiedza i umiejętności matematyczne zastosowano uporządkowany model logitowy. Narzędzie to pozwoliło na pomiar edukacyjnej wartości dodanej (EWD). Uzyskana dodatnia wartość EWD wskazuje na faktyczną poprawę umiejętności i przyrost wiedzy studentów.

Słowa kluczowe: edukacyjna wartość dodana, uporządkowany model logitowy, pomiar przyrostu wiedzy i umiejętności.

1. Wstęp

Rokrocznie, od października 2007, Centrum Matematyki Politechniki Gdańskiej przygotowuje tzw. testy kompetencji. Są to sprawdziany wiedzy obligatoryjnie pisane przez wszystkich studentów pierwszego semestru studiów stacjonarnych na pierwszych ćwiczeniach z matematyki. Sprawdzian trwa ok. 40 minut i zawiera wyłącznie treści zawarte w podstawie programowej z matematyki na poziomie podstawowym. Zadania na sprawdzianie są otwarte i obejmują swoją tematyką głównie zagadnienia z algebry i analizy matematycznej, m. in.

- rozumienie pojęć związanych z funkcjami (miejsce zerowe, argument, wartość funkcji)
- opisywanie własności funkcji na podstawie wykresu
- wyznaczanie dziedziny funkcji
- wykonywanie działań na potęgach
- znajomość własności i twierdzeń o logarytmach
- podstawowe informacje o ciągach liczbowych (w tym ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny)
- rozwiązywanie układów równań liniowych
- elementy trygonometrii.

Ze sprawdzianu można otrzymać maksymalnie 25 punktów i uznaje się, że jest on zaliczony, gdy student otrzyma co najmniej 12.5 punktów. Wynik sprawdzianu nie jest brany pod uwagę przy zaliczeniu przedmiotu; ma być dla osoby prowadzącej ćwiczenia informacją o poziomie wiedzy grupy studenckiej. Zadania – choć łatwe – sprawiają niektórym studentom wiele trudu. Warto podkreślić, że od czasu pisania egzaminu maturalnego do momentu rozpoczęcia studiów mija prawie pięć miesięcy i – jeśli umiejętności matematyczne wyniesione ze szkoły ponadpodstawowej nie są dostatecznie ugruntowane – wiele zagadnień i wzorów uleciało piszącym z pamięci. Należy mieć również na uwadze fakt, że podczas egzaminu maturalnego abiturienti korzystają z karty przygotowanej przez Centralną Komisję Edukacyjną zawierającej wybrane wzory matematyczne; podczas pisania testu kompetencji nie używają żadnych materiałów stanowiących jakkolwiek pomoc.

Na kartce z zadaniami znajduje się tabela i każdy piszący student jest proszony o jej uzupełnienie. Oprócz imienia, nazwiska i nazwy kierunku studiów jest pytanie o notę procentową z egzaminu maturalnego z matematyki, pisanego zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym (jeśli student do takowego przystępował) oraz o rodzaj szkoły ponadpodstawowej, którą ukończył (liceum ogólnokształcące, technikum, inne).

Osoba czytająca i poprawiająca testy kompetencji otrzymuje do każdego zestawu klucz odpowiedzi wraz z punktacją. Wszystkie te dane, czyli liczba punktów z testu, nota procentowa z egzaminu maturalnego i rodzaj zdawanej matury oraz rodzaj ukończonej szkoły, zbierane są do zbiorczego arkusza i analizowane. Dają one możliwość porównania rok do roku poziomu wiedzy i umiejętności matematycznych nowoprzyjętych studentów.

Dysponując danymi odnoszącymi się do wyników testów kompetencji studentów pierwszego semestru studiów stacjonarnych na Politechnice Gdańskiej oraz wynikami egzaminu z matematyki po pierwszym semestrze tychże osób istnieje możliwość analizy porównawczej wyników testu kompetencji i wyników egzaminu, co umożliwia podjęcie próby wyliczenia edukacyjnej wartości dodanej (EWD). Wyznaczenie owego EWD jest głównym celem niniejszego opracowania.

Jak zostało zasygnalizowane we wstępie, analiza przeprowadzona została na podstawie zbioru wyników uzyskanych w czasie testu kompetencji i egzaminu z matematyki po pierwszym semestrze studiów na Politechnice Gdańskiej w roku akademickim 2024/2025. W bazie do dyspozycji było 2358 rekordów, dla 100 rekordów zawierających informacje o egzaminie nie była dostępna informacja o punktacji uzyskanej w czasie testu kompetencji, rekordy te zostały ostatecznie usunięte z bazy. Indywidualne informacje o wynikach testu kompetencji dostępne były w postaci liczby punktów uzyskanych na sprawdzianie (jako liczba z przedziału $< 0, 25 >$), natomiast informacje o wynikach egzaminu dostępne były w postaci uzyskanej oceny (jako liczba ze zbioru 2, 3, 3.5, 4, 4.5, 5).

2. Edukacyjna wartość dodana

Jednym ze sposobów pomiaru przyrost wiedzy i umiejętności jest wyznaczenie edukacyjnej wartości dodanej. W literaturze przedmiotu nazwa edukacyjna wartość dodana (EWD) funkcjonuje przynajmniej w trzech znaczeniach (por.[1]):

- (1) metody statystycznej;
- (2) wskaźnika efektywności nauczania;
- (3) przyrostu wiedzy uczniów.

Jako metoda statystyczna EWD pozwala wyliczyć odpowiednie wskaźniki efektywności nauczania potocznie utożsamiane z pomiarem przyrostu wiedzy uczniów/studentów.

Metodą statystyczną stosowaną do szacowania EWD jest model regresji liniowej (por.[2]), w którym to modelu zmienną zależną są najnowsze dostępne wyniki sprawdzianu a rolę zmiennej niezależnej pełnią wyniki sprawdzianu wcześniejszego. W takim przypadku EWD dla pojedynczego ucznia wyliczana jest jako różnica między wartością empiryczną a teoretyczną wynikającą z modelu (tu utożsamianymi z prognozą), gdzie dodatnia różnica wskazuje na osiągnięcie lepszego wyniku niż prognozowany i utożsamiana jest z dodatnią EWD.

Przy zastosowaniu modelu regresji liniowej jako metody wyznaczania EWD, sam wskaźnik efektywności nauczania danej placówki obliczany jest jako średnia arytmetyczna różnic wartości empirycznych i prognoz uzyskanych z modelu teoretycznego, w istocie EWD jako wskaźnik jest niczym innym jak średnią arytmetyczną błędów prognoz *ex post*, a jej wartość wskazuje na przyrost wiedzy uczniów.

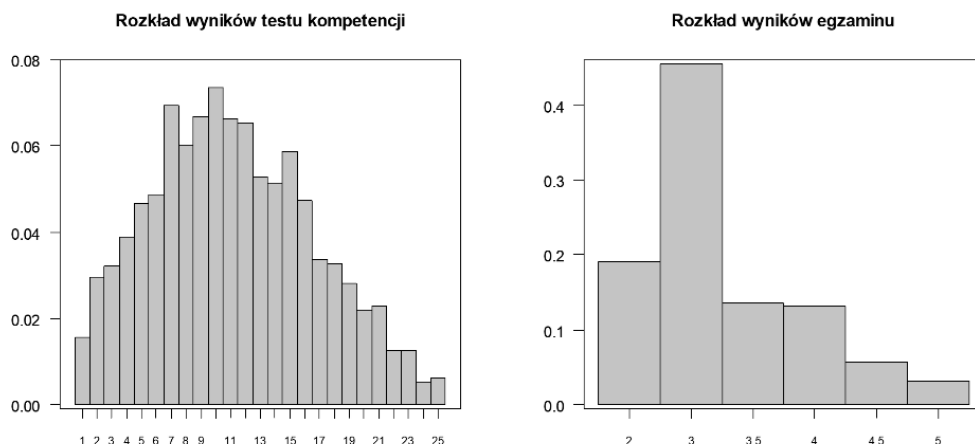
Zastosowanie modelu regresji liniowej wymaga jednak użycia zmiennych w skali ilorazowej, i o ile quasi-ciągła zmienna będąca wynikiem sprawdzianu kompetencji wyrażonym w postaci frakcji wyniku uzyskanego w stosunku do maksymalnej liczby punktów możliwych do uzyskania na sprawdzianie, może być uznana za zmienną w takiej skali wyrażoną, to ocena uzyskana na egzaminie w skali ilorazowej wyrażona nie jest, w najlepszym przypadku można się zgodzić na skalę porządkową bądź interwałową. To wyklucza zastosowanie modelu regresji liniowej do wyznaczenia EWD w niniejszym badaniu.

Właściwym modelem regresji jest wówczas model, w którym zakłada się *explicite* występowanie zmiennych zależnych dostępnych w skali porządkowej. W literaturze przedmiotu wyróżnia się dwa takie typy modeli (por.[3]), są to uporządkowane modele logitowe bądź probitowe, przy czym na potrzeby niniejszego badania, z uwagi na mniej wymagające założenia odnośnie procesu generującego dane, wybrano uporządkowany model logitowy. Model taki umożliwia wyliczenie prawdopodobieństw warunkowych uzyskania poszczególnych ocen na egzaminie końcowym, warunkowych względem informacji zawartej w wektorze obserwacji na zmiennych niezależnych (w tym przypadku równoważnych z wynikami sprawdzianu kompetencji), które to prawdopodobieństwa pozwalają na wyliczenie indywidualnie dla każdego studenta wartości oczekiwanej wyniku egzaminu. EWD jest wówczas liczone jako średnia arytmetyczna różnic indywidualnie wyznaczanych wartości oczekiwanych i faktycznych wyników uzyskanych na egzaminie.

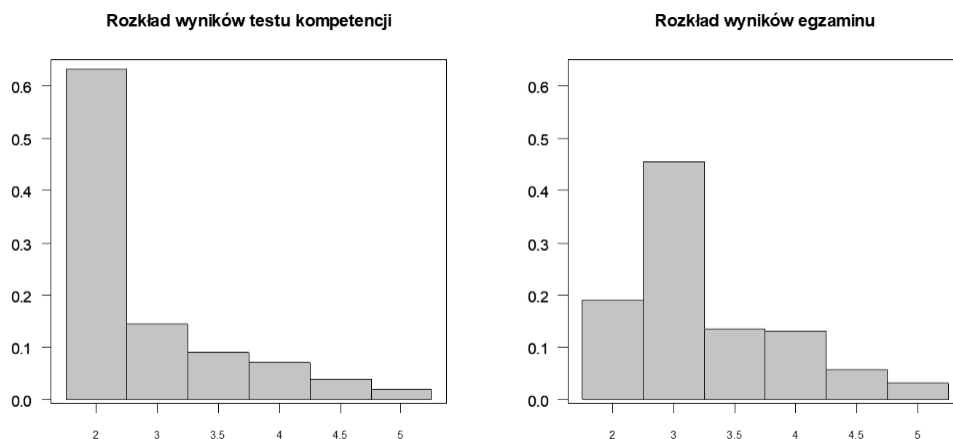
3. Wyniki

Rysunek 1. obrazuje empiryczne rozkłady częstości względnych wyników testu kompetencji i wyników egzaminu z matematyki po pierwszym semestrze. Porównanie obu rozkładów jest kłopotliwe, ze względu na różne skale pomiarowe, gdyż jak wcześniej sygnalizowano, testy kompetencji mierzone są w skali $< 0, 25 >$, natomiast wyniki egzaminu w skali 2, 3, 3.5, 4, 4.5, 5. Na potrzeby łatwiejszego porównania wyników jak i wizualizacji wyników, rezultaty testu kompetencji zostały skategoryzowane i zamienione

na skalę porządkową¹, czyli taką w jakiej wyrażone są rezultaty egzaminu, szczególnie prezentowane są na rysunku 2.



Rys. 1. Rozkłady empiryczne liczb punktów testu kompetencji i wyników egzaminu.
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Rozkłady empiryczne wyników testu kompetencji i wyników egzaminu.
Źródło: opracowanie własne.

Powyższe rozkłady zawarte zostały w tabeli 1, dodatkowo w tabeli tej wyznaczono dystrybuanty empiryczne obu rozkładów.

¹ Ocena niedostateczna (tj. 2) przypisana została wszystkim wynikom testu kompetencji mieszczącym się w przedziale $<0\%, 50\%$ punktów, ocena dostateczna (3) przypadła na wyniki z przedziału $(50\%, 60\%]$ punktów, punktacja z przedziału $(60\%, 70\%]$ dawała ocenę dostateczną z plusem (3.5), oceny rosły o 0.5 co dziesięć punktów procentowych, ostatecznie ocena bardzo dobra przypadła na noty z przedziału $(90\%, 100\%]$.

Tab. 1. Rozkłady empiryczne wyników testu kompetencji i wyników egzaminu wraz z ich dystrybuantami empirycznymi.

ocena	test kompetencji		egzamin	
	udział proc.	cum	udział proc.	cum
2	63.3%	63.3%	19.0%	19.0%
3	14.6%	77.9%	45.4%	64.4%
3.5	9.1%	87.0%	13.6%	78.0%
4	7.1%	94.1%	13.1%	91.1%
4.5	3.9%	98.0%	5.7%	96.8%
5	2.0%	100.0%	3.2%	100.0%

Zródło: opracowanie własne.

Porównując oba rozkłady, można stwierdzić, że 63.3% studentów nie zaliczyło testu kompetencji, jednocześnie 19.0% studentów nie zaliczyło egzaminu z matematyki po pierwszym semestrze, jest to jednoznaczne ze stwierdzeniem, że 36.7% studentów zaliczyło test kompetencji i jednocześnie 81.0% studentów zaliczyło egzamin z matematyki. Dominacja stochastyczna (pierwszego stopnia, por.[3]) rozkładu wyników egzaminu nad wynikami testu kompetencji jest bezsprzeczna, wyższe prawdopodobieństwa uzyskania lepszych ocen z egzaminu występują przy każdej z ocen pozytywnych, w efekcie należy spodziewać się sumarycznego dodatniego EDW.

Obliczenie EDW rozpoczyna się od oszacowania uporządkowanego modelu logitowego, w którym zmienną zależną są wyniki egzaminu natomiast zmienną niezależną wyniki testu kompetencji. Model ten pozwala na estymację warunkowych prawdopodobieństw uzyskania określonej oceny z egzaminu, pod warunkiem uzyskania określonej oceny z testu kompetencji. Macierz prawdopodobieństw warunkowych prezentowana jest w tabeli 2

Tab.2. Teoretyczne prawdopodobieństwa warunkowe uzyskania poszczególnych ocen na egzaminie z matematyki.

	2	3	3.5	4	4.5	5
2	26.5%	52.8%	10.5%	7.1%	2.2%	1.0%
3	10.1%	44.3%	18.8%	17.3%	6.5%	3.1%
3.5	6.6%	36.4%	20.3%	22.4%	9.5%	4.8%
4	3.5%	24.3%	19.0%	28.5%	15.6%	9.1%
4.5	1.8%	14.7%	14.6%	29.9%	22.7%	16.3%
5	1.3%	11.0%	11.9%	28.3%	25.9%	21.6%

Zródło: opracowanie własne.

Wygodnym sposobem analizy wyników zebranych w tabeli drugiej jest odniesienie się do jej poszczególnych wierszy. Przykładowo pierwszy wiersz wskazuje, iż dla studenta który otrzymał ocenę niedostateczną na teście kompetencji (kolumna skrajna lewa)

istnieje prawdopodobieństwo o mierze 0.265 otrzymania oceny niedostatecznej na egzaminie, prawdopodobieństwo o mierze 0.528 otrzymania oceny dostatecznej, prawdopodobieństwo o mierze 0.105 otrzymania oceny dostatecznej z plusem; wartości 0.071, 0.022, 0.001 są warunkowymi prawdopodobieństwami otrzymania ocen od dobrej, poprzez dobrą z plusem aż do bardzo dobrej. Wyniki powyższe mogą być interpretowane w kategorii szans, wówczas należałoby stwierdzić, że student, który nie zdał testu kompetencji ma 26.5% szans na niezdanie egzaminu, pozostałe wyniki interpretuje się wówczas analogicznie.

Pogłębiona analiza wyników zawartych w tabeli drugiej pozwala stwierdzić, że student który nie zaliczył testu kompetencji ma 73.5% szans na zdanie egzaminu, czyli uzyskanie na egzaminie oceny lepszej, dla takich osób dodatnia EWD jest bezsporna. Nie jest to już tak oczywiste dla osób, które na teście kompetencji uzyskały ocenę lepszą niż niedostateczna. Przykładowo osoby z oceną dostateczną na teście kompetencji notują jedynie 45.7% szans na lepszą ocenę egzaminacyjną niż ocena dostateczna. Szanse te maleją wraz z coraz lepszymi notami z testu kompetencji. Malejące szanse uzyskania lepszych wyników egzaminacyjnych są powodem dla którego EWD zostanie wyznaczona nie tylko całościowo tj. dla ogółu studentów, lecz również warunkowo, w zależności od wyników testu kompetencji.

Ponadto, warto zwrócić uwagę, że prawdopodobieństwa zawarte w tabeli 2 są wartościami teoretycznymi, wynikającymi z modelu, są zarazem podstawą do obliczenia warunkowych i bezwarunkowych teoretycznych wartości oczekiwanych wyników egzaminacyjnych, które porównane i zróżnicowane z empirycznymi wartościami oczekiwanymi są podstawą do wyliczenia EWD. Wyniki obliczeń prezentowane są w tabeli 3.

Tab.3. Edukacyjna wartość dodana po pierwszym semestrze nauki matematyki na Politechnice Gdańskiej w roku akademickim 2024/2025 wyznaczona na podstawie uporządkowanego modelu logitowego.

ocena/ /warunek	wartości		EWD	EWD [%]
	empiryczne	teoretyczne		
2	2.9126	2.9114	0.0012	0.04%
3	3.3343	3.3263	0.0081	0.24%
3.5	3.5000	3.4981	0.0019	0.05%
4	3.7688	3.7600	0.0088	0.23%
4.5	4.0449	4.0207	0.0242	0.60%
5	4.1591	4.1497	0.0094	0.23%
ogółem	3.4000	3.3930	0.0070	0.21%

Zródło: opracowanie własne.

Wyniki zebrane w tabeli 3 sugerują, że najwyższą EWD uzyskano dla studentów takich, którzy na teście kompetencji uzyskali notę dobrą z plusem, najniższą EWD odnotowano dla studentów, którzy nie zaliczyli testu kompetencji. Z uwagi na nieliniowy charakter modelu użyty w badaniach, sama wartość EWD nie ma tradycyjnej interpretacji, niemniej

jej dodatnia wartość wskazuje na pozytywne efekty nauki matematyki na Politechnice Gdańskiej w pierwszym semestrze roku akademickim 2024/2025.

W przyszłych badaniach planowane jest porównanie EWD w czasie, czyli porównanie wyników uzyskanych w roku akademickim 2024/2025 z latami poprzedzającymi (pełne dane odnoszące się do wyników egzaminu dostępne są począwszy od roku akademickiego 2023/2024) i następującymi.

Bibliografia

- [1] Dolata R. (red.), Metoda edukacyjnej wartości dodanej w Polsce, s.145-219.
- [2] Jakubowski M., Implementing Value-Added Models of School Assessment, EUI Working Papers, 2008, s.1-21.
- [3] Levy H., Stochastic Dominance. Investment Decision Making under Uncertainty, Springer Cham, 2015, s.41-124.
- [4] Gruszczyński M., Mikroekonometria. Modele i metody analizy danych indywidualnych, Wolters Kluwer, 2012, s.93-128.

Matematyka w duchu rywalizacji – Turniej MateMaxus jako know-how w rozwijaniu talentów matematycznych

Marek Siłuszyk^{1,2}, Katarzyna Karpiarz³, Agnieszka Protasiuk⁴

¹ Uniwersytet w Siedlcach,

² Lotnicza Akademia Wojskowa w Dęblinie

^{1,2} e-mail: marek.siluszyk@uws.edu.pl, m.siluszyk@law.mil.pl

³ Zespół Szkół Ponadpodstawowych nr 3 im. Stanisława Staszica Siedlcach

e-mail: katarzynakarpiarz1987@gmail.com

⁴ Szkoła Podstawowa nr 4 im. Adama Mickiewicza w Siedlcach

e-mail: aprotasiuk@gmail.com

Streszczenie

Turniej MateMaxus został zainicjowany w 2017 roku jako wspólne przedsięwzięcie Instytutu Matematyki Uniwersytetu w Siedlcach oraz Szkoły Podstawowej nr 4 w Siedlcach im. Adama Mickiewicza w Siedlcach. W trzeciej edycji, zrealizowanej w 2019 roku, do grona współorganizatorów dołączył Zespół Szkół Ponadpodstawowych nr 3 im. Stanisława Staszica w Siedlcach. Wydarzenie przyjęło formę rywalizacji drużynowej prowadzonej w systemie pucharowym. Podstawę turnieju stanowią zadania o charakterze interdyscyplinarnym, obejmujące treści matematyczne wzbogacone o elementy fizyki, informatyki i techniki. Tego rodzaju konstrukcja umożliwia równoczesne kształtowanie wiedzy matematycznej i umiejętności analitycznych. Wspiera również rozwój kompetencji społecznych. W artykule przedstawiono genezę i strukturę organizacyjną turnieju, charakterystykę opracowywanych zadań oraz wskazano kompetencje rozwijane w toku uczestnictwa. Omówiono również obserwowane rezultaty dydaktyczne oraz możliwości adaptacji przyjętych rozwiązań w odmiennych kontekstach edukacyjnych. Artykuł prezentuje metodyczne rozwiązanie w zakresie organizacji interdyscyplinarnej rywalizacji edukacyjnej, które może stanowić praktyczny wzorzec postępowania (know-how). Przedstawiona koncepcja może być wdrożona w innych placówkach oświatowych, umożliwiając adaptację i replikację wypracowanego modelu.

Słowa kluczowe: matematyka, dydaktyka, konkurs, turniej MateMaxus, rywalizacja, edukacja.

Wstęp

Rywalizacja stanowi naturalny element rozwoju człowieka – od sportu, poprzez sztukę, aż po naukę. W dydaktyce matematyki konkursy i turnieje pełnią podwójną rolę: z jednej strony motywują uczniów do wysiłku intelektualnego, z drugiej zaś pozwalają odkrywać i rozwijać talenty. Celem artykułu jest przedstawienie Turnieju MateMaxus jako przykładu innowacyjnej praktyki dydaktycznej, która łączy zespołowość, interdyscyplinarność i format pucharowy. Badania dydaktyczne wskazują, że rywalizacja może wspierać motywację wewnętrzną, o ile odbywa się w atmosferze współpracy

i wsparcia. Turnieje drużynowe sprzyjają rozwijaniu tzw. kompetencji XXI wieku: krytycznego myślenia, komunikacji i kooperacji. W tym kontekście MateMaxus łączy mechanizmy rywalizacji z pracą w grupie i zadaniami problemowymi [6].

1. Przegląd literatury

Celem przeglądu literatury jest syntetyczne przedstawienie dotychczasowych badań dotyczących wpływu konkursów matematycznych oraz zróżnicowanych form pracy z uczniami uzdolnionymi na rozwój ich kompetencji poznawczych, motywacyjnych i społecznych. Analizowane opracowania potwierdzają, że udział w tego typu inicjatywach stanowi istotny czynnik wspierający zarówno rozwój intelektualny, jak i postawy sprzyjające uczeniu się przez całe życie. W badaniach [1] wykazano, że uczestnictwo w konkursach matematycznych istotnie wzmacnia motywację wewnętrzną uczniów, sprzyjając podejmowaniu samodzielnych działań poznawczych oraz pogłębianiu wiedzy w sposób autodeterminowany. Z kolei w pracy [2, s. 7] stwierdzono, że udział w turniejach matematycznych prowadzi do równoczesnego rozwoju kompetencji poznawczych (m.in. w zakresie modelowania i rozumowania matematycznego) oraz społecznych, w tym umiejętności współpracy zespołowej, komunikacji i podejmowania decyzji w warunkach rywalizacji. W opracowaniu [3, s. 97–98] zwrócono uwagę, że konstrukcja zadań stosowanych w amerykańskich konkursach matematycznych stymuluje aktywność poznawczą uczniów, sprzyjając rozwijaniu zainteresowań naukowych oraz trwałemu zaangażowaniu w naukę matematyki. Analiza przeprowadzona przez [4, s. 995] wskazuje na istnienie pozytywnej korelacji między uczestnictwem w internetowych konkursach matematycznych a rozwojem zainteresowań społecznych uczniów szkół średnich, co potwierdza znaczenie tych inicjatyw w kształtowaniu kompetencji miękkich i prospołecznych postaw młodzieży. Natomiast w pracy [5, s. 211] potwierdzono wysoką skuteczność metody tutoringu w rozwijaniu uzdolnień matematycznych, przy czym szczególnie podkreślono rolę indywidualnej relacji mistrz–uczeń w procesie przechodzenia od odtwórczego rozwiązywania zadań do samodzielnego odkrywania i formułowania problemów badawczych. W artykule opisano, jak spersonalizowane podejście w relacji mistrz–uczeń pozwala na przekształcenie ucznia "rzemieślnika", który sprawnie wykonuje standardowe zadania, w ucznia "twórcę", potrafiącego samodzielnie odkrywać i badać nowe obszary matematyki.

2. Geneza i organizacja turnieju

Turniej MateMaxus został zainicjowany w 2017 roku przez Instytut Matematyki Uniwersytetu w Siedlcach i Dyrektora Szkoły Podstawowej nr 4, pana Przemysława Anusiewicza. Po dwóch edycjach przeprowadzanych dla uczniów szkół podstawowych, rozszerzyliśmy zakres i w 2019 roku do organizacji został zaproszony Zespół Szkół Ponadpodstawowych nr 3 w Siedlcach. Od samego początku, przez wszystkie edycje w składzie Komitetu Organizacyjnego Turnieju wchodzi mgr Katarzyna Karpierz, mgr Agnieszka Protasiuk oraz dr Marek Siluszyk. Turniej ma charakter drużynowy (zespoły 3-osobowe), rozgrywany w systemie pucharowym z finałem w dwóch podstawowych kategoriach: szkół podstawowych i ponadpodstawowych. Liczba miejsc w turnieju jest ograniczona, decyduje kolejność zgłoszeń. Zgłoszenie uczestników ze

Szkół Podstawowych (SP), Liceów Ogólnokształcących (LO) i Techników (TECH) odbywa się wyłącznie przez formularz zgłoszeniowy udostępniany na stronie www [7].

- Kategoria (SP) z terenu Miasta Siedlce oraz powiatu siedleckiego: drużyna składa się z trzech uczniów z klas IV, V, VI, VII, VIII z każdej szkoły podstawowej.
- Kategoria (LO) i (TECH) z terenu Miasta Siedlce oraz powiatu siedleckiego: drużyna składa się z trzech uczniów z klas I, II, III i IV.

Turniej rozgrywany jest w tzw. „systemie pucharowym” i składa się z 4 etapów. Po każdym etapie drużyny, które zdobędą najwięcej punktów, przechodzą do kolejnej rundy, aż w finale pozostaną trzy najlepsze zespoły. W pierwszym etapie biorą udział wszystkie drużyny ze wszystkich zgłoszonych szkół. W drugim etapie drużyny wyłonione po I etapie. W trzecim etapie drużyny które zaliczyły II etap, a w czwartym, ostatnim etapie do finału przechodzą już tylko trzy najlepsze drużyny. Każda drużyna ma 10 minut na rozwiązanie każdego zadania. Zwycięzcą Turnieju zostaje drużyna, która najlepiej rozwiąże IV etap. W organizację turnieju aktywnie włączają się również studenci z Koła Naukowego Studentów Matematyki „Graf”, których zaangażowanie jest nieocenione zarówno na etapie przygotowania, jak i podczas samego wydarzenia. Wszelkie szczegółowe informacje określone są w Regulaminie Turnieju, dostępnym na stronie Instytutu Matematyki Uws [6].



Rys. 1. Oficjalne logo turnieju, przedstawiające rycerza MateMaxusa.

Zródło: <https://im.uws.edu.pl/homepage/aktualnosci/530-viii-turniej-matematyczny-matemaxus>

Na Rys. 1 przedstawiono oficjalne logo turnieju z wizerunkiem rycerza MateMaxusa, stanowiącego jego rozpoznawalny znak graficzny. Motyw rycerza odwołuje się do idei intelektualnej przygody oraz nieustannego doskonalenia umiejętności matematycznych poprzez współzawodnictwo i wspólne rozwiązywanie problemów. Symbolika rycerska podkreśla wartości takie jak honor, wytrwałość, współpraca i wzajemna pomoc, które stanowią fundament ducha turnieju. Postać MateMaxusa uosabia zdrową rywalizację opartą na zasadach fair play, a jednocześnie przypomina, że prawdziwą siłą uczestnika jest nie tylko indywidualna wiedza, lecz także gotowość do wspierania innych i pracy zespołowej. W ten sposób logo pełni funkcję nie tylko identyfikacyjną, lecz również edukacyjną i wychowawczą, wzmacniając przesłanie turnieju jako przestrzeni rozwoju kompetencji poznawczych i społecznych uczniów.

3. Charakterystyka zadań konkursowych

Zadania opracowywane w ramach turnieju mają charakter interdyscyplinarny i problemowy, łącząc elementy matematyki z fizyką, informatyką i techniką. Takie podejście sprzyja rozwijaniu myślenia analitycznego i umiejętności transferu wiedzy między różnymi dziedzinami nauki. Zróżnicowany poziom trudności pozwala na udział uczniów zarówno szkół podstawowych, jak i średnich, co sprzyja integracji środowiska uczniowskiego o odmiennych kompetencjach. Wprowadzenie ograniczeń czasowych wzmacnia natomiast aspekt współpracy zespołowej oraz uczy skutecznego planowania działań i zarządzania zadaniem. Konstrukcja zadań turniejowych ma charakter narracyjny – poszczególne problemy składają się na spójną historię, w której centralną postacią jest rycerz MateMaxus. Narracja ta stanowi istotny element dydaktyczny, gdyż umożliwia uczniom identyfikację z bohaterem oraz buduje kontekst emocjonalny i poznawczy, sprzyjający głębszemu zaangażowaniu w proces rozwiązywania problemów. Motyw rycerski został przyjęty jako symbol odwagi intelektualnej, wytrwałości, współpracy i niesienia pomocy innym. W ten sposób turniej promuje wartości wychowawcze – takie jak duch zdrowej rywalizacji, odpowiedzialność za wspólne wyniki oraz wzajemne wsparcie w zespole. Każda edycja turnieju posiada odrębną fabulę, nawiązującą do motywów podróży, misji lub odkrycia naukowego, co zwiększa atrakcyjność poznawczą i kulturową przedsięwzięcia. Niezmiennym elementem pozostaje postać rycerza MateMaxusa – symbolicznego przewodnika uczestników i spoiwa wszystkich edycji.

W VII edycji turnieju (2024) wątki fabularne inspirowane były kulturą Japonii. Uczestnicy realizowali cztery zadania tematyczne:

- **Podróż morska** – wprowadzająca w narrację poprzez rejs MateMaxusa z Madagaskaru do Japonii (kontynuacja wątku z VI edycji). Zadanie obejmowało obliczenia związane z czasem podróży, ilością wody potrzebnej do przetrwania oraz liczbą spotkanych delfinów, łącząc elementy geografii, fizyki i matematyki.
- **Góra Fudzi i ryż** – zadanie oparte na obliczeniach dotyczących produkcji i spożycia ryżu, powiązane z wątkiem pomocy rolnikom. Wprowadzało kontekst kulturowy oraz praktyczny wymiar zastosowania matematyki.
- **Tradycyjne gry** – inspirowane japońską grą Yo-Yo, w której rycerz MateMaxus rywalizuje z samurajem BanachSATO. Zadanie wymagało rozwiązywania problemów kombinatorycznych i analizowania symetrii, co wprowadzało element zabawy i rywalizacji „na japoński sposób”.
- **Symboliczne pudełko z pałeczek** – finałowy problem o charakterze geometrycznym, polegający na skonstruowaniu z pałeczek przestrzennego pudełka oraz oszacowaniu jego objętości i pojemności. Zadanie to stanowiło połączenie treści kulturowych (pałeczki, ryż) z matematycznymi (objętość, estymacja).

4. Rozwijane kompetencje

Uczestnictwo w turnieju rozwija kompetencje matematyczne (logiczne myślenie, modelowanie, rozwiązywanie problemów), kompetencje miękkie (komunikacja, współpraca, radzenie sobie ze stresem) oraz kompetencje interdyscyplinarne. Zgodnie z regulaminem, konkurs ma na celu:

- promowanie matematyki wśród uczniów;
- poszerzenie wiedzy o treści spoza podstawy programowej;
- rozwijanie zdolności poznawczych (koncentracja uwagi, pamięć, wyobraźnia, odkrywanie, prowadzenie rozumowania dedukcyjnego i indukcyjnego);
- rozwijanie umiejętności stosowania metod matematycznych;
- ukazanie sposobów twórczego wykorzystania wiedzy;
- prowadzenie logicznego i abstrakcyjnego rozumowania;
- wzbudzanie pozytywnych ambicji oraz umiejętności rywalizacji;
- rozwijanie umiejętności pracy zespołowej;
- kreatywne rozwiązywanie problemów praktycznych;
- posługiwanie się niekonwencjonalnymi metodami.

5. Dyskusja wyników

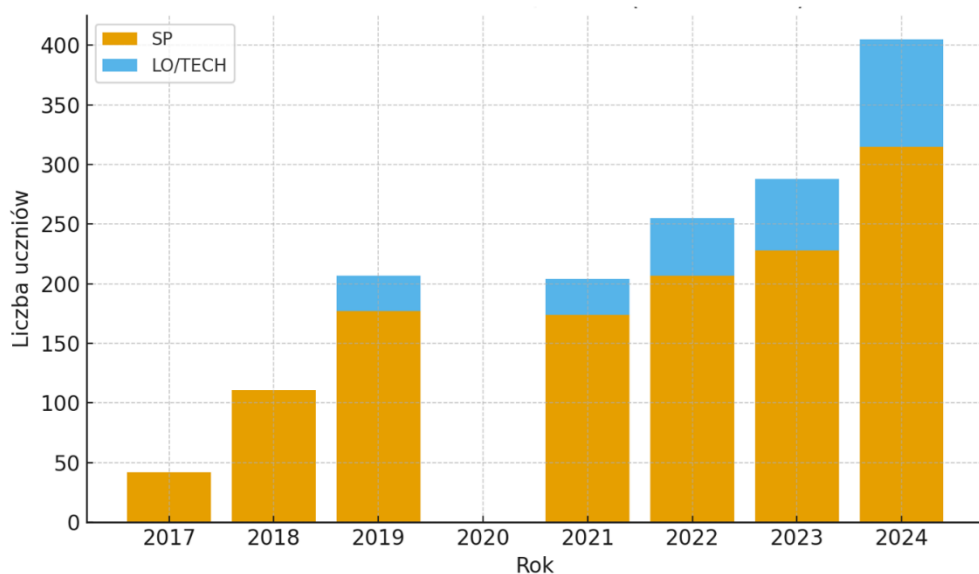
Poniżej przedstawiono zestawienie liczby szkół i uczniów z Siedlec i okolic, biorących udział w MateMaxusie w latach 2017–2024.

Tab. 1. Liczba szkół i uczniów uczestniczących w Turnieju MateMaxus w latach 2017–2024

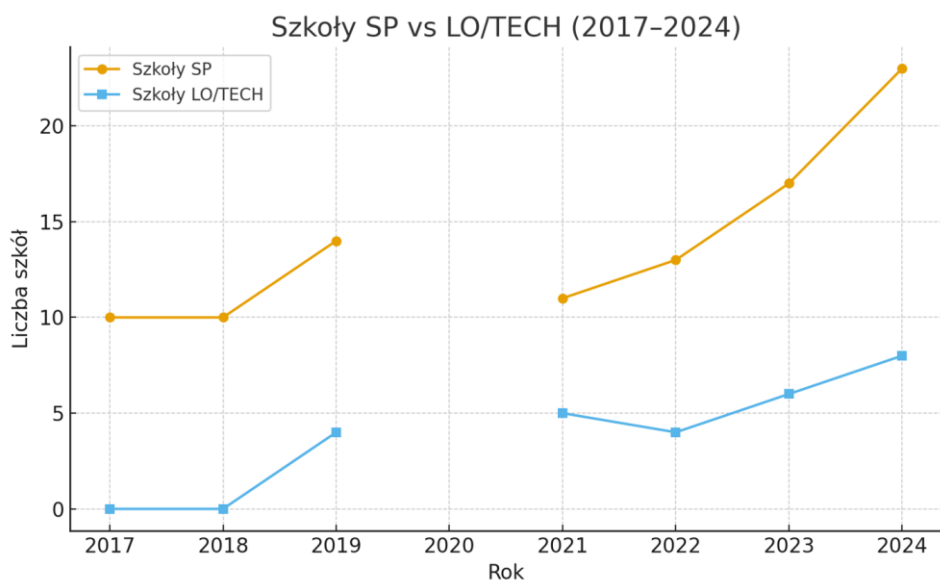
Nr edycji	Rok	Szkoły SP	Uczniowie SP	Szkoły LO/TECH	Uczniowie LO/TECH	Razem
I	2017	10	42	---	---	42
II	2018	10	111	---	---	111
III	2019	14	177	4	30	207
IV	2021	11	174	5	30	201
V	2022	13	207	4	48	234
VI	2023	17	228	6	60	288
VII	2024	23	315	8	90	405

Źródło: opracowanie własne na podstawie [6, 20.09. 2025].

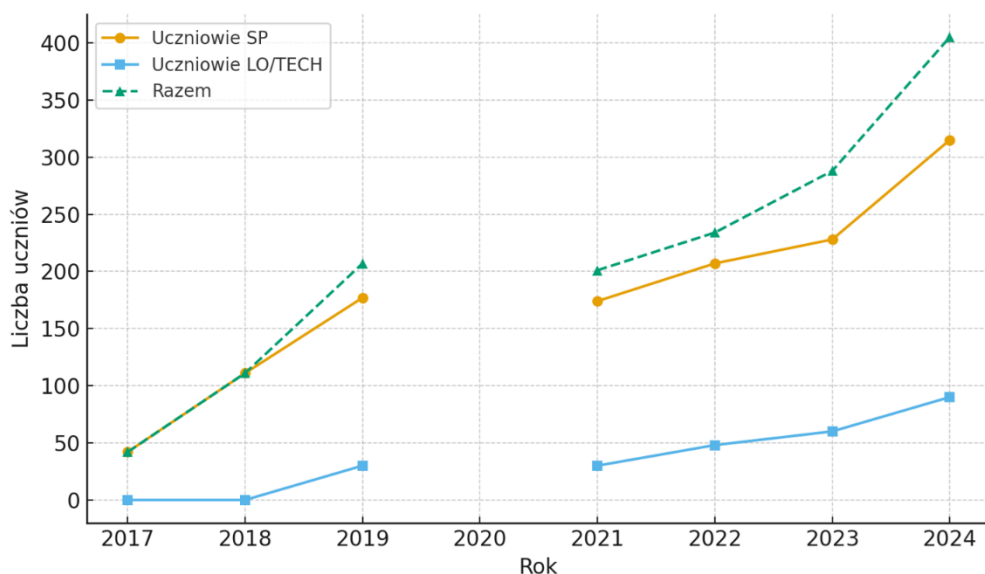
Przedstawione w Tab. 1 dane wskazują na wzrost liczby uczestników między 2017 a 2024 rokiem. Przyrost liczby uczestników w szkołach podstawowych widać z edycji na kolejną edycję, podczas gdy w szkołach średnich dynamika wzrostu była spokojniejsza od 2019 roku.



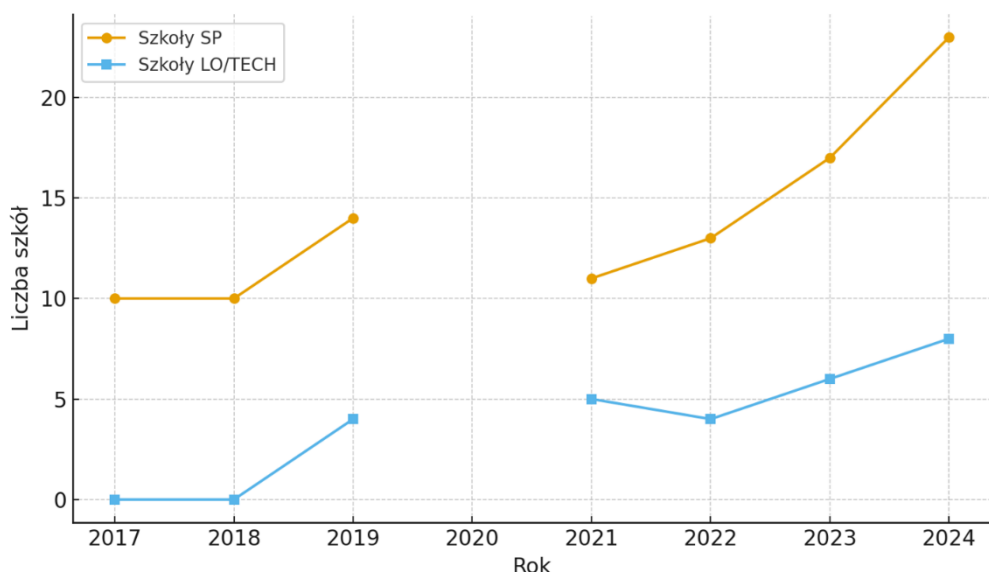
Rys. 2. Liczba uczniów SP i LO/TECH w latach 2017–2024
Źródło: opracowanie własne na podstawie [6, 20.09. 2025].



Rys. 3. Liczba szkół SP i LO/TECH w latach 2017–2024
Źródło: opracowanie własne na podstawie [6, 20.09. 2025].



Rys. 4. Trend liczby uczniów (SP, LO/TECH, razem) w latach 2017–2024
Źródło: opracowanie własne na podstawie [6, 20.09. 2025].



Rys. 5. Trend liczby szkół (SP, LO/TECH, razem) w latach 2017–2024
Źródło: opracowanie własne na podstawie [6, 20.09. 2025].

Na podstawie przedstawionych danych widać systematyczny wzrost liczby uczestników turnieju MateMaxus w latach 2017–2024 (z wyjątkiem przerwy w 2020 roku spowodowanej pandemią). Rys. 2 pokazuje wyraźną przewagę liczebną uczniów szkół podstawowych nad uczniami szkół średnich, co potwierdza, że to właśnie młodsza grupa

wiekowa stanowi główny trzon uczestników. Warto jednak zauważyć, że liczba drużyn z liceów i techników także stopniowo wzrasta, co wskazuje na poszerzanie zasięgu turnieju. Na (Rys. 3) widać podobną tendencję w przypadku szkół – od 10 szkół podstawowych w pierwszej edycji (2017) do 23 szkół podstawowych w roku 2024. W kategorii szkół średnich początkowo (2017–2018) brakowało uczestników, ale od 2019 roku liczba szkół ponadpodstawowych stopniowo rośnie i w 2024 roku osiągnęła 8. Rys. 4 i Rys. 5 przedstawiają ogólny trend wzrostowy zarówno w liczbie uczniów, jak i liczbie szkół. Zmiany te świadczą o rosnącym zainteresowaniu turniejem oraz o skuteczności działań promocyjnych i organizacyjnych podejmowanych przez uczelnię i szkoły partnerskie. MateMaxus stał się rozpoznawalnym wydarzeniem edukacyjnym w regionie (powiecie), a stabilny przyrost uczestników pokazuje jego potencjał do dalszej ekspansji.

Podsumowanie

MateMaxus różni się od klasycznych konkursów matematycznych (np. Kangur, Olimpiada), podkreślając pracę zespołową i interdyscyplinarność. Atutami turnieju są: szerokie zaangażowanie uczniów wielu szkół, motywująca formuła pucharowa oraz integracja środowisk szkolnych (szkoły podstawowe oraz szkoły średnie) i akademickich. Wyzwania obejmują logistykę organizacyjną oraz skalowanie zasobów (zadania, sędziowanie). MateMaxus stanowi przykład dobrych praktyk dydaktycznych w rozwijaniu talentów matematycznych. Dane z lat 2017–2024 wskazują na systematyczny wzrost liczby szkół i uczniów. Możliwe kierunki rozwoju obejmują rozszerzenie zasięgu turnieju (np. edycja ogólnopolska) oraz stworzenie banku zadań do adaptacji w innych regionach. Formuła MateMaxusa może zostać zaadaptowana także w innych regionach Polski, a nawet w wymiarze międzynarodowym. Opracowane przez nas know-how dydaktyczne w rozwijaniu i szukaniu talentów matematycznych świadczy o tym, że to nie tylko konkurs, ale też przykład sprawdzonego modelu dydaktyki matematyki.

Bibliografia

- [1] Bajnok B. (2024), Engaging Students Through Math Competitions, arXiv, <https://www.arxiv.org/abs/2406.15460> [20.09.2025].
- [2] Faletić S., Kyuldjiev A., Lindner T., Schnider D., Isza É., Hömöstreit M. i in. (2025), Development of soft and hard skills of high-school students via Young Physicists' Tournament (YPT), arXiv, <https://arxiv.org/abs/2508.15324> [20.09.2025].
- [3] Kandzia J. (2015), Rozwój społecznych zainteresowań uczniów szkół średnich w kontekście wyników osiąganych w matematycznych konkursach on-line, *Edukacja – Technika – Informatyka* 4 (14), s. 93–99.
- [4] Kenderov P. S. (2022), Mathematics competitions: an integral part of the development of mathematical interest and competence, PMC.
- [5] Wałachowska M. (2024), Rozwijanie uzdolnień matematycznych osoby uczącej się poprzez praktykę tutoringu szkolnego, *Szkoła Specjalna* 3/2024, s. 204–213. Instytut Matematyki Uniwersytetu w Siedlcach, Konkursy matematyczne, <https://im.uws.edu.pl/im/konkursy-matematyczne> [2.10.2025].
- [7] Formularz zgłoszeniowy, <https://forms.gle/PiuCggFSuWKQQUYf6> [27.10.2025]

