Agnieszka Tereszkiewicz

ZBIÓR ZADAŃ Z MATEMATYKI

dla studentów inżynierii lądowej, geodezji i transportu

1

Politechnika Białostocka

Agnieszka Tereszkiewicz

ZBIÓR ZADAŃ Z MATEMATYKI 1
DLA STUDENTÓW INŻYNIERII LĄDOWEJ, GEODEZJI I TRANSPORTU

Politechnika Białostocka
OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2024

Recenzent:
dr hab. Krzysztof Witczyński, prof. PW

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Okładka:
Marcin Dominów

Zdjęcie na okładce:
insspirito
https://pixabay.com/pl/illustrations/fraktal-streszczenie-t%C5%82o-1280071/

Skład i łamanie:
Agnieszka Tereszkiewicz

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2024

ISBN 978-83-68077-53-7
ISBN 978-83-68077-54-4 (e-Book)
DOI: 10.24427/978-83-68077-54-4

Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).
Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Druk: Print Profit sp. z o.o.

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
e-mail: oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl
www.pb.edu.pl

Spis treści

Wstęp 5

Rozdział 1. Macierze, wyznaczniki, układy równań 7

1.1. Przykłady 7
1.2. Zadania 23
1.3. Odpowiedzi 28

Rozdział 2. Geometria analityczna 31

2.1. Przykłady 31
2.2. Zadania 47
2.3. Odpowiedzi 51

Rozdział 3. Monotoniczość i granice ciągów 55

3.1. Przykłady 55
3.2. Zadania 62
3.3. Odpowiedzi 64

Rozdział 4. Szeregi liczbowe 67

4.1. Przykłady 67
4.2. Zadania 76
4.3. Odpowiedzi 77

Rozdział 5. Funkcje zmiennej rzeczywistej, granice funkcji . . . 79

5.1. Przykłady 79
5.2. Zadania 89
5.3. Odpowiedzi 91

Rozdział 6. Pochodna funkcji 93

6.1. Przykłady 93
6.2. Zadania 101
6.3. Odpowiedzi 102

Rozdział 7. Pochodna - zastosowanie 105

7.1. Przykłady 105
7.2. Zadania 130

7.3. Odpowiedzi 135

Rozdział 8. Całki nieoznaczone 141

8.1. Przykłady 141
8.2. Zadania 150
8.3. Odpowiedzi 152

Rozdział 9. Całki oznaczone, niewłaściwe, zastosowanie rachunku całkowego 153

9.1. Przykłady 153
9.2. Zadania 174
9.3. Odpowiedzi 177

Rozdział 10. Liczby zespolone 179

10.1. Przykłady 179
10.2. Zadania 189
10.3. Odpowiedzi 190

Bibliografia 191

Wstęp

Niniejsze opracowanie obejmuje zadania rozwiązywane na kierunkach inżynierskich w dyscyplinie inżynieria lądowa, geodezja i transport podczas zajęć z matematyki 1. Każdy rozdział składa się z przykładów, zadań i rozwiązań dotyczących danego działu matematyki w zakresie omawianym na zajęciach prowadzonych na powyższych kierunkach.

W podrozdziałach zatytułowanych **Przykłady** zamieszczone zostały zadania z rozwiązaniami krok po kroku oraz uproszczone definicje i niezbędne wzory, zaczerpnięte z [1]–[10]. Podrozdziały **Zadania** zawierają zadania do samodzielnego rozwiązania, a odpowiedzi do nich zamieszczone są w podrozdziale **Odpowiedzi**. Autorka starała się w prosty i przejrzysty sposób przedstawić omawiane zagadnienia. W skrypcie można znaleźć zadania ilustrujące praktyczne zastosowanie omawianego materiału, tak by było to jasne dla studentów. Wykresy ilustrujące zadania i interpretacje wzorów zostały wykonane w programie Geogebra oraz oprogramowaniu online www.wolframalpha.com.

Rozdział 1 poświęcony jest macierzom, wyznacznikom i układom równań. Przykłady i zadania ujęte w tej części dotyczą podstawowych działań na macierzach, obliczania wyznaczników, operacji elementarnych na macierzach, układów równań. Zadania 1.6.–1.9. to uproszczone zadania dotyczące zagadnień praktycznych, w których najpierw należy ułożyć odpowiedni układ równań. Rozdział 2 zawiera przykłady i zadania dotyczące podstawowych zagadnień geometrii analitycznej. Poczynając od współrzędnych wektora, jego długości, normowania wektorów, iloczynu wektorowego, skalarnego i mieszanego, po zastosowanie tych własności do obliczania pól i objętości figur rozpiętych przez wektory oraz wyznaczanie w R^3 równań prostych, płaszczyzn, odległości punktu od prostej i płaszczyzny, rzutu punktu na płaszczyznę. Ponadto autorka zamieściła przykłady i zadania na styczne do krzywych stożkowych oraz weryfikacji skośności prostych oraz dotyczące praktycznych zagadnień. Rozdział 3 zawiera zagadnienia odnoszące się do ciągów i ich granic oraz kilka za-

dań dotyczących ciągu Fibonacciego i Lucasa. W rozdziale 4 omówione zostały szeregi liczbowe, ich zbieżność oraz zamiana ułamka dziesiętnego okresowego na ułamek zwykły. Rozdział 5 poświęcony jest funkcji jednej zmiennej, wyznaczaniu jej dziedziny naturalnej, badaniu własności takich jak parzystość/nieparzystość, składaniu funkcji. Można znaleźć tu zadania dotyczące granic funkcji, wyznaczania asymptot, badania ciągłości. Zamieszczone w rozdziale 6 przykłady i zadania pozwalają omówić kolejne własności funkcji jednej zmiennej, takie jak pochodne funkcji elementarnych i złożonych, iloczynu i ilorazu funkcji. W rozdziale 7 omówione zostały własności funkcji wynikające z pochodnych, takie jak reguła de L'Hospitala, monotoniczność, ekstrema, wypukłość/wklęsłość, punkty przegięcia, aby w efekcie końcowym student umiał samodzielnie zbadać przebieg zmienności funkcji i wykonać jej szkic. Ponadto w tym rozdziale można znaleźć zadania z zakresu rozwijania funkcji w szereg Taylora, wyznaczania stycznej do krzywej oraz wykorzystujące różniczkę funkcji oraz zadania optymalizacyjne wykorzystujące pochodną. Rozdział 8 zawiera zadania z całek nieoznaczonych, tak aby w rozdziale 9 wykorzystać je do całek oznaczonych i niewłaściwych oraz do obliczania pól obszarów ograniczonych krzywymi, długości łuków, objętości brył obrotowych oraz ich pól powierzchni, środka ciężkości. Rozdział 10 zawiera zadania z elementarnych działań na liczbach zespolonych. Na końcu tego rozdziału umieszczono zagadnienie wykorzystujące liczby zespolone do rozkładu na ułamki proste, które często można wykorzystać do obliczania całek.

Celem autorki było omówienie przykładów w sposób prosty, z jak najmniejszą liczbą definicji i twierdzeń. Jeśli już zawierane były wzory, to w uproszczonej formie, tak aby nie zniechęcać samą formą zapisu. Tam, gdzie było to możliwe, użyta została graficzna forma zapisu.

Rozdział 1

Macierze, wyznaczniki, układy równań

Zadania dotyczące działań na macierzach i wyznacznikach oraz rozwiązywania układów równań z wykorzystaniem operacji elementarnych na macierzach i wyznacznikach.

1.1. Przykłady

Przykład 1.1. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Wykonać działania jeśli to możliwe, w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego: $A + B$, $A - B$, $2B - 3A$, $B + A^T$.

Dla dowolnych liczb α, β i macierzy A, B tego samego wymiaru zachodzi:

$$\alpha A \pm \beta B = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \beta \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \beta \cdot b_{11} & \beta \cdot b_{12} & \dots & \beta \cdot b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta \cdot b_{m1} & \beta \cdot b_{m2} & \dots & \beta \cdot b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} \pm \beta \cdot b_{11} & \alpha \cdot a_{12} \pm \beta \cdot b_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \pm \beta \cdot b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} \pm \beta \cdot b_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} \pm \beta \cdot b_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \pm \beta \cdot b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uwaga. Prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych (zespolonych – liczby zespolone zostały omówione w rozdziale 10) ustawionych w m wierszach i n kolumnach, gdzie $m, n \in N$, nazywa się macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$.

Rozwiązanie.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+5 & 3+(-4) \\ 4+(-3) & 5+(-2) & 6+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0 & 2-5 & 3-(-4) \\ 4-(-3) & 5-(-2) & 6-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{bmatrix},$$

$$2B-3A = 2\cdot\begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} -3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 0 & 2\cdot 5 & 2\cdot(-4) \\ 2\cdot(-3) & 2\cdot(-2) & 2\cdot(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3\cdot 1 & -3\cdot 2 & -3\cdot 3 \\ -3\cdot 4 & -3\cdot 5 & -3\cdot 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0+(-3) & 10+(-6) & -8+(-9) \\ -6+(-12) & -4+(-15) & -2+(-18) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -17 \\ -18 & -19 & -20 \end{bmatrix}.$$

Transpozycja macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

wiersz staje się kolumną, a kolumna wierszem

$$B+A^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

– działanie niewykonalne, ponieważ macierz B jest wymiaru 2×3, a A^T jest wymiaru 3×2. Dodajemy tylko macierze tego samego wymiaru.

Przykład 1.2. Dla macierzy z przykładu 1.1 wykonać działania (jeśli to możliwe, w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego): AB^T, BA, A^TB.

W wyniku pomnożenia macierzy A wymiaru $m \times n$ przez macierz B wymiaru $n \times k$ otrzymamy macierz wymiaru $m \times k$ postaci:

$$\underset{\substack{\text{wymiaru}\\ m\times n}}{A} \cdot \underset{\substack{\text{wymiaru}\\ n\times k}}{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix} =$$

$$= \underset{\substack{\text{wymiaru}\\ m\times k}}{\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{11}\cdot b_{1k}+a_{12}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{1n}b_{nk} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{n1} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{21}\cdot b_{1k}+a_{22}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{2n}\cdot b_{nk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{n1} & a_{m1}\cdot b_{12}+a_{m2}\cdot b_{22}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{n2} & \cdots & a_{m1}\cdot b_{1k}+a_{m2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{mn}\cdot b_{nk} \end{bmatrix}}.$$

Rozwiązanie.

$$AB^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 5 + 3\cdot(-4) & 1\cdot(-3) + 2\cdot(-2) + 3\cdot(-1) \\ 4\cdot 0 + 5\cdot 5 + 6\cdot(-4) & 4\cdot(-3) + 5\cdot(-2) + 6\cdot(-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 1 & -28 \end{bmatrix};$$

BA – działanie niewykonalne, ponieważ macierz B jest wymiaru 2×3, macierz A wymiaru 2×3, aby mnożenie macierzy było wykonalne, liczba kolumn w pierwszej macierzy musi być równa liczbie wierszy drugiej macierzy.

$$A^TB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 4\cdot(-3) & 1\cdot 5 + 4\cdot(-2) & 1\cdot(-4) + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 0 + 5\cdot(-3) & 2\cdot 5 + 5\cdot(-2) & 2\cdot(-4) + 5\cdot(-1) \\ 3\cdot 0 + 6\cdot(-3) & 3\cdot 5 + 6\cdot(-2) & 3\cdot(-4) + 6\cdot(-3) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -3 & -8 \\ -15 & 0 & -13 \\ -18 & 3 & -18 \end{bmatrix}.$$

Przykład 1.3. Obliczyć wyznaczniki macierzy (jeśli to możliwe, w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego):

a) $R = [-3]$,

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$,

c) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

d) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$,

e) $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$,

f) $E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie.

Uwaga. Macierz wymiaru $n \times n$ (tyle samo wierszy i kolumn) nazywana jest macierzą kwadratową bądź macierzą kwadratową stopnia n albo krótko macierzą stopnia n.

Wyznacznik macierzy stopnia 1: $\det[a_{11}] = a_{11}$.

a) $\det R = -3$.

W przypadku obliczania wyznaczników macierzy 2×2 lub 3×3 najwygodniej skorzystać z metody Sarrusa.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

b) $\det A = |A| = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} + & - \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \end{array} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3;$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

c)

$$\det B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array} = 1 \cdot 0 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 -$$
$$- 3 \cdot 0 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 60.$$

Wyznacznik zdefiniowany jest tylko dla macierzy kwadratowych

d) Wyznaczniki zdefiniowane są dla macierzy kwadratowych, więc nie istnieje wyznacznik macierzy C, gdyż jest to macierz 2×3, czyli nie jest kwadratowa.

e)

$$\det D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & + & + \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right. \\ \begin{array}{ccc} - & - & - \end{array} \end{array} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 -$$
$$- 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 = 0.$$

W przypadku macierzy kwadratowych stopnia wyższego niż 3 nie działa metoda Sarrusa.

f)

Dla macierzy kwadratowej n-tego stopnia wyznacznik można policzyć z rozwinięcia Laplace'a względem j-tej kolumny:

$$|A| = a_{1j}(-1)^{1+j}\det A_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}\det A_{2j} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det A_{nj},$$

gdzie A_{kl} jest macierzą stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie k-tego wiersza i l-tej kolumny.

I sposób:
Wyznacznik macierzy można obliczyć np. z rozwinięcia Laplace'a względem drugiej kolumny:

$$\det E = |E| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \boxed{2}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \boxed{0}\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\boxed{(-1)}\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \boxed{0}\cdot(-1)^{4+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Dla macierzy kwadratowej n-tego stopnia wyznacznik można policzyć z rozwinięcia Laplace'a względem i-tego wiersza

$$|A| = a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}\det A_{i2} + ... + a_{in}(-1)^{i+n}\det A_{in},$$

gdzie A_{kl} jest macierzą stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie k-tego wiersza i l-tej kolumny.

Wiadomo, że wyznacznik macierzy nie ulegnie zmianie, gdy do pewnego wiersza/pewnej kolumny doda się inny wiersz/inną kolumnę pomnożony/pomnożoną przez niezerową liczbę. Licząc wyznacznik, najlepiej jest wprowadzić jak najwięcej zer w wybranym wierszu/wybranej kolumnie poprzez dodanie do danego wiersza/danej kolumny innego wiersza/innej kolumny pomnożonego/pomnożonej przez dowolną niezerową stałą (ew. powtarzamy kilkukrotnie tę operację).

II sposób:
W tym przykładzie uzyskuje się maksymalną liczbę zer w czwartym wierszu, np. poprzez dodanie do trzeciej pierwszej kolumny pomnożonej przez -1

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{k_3-k_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{Laplace'a wzgl. 4 wiersza}]{\text{korzystamy z rozwinięcia}}$$

$$\to (-1)^{4+1}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{w_3+\frac{w_1}{2}} (-1)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Ostatnie obliczenia wynikają z własności wyznacznika macierzy górnotrójkątnej (wyznacznik takiej macierzy równy jest iloczynowi elementów leżących na głównej diagonali). Można też wykonać ostatni krok, licząc wyznacznik metodą Sarrusa.

Przykład 1.4. Znaleźć macierze odwrotne do macierzy z przykładu 1.3, o ile jest to wykonalne (w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego).

A^{-1} nazywamy macierzą odwrotna do nieosobliwej* macierzy A stopnia n, gdy:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n.
* – macierz nieosobliwa, to macierz kwadratowa, której wyznacznik jest różny od zera, czyli $\det A \neq 0$.

Dla macierzy kwadratowej A stopnia n takiej, że $|A| \neq 0$, istnieje macierz odwrotna dana wzorem:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} D^T,$$

gdzie D – macierz dopełnień algebraicznych:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}, \quad D_{kl} = (-1)^{k+l} \det A_{kl}$$

oraz A_{kl} jest macierzą stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie k-tego wiersza i l-tej kolumny.

Rozwiązanie.

a) $R^{-1} = \left[-\frac{1}{3}\right]$,

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det[5] & (-1)^{1+2} \cdot \det[4] \\ (-1)^{2+1} \cdot \det[2] & (-1)^{2+2} \cdot \det[1] \end{bmatrix}^T =$

$= \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

c) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$

$$= \frac{1}{60}\begin{bmatrix} -48 & 6 & 32 \\ 6 & -12 & 6 \\ 12 & 6 & -8 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{bmatrix},$$

d) Macierz odwrotna do macierzy C nie istnieje, ponieważ macierz odwrotna jest zdefiniowana dla macierzy kwadratowych i nieosobliwych (wyznacznik różny od 0), a macierz C nie jest kwadratowa.

e) Macierz odwrotna do macierzy D nie istnieje, ponieważ macierz D jest osobliwa ($\det D = 0$).

f)

I sposób:

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & (-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 9 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 9 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

II sposób:

Metoda Gaussa-Jordana:
W przypadku macierzy wyższych stopni macierz odwrotną łatwiej znaleźć, korzystając z operacji elementarnych na wierszach (przestawianie wierszy, dodawanie/odejmowanie wierszy od siebie, mnożenie przez liczbę różną od zera), przekształcając macierz $[E|I]$ do postaci $[I|F]$, gdzie $F = E^{-1}$ oraz I jest macierzą jednostkową dołączoną.

$$[E|I] = \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{w_3-w_1 \\ w_4-w_1}]{w_2-3w_1} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xleftrightarrow[3w_1+w_2]{\substack{2w_3-w_2 \\ 3w_4-w_2}}$$

$$\xleftrightarrow[3w_1+w_2]{\substack{2w_3-w_2 \\ 3w_4-w_2}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_4-w_3]{\substack{w_1-2w_3 \\ w_2+w_3}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 3 & 0 & 0 & -5 & -2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xleftrightarrow[4w_3+3w_4]{\substack{4w_1-5w_4 \\ 2w_2-w_4}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 12 & 0 & 0 & 0 & -3 & 12 & -6 & -15 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -3 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -4 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{w_3/4 \\ -w_4/4}]{\substack{w_1/12 \\ -w_2/12}}$$

$$\xleftrightarrow[\substack{w_3/4 \\ -w_4/4}]{\substack{w_1/12 \\ -w_2/12}} \left[\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1 & -1/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1 & 1/2 & 9/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/2 & -3/4 \end{array}\right] = [I|E^{-1}]$$

W przypadku stosowania operacji na kolumnach macierz jednostkową I dopisujemy poniżej macierzy E.

Przykład 1.5. Rozwiązać równanie macierzowe $A(5X-2B) = C$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie. Szukana macierz X jest stopnia 3.

$$\begin{aligned} \text{mnożenie z lewej strony } A^{-1}\cdot \Big| \quad A(5X-2B) &= C \\ A^{-1}A(5X-2B) &= A^{-1}C \end{aligned}$$

z tego, że $A^{-1}A = I$ otrzymuje się

$$\begin{aligned} 5X-2B &= A^{-1}C \quad \Big| +2B \\ 5X &= A^{-1}C+2B \quad \Big| \cdot \frac{1}{5} \\ X &= \frac{1}{5}A^{-1}C + \frac{2}{5}B. \end{aligned}$$

Wystarczy wyznaczyć A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

a następnie podstawić

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{5}A^{-1}C + \frac{2}{5}B = \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przykład 1.6. Rozwiązać układy równań, korzystając z wzorów Cramera

a) $\begin{cases} 3x + 2y &= 1 \\ 5x - 6y &= 7 \end{cases}$, b) $\begin{cases} 3x + 2y + 5z &= 3 \\ 2z + x - y &= 2 \\ x - z &= 1 \end{cases}$.

Układem Cramera nazywa się układ równań liniowych $AX = B$, gdzie A jest macierzą kwadratową nieosobliwą ($|A| \neq 0$) stopnia n, X, B są macierzami wymiaru $n \times 1$.

Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to dane jest wzorem

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|A_1|}{|A|} \\ \frac{|A_2|}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{|A_n|}{|A|} \end{bmatrix}$$

gdzie A_i dla $1 \leq i \leq n$ oznacza macierz A, w której i-tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych B.

Rozwiązanie. a) Układ równań $\begin{cases} 3x + 2y &= 1 \\ 5x - 6y &= 7 \end{cases}$ należy najpierw zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Wystarczy obliczyć wyznacznik główny (musi być różny od zera)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - 2 \cdot 5 = -28 \neq 0,$$

następnie obliczyć $|A_1|$ (zastępując pierwszą kolumnę kolumną wyrazów wolnych) oraz $|A_2|$(zastępując drugą kolumnę kolumną wyrazów wolnych)

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -20, \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 16.$$

Rozwiązanie: $x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-20}{-28} = \frac{5}{7}$, $y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{16}{-28} = -\frac{4}{7}$.

b) Analogicznie, jak w poprzednim przykładzie, najpierw postać macierzowa rozważanego układu równań

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

następnie wyznaczniki

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 14, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 16,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Rozwiązanie:
$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$, $y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-8}{14} = -\frac{4}{7}$, $z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$.

Przykład 1.7. Rozwiązać układ równań, wykorzystując metodę eliminacji Gaussa

a) $\begin{cases} 4x+3y-2z &= -3 \\ 3x-2y-z &= 3 \\ x+z &= 3 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 4x+3y-2z &= -3 \\ 3x-2y-z &= 3 \\ x+5y-z &= 3 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x+y+z+t &= 1 \\ 2x+3y+4z+5t &= 2 \\ x+z &= 3 \\ 2x+y+2z+t &= 4 \end{cases}$.

Uwaga. Nie każdy układ równań jest układem Cramera.
W ogólności:
dowolny układ równań można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$, X macierzą wymiaru $n \times 1$, a B macierzą wymiaru $m \times 1$, i do jego rozwiązania zastosować metodę eliminacji Gaussa.

Metoda eliminacji Gaussa:
polega na zapisaniu układu równań w postaci macierzowej $AX = B$, a następnie przekształceniu macierzy rozszerzonej $[A|B]$ do postaci schodkowej, poprzez wykonywanie jedynie operacji elementarnych na wierszach (mnożenie wierszy przez liczbę różną od zera, dodawanie/odejmowanie wierszy do siebie, przestawianie wierszy).

Można wyszczególnić przypadki:
• gdy $|A| \neq 0$, to układ równań jest oznaczony (dokładnie jedno rozwiązanie), wtedy $[A|B] \xleftrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elem.}} [I|X]$,
• gdy $|A| = 0$ można otrzymać:
– układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań), wtedy
$[A|B] \xleftrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elem.}} \left[\begin{array}{c|c} I & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \star \\ \hline 0 \end{array}\right]$,
– sprzeczny (brak rozwiązań), wtedy
$[A|B] \xleftrightarrow[\text{na wierszach}]{\text{operacje elem.}} \left[\begin{array}{c|c} I & * \\ \hline 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \star \\ \hline \diamond \end{array}\right]$,
gdzie $*, \star, \diamond$ są niezerowymi macierzami.

Rozwiązanie.

a) Należy zapisać układ równań $\begin{cases} 4x+3y-2z &= -3 \\ 3x-2y-1z &= 3 \\ 1x+0y+1z &= 3 \end{cases}$, w postaci macierzowej $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Następnie na macierzy rozszerzonej wykonujemy operacje elementarne na wierszach

$$[A|B]=\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[4w_3-w_1]{4w_2-3w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -17 & 2 & 21 \\ 0 & -3 & 6 & 15 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\frac{1}{96}(17w_3-3w_2)]{17w_1+3w_2}$$

$$\xleftrightarrow[\frac{1}{96}(17w_3-3w_2)]{17w_1+3w_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 68 & 0 & -28 & 12 \\ 0 & -17 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_2-2w_3]{w_1+28w_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 68 & 0 & 0 & 68 \\ 0 & -17 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[-\frac{1}{17}w_2]{\frac{1}{68}w_1}$$

$$\xleftrightarrow[-\frac{1}{17}w_2]{\frac{1}{68}w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

czyli rozwiązaniem jest macierz $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right] \xleftrightarrow[4w_3-w_1]{4w_2-3w_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -17 & 2 & 21 \\ 0 & 17 & -2 & 15 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_3+w_2]{}$$

$$\xleftrightarrow[w_3+w_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -17 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{array}\right],$$

czyli układ jest sprzeczny, tzn. brak rozwiązań.
Aby to dokładniej zrozumieć, wystarczy przejść z ostatnią macierzą z powrotem na układ równań $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -17 & 2 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{array}\right] \end{array}$, czyli

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x+3y-2z & = & -3 \\ -17y+2z & = & 21 \\ 0 & = & 36 \end{array}\right. .$$

Ostatnie równanie jest sprzeczne, czyli rozważany układ równań jest sprzeczny (brak rozwiązań).

c)

I sposób:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{w_3-w_1 \\ w_4-2w_1}]{w_2-2w_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[\substack{w_3+w_2 \\ w_4+w_2}]{w_1-w_2}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_4-w_3]{\substack{2w_1+w_3 \\ w_2-w_3}} \left[\begin{array}{rrr:r|r} 2 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xleftrightarrow[w_3/2]{w_1/2} \left[\begin{array}{rrr:r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Otrzymaliśmy wiersz złożony z samych zer i jest to przypadek opisany na stronie 19, więc układ jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań. Ostatnie przekształcenie macierzy rozszerzonej zapisujemy w postaci układu równań

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr:r|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}, \text{ więc } \left\{\begin{array}{rcl} x-t & = & 2 \\ y+t & = & -2 \\ z+t & = & 1 \end{array}\right.$$

czyli ostatecznie $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+t \\ y & = & -2-t \\ z & = & 1-t \\ t & \in & R \end{array}\right.$.

II sposób:

- Minorem stopnia k macierzy A wymiaru $m \times n$, $1 \leq k \leq \min(m, n)$ nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z wykreślenia $m - k$ wierszy i $n - k$ kolumn macierzy A.
- Rzędem macierzy A nazywamy największy stopień jej niezerowego minora i oznaczamy $\mathrm{rz}A$ lub $\mathrm{r}A$ lub $\mathrm{rank}A$.

Twierdzenie Kroneckera-Capellego
Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}[A|B]$ tego układu.
Wniosek
Niech $AX = B$ jest układem liniowym z n niewiadomymi, wtedy:

- jeśli $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}[A|B] = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie(jest oznaczony),
- jeśli $\mathrm{rz}A \neq \mathrm{rz}[A|B]$, to układ nie ma rozwiązań (jest sprzeczny),
- jeśli $\mathrm{rz}A = \mathrm{rz}[A|B] = r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów (jest nieoznaczony).

Analogicznie jak w I sposobie macierz rozszerzoną doprowadzamy do postaci schodkowej, wykonując operacje elementarne na wierszach

$$\left[\begin{array}{ccc:c|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Uwaga. Rząd macierzy schodkowej równy jest liczbie jej niezerowych wierszy (schodków).

Ponieważ rząd macierzy głównej jest równy 3 i jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej, więc z twierdzenia Kroneckera-Capellego układ równań jest nieoznaczony i ma nieskończenie wiele rozwiązań z 1 parametrem.

Analogicznie jak w pierwszym sposobie z ostatniej postaci przechodzimy na układ równań $\begin{cases} x-t &= 2 \\ y+t &= -2 \\ z+t &= 1 \end{cases}$, czyli ostatecznie $\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= -2-t \\ z &= 1-t \\ t &\in R \end{cases}$.

Przykład 1.8. Wyznaczyć równania bazowe, dla przykładu 1.7c).

Rozwiązanie bazowe to rozwiązanie szczególne, otrzymane dla rozwiązań układu nieoznaczonego z $n-k$ parametrami przy założeniu, że $n-k$ zmiennych jest równych zeru.

Rozwiązanie. Korzystając z rozwiązań układu $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+t \\ -2-t \\ 1-t \\ t \end{bmatrix}$, $t \in R$ wyznacza się rozwiązania bazowe, przyjmując kolejne zmienne równe zero:

$$x = 0 \quad (\text{dla } t = -2) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ t = -2 \end{cases},$$

$$z = 0 \quad (\text{dla } t = 1) \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases},$$

$$t = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases},$$

więc są trzy rozwiązania bazowe dla $t = -2, 1, 0$.

1.2. Zadania

Zadanie 1.1. Dane są macierze:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -9 & -8 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0,5 & -2,5 & 3,5 \\ 1,5 & -0,5 & 1,5 \\ 4,5 & 0,6 & 0,1 \end{bmatrix}, \qquad A_9 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Wykonać (jeśli to możliwe, w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego) następujące działania na macierzach:

a) $A_1 + A_2$,
b) $A_1 - A_2$,
c) $3A_2 + 2A_1$,
d) $A_1 + A_3$,
e) $A_1 + A_3^T$,
f) $A_1 + A_2^T$,
g) $A_3 \cdot A_2$,
h) $A_2 \cdot A_3$,
i) $A_1 \cdot A_3$,
j) $A_1 \cdot A_2^T$,
k) $A_1 \cdot A_3 - A_1 \cdot A_2^T$,
l) $A_3 \cdot A_1 - 2A_5 - A_9^T$,
m) $A_3^T \cdot A_7$,
n) $|A_4|$, $|A_5|$,
o) $|A_3|$, $|A_6|$,
p) $|A_7|$, $|A_8|$,
q) $|A_9|$, $|A_{10}|$,
r) $|A_2 \cdot A_3|$, $|A_1 \cdot A_3|$,
s) $|A_4 \cdot A_5|$, $|A_8 \cdot A_7|$,
t) A_5^{-1}, A_6^{-1},
u) A_7^{-1}, $(A_8^T)^{-1}$,
v) A_9^{-1}, A_{10}^{-1},
w) $(A_2 \cdot A_3)^{-1}$, A_4^{-1}
x) $(A_4 \cdot A_5)^{-1}$.

Zadanie 1.2. Znaleźć macierz odwrotną do danej (jeśli to możliwe, w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego):

a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$,

j) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 1.3. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ rozwiązać równania macierzowe (jeśli to możliwe, w przeciwnym wypadku wyjaśnić dlaczego):

a) $CX = B$,
b) $(A + B)X = C$,
c) $X(B + I) = C + DA$,
d) $C(2X + 3B) = A^T A$,
e) $AD + 3X = 3AA^T + I$,
f) $(D + 2A)X = C$.

Zadanie 1.4. Rozwiązać poniższe układy równań (wykorzystując działania na macierzach, wyznacznikach, operacjach elementarnych na macierzach):

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$,

b) $\begin{cases} 2y - x = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$,

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-2y+2z=2 \\ 3x-y+4z=3 \end{cases}$,

d) $\begin{cases} 0,5x-1,5y+2z=0 \\ -3x+2y+1,5z=1,5 \\ 2,5x-0,5y-3z=0,5 \end{cases}$,

e) $\begin{cases} x+4y-4z=1 \\ 2x+z-6y=-1 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases}$,

f) $\begin{cases} x+y+z+t=13 \\ x-y+z+t=0 \\ x+y-z+t=5 \\ x+y+z-t=5 \end{cases}$,

g) $\begin{cases} x+y+z=13 \\ x-y+z=0 \\ 3x+2y-2z=4 \\ 4x+3y-z=17 \end{cases}$,

h) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2z=2 \\ 3x+3z=3 \end{cases}$,

i) $\begin{cases} x+2y-4z=1 \\ 2x+z-5y=2 \\ 3x-3y-3z=3 \end{cases}$,

j) $\begin{cases} x+y-z+t=13 \\ x+z-y-2t=-13 \\ 3x-4y-3z+2t=5 \end{cases}$,

k) $\begin{cases} x+y-z+2t=13 \\ x+z-y-2t-1=0 \\ 3x-4y-3+2t=5 \end{cases}$,

l) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x+y+t=4 \\ x-2z+t=-2 \\ 2x+2y+z+t=2 \end{cases}$,

m) $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-2z+t=-2 \\ 2x+y-z+t=-4 \\ -6x-3y+3z-3t=12 \end{cases}$,

n) $\begin{cases} 4x+y+z=-2 \\ x-2z+t=-2 \\ 2x+y-z+t=-4 \\ -6x-3y+3z-3t=12 \end{cases}$,

o) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=4 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$,

p) $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x-2z+t=1 \\ 2x+y-z+t=4 \\ -6x-3y+3z-3t=12 \end{cases}$,

q) $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x-y+z=0 \\ 3x+2y-2z=4 \\ 4x+3y-z=17 \end{cases}$,

r) $\begin{cases} 5x+3y-z+1=0 \\ -2x-y+2z-2=0 \\ 3x+2y+z=2 \end{cases}$,

s) $\begin{cases} x+3y-z+1=-1 \\ -2x-4y+2z-2=3 \\ x+y-z+1=2 \end{cases}$,

t) $\begin{cases} x+0{,}005y-0{,}025z=1{,}075 \\ -2{,}005x-y+2z=2 \\ 3{,}005x+1{,}005y-2{,}025z=3{,}075 \end{cases}$,

u) $\begin{cases} x+y-2z+t=3 \\ x-2y+z-3t=2 \\ x+y-2z+t=5 \\ x+y+z-2t=4 \end{cases}$.

Zadanie 1.5. Dla układów z zadania 1.4h)–n) wyznaczyć rozwiązania bazowe.

Uwaga. Rozwiązując zadania 1.6–1.9, zapisać je w postaci układów równań i rozwiązać, wykorzystując macierze bądź wyznaczniki.

Zadanie 1.6. Firma budowlana ma 3 pojazdy do transportu materiałów sypkich, o ładowności $8, 12, 23$ t odpowiednio. Realizując zamówienie dostawy 368 t żwiru na pewną budowę, wykonano 26 kursów. W wykonaniu 1/2 zlecenia nie brała udziału wywrotka o największej ładowności. Ile kursów wykonała każda z ciężarówek? Zapisać układ równań i rozwiązać, korzystając z macierzy bądź wyznaczników.

Zadanie 1.7. Do dyspozycji mamy roztwory kwasu o stężeniu 5% i 30%, odpowiednio. Ile kilogramów każdego roztworu należy wziąć, aby otrzymać 5 l kwasu o stężeniu 20%?

Zadanie 1.8. Firma transportowa ma 4 zestawy do transportu dłużycy. Zamówienie transportu dłużycy zostało podzielone na 4 etapy. W pierwszej części z lasu odebrano ok. 353 m^3, z czego pierwszy i trzeci zestaw wykonały po 3 kursy, natomiast pozostałe po 4. W drugiej części drugi i trzeci zestaw kursowały 3 razy, a czwarty tylko 2 i przetransportowano ok. 217 m^3 drewna. Trzeci etap obsługiwały tylko pierwszy i drugi, z czego pierwszy został załadowany o ok. 2 m^3 poniżej swoich możliwości i zrobił 4 kursy, a drugi 3 kursy i zwieziono 136 m^3. Ostatni etap obsługiwały pierwszy i czwarty zestaw, zwożąc 253 m^3 drewna, przy czym pierwszy zestaw wykonał 6, a czwarty 5 kursów. Ile m^3 drewna zwieziono? Po ile m^3 można załadować na każdy zestaw transportowy (przyjmując, że ładowano dopuszczalną ilość m^3)?

Zadanie 1.9. Wybudowano basen w kształcie prostopadłościanu, którego suma krawędzi wynosi 64 m. Jedna z krawędzi podstawy jest o 3 m krótsza od wysokości, natomiast druga krawędź podstawy jest dwukrotnością średniej arytmetycznej krawędzi podstawy i wysokości. Jaka jest objętość tego basenu?

1.3. Odpowiedzi

Zad. 1.1

a) $\begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ -5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} -6 & -6 & -6 \\ 13 & 13 & 13 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 23 & 28 & 33 \\ -19 & -14 & -9 \end{bmatrix}$,

d) niewykonalne, ponieważ wymiary macierzy są różne (dodajemy tylko macierze tego samego wymiaru), A_1 jest wymiaru 2×3, A_3 wymiaru 3×2,

e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 6 \end{bmatrix}$,

f) niewykonalne, ponieważ wymiary macierzy są różne (dodajemy tylko macierze tego samego wymiaru), A_1 jest wymiaru 2×3, A_2^T wymiaru 3×2,

g) $\begin{bmatrix} -11 & -8 & -5 \\ -27 & -24 & -21 \\ 28 & 32 & 36 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 43 & 38 \\ -37 & -42 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 28 & 23 \end{bmatrix}$,

j) $\begin{bmatrix} 50 & -46 \\ 122 & -118 \end{bmatrix}$,

k) $\begin{bmatrix} -37 & 54 \\ -94 & 141 \end{bmatrix}$,

l) $\begin{bmatrix} 8 & 15 & 7 \\ 11 & 16 & 12 \\ -4 & 9{,}8 & 11{,}8 \end{bmatrix}$,

m) $\begin{bmatrix} -12 & -12 & -13 \\ 0 & 6 & -8 \end{bmatrix}$,

n) $0; -5{,}95$,

o) niewykonalne (wyznacznik zdefiniowany jest tylko dla macierzy kwadratowych); 18,

p) $-6, 12$,

q) 0, 125,

r) -400, 75,

s) 0, -72,

t) $\begin{bmatrix} 19/119 & -47/119 & 40/119 \\ -132/119 & 314/119 & -90/119 \\ -9/17 & 33/17 & -10/17 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/9 & -5/18 & 1/6 \end{bmatrix}$,

u) $\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & -1/3 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} -3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1/12 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & -1/3 \end{bmatrix}$,

v) $|A_9| = 0$, więc macierz odwrotna nie istnieje,

$\begin{bmatrix} 51/125 & -9/125 & 34/125 & 6/125 \\ -9/125 & 31/125 & -6/125 & 21/125 \\ -34/125 & 6/125 & 19/125 & -4/125 \\ -6/125 & -21/125 & -4/125 & 14/125 \end{bmatrix}$,

w) $\begin{bmatrix} 21/200 & 19/200 \\ -37/400 & -43/400 \end{bmatrix}$, $|A_4| = 0$, więc macierz odwrotna nie istnieje,

x) $|A_4 \cdot A_5| = 0$, więc macierz odwrotna nie istnieje.

Zad. 1.2

a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -1{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ -2 & -5 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 4 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 4 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

j) wyznacznik $= 0$, więc macierz odwrotna nie istnieje,

k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zad. 1.3

a) $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

b) działanie $A + B$ jest niewykonalne, gdyż macierz A jest wymiaru 2×3, a macierz B wymiaru 3×3 (dodajemy tylko macierze tego samego wymiaru),

c) $X = \begin{bmatrix} 1/7 & 5/7 & -6/7 \\ 16/7 & 3/7 & 9/7 \\ 2/7 & 3/7 & 2/7 \end{bmatrix}$,

d) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -9/2 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $X = \begin{bmatrix} 7/3 & 7/3 \\ 4/3 & 10/3 \end{bmatrix}$,

f) działanie $D + 2A$ jest niewykonalne, gdyż macierz A jest wymiaru 2×3, a macierz D wymiaru 3×2 (dodajemy tylko macierze tego samego wymiaru).

Zad. 1.4

a) $x = \frac{1}{2}, y = 0,$

b) $x = 1, y = 1,$

c) $x = 1, y = 0, z = 0,$

d) $x = 6{,}5, y = 7{,}5, z = 4,$

e) $z = -\frac{1}{3}, y = 0, z = -\frac{1}{3},$

f) $x = -\frac{3}{2}, y = \frac{13}{2}, z = 4, t = 4,$

g) $x = \frac{4}{5}, y = \frac{13}{2}, z = \frac{57}{10},$

h) $x = 1 - z, y = 0, z \in R,$

i) $x = 1 + 2z, y = z, z \in R,$

j) $x \in R,\ y = \frac{34}{7} - \frac{2}{7}x,$
$z = -\frac{57}{7} + \frac{19}{7}x,\ t = 2x,$

k) $x = 7,\ y \in R,\ z = -19 + 5y,\ t = -\frac{13}{2} + 2y,$

l) $x = -8 + z, y = 6 - 2z,\ z \in R,\ t = 6 + z,$

m) $x \in R,\ y \in R,\ z = -2 - x - y,$
$t = -6 - 3x - 2y,$

n) $x = 0,\ y \in R,\ z = -2 - y,\ t = -6 - 2y,$

o)–u) układ sprzeczny.

Zad. 1.5

h) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

i) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$

j) $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{34}{7} \\ -\frac{57}{7} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 38 \\ 34 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix},$

k) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -19 \\ -\frac{13}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{19}{5} \\ 0 \\ \frac{11}{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{13}{4} \\ -\frac{11}{4} \\ 0 \end{bmatrix},$

l) $\begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 \\ 18 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix},$

m) $\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -2 - y \\ -6 - 2y \end{bmatrix},\ y \in R \setminus \{0\},$

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -2-x \\ -6-3x \end{bmatrix}, \ x \in R \setminus \{0\},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ -2-x \\ 0 \\ -2-x \end{bmatrix}, \ x \in R \setminus \{0\},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ -3-\frac{3}{2}x \\ 1+\frac{1}{2}x \\ 0 \end{bmatrix}, x \in R \setminus \{0\},$$

n) $$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -2-y \\ -6-2y \end{bmatrix}, \ y \in R \setminus \{0\},$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zad. 1.6

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 &= 26 \\ 8w_1 + 12w_2 + 23w_3 &= 368 \\ 8w_1 + 12w_2 &= 184 \end{cases}, \quad w_1 = 8, w_2 = 10, w_3 = 8.$$

Zad. 1.7

$$\begin{cases} x + y &= 5 \\ 0{,}05x + 0{,}30y &= 0{,}20 \cdot 5 \end{cases}$$, 2 litry roztworu x i 3 litry roztworu y.

Zad. 1.8

$$\begin{cases} 3x + 4y + 3z + 4t &= 353 \\ 3y + 3z + 2t &= 217 \\ 4(x-2) + 3y &= 136 \\ 6x + 5t &= 253 \end{cases}$$, 959 m^3, x=18 m^3, y=24 m^3, z=29 m^3, t=29 m^3.

Zad. 1.9

$$\begin{cases} 4a + 4b + 4h &= 64 \\ a - 3 &= h \\ b &= a + h \end{cases}$$, $a = 5{,}5$ m, $b = 8$ m, $h = 2{,}5$ m, $V = 110$ m^3.

Rozdział 2

Geometria analityczna

Zadania dotyczące wektorów, prostych, płaszczyzn oraz wybranych krzywych.

2.1. Przykłady

Przykład 2.1. Wyznaczyć współrzędne wektora o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oraz wektorów $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OB}$, gdzie: $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 4, 5)$, $C = \left(\sqrt{3}, 0, -\sqrt{2}\right)$, $D = \left(0, 6\sqrt{2}, -1\right)$, $O = (0, 0, 0)$.

Współrzędne wektora o początku w punkcie $P_1 = (z_1, y_1, z_1)$ i końcu $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$:
$\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$.

Rozwiązanie.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= [3-1, 4-2, 5-3] = [2, 2, 2] = -\overrightarrow{BA}, \\
\overrightarrow{BA} &= [1-3, 2-4, 3-5] = [-2, -2, -2] = -\overrightarrow{AB}, \\
\overrightarrow{CA} &= \left[1-\sqrt{3}, 2-0, 3-(-\sqrt{2})\right] = \left[1-\sqrt{3}, 2, 3+\sqrt{2}\right] = -\overrightarrow{AC}, \\
\overrightarrow{BC} &= \left[\sqrt{3}-3, 0-4, -\sqrt{2}-5\right] = \left[\sqrt{3}-3, -4, -\sqrt{2}-5\right] = -\overrightarrow{CB}, \\
\overrightarrow{AD} &= \left[0-1, 6\sqrt{2}-2, -1-3\right] = \left[-1, 6\sqrt{2}-2, -4\right] = -\overrightarrow{DA}, \\
\overrightarrow{DB} &= \left[3-0, 4-6\sqrt{2}, 5-(-1)\right] = \left[3, 4-6\sqrt{2}, 6\right] = -\overrightarrow{BD}, \\
\overrightarrow{OB} &= [3-0, 4-0, 5-0] = [3, 4, 5] = -\overrightarrow{BO}.
\end{aligned}
$$

Przykład 2.2. Obliczyć długości wektorów z przykładu 2.1.

Długość wektora o początku w punkcie $P_1 = (z_1, y_1, z_1)$ i końcu $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

jeśli wektor jest swobodny $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, bądź są obliczone już jego współrzędne, to:

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = |\overrightarrow{BA}|,\\
|\overrightarrow{CA}| &= \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + 2^2 + (3 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{19 - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}},\\
|\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{(\sqrt{3} - 3)^2 + (-4)^2 + (-\sqrt{2} - 5)^2} = \sqrt{55 - 6\sqrt{3} + 10\sqrt{2}},\\
|\overrightarrow{AD}| &= \sqrt{(-1)^2 + (6\sqrt{2} - 2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{93 - 24\sqrt{2}},\\
|\overrightarrow{DB}| &= \sqrt{3^2 + (4 - 6\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{133 - 48\sqrt{2}},\\
|\overrightarrow{OB}| &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Przykład 2.3. Niech $\overrightarrow{a} = [2, 6, 4]$, $\overrightarrow{b} = [-1, 1, 1]$, $\overrightarrow{c} = [1, -2, -1]$.
Obliczyć: $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$, $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$, $4\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} - 2\overrightarrow{c}$, $4\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{a}$.
Obliczyć iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy dla par wektorów:
$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$; $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}$; $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$; $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}$.
Obliczyć długości otrzymanych wektorów.

Jeśli $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ oraz $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$, to:

1) $\alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v} = [\alpha \cdot u_x + \beta \cdot v_x, \alpha \cdot u_y + \beta \cdot v_y, \alpha \cdot u_z + \beta \cdot v_z]$ dla $\alpha, \beta \neq 0$,
2) $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$,
3) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$, gdzie $i = [1, 0, 0]$, $j = [0, 1, 0]$, $k = [0, 0, 1]$.

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b} &= [2,6,4]+[-1,1,1]=[2-1,6+1,4+1]=[1,7,5],\\
|\vec{a}+\vec{b}| &= |[1,7,5]|=\sqrt{1+49+25}=5\sqrt{3},\\
2\vec{a}-\vec{b} &= 2\cdot[2,6,4]-[-1,1,1]=\\
&= [2\cdot 2,2\cdot 6,2\cdot 4]+[-(-1),-1,-1]=[4,12,8]+[1,-1,-1]=\\
&= [4+1,12-1,8-1]=[5,11,7],\\
|2\vec{a}-\vec{b}| &= |[5,11,7]|=\sqrt{25+121+49}=\sqrt{195},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c} &= 4\cdot[2,6,4]+3\cdot[-1,1,1]-2\cdot[1,-2,-1]=\\
&= [8,24,16]+[-3,3,3]+[-2,4,2]=[3,31,21],\\
|4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}| &= |[3,31,21]|=\sqrt{1411},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\vec{c}+\vec{b}+2\vec{a} &= 4\cdot[1,-2,-1]+[-1,1,1]+2\cdot[2,6,4]=\\
&= [4,-8,-4]+[-1,1,1]+[4,12,8]=[7,5,5],\\
|4\vec{c}+\vec{b}+2\vec{a}| &= |[7,5,5]|=3\sqrt{11},\\
\vec{a}\circ\vec{b} &= [2,6,4]\circ[-1,1,1]=2\cdot(-1)+6\cdot 1+4\cdot 1=8,\\
\vec{b}\circ\vec{a} &= [-1,1,1]\circ[2,6,4]=-1\cdot 2+1\cdot 6+1\cdot 4=-2+6+4=8,\\
\vec{a}\circ\vec{c} &= [2,6,4]\circ[1,-2,-1]=2\cdot 1+6\cdot(-2)+4\cdot(-1)=-14,\\
\vec{b}\circ\vec{c} &= [-1,1,1]\circ[1,-2,-1]=-1-2-1=-4,\\
\vec{a}\circ\vec{a} &= [2,6,4]\circ[2,6,4]=4+36+16=56=|\vec{a}|^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 6 & 4\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=6i-4j+2k+6k-4i-2j=[2,-6,8],\\
|\vec{a}\times\vec{b}| &= \sqrt{2^2+(-6)^2+8^2}=2\sqrt{26},
\end{aligned}$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 6 & 4\end{vmatrix}=[-2,6,-8]=-(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$|\vec{b}\times\vec{a}|=|\vec{a}\times\vec{b}|,$$

$$\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 6 & 4\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=[2,6,-10],\qquad |\vec{a}\times\vec{c}|=2\sqrt{35},$$

$$\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = [1, 0, 1], \qquad |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}| = |[1, 0, 1]| = \sqrt{2},$$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = [0, 0, 0], \qquad |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a}| = 0.$$

Przykład 2.4. Unormuj wektory:

a) $\overrightarrow{v} = [0, 15, 20]$,
b) $\overrightarrow{w} = [1, 1, -1]$,
c) $\overrightarrow{a} = [3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$,
d) $\overrightarrow{b} = [-1/2, \sqrt{3}/2, 0]$.

Jeśli $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ jest wektorem o długości $|\overrightarrow{u}|$, to wektor

$$\hat{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u}.$$

nazywamy unormowanym.

Uwaga. Wektor $\overrightarrow{u}$ oraz $\hat{u}$ mają taki sam zwrot i kierunek (kluczowe własności wektora), mogą różnić się tylko długością (wektor unormowany jest długości 1).

Rozwiązanie. Należy najpierw obliczyć długość wektora, a następnie, jeżeli jego długość jest $\neq 1$, unormować zgodnie z powyższym wzorem. W przeciwnym wypadku wektor jest już unormowany.

a) $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{0^2 + 15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \neq 1$,
czyli należy unormować wektor

$$\hat{v} = \tfrac{1}{|\overrightarrow{v}|} \cdot \overrightarrow{v} = \tfrac{1}{25} \cdot [0, 15, 20] = \left[\tfrac{0}{25}, \tfrac{15}{25}, \tfrac{20}{25}\right] = \left[0, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right].$$

b) $|\overrightarrow{w}| = \sqrt{3} \neq 1$, więc analogicznie jak w poprzednim podpunkcie

$$\hat{w} = \tfrac{1}{|\overrightarrow{w}|} \cdot \overrightarrow{w} = \tfrac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, -1] = \left[\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

c) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{81} = 9 \neq 1$, czyli
$\hat{a} = \frac{1}{9}[3\sqrt{3}, -3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}] = \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

d) $|\overrightarrow{b}| = 1$, czyli wektor jest już unormowany i $\overrightarrow{b} = \hat{b}$.

Przykład 2.5. Obliczyć iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ oraz $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}$ z przykładu 2.3.

Iloczyn mieszany trzech wektorów $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ oraz $\overrightarrow{w} = [w_x, w_y, w_z]$ dany jest wzorem:

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

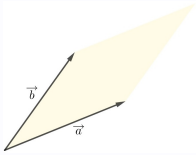
Rozwiązanie.

$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6$, z własności wyznaczników (tzn. zamiana wierszy miejscami zmienia znak wyznacznika)
$(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}) \circ \overrightarrow{c} = -(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c} = -6.$

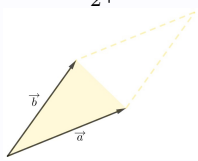
Przykład 2.6. Obliczyć pole trójkąta i równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{a} = [1, 2, 1]$, $\overrightarrow{b} = [-2, -1, 0]$.

Jeżeli wektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ są niewspółliniowe, to

– pole równoległoboku rozpiętego przez te wektory dane jest wzorem: $P_{\parallelogram} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$,



– pole trójkąta rozpiętego przez te wektory dane jest wzorem: $P_{\triangle} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}|$.



Rozwiązanie.

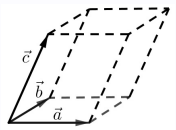
$$P_{\parallelogram} = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}| = |[1, -2, 3]| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} =$$
$$= \sqrt{14},$$

$$P_{\triangle} = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \tfrac{1}{2}P_{\text{równoległoboku}} = \tfrac{\sqrt{14}}{2}.$$

Przykład 2.7. Obliczyć objętość i pole powierzchni równoległościanu i czworościanu rozpiętych na wektorach $\overrightarrow{a} = [1, 2, 0]$, $\overrightarrow{b} = [-2, -1, 0]$, $\overrightarrow{c} = [1, 1, -1]$.

Jeżeli wektory $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ są niewspółpłaszczyznowe, to

równoległościan rozpięty przez te wektory ma:

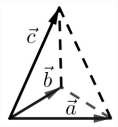


$V = |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}|$

oraz

$P = 2\left(|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}| + |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|\right)$,

natomiast czworościan przez nie rozpięty ma:



$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}|$

oraz

$P = \frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}| + |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}| + |(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \times (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})|\right)$.

Rozwiązanie.

$$V_{\text{równoległościanu}} = |(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}| = |\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = |-3| = 3,$$

$$V_{\text{czworościanu}} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}| = \frac{1}{6} \cdot |\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6} \cdot |-3| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2},$$

$$P_{\text{równoległościanu}} = 2 \cdot \left(|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}| + |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}|\right) =$$

$$= 2\left(|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}| + |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}| + |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}|\right) =$$

$$= 2\left(|[0, 0, 3]| + |[-2, 1, -1]| + |[1, -2, -1]|\right) = 2(3 + \sqrt{6} + \sqrt{6}) = 6 + 4\sqrt{6}.$$

Aby policzyć pole czworościanu, najpierw należy obliczyć

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a} &= [-2,-1,0] - [1,2,0] = [-3,-3,0],\\
\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} &= [1,1,-1] - [1,2,0] = [0,-1,-1],\\
|(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \times (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})| &= \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = |[3,-3,3]| = 3\sqrt{3},
\end{aligned}$$

wtedy

$$\begin{aligned}
P_{\text{czworościanu}} &= \tfrac{1}{2}\Big(|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}| + |\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}| + |(\vec{b} - \overrightarrow{a}) \times (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})|\Big) =\\
&= \tfrac{3}{2} + \sqrt{6} + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

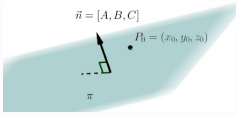
Przykład 2.8. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez:

a) punkt $A = (-1,0,3)$ i prostopadłej do wektora $\overrightarrow{n} = [-2,3,-5]$,
b) rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u} = [3,2,0]$, $\overrightarrow{v} = [0,5,3]$ i przechodzącej przez punkt $A = (0,1,-3)$.

Równania płaszczyzny:

- normalne $\qquad \pi: \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$

  gdzie $\overrightarrow{n} = [A,B,C]$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny (tzw. wektor normalny płaszczyzny),
  punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$,

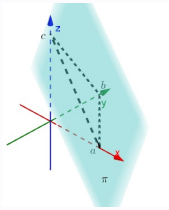


- ogólne $\qquad \pi: \; Ax + By + Cz + D = 0,$

  gdzie $A^2 + B^2 + c^2 > 0$ oraz $\overrightarrow{n} = [A,B,C]$ wektor normalny płaszczyzny.
  Uwaga. Jeżeli:
  $A = 0$, to $\pi || OX$, $\qquad B = 0$, to $\pi || OY$, $\qquad C = 0$, to $\pi || OZ$,
  $D = 0$, to płaszczyzna π przechodzi przez początek układu współrzędnych.

- odcinkowe $\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$

  gdzie $abc \neq 0$ oraz
  $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $a = -\frac{D}{C}$
  $(ABC \neq 0)$.
  Uwaga. Płaszczyzna π przecina osie układu współrzędnych w punktach: $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$.



- wyznacznikowe $\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$, gdzie

  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ niewspółliniowe punkty, przez które przechodzi płaszczyzna.

- parametryczne $\pi: \begin{cases} x = x_0 + u_x r + v_x s \\ y = y_0 + u_y r + v_y s \\ z = z_0 + u_z r + v_z s \end{cases} \quad r, s \in R$, gdzie

  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ punkt leżący na płaszczyźnie, $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$, $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ są niewspółliniowymi wektorami rozpinającymi płaszczyznę π.

Rozwiązanie.
Jeżeli w poleceniu nie jest sprecyzowane, w jakiej postaci ma być podane równanie płaszczyzny, wówczas wystarczy podać jedną dowolnie wybraną postać.

a) Równanie płaszczyzny przechodzącej przez

$$A = \begin{array}{cccc} & x_0 & y_0 & z_0 \\ & (-1, & 0, & 3) \end{array} \text{ i prostopadłej do wektora}$$

$$\overrightarrow{n} = \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ & [-2, & 3, & -5] \end{array} \text{ dane jest równaniem w postaci:}$$

normalnej $\pi: -2(x+1) + 3y - 5(z-3) = 0,$

z której łatwo wylicza się postać

ogólną $\pi: -2x + 3y - 5z + 13 = 0,$

albo

$$\text{odcinkową} \qquad \pi: \ \frac{x}{13/2} + \frac{y}{-13/3} + \frac{z}{13/5} = 1.$$

Postać wyznacznikowa wykorzystywana jest zwykle, gdy dane są trzy niewspółliniowe punkty. W tym przykładzie, mając tylko jeden punkt $P_0 = A$ i którąś z już wyznaczonych postaci równania płaszczyzny, należy znaleźć jeszcze dwa punkty, np. wstawiając $x = y = 0$ i wyliczając z, otrzymuje się $P_2 = (0, 0, \frac{13}{5})$. Trzeci punkt otrzymać można, podstawiając np. $x = 0$, $y = -1$, wtedy $z = 2$, czyli $P_3 = (0, -1, 2)$. Ostatnim krokiem jest sprawdzenie, czy punkty są niewspółliniowe. Można to zrobić, obliczając pole trójkąta o wierzchołkach $P_1 = (-1, 0, 3)$, $P_2 = (0, 0, \frac{13}{5})$, $P_3 = (0, -1, 2)$, jeżeli będzie $\neq 0$, to znaczy, że punkty są niewspółliniowe, w przeciwnym wypadku należy jeden punkt wyznaczyć na nowo. Pole trójkąta rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{P_1P_2} = [1, 0, -\frac{2}{5}]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = [1, -1, -1]$:

$$P_\triangle = \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}| = \tfrac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \tfrac{1}{2}\left| \left[-\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, -1\right] \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{38}}{10} \neq 0,$$

czyli wektory są niewspółliniowe, więc równanie

$$\text{wyznacznikowe} \qquad \pi: \begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-3 \\ 0-(-1) & 0-0 & \frac{13}{5}-3 \\ 0-(-1) & -1-0 & 2-3 \end{vmatrix} = 0.$$

Równania parametryczne można napisać, wykorzystując wyliczone do poprzedniej postaci wektory:
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = [1, 0, -\frac{2}{5}]$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = [1, -1, -1]$ oraz punkt leżący na płaszczyźnie $P_0 = A = (-1, 0, 3)$

$$\pi: \begin{cases} x = -1 + 1 \cdot r + 1 \cdot s \\ y = 0 + 0 \cdot r + (-1) \cdot s \\ z = 3 + \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot r + (-1) \cdot s \end{cases} \qquad r, s \in R,$$

czyli

$$\pi: \begin{cases} x = -1 + r + s \\ y = -s \\ z = -3 - \frac{2}{5}r - s \end{cases} \qquad r, s \in R.$$

b) Równania parametryczne płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u} = [3, 2, 0]$, $\overrightarrow{v} = [0, 5, 3]$ i przechodzącej przez punkt $A = (0, 1, -3)$

$$\pi : \begin{cases} x = 0 + 3 \cdot r + 0 \cdot s \\ y = 1 + 2 \cdot r + 5 \cdot s \\ z = -3 + 0 \cdot r + 3 \cdot s \end{cases} , r, s \in R.$$

czyli

$$\pi : \begin{cases} x = 3r \\ y = 1 + 2r + 5s \\ z = -3 + 3s \end{cases} , r, s \in R.$$

Do wyznaczenia równania wyznacznikowego potrzebne są punkty. Jeden jest dany z treści przykładu $P_1 = A = (0, 1, -3)$, dwa kolejne otrzymuje się, przyjmując
$\overrightarrow{u} = [3, 2, 0] = \overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - 0, y_2 - 1, z_2 - (-3)]$
oraz
$\overrightarrow{v} = [0, 5, 3] = \overrightarrow{P_1P_3} = [x_3 - 0, y_3 - 1, z_3 - (-3)]$, czyli $P_2 = (3, 3, -3)$ i $P_3 = (0, 6, 0)$, czyli

$$\text{r. wyznacznikowe} \qquad \pi : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - (-3) \\ 3 - 0 & 3 - 1 & -3 - (-3) \\ 0 - 0 & 6 - 1 & 0 - (-3) \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{po uproszczeniu } \pi : \begin{vmatrix} x & y - 1 & z + 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Obliczenie wyznacznika daje równanie

$$\text{r. ogólne} \qquad \pi : 6x - 9y + 15z + 54 = 0,$$

czyli po podzieleniu obu stron przez 3 równoważnie

$$\pi : 2x - 3y + 5z + 18 = 0.$$

Korzystając z powyższego równania, odczytujemy wektor normalny $\overrightarrow{n} = [2, -3, 5]$ (równoważnie $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$) i pamiętając, że $P_0 = A = (0, 1, -3)$, równanie

$$\text{normalne} \qquad \pi : 2x - 3(y - 1) + 5(z + 3) = 0.$$

Z równania ogólnego otrzymać można równanie

$$\text{odcinkowe} \qquad \frac{x}{-9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{-18/5} = 1.$$

Przykład 2.9. Napisać równanie prostej:

a) przechodzącej przez punkt $P_0 = (1, 2, 3)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{u} = [5, 6, 7]$,
b) przechodzącej przez punkty $P_1 = (-1, 2, -3)$ oraz $P_2 = (2, 0, -4)$.

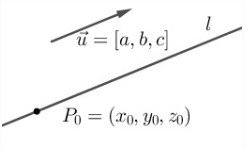
Równania prostej w R^3:

- prosta przechodząca przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległa do wektora $\overrightarrow{u} = [a, b, c]$ (tzw. wektora kierunkowego) dla $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ dana jest równaniami

  w postaci parametrycznej $\quad l : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad t \in R,$

- w postaci kierunkowej

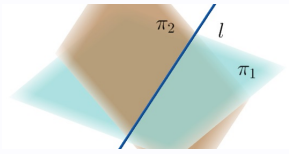
  $l : \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$, gdy $abc \neq 0$;
  jeżeli np. $a = 0$ i $bc \neq 0$, to $l \perp OX$
  oraz $l := \begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \end{cases}$.



- Przecięcie dwóch płaszczyzn $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ wyznacza prostą,

  tzw. równ. krawędziowe prostej $l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$,

  gdzie $A_1^1 + B_1^2 + C_1^2 > 0$ oraz $A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0$ i płaszczyzny te nie są równoległe.



Rozwiązanie. Jeżeli w poleceniu nie jest sprecyzowane, w jakiej postaci ma być podane równanie prostej, wówczas wystarczy podać jedną dowolnie wybraną postać.

a) Prosta przechodząca przez

$$P_0 = \begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & z_0 \\ (1, & 2, & 3) \end{array} \text{ i równoległej do wektora } \overrightarrow{u} = \begin{array}{ccc} a & b & c \\ [5, & 6, & 7] \end{array}$$

dana jest równaniami parametrycznymi:

$$l : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 7t \end{cases}, \quad t \in R,$$

równaniem kierunkowym $\qquad l : \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{7}.$

Do wyznaczenia równania krawędziowego potrzebne są dwie płaszczyzny. Mając równanie parametryczne, wyznaczyć należy np. z pierwszego równania t i wstawić do równania na y i na z :

$$l : \begin{cases} t = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5} \\ y = 2 + 6t = 2 + 6\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right) \\ z = 3 + 7t = 3 + 7\left(\frac{1}{5}x - \frac{1}{5}\right) \end{cases},$$

co po uproszczeniu daje

równanie krawędziowe $\qquad l : \begin{cases} 6x - 5y + 4 = 0 \\ 7x - 5z + 8 = 0 \end{cases}.$

b) Równanie prostej przechodzącej przez punkty $P_1 = (-1, 2, -3)$ oraz $P_2 = (2, 0, -4)$ sprowadza się do poprzedniego przykładu, wybierając jako P_0 jeden z punktów, np. $P_0 = P_1$ oraz wektor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$, czyli

$$P_0 = P_1 = (\overset{x_0}{-1},\ \overset{y_0}{2},\ \overset{z_0}{-3}) \text{ i równoległej do wektora } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = [\overset{a}{3}, \overset{b}{-2}, \overset{c}{-1}],$$

więc równania:

parametryczne $\qquad l : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - t \end{cases}, \quad t \in R,$

kierunkowe $\qquad l : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}.$

Z równań parametrycznych wyznaczyć należy t, np. z x, i wstawić do równania na y i z :

$$l : \begin{cases} t = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y = 2 - 2t = 2 - 2\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) \\ z = -3 - t = -3 - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) \end{cases},$$

po uproszczeniu otrzymuje się równanie

krawędziowe $\qquad l : \begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ x + 3z + 10 = 0 \end{cases}.$

Przykład 2.10. Podać punkt, przez który przechodzi prosta, i wektor, do którego jest równoległa, oraz sprawdzić, czy punkt $\tilde{P} = (4, 2, -1)$ należy do prostej:

a) $l : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = -5 + t \end{cases}, \quad t \in R,$ b) $l : \begin{cases} x = -2 - 6t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, \; t \in R.$

Rozwiązanie. Wystarczy odczytać zgodnie ze wzorem na równanie parametryczne

a) $P_0 = (1, 2, -5)$, $\overrightarrow{u} = [3, 0, 1]$. Aby sprawdzić, czy $\tilde{P} \in l$, należy wstawić współrzędne tego punktu do równania prostej l

$$l : \begin{cases} 4 = 1 + 3t \\ 2 = 2 \\ -1 = -5 + t \end{cases}, \quad t \in R; \quad \text{po uproszczeniu } l : \begin{cases} t = 1 \\ 2 = 2 \\ t = 4 \end{cases},$$

co prowadzi do sprzeczność, więc $\tilde{P} \notin l$.

b) $P_0 = (-2, 1, 0)$, $\overrightarrow{u} = [-6, -1, 1]$. Analogicznie

$$l : \begin{cases} 4 = -2 - 6t \\ 2 = 1 - t \\ -1 = t \end{cases}, \quad t \in R; \quad \text{po uproszczeniu} \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases},$$

więc $\tilde{P} \in l$.

Przykład 2.11. Znaleźć rzut punktu $P = (1, 2, 1)$ na prostą $l : \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z+1}{4}$ i obliczyć odległość tego punktu P od prostej l.

Rozwiązanie. Należy najpierw wyznaczyć płaszczyznę przechodzącą przez punkt P i prostopadłą do prostej l. Wektor normalny tej płaszczyzny jest jednocześnie wektorem kierunkowym prostej, czyli $\overrightarrow{n} = [2, 1, 4]$, więc równanie ogólne tej płaszczyzny można zapisać w postaci

$$\pi : 2x + y + 4z + D = 0.$$

Skoro $P \in \pi$, to współrzędne tego punktu muszą spełniać równanie tej płaszczyzny

$$2 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot 1 + D = 0, \text{ więc } D = -8.$$

Więc równanie płaszczyzny dane jest równaniem

$$\pi : 2x + y + 4z - 8 = 0.$$

Współrzędne P' rzutu punktu P na prostą są rozwiązaniem układu równań (dla ułatwienia prostą l należy zapisać w postaci parametrycznej)

$$\begin{cases} l \\ \pi \end{cases}, \quad \text{czyli} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 + 4t \\ 2x + y + 4z - 8 = 0 \end{cases}. \text{ Stąd } \begin{cases} t = \frac{4}{7} \\ x = \frac{15}{7} \\ y = -\frac{10}{7} \\ z = \frac{9}{7} \end{cases}$$

Współrzędne punktu $P' = (15/7, -10/7, 9/7)$.

Długość odcinka

$$|PP'| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

gdzie $P = (x_1, y_1, z_1)$ oraz $P' = (x_2, y_2, z_2)$.

Odległość punktu P od prostej to długość odcinka PP' :

$$|PP'| = \sqrt{(15/7 - 1)^2 + (-10/7 - 2)^2 + (9/7 - 1)^2} = 2\sqrt{\frac{23}{7}}.$$

Przykład 2.12. Obliczyć odległość punktu $A = (1, -2, -3)$ od płaszczyzny $\pi : 3x - 12y + 4z + 1 = 0$.

Odległość d punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ dana jest wzorem

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Rozwiązanie. Odległość punktu $A = P_0 = (1, -2, -3)$ od płaszczyzny π o wektorze normalnym $\overrightarrow{n} = [3, -12, 4]$ wynosi

$$d(A, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 12 \cdot (-2) + 4 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-12)^2 + 4^2}} = \frac{16}{13}.$$

Przykład 2.13. Obliczyć wysokość czworościanu o wierzchołkach $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (3, 4, 5)$ opuszczonej z wierzchołka A.

Rozwiązanie. Wysokość czworościanu obliczyć można, np. korzystając z poprzedniego przykładu. Wystarczy wyznaczyć płaszczyznę przechodzącą przez punkty B, C, D, a następnie obliczyć odległość punktu A od tej płaszczyzny:

$$\pi_{BCD} : \begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 0-1 & 2-0 & 3-0 \\ 3-1 & 4-0 & 5-0 \end{vmatrix} = 0,$$

po wyliczeniu w postaci ogólnej $-2x + 11y - 8z + 2 = 0$, więc

$$h_A = d(A, \pi) = \frac{|-2 \cdot 0 + 11 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2 + (-8)^2}} = \frac{2}{3\sqrt{21}}.$$

Inny sposób wykorzystuje objętość czworościanu

$$V = \frac{1}{6} \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \circ \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{3} h_A \cdot P_{\triangle BCD}.$$

Przykład 2.14. Wyznaczyć rzut

a) punktu $P = (1, 2, 3)$ na płaszczyznę $\pi : \ -x + 5y + 8z + 7 = 0$,

b) prostej $l : \begin{cases} x &= -2t \\ y &= 4 + t \\ z &= -6 \end{cases}$, $t \in R$ na płaszczyznę π.

Rozwiązanie. a) Współrzędne P' rzutu punktu P na płaszczyznę π są rozwiązaniem układu równań prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (1, 2, 3)$. Wektor normalny płaszczyzny $\vec{n} = [-1, 5, 8]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej

$$l_1 : \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 5t \\ z &= 3 + 8t \end{cases}, t \in R.$$

Wystarczy rozwiązać wspomniany wcześniej układ równań

$$\begin{cases} l_1 \\ \pi \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 8t \\ -x + 5y + 8z + 7 = 0 \end{cases}, \quad \text{po rozwiązaniu } \begin{cases} t = -\frac{4}{9} \\ x = \frac{13}{9} \\ y = -\frac{2}{9} \\ z = -\frac{5}{9} \end{cases},$$

więc $P' = \left(\frac{13}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{5}{9}\right)$.

b) Rzutem prostej l na płaszczyznę π jest prosta, aby znaleźć równanie tej prostej, wystarczy wziąć dwa dowolne punkty należące do tej prostej, znaleźć ich rzuty na płaszczyznę i wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez te rzuty. Punkty na prostej l to np.

$$\text{dla} \qquad t = 0 \to A = (0, 4, -6), \qquad t = 1 \to B = (-2, 5, -6).$$

Rzuty na płaszczyznę π tych punktów (analogicznie do wcześniejszego podpunktu)

$$A' = \left(-\frac{7}{30}, \frac{31}{6}, -\frac{62}{15}\right), \quad B' = \left(-\frac{97}{45}, \frac{52}{9}, -\frac{214}{45}\right).$$

Prosta przechodząca przez punkty A', B' (analogicznie do przykładu 2.10 b)

$$l' : \begin{cases} x = -\frac{7}{30} - \frac{173}{90}t \\ y = \frac{31}{6} + \frac{11}{18}t \\ z = -\frac{62}{15} - \frac{28}{45}t \end{cases}, \qquad t \in R.$$

Przykład 2.15. Napisać równania stycznych do krzywych stożkowych danych równaniami:

a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ w punkcie $(3, 2)$,
b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ w punkcie $(1, 3/2)$,
c) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ w punkcie $(4, 3)$,
d) $y = x^2 + 12x + 36$ w punkcie $(-4, 4)$.

Równania stycznych do krzywych stożkowych:

- dla okręgu o środku w $P_0 = (x_0, y_0)$ i promieniu $r > 0$ danego równaniem $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ styczna w punkcie $S = (x_s, y_s)$ dana jest wzorem

$$(x_s - x_0)(x - x_0) + (y_s - y_0)(y - y_0) = r^2,$$

- dla elipsy o środku w $P_0 = (x_0, y_0)$ i półosiach $a, b > 0$ danej równaniem $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ styczna w punkcie $S = (x_s, y_s)$ dana jest wzorem

$$\frac{(x_s - x_0)(x - x_0)}{a^2} + \frac{(y_s - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1,$$

- dla hiperboli o środku w $P_0 = (x_0, y_0)$ i półosiach $a, b > 0$ danej równaniem $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ styczna w punkcie $S = (x_s, y_s)$ dana jest wzorem

$$\frac{(x_s - x_0)(x - x_0)}{a^2} - \frac{(y_s - y_0)(y - y_0)}{b^2} = 1,$$

- dla paraboli o wierzchołku w $P_0 = (x_0, y_0)$ danej równaniem $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ styczna w punkcie $S = (x_s, y_s)$ dana jest wzorem

$$y = 2a(x_s - x_0)(x - x_s) + y_s.$$

Rozwiązanie. Z powyższych wzorów

a) styczna do okręgu $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ w punkcie $(3, 2)$ dana jest równaniem $(3-2)(x-2) + (2-1)(y-1) = 2$, czyli $y = -x + 5$,

b) styczna do elipsy $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ w punkcie $(1, 3/2)$ dana jest równaniem $\frac{(1-0)(x-0)}{4} + \frac{(3/2-0)(y-0)}{3} = 1$, czyli $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

c) styczna do hiperboli $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ w punkcie $(4, 3)$ dana jest równaniem $\frac{(4-0)(x-0)}{4} - \frac{(3-0)(y-0)}{3} = 1$, czyli $y = x - 1$,

d) styczna do paraboli $y = x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$ w punkcie $(-4, 4)$ dana jest równaniem $y = 2(-4+6)(x+4) + 4$, czyli $y = 4x + 20$.

2.2. Zadania

Zadanie 2.1. Wyznaczyć współrzędne wektorów: o początku w punkcie A i końcu w punkcie B oraz wektorów $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, gdzie: $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$, $C = (8, -\sqrt{2}, 3)$, $D = (3, 4\sqrt{2}, 5)$.

Zadanie 2.2. Obliczyć długości wektorów z zadania 2.1.

Zadanie 2.3. Niech $\vec{a} = [-2, 3, 4]$, $\vec{b} = [9, 0, -3]$, $\vec{c} = [-2, -3, -1]$.
Obliczyć: $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$, $4\vec{c} - 2\vec{b} + 5\vec{a}$.
Obliczyć iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy dla par wektorów:
$\vec{a}, \vec{b}$; $\vec{a}, \vec{c}$; $\vec{b}, \vec{c}$.
Obliczyć długości otrzymanych wektorów.

Zadanie 2.4. Unormować otrzymane w zadaniu 2.3 wektory.

Zadanie 2.5. Obliczyć iloczyn mieszany wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ oraz $\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}$ z zadania 2.3.

Zadanie 2.6. Obliczyć pole trójkąta i równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{a} = [0, 2, 1]$, $\vec{b} = [3, -1, 0]$.

Zadanie 2.7. Obliczyć objętość i pole powierzchni równoległościanu i czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a} = [-3, 1, -4]$, $\vec{b} = [3, -3, 0]$, $\vec{c} = [3, 0, 4]$.

Zadanie 2.8. Napisać równanie płaszczyzny:

a) przechodzącej przez punkt $A = (-1, 1, 3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [-2, 0, 8]$,
b) przechodzącej przez punkt $A = (0, 2, 3)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = [0, 3, 4]$,
c) rozpiętej przez wektory $\vec{u} = [0, 3, 0]$, $\vec{v} = [1, 5, 3]$ i przechodzącej przez punkt $A = (0, 1, 2)$,
d) rozpiętej przez wektory $\vec{u} = [0, 2, -1]$, $\vec{v} = [0, 1, 2]$ i przechodzącej przez punkt $A = (-1, 1, -3)$,
e) przechodzącej przez punkty $A = (1, 2, 0)$, $B = (7, 3, 0)$, $C = (0, -3, 4)$,
f) przechodzącej przez punkty $A = (1, 1, -1)$, $B = (-2, 0, -1)$, $C = (-2, -3, 4)$.

Zadanie 2.9. Napisać równanie prostej:

a) przechodzącej przez punkt $P(1, 2, 3)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = [2, 1, 4]$,
b) przechodzącej przez punkty $P_1 = (-1, 2, 0)$ oraz $P_2 = (1, 3, -4)$,
c) przechodzącej przez punkt $P_0 = (0, -3, 5)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = [-1, 0, 3]$,
d) przechodzącej przez punkt $P_0 = (3, -2, 0)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = [0, 0, 3]$.

Zadanie 2.10. Podać punkt, przez który przechodzi prosta, i wektor, do którego jest równoległa, oraz sprawdzić, czy punkt $\tilde{P} = (1, 1, 1)$ należy do prostej:

a) $l : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 \end{cases}, \ t \in R,$ b) $l : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}, \ t \in R.$

Zadanie 2.11. Znaleźć rzut punktu P na prostą l:

a) $P = (1, 1, 1)$, $l : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, \ t \in R,$

b) $P = (0,0,0)$, $\quad l : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = -2 - t \end{cases}, \ t \in R.$

Zadanie 2.12. Obliczyć:

a) odległość punktu $A(1,2,-3)$ od płaszczyzny $\pi : 6x - 2y + z + 16 = 0$,
b) odległość punktu $A(-3,4,-3)$ od płaszczyzny $\pi : 2x - 3y + z = 0$.

Zadanie 2.13. Obliczyć długości wysokości czworościanu z przykładu 2.13 opuszczonych z wierzchołków B, C, D.

Zadanie 2.14. Wyznaczyć współrzędne rzutu prostej $l : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{-4} = \frac{z-4}{-4}$ na płaszczyznę $\pi : x - y - z = 0$ oraz na płaszczyzny układu współrzędnych (XOY, XOZ, YOZ).

Zadanie 2.15. Płaski dach wiaty w kształcie równoległoboku rozpięty jest przez wektory $\vec{a} = [2,0,2]$, $\vec{b} = [1,3,3]$, najwyższy punkt dachu jest na wysokości 4 m. Jaka jest powierzchnia podłogi tak zadaszonej wiaty i na jakiej wysokości jest najniższy punkt dachu wiaty?

Zadanie 2.16. Napisać równania stycznych do krzywych stożkowych danych równaniami:

a) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 20$ w punkcie $(2,4)$,
b) $2x^2 + 18y^2 = 9$ w punkcie $(1{,}5; 0{,}5)$,
c) $2x^2 - y^2 = 4$ w punkcie $(2,2)$,
d) $y = x^2 - 6x + 13$ w punkcie $(4,5)$.

Zadanie 2.17. Na działce jest staw w kształcie elipsy o równaniu $\frac{x^2}{4{,}5} + \frac{y^2}{0{,}5} = 1$. Wyznaczyć równanie opisujące brzeg ścieżki, która jest styczna do stawu w punkcie $(-1{,}5; -0{,}5)$.

Wskazówka. W poniższych zadaniach warto zręcznie wprowadzić układ współrzędnych. W niektórych zadaniach można (dla ułatwienia) przyjąć za a konkretną wartość, np. $a = 2$.

Zadanie 2.18. Wiata na planie prostokąta o wymiarach 4×5 m ma płaski dach oparty na czterech słupach, w narożach prostokąta, mających wysokości 3 m, 4 m, 5 m. Jaka jest wysokość czwartego słupa? Jaki kształt ma połać dachu? Jakie jest pole powierzchni tego dachu?

Zadanie 2.19. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości a. Wykazać, że płaszczyzny $\pi_1(ACF)$, $\pi_2(DEG)$ dzielą przekątną $p(HB)$ na

trzy równe części. Jak położona jest przekątna $p(HB)$ względem płaszczyzn $\pi_1(ACF)$, $\pi_2(DEG)$?

Zadanie 2.20. Wykazać (posługując się współrzędnymi wierzchołków w pewnym układzie współrzędnych), że proste zawierające przeciwległe (tj. nieprzecinające się) krawędzie czworościanu foremnego (o krawędzi długości a) są prostopadłe.

Zadanie 2.21. Łącząc środki ścian sześcianu o krawędzi długości a, otrzymujemy ośmiościan foremny. Wyznaczyć współrzędne wierzchołków obu brył w stosownie przyjętym układzie współrzędnych. Po połączeniu środków ścian ośmiościanu otrzymujemy ponownie sześcian. Jakie są długości krawędzi ośmiościanu i „mniejszego" sześcianu?

Zadanie 2.22. Dany jest odcinek AB, gdzie $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ podzielono punktem $C = (c_1, c_2, c_3)$ w stosunku $\lambda = \frac{|AC|}{|BC|}$.

a) Wyprowadzić wzory na współrzędne punktu C.
b) Dla jakiego λ jest to środek odcinka AB?
c) Podać wzory na współrzędne środka odcinka.
d) Dla $A = (-2, 4, 3)$, $B = (6, 3, -1)$ wyznaczyć współrzędne punktu C, dla którego jest on środkiem odcinka, dla którego λ jest złotą, srebrną bądź brązową liczbą.

Wskazówka.
$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – złota liczba,
$\lambda = 1 + \sqrt{2}$ – srebrna liczba,
$\lambda = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ – brązowa liczba.

Zadanie 2.23. Wskazać krawędzie ośmiościanu foremnego, które należą do prostych skośnych i (posługując się współrzędnymi wierzchołków w pewnym układzie współrzędnych) obliczyć odległość tych krawędzi.

Wskazówka. Dwie proste l_1 (o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{u} = [u_x, u_y, u_z]$ i przechodząca przez punkt $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$) oraz l_2 (o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{v} = [v_x, v_y, v_z]$ i przechodząca przez punkt $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$) są skośne, gdy nie leżą w jednej płaszczyźnie, czyli $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{P_1P_2} = 0$.

2.3. Odpowiedzi

Zad. 2.1

$\overrightarrow{AB} = [2, 0, -2]$, $\overrightarrow{CA} = [-7, 2+\sqrt{2}, 0]$, $\overrightarrow{BC} = [5, -2-\sqrt{2}, 2]$, $\overrightarrow{AD} = [2, -2+4\sqrt{2}, 2]$,
$\overrightarrow{DB} = [0, 2-4\sqrt{2}, -4]$, $\overrightarrow{CD} = [-5, 5\sqrt{2}, 2]$, $\overrightarrow{AC} = [7, -2-\sqrt{2}, 0]$.

Zad. 2.2

$|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{55+4\sqrt{2}}$, $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{35+4\sqrt{2}}$, $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{44-16\sqrt{2}}$,
$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{52-16\sqrt{2}}$, $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{79}$, $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA}|$.

Zad. 2.3

$\vec{a}+\vec{b} = [7, 3, 1]$,
$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{59}$,
$\vec{a}-\vec{b} = [-11, 3, 7]$,
$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{179}$,
$\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c} = [29, 9, -3]$,

$|\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}| = 7\sqrt{19}$,
$4\vec{c}-2\vec{b}+5\vec{a} = [-36, 3, 22]$,
$|4\vec{c}-2\vec{b}+5\vec{a}| = \sqrt{1789}$,
$\vec{a}\cdot\vec{b} = -30$,
$\vec{a}\cdot\vec{c} = -9$,
$\vec{b}\cdot\vec{c} = -15$,

$\vec{a}\times\vec{b} = [-9, 30, -27]$,
$|\vec{a}\times\vec{b}| = 3\sqrt{190}$,
$\vec{a}\times\vec{c} = [9, -10, 12]$,
$|\vec{a}\times\vec{c}| = 5\sqrt{13}$,
$\vec{b}\times\vec{c} = [-9, 15, -27]$,
$|\vec{b}\times\vec{c}| = 3\sqrt{115}$.

Zad. 2.4

$\frac{1}{|\vec{a}+\vec{b}|}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \left[\frac{7}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{59}}\right]$,
$\frac{1}{|\vec{a}-\vec{b}|}\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \left[-\frac{11}{\sqrt{179}}, \frac{3}{\sqrt{179}}, \frac{7}{\sqrt{179}}\right]$,
$\frac{1}{|\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}|}\left(\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}\right) = \left[\frac{29}{7\sqrt{19}}, \frac{9}{7\sqrt{19}}, -\frac{3}{7\sqrt{19}}\right]$,
$\frac{1}{|4\vec{c}-2\vec{b}+5\vec{a}|}\left(4\vec{c}-2\vec{b}+5\vec{a}\right) = \left[-\frac{36}{\sqrt{1789}}, \frac{3}{\sqrt{1789}}, \frac{22}{\sqrt{1789}}\right]$.

$\frac{1}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \left[-\frac{3}{\sqrt{190}}, \frac{10}{\sqrt{190}}, -\frac{3}{\sqrt{190}}\right]$,
$\frac{1}{|\vec{a}\times\vec{c}|}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right) = \left[\frac{9}{5\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{12}{5\sqrt{13}}\right]$,
$\frac{1}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \left[-\frac{3}{\sqrt{115}}, \frac{5}{\sqrt{115}}, -\frac{9}{\sqrt{115}}\right]$,

Zad. 2.5 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -45$, $(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = 45$. Zad. 2.6 $P_{\parallelogram} = \sqrt{46}$, $P_{\triangle} = \frac{\sqrt{46}}{2}$.

Zad. 2.7 Równoległościan: $V = 12$, $P = 46+6\sqrt{41}$, czworościan: $V = 2$, $P = \frac{1}{2}\left(23+3\sqrt{41}+2\sqrt{421}\right)$.

Zad. 2.8

a) $\pi : -2(x+1)+8(z-3) = 0$,
b) $\pi : 3(y-2)+4(z-3) = 0$,
c) $\pi : \begin{cases} x = s \\ y = 1+3r+5s \\ z = 2+3s \end{cases}$, $r, s \in R$,
d) $\pi : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1+2r+s \\ z = -3-r+2s \end{cases}$, $r, s \in R$,
e) $\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$,
$4x-24y-29z+44 = 0$,
f) $\pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$,
$-5x+15y+9z-1 = 0$.

Zad. 2.9 $(P_0 = P_1, \vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2})$

	r. parametryczne $(t \in R)$	r. kierunkowe	r. krawędziowe
a)	$l : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+t \\ z = 3+4t \end{cases}$	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$	$\begin{cases} x-2y+3 = 0 \\ 4x-2z+2 = 0 \end{cases}$,
b)	$l : \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 2+t \\ z = -4t \end{cases}$	$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-4}$	$\begin{cases} x-2y+5 = 0 \\ 2x+z+2 = 0 \end{cases}$,
c)	$l : \begin{cases} x = -t \\ y = -3 \\ z = 5+3t \end{cases}$	$\begin{cases} y = -3 \\ \frac{x}{-1} = \frac{z-5}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} y = -3 \\ 3x+z-5 = 0 \end{cases}$,
d)	$l : \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 3t \end{cases}$	brak	$\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$.

Zad. 2.10 a) $P_0 = (2, 1, 4)$, $\vec{u} = [3, -2, 0]$, $\tilde{P} \notin l$, b) $P_0 = (-2, 2, 0)$, $\vec{u} = [3, -1, 1]$, $\tilde{P} \in l$.

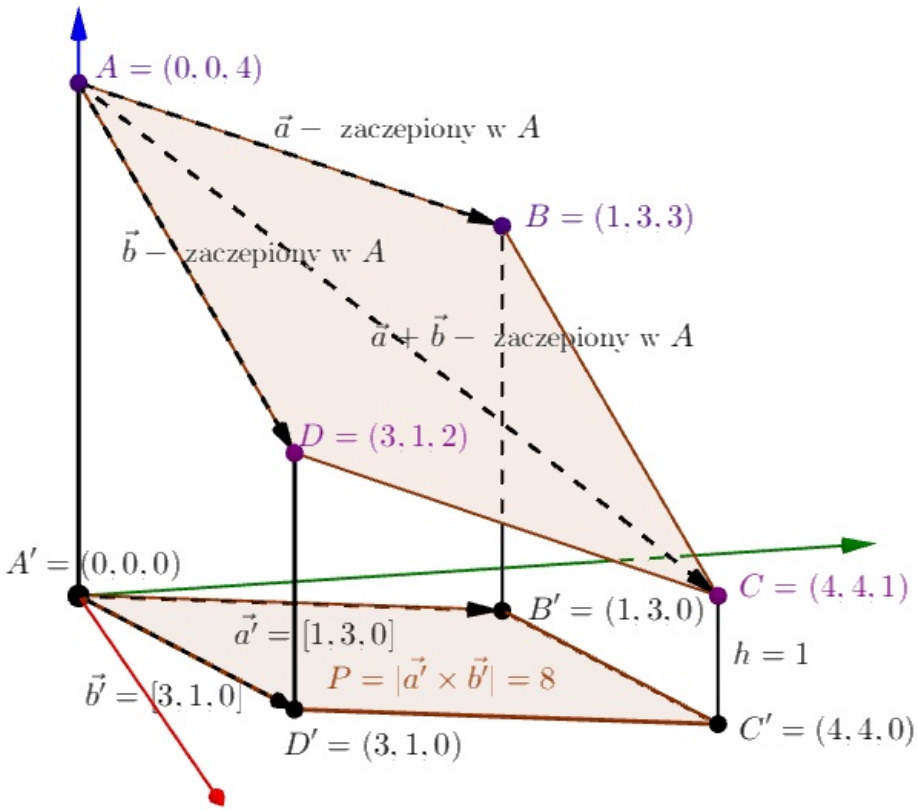
Zad. 2.11 a) $P' = (4/3, 10/3, 11/3)$, b) $P' = (-17/21, 23/21, -22/21)$.

Zad. 2.12 a) $d(A, \pi) = \frac{15}{\sqrt{41}}$, b) $d(A, \pi) = 3\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Zad. 2.13 $h_B = 2/11$, $h_C = 2/\sqrt{41}$, $h_D = 2/\sqrt{13}$.

Zad. 2.14 rzut na π : $\begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in R$, rzut na XOY : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases}, t \in R$,
rzut na XOZ : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = 4t \end{cases}, t \in R$, rzut na YOZ : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4t \\ z = 4t \end{cases}, t \in R$.

Zad. 2.15

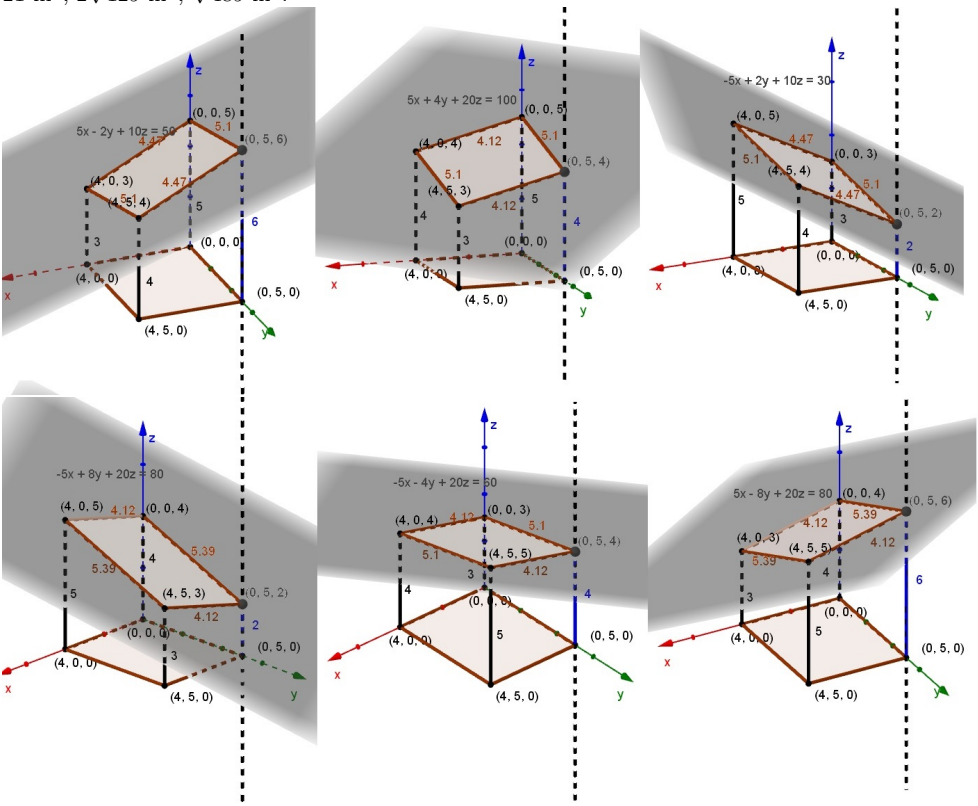


Zad. 2.16 a) $y = -2x + 8$, b) $y = -\frac{1}{3}x + 1$, c) $y = 2x - 2$, d) $y = 2x - 3$.

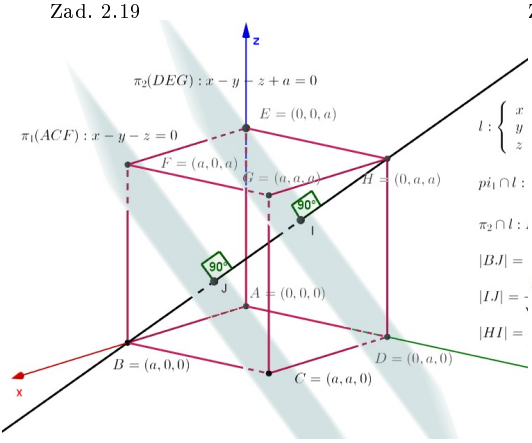
Zad. 2.17 $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

Zad. 2.18 Dach jest równoległobokiem o powierzchni (w zależności od kolejności ustawienia słupów):

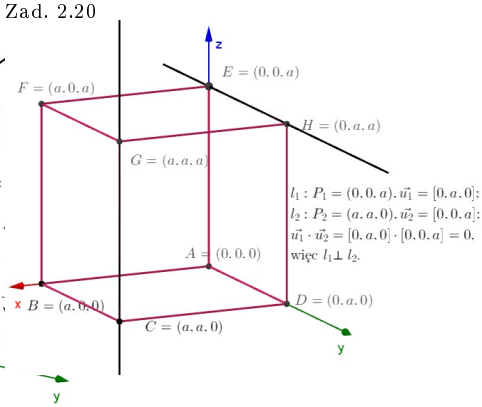
21 m^2, $2\sqrt{129}$ m^2, $\sqrt{489}$ m^2.



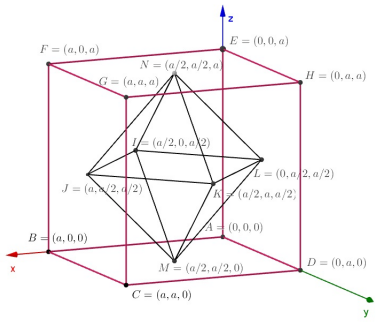
Zad. 2.19

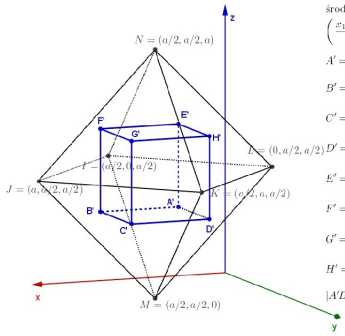


Zad. 2.20



Zad. 2.21





$|JK| = \frac{a}{\sqrt{2}}$-długość boku ośmiościanu

środek ciężkości$\Delta P_1P_2P_3$:

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

$A' = \frac{I+L+M}{3} = \left\{\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right\}$,

$B' = \frac{I+J+M}{3} = \left\{\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right\}$,

$C' = \frac{J+K+M}{3} = \left\{\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{a}{3}\right\}$,

$D' = \frac{K+L+M}{3} = \left\{\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{a}{3}\right\}$,

$E' = \frac{I+L+N}{3} = \left\{\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right\}$,

$F' = \frac{I+J+N}{3} = \left\{\frac{2a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{2a}{3}\right\}$,

$G' = \frac{J+K+N}{3} = \left\{\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right\}$,

$H' = \frac{K+L+N}{3} = \left\{\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right\}$,

$|A'B'| = \frac{a}{3}$-długość boku małego sześcianu

Zad. 2.22

a) $C = \left(\frac{\lambda b_1+a_1}{1+\lambda}, \frac{\lambda b_2+a_2}{1+\lambda}, \frac{\lambda b_3+a_3}{1+\lambda}\right)$, b) $\lambda = 1$, c) $C = \left(\frac{b_1+a_1}{2}, \frac{b_2+a_2}{2}, \frac{b_3+a_3}{2}\right)$.

Rozdział 3

Monotoniczość i granice ciągów

Zadania dotyczące monotoniczności i granic ciągów, liczby Eulera, ciągu Fibonacciego.

3.1. Przykłady

Przykład 3.1. Zbadać ograniczoność ciągów

a) $a_n = 5n + 4$, b) $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$, c) $a_n = \frac{4^n+3}{4^n}$.

Ciąg liczbowy o wyrazie ogólnym a_n jest

- ograniczony z dołu, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z dołu, czyli
$$\underset{m\in R}{\exists}\ \underset{n\in N}{\forall}\ a_n \geq m;$$
- ograniczony z góry, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry, czyli
$$\underset{M\in R}{\exists}\ \underset{n\in N}{\forall}\ a_n \leq M;$$
- ograniczony, jeżeli zbiór $\{a_n\}$ jest ograniczony (z góry i z dołu), czyli
$$\underset{M,m\in R}{\exists}\ \underset{n\in N}{\forall}\ m \leq a_n \leq M.$$

Rozwiązanie. a) Ciąg $a_n = 5n + 4$ jest ograniczony z dołu, np. przez liczbę $m = 9$, gdyż dla każdego $n \in R$

$$a_n = 5n + 4 \geq 9 = m.$$

Ciąg $a_n = 5n + 4$ nie jest ograniczony z góry, ponieważ dla dowolnej liczby rzeczywistej M zawsze można znaleźć n_0 takie, że

$$a_{n_0} = 5n_0 + 4 \geq M.$$

b) Ciąg $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+4} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$ jest ograniczony (z dołu przez $m = 0$ i z góry przez, np. $M = 2$), gdyż dla każdego $n \in R$ zachodzi

$$m = 0 \leq \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} \leq \frac{4}{\sqrt{5}+1} < 2 = M.$$

c) Ciąg $a_n = \frac{4^n+3}{4^n} = \frac{4^n}{4^n} + \frac{3}{4^n} = 1 + \frac{3}{4^n}$ jest ograniczony (z dołu przez $m = 1$ i z góry przez, np. $M = 2$), gdyż dla każdego $n \in R$ zachodzi

$$m = 1 \leq 1 + \frac{3}{4^n} < 2 = M.$$

Przykład 3.2. Zbadać monotoniczność ciągów

a) $a_n = 5n + 4$, b) $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$, c) $b_n = \frac{5^n}{3^n}$.

Monotoniczność ciągu (a_n) bada się poprzez ustalenie znaku różnicy $a_{n+1} - a_n$ lub porównanie ilorazu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ z 1 (dla ciągów o wyrazach dodatnich), gdy

badanie różnicy	badanie ilorazu	wnioski
$a_{n+1} - a_n > 0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$	ciąg rosnący(symbolicznie ozn. $\nearrow$),
$a_{n+1} - a_n < 0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$	ciąg malejący(symbolicznie ozn. $\searrow$),
$a_{n+1} - a_n \geq 0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$	ciąg niemalejący,
$a_{n+1} - a_n \leq 0$	$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$	ciąg nierosnący.

Rozwiązanie. a) Do zbadania monotoniczności potrzebne jest $a_n = 5n + 4$ i $a_{n+1} = 5(n+1) + 4 = 5n + 9$. Wystarczy teraz zbadać różnicę

$$a_{n+1} - a_n = (5n+9) - (5n+4) = 5n + 9 - 5n - 4 = 5 > 0,$$

czyli ciąg jest rosnący ($\nearrow$).

b) Gdy $a_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n}$, wtedy
$a_{n+1} = \sqrt{(n+1)+4} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}$.

Jest to ciąg o wyrazach dodatnich i w tym przypadku łatwiej zbadać iloraz

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}} = \\
&= \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \\
&= \frac{(n+5)-(n+1)}{(n+4)-n} \cdot \frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} = \\
&= \frac{4}{4} \cdot \frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Korzystając z nierówności

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+4} &< \sqrt{n+5}, \\
\sqrt{n} &< \sqrt{n+1}
\end{aligned}$$

otrzymuje się po dodaniu stronami

$$\sqrt{n+4}+\sqrt{n} < \sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}.$$

Wystarczy teraz podzielić stronami przez $\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}$

$$\frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n+1}} < 1,$$

więc ciąg jest malejący ($\searrow$).

c) Gdy $b_n = \frac{5^n}{3^n}$, to $b_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}}$. Tak jak w poprzednich przykładach, wystarczy rozważyć różnicę

$$b_{n+1} - b_n = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{5^n}{3^n} = \frac{5^n}{3^n}\left(\frac{5}{3}-1\right) = \frac{5^n}{3^n} \cdot \frac{2}{3} > 0,$$

więc ciąg jest rosnący ($\nearrow$). Można wykazać, że ciąg jest rosnący, sprawdzając iloraz

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{5^n}{3^n}} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{5^n} = \frac{5}{3} > 1, \text{czyli } \nearrow.$$

Uwaga. Wystarczy sprawdzenie jednego warunku.

Przykład 3.3. Obliczyć granice ciągów

a) $a_n = 4n + 2$,
b) $a_n = \sqrt{4n+2} - \sqrt{4n}$,
c) $a_n = \sqrt{4n+2} + \sqrt{4n}$,
d) $a_n = \frac{n^3+4n+2}{5n-4n^3+13}$,
e) $a_n = \frac{5n^3-4n+3}{5n-3n^4+13}$,
f) $a_n = \frac{5n-3n^4+13}{5n^3-4n+3}$.

Uwaga. [8]

- „Obliczanie granic ciągów, w najbardziej ogólnym rozumieniu, polega na wyznaczeniu symbolu granicznego".
- Granice ciągu a_n zapisuje się następująco $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (lim – z łaciny *limes* – granica.)
- Oblicza się „otrzymując symbole graniczne ujmowane w nawisy kwadratowe, dla zaznaczenia, że nie są to działania wykonywane na liczbach, tylko na granicach. Niektóre z tych symboli dają zawsze ten sam wynik, bez względu na to, jakie ciągi składowe dają określony symbol graniczny, i nazywamy je symbolami oznaczonymi. Niektóre znów dają różne wyniki w zależności od tego, na jakich ciągach wykonujemy działania, i takie symbole nazywamy nieoznaczonymi".

- Gdy w wyniku rachunków otrzymamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ i $g \in R$, to mówimy, że ciąg jest zbieżny do g.
- Gdy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $+\infty$, to mówimy, że ciąg jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$ lub $+\infty$, odpowiednio.
- Wyrażenia nieoznaczone:
  $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 – należy przekształcić ogólny wyraz ciągu, tak aby policzenie granicy było możliwe.

Uwaga. (Granice niewłaściwe ciągów)

- $a+\infty = \infty$ dla $-\infty < a \leq \infty$,
- $\frac{a}{\infty} = 0$ dla $-\infty < a < \infty$,
- $a \cdot \infty = \infty$ dla $0 < a \leq \infty$,
- $a^\infty = 0$ dla $0^+ \leq a < 1$,
- $a^\infty = \infty$ dla $1 < a \leq \infty$,
- $\infty^a = 0$ dla $-\infty \leq a < 0$,
- $\infty^a = \infty$ dla $0 < a \leq \infty$,
- $\frac{a}{0^+} = \infty$ dla $0 < a \leq \infty$.

Aby zrozumieć, dlaczego $a + \infty = \infty$, wystarczy przenieść myślenie na walutę i pomyśleć, że gdy do pewnej konkretnej kwoty, np. $a = 2$, dodamy bardzo, bardzo, bardzo,... dużo pieniędzy (taką ilość, której nie jesteśmy w stanie wydać), czyli naszą nieskończoność, to będziemy mieli bardzo, bardzo, bardzo,... dużo pieniędzy. Bez względu na to, jaka jest liczba a, to i tak otrzymamy bardzo, bardzo, bardzo,... dużo, czyli ∞.
Analogicznie dla $\frac{a}{\infty}$. Jeżeli pewną konkretną kwotę, np. $a = 100$ zł podzielimy na 2 osoby, każda otrzyma po 50 zł. Jeżeli na 4, to dostaną po 25 zł, gdy na 1000 osób, każda osoba dostanie po 0,10 zł. Jeśli liczba osób będzie nieskończenie wielka, to każdy dostanie bardzo mało, praktycznie nic – czyli 0 zł. Stąd właśnie $\frac{a}{\infty} = 0$.
Analogiczne myślenie należy zastosować do pozostałych granic niewłaściwych w poprzedniej ramce.

Rozwiązanie.
Zadanie można sformułować następująco.
Obliczyć:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (4n+2)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n}\right)$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n+2} + \sqrt{4n}\right)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n+2}{5n-4n^3+13}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^3-4n+3}{5n-3n^4+13}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-3n^4+13}{5n^3-4n+3}$.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (4n+2) = [4\cdot\infty + 2 = \infty + 2] = \infty$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n+2} - \sqrt{4n}\right)\cdot\frac{\sqrt{4n+2}+\sqrt{4n}}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{4n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{4n}+2-\cancel{4n}}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{4n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{4n}} = \left[\frac{2}{\infty}\right] = 0$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n+2} + \sqrt{4n}\right) = \left[\sqrt{4\cdot\infty+2} + \sqrt{4\cdot\infty} = \infty + \infty\right] = \infty$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n+2}{5n-4n^3+13} = \left[\frac{\infty}{\infty-\infty}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\cdot\left(\frac{n^3}{n^3}+\frac{4n}{n^3}+\frac{2}{n^3}\right)}{\cancel{n^3}\cdot\left(\frac{5n}{n^3}-\frac{4n^3}{n^3}+\frac{13}{n^3}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\boxed{\frac{4}{n^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{n^3}}^{\nearrow 0}}{\boxed{\frac{5}{n^2}}^{\nearrow 0}-4+\boxed{\frac{13}{n^3}}^{\nearrow 0}} =$

$= \left[\frac{1+0+0}{0-4+0}\right] = -\frac{1}{4}$,

e) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3-4n+3}{5n-3n^4+13}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^3}\cdot\left(\frac{5n^3}{n^3}-\frac{4n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)}{\cancel{n^4}^{\,n}\cdot\left(\frac{5n}{n^4}-\frac{3n^4}{n^4}+\frac{13}{n^4}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\boxed{\frac{4}{n^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{3}{n^3}}^{\nearrow 0}}{\boxed{\mathrm{n}}^{\nearrow\infty}\cdot\left(\boxed{\frac{5}{n^3}}^{\nearrow 0}-3+\boxed{\frac{13}{n^4}}^{\nearrow 0}\right)}=$$

$$=\left[\frac{5-0+0}{\infty(0-3+0)}=\boxed{\frac{5}{-\infty}}^{\nearrow 0}\right]=0,$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-3n^4+13}{5n^3-4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^4}^{\,n}\cdot\left(\frac{5n}{n^4}-\frac{3n^4}{n^4}+\frac{13}{n^4}\right)}{\cancel{n^3}\cdot\left(\frac{5n^3}{n^3}-\frac{4n}{n^3}+\frac{3}{n^3}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{n}^{\nearrow\infty}\cdot\left(\boxed{\frac{5}{n^3}}^{\nearrow 0}-3+\boxed{\frac{13}{n^4}}^{\nearrow 0}\right)}{5-\boxed{\frac{4}{n^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{3}{n^3}}^{\nearrow 0}}=$$

$$=\left[\frac{\infty(0-3+0)}{5-0+0}=\boxed{\frac{-\infty}{5}}^{\nearrow -\infty}\right]=-\infty.$$

Przykład 3.4. Obliczyć granice ciągów

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{178}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+6^n+7^n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n}\right)^{3n}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{8n^2}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{3}{n}}$.

Uwaga.

- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, dla $a>0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$,
- Twierdzenie o trzech ciągach

$$\begin{array}{ccccc} a_n & \le & b_n & \le & c_n \\ \downarrow & & | & & \downarrow \\ b & & | & & b \\ & & \downarrow & & \\ & & b & & \end{array}$$

- jeżeli $a_n\to\infty$, to
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{k\cdot a_n}=e^k,\quad k\in R.$$

Rozwiązanie.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{178}=1$,

b) Granicę tego ciągu oblicza się z twierdzenia o trzech ciągach. Należy znaleźć ciągi a_n i c_n. Największą z liczb znajdującą się pod pierwiastkiem jest 7^n. Prawdziwa jest zatem nierówność

$$\sqrt[n]{7^n+0+0} \le \sqrt[n]{5^n+6^n+7^n} \le \sqrt[n]{7^n+7^n+7^n},$$

czyli

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \le \sqrt[n]{5^n+6^n+7^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 7^n},$$

więc

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 7}}{\overset{a_n}{\boxed{7}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 7}}{\overset{b_n}{\boxed{\sqrt[n]{5^n+6^n+7^n}}}} \le \underset{\substack{\downarrow\\ 7}}{\overset{c_n}{\boxed{\boxed{\sqrt[n]{3}}^{\,1}\cdot 7}}} = 7,$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n} = e,$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+6}{3n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{6}{3n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{6\cdot\frac{n}{2}} = e^6,$$

e) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n}\right)^{-3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{-1\cdot 3n} = e^{-1},$$

f) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^{8n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{4}}\right)^{32\cdot\frac{n^2}{4}} = e^{32},$$

g) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\frac{3}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\boxed{\ln\left(1+\boxed{\frac{2}{n}}^{\,0}\right)}^{\,0}}{\boxed{\frac{3}{n}}^{\,0}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\ln\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}}^{\,e} = \frac{2}{3}\ln e = \frac{2}{3}.$$

3.2. Zadania

Zadanie 3.1. Zbadać ograniczoność ciągów

a) $a_n = 7 - 3n$, b) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+4}$, c) $a_n = \frac{4^n}{4^n+3}$.

Zadanie 3.2. Zbadać monotoniczność ciągów

a) $a_n = 7 - 3n$,
b) $a_n = 4n - 1$,
c) $a_n = \frac{4^n}{5^{n+3}}$,
d) $b_n = \frac{6n-5}{5n+3}$,
e) $b_n = \frac{4^n}{3^n}$,
f) $b_n = \frac{4^{n+3}}{5^n}$,
g) $c_n = \frac{n}{6^n}$,
h) $c_n = \frac{3n+1}{5n+3}$,
i) $c_n = 13^n$.

Zadanie 3.3. Obliczyć granice ciągów

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2-1}{(n+1)^2}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{n^3+1}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3}{3n^3+3}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^{98}+3n^{45}-2048}{32n^3+n^{76}+2021-4n^{98}}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^2 - 8)$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+8}-n}{\sqrt{n^2+4}-n}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} 4n^3 - 6n + 8$,
h) $\lim\limits_{n\to\infty} -3n^5 - 6n^2 + 9n - 5$,
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n-5}{3n-4}$,
j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n}{6+4n}$,
k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-16n}{8n+6}$,
l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+6n-9}{12n+4n^2}$,
m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+3n^2-7n^4+5}{n^4-5n^3+2n^2+3n+4}$,
n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^3+4n^2+6n+7}{4n+9}$,
o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-3n^2+5}{5n+9}$,
p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n}{5n^3-2n^2+3n-9}$,
q) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5-n^3}{-3n+9}$,
r) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 - 3n} - n)$.

Zadanie 3.4. Obliczyć granice ciągów

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{13}$,
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + \pi^n + 3^n}$,
c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{8^n + 3^n + 5^n}$,
d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n + \pi^n + 7^n}$,
e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$,
f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n-1}$,
g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}$,
h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{6n}$,
i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$,
j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$,
k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{3n^2+1}$,
l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{8}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$,
m) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{5}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$,
n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4n^3-5}{4+4n^3}\right)^{n^3}$.

Zadanie 3.5. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$, [6] gdzie F_n jest ciągiem Fibonacciego, czyli

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ \text{dla } n \geq 2.$$

Wskazówka. W [6] udowodniono, że ciąg $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ ma granicę. Przy tym założeniu warto skorzystać z zależności rekurencyjnej przekształconej do postaci $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$.

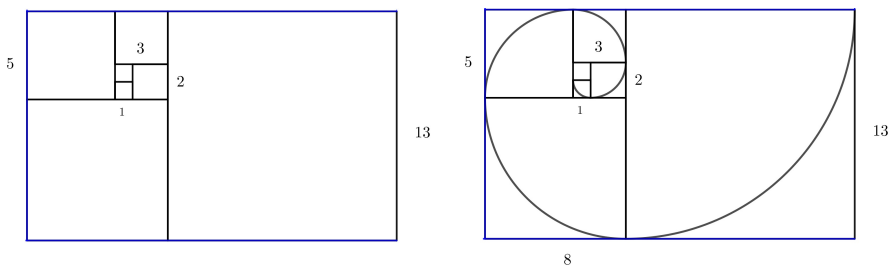
Zadanie 3.6. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n+1}}$, [6] gdzie L_n jest ciągiem Lucasa, czyli

$$L_1 = 1,\ L_2 = 3,\ L_{n+1} = L_n + L_{n-1},\ \text{dla } n \geq 2.$$

Zadanie 3.7. Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{L_{2n}}{F_{2n}}$, [6] .

Wskazówka. Formuła Bineta dla ciągu Fibonacciego F_n i Lucasa L_n:
$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $\quad L_n = \alpha^n + \beta^n$, gdzie $\alpha > 0$, $\beta < 0$ są pierwiastkami równania $x^2 - x - 1 = 0$.

Zadanie 3.8. Na podstawie analizy układu kwadratów narysuj trzy kolejne łuki złotej spirali (rys. 3.1). Porównaj z rys. 3.2.



Rysunek 3.1: Rysunek do zadania 3.8

Rysunek 3.2: Przykłady kształtów spiralnych, [3]

Zadanie 3.9. W programie graficznym (np. GeoGebra, AutoCAD) wykonać rysunki spiral dla przykładów z rys. 3.2.

Zadanie 3.10. W arkuszu kalkulacyjnym wyznaczyć 100 wyrazów ciągu $\alpha_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Co można zauważyć? Czy ciąg α_n jest monotoniczny, ograniczony?

3.3. Odpowiedzi

Zad. 3.1

a) nieograniczony z dołu, ograniczony z góry, np. przez $M = 4$;
b) ograniczony z dołu, np. przez $m = -2$ i z góry przez $M = 0$;
c) ograniczony z dołu, np. przez $m = 0$ i z góry przez $M = 1$.

Zad. 3.2

rosnący: b), d), e), h), i) malejący: a), c), f), g).

Zad. 3.3

a) 4,	d) $-\frac{1}{2}$,	g) ∞,	j) 3,	m) -7,	p) 0,
b) 0,	e) $-\infty$,	h) $-\infty$,	k) -2,	n) ∞,	q) ∞,
c) 2,	f) 2,	i) 2,	l) $\frac{3}{4}$,	o) $-\infty$,	r) $-\frac{3}{2}$.

Zad. 3.4

a) 1, b) π, c) 8, d) 10, e) $\frac{2}{3}$, f) e^{10}, g) e^{-1}, h) e^{12}, i) e, j) e^{-1}, k) e^{3}, l) 8, m) $\frac{5}{2}$, n) $e^{-\frac{9}{4}}$.

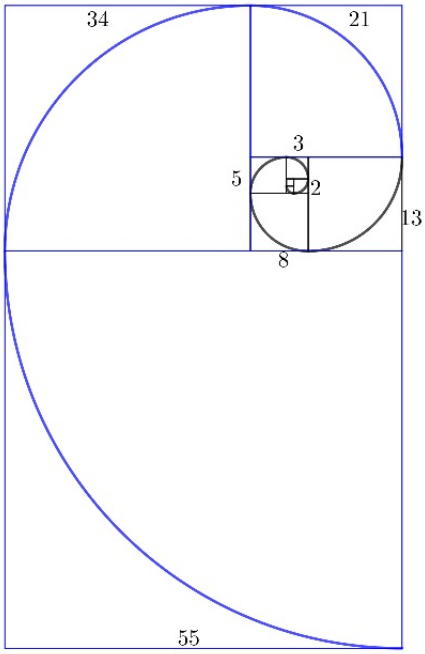
Zad. 3.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$. Korzystając z równania $\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$ oraz z tego, że $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} \overset{\text{ozn}}{=} \alpha > 0$, otrzymuje się $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}}$, czyli po przekształceniu $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$. Rozwiązaniem równania jest $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – złota liczba.

Zad. 3.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L_n}{L_{n+1}} = \frac{1}{\alpha}$.

Zad. 3.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{L_{2n}}{F_{2n}} = \sqrt{5}$. Korzystając z formuły Bineta dla obu ciągów: $F_{2n} = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}$, $L_{2n} = \alpha^{2n} + \beta^{2n}$, otrzymuje się

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_{2n}}{F_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}}{\frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\alpha^{2n}}\left(1+\boxed{\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^n}^{\,1}\right)(\alpha-\beta)}{\cancel{\alpha^{2n}}\left(1-\boxed{\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)^n}^{\,1}\right)} = \alpha - \beta = \sqrt{5}.$$

Zad. 3.8



Rozdział 4

Szeregi liczbowe

Zadania dotyczące szeregów liczbowych, warunek konieczny zbieżności szeregu oraz kryteria zbieżności szeregów.

4.1. Przykłady

Przykład 4.1. Wyznaczyć sumę częściową S_n i sumę S szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz określić jego zbieżność

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-1}{4^n}$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+2}{n(n+2)}$.

Dla szeregu liczbowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie (a_n) jest ciągiem liczbowym, $a_n$jest wyrazem ogólnym szeregu oraz

- ciąg sum częściowych dany jest wzorem $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,
- szereg jest zbieżny, gdy istnieje granica właściwa ciągu sum częściowych $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$,
- granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ jest sumą zbieżnego szeregu liczbowego, gdzie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$,
- jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, to szereg rozbieżny do $\pm\infty$,
- jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje, to szereg jest rozbieżny,
- szereg rozbieżny nie ma sumy S.

Rozwiązanie.

a) Wyrazem ogólnym szeregu jest $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, więc
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
Jest to suma n wyrazów ciągu geometrycznego, dla którego $a_1 = q = \frac{3}{4}$, więc ze wzoru $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ otrzymuje się

$$S_n = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{\cancel{4}} \cdot \cancel{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right).$$

Natomiast

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \left(1 - \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\nearrow 0}\right) = 3,$$

więc szereg jest zbieżny do 3 i $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 3$.

b) Wyraz ogólny szeregu to $a_n = \frac{3^n-1}{4^n}$, więc
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^k-1}{4^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^k} - \frac{1}{4^k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$. Analogicznie do poprzedniego przykładu jest to różnica dwóch ciągów geometrycznych, więc

$$S_n = \frac{3}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

Natomiast

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 \cdot \left(1 - \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\nearrow 0}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \boxed{\left(\frac{1}{4}\right)^n}^{\nearrow 0}\right)\right) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3},$$

więc szereg jest zbieżny do $\frac{8}{3}$ i $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-1}{4^n} = \frac{8}{3}$.

c) Ponieważ $a_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$,
to $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{5}\right)^k = \frac{6}{5} \cdot \frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^n}{1-\frac{6}{5}} = \frac{6}{\cancel{5}} \cdot (-\cancel{5}) \left(1 - \left(\frac{6}{5}\right)^n\right) = -6 \cdot \left(1 - \left(\frac{6}{5}\right)^n\right)$,
więc $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} -6 \cdot \left(1 - \boxed{\left(\frac{6}{5}\right)^n}^{\nearrow \infty}\right) = -6 \cdot (1-\infty) = -6 + \infty = \infty$,
czyli szereg jest rozbieżny do nieskończoności.

d) $a_n = \frac{n^2+2n+2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = n +$$

$$\begin{aligned}
&+\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}} + \\
&+\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \\
&+\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}} + \\
&+\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \\
&\vdots \qquad\qquad = n + \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}, \\
&+\cancel{\frac{1}{n-2}} - \cancel{\frac{1}{n}} \\
&+\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1} \\
&+\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \boxed{n}^{\nearrow\infty} + \frac{3}{2} - \boxed{\frac{1}{n+1}}^{\nearrow 0} - \boxed{\frac{1}{n+2}}^{\nearrow 0} = \infty + \frac{3}{2} - 0 - 0 = \infty,$$

więc szereg jest rozbieżny do ∞.

Przykład 4.2. Mając daną sumę częściową szeregu, znaleźć wyraz ogólny szeregu i jego sumę

a) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, b) $S_n = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - 4$.

Ponieważ
$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ oraz
$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$, to wyraz ogólny szeregu można wyznaczyć, obliczając różnicę

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n.$$

Rozwiązanie.

a) Z tego, że $S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$, otrzymuje się

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{n+2} - \cancel{1} + \frac{1}{n+1} = \frac{-\cancel{n} - 1 + \cancel{n} + 2}{(n+1)n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

czyli $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ oraz szereg jest postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{oraz} \qquad S = \lim_{n\to\infty} 1 - \boxed{\frac{1}{n+1}}^{\nearrow 0} = 1.$$

b) Ponieważ $S_n = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - 4$ oraz $S_{n+1} = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 4$, więc $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n =$
$= \left(4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 4\right) - \left(4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n - 4\right) = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - \cancel{4} - 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n + \cancel{4} =$
$= 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$, czyli $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.
Szereg jest postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

i jest on rozbieżny do nieskończoności, ponieważ
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(4 \cdot \boxed{\left(\frac{4}{3}\right)^n}^{\nearrow \infty} - 4\right) = \infty - 4 = \infty.$

Przykład 4.3. Sprawdzić warunek konieczny zbieżności szeregu

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+2}{n(n+2)}$.

Warunek konieczny zbieżności szeregu:

Jeżeli szereg $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Rozwiązanie.

a) Należy policzyć granicę
$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$, czyli warunek konieczny jest spełniony. Żeby stwierdzić, czy szereg jest zbieżny, należy policzyć S_n
$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) =$
$= (\cancel{\sqrt{2}} - \sqrt{1}) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + \cdots + (\cancel{\sqrt{n}} - \cancel{\sqrt{n-1}}) + (\sqrt{n+1} - \cancel{\sqrt{n}}) =$
$= -1 + \sqrt{n+1}$, więc $\lim\limits_{n\to\infty} (-1 + \sqrt{n+1}) = \infty$, to znaczy, że szereg jest rozbieżny.

Uwaga.

- Jeżeli warunek konieczny jest spełniony, to nie znaczy, że szereg jest zbieżny. Zbieżność należy sprawdzić innymi metodami.
- Jeżeli warunek konieczny nie jest spełniony, to szereg jest rozbieżny.

b) Warunek konieczny rozważanego szeregu $\lim\limits_{n\to\infty} \boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\,0} = 0$ jest spełniony i, jak było sprawdzone w przykładzie 4.1, szereg jest zbieżny.

c) Warunek konieczny rozważanego szeregu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{n(n+2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 \neq 0$ nie jest spełniony i szereg jest rozbieżny, co było sprawdzone w przykładzie 4.1.

Przykład 4.4. Zbadać zbieżność szeregu (korzystając z wybranego kryterium zbieżności szeregu)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^n$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{1}{3^n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sin n}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$,

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^3}$.

1. **Kryterium zbieżności szeregu geometrycznego**
   Szereg geometryczny
   $$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$
   jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ i wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$
   oraz
   jest rozbieżny, gdy $|q| \geq 1$.

2. **Kryterium zbieżności szeregu harmonicznego rzędu α**
Szereg harmoniczny rzędu $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$
oraz
jest rozbieżny do ∞, gdy $0 < \alpha \leq 1$.

3. **Kryterium porównawcze**
Niech $0 \leq a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$ wtedy:
jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny,
oraz
jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do ∞, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny.

Uwaga. Analogicznie dla szeregów o wyrazach niedodatnich.

4. **Kryterium d'Alemberta** Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, wtedy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
jest zbieżny dla $q < 1$,
oraz
jest rozbieżny $1 < q \leq \infty$.

Uwaga. W przypadku, gdy $q = 1$, kryterium nie rozstrzyga i trzeba skorzystać z innego kryterium.

5. **Kryterium Cauchy'ego**
   Niech $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, wtedy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$
   jest zbieżny dla $q < 1$,
   oraz
   jest rozbieżny $1 < q \leq \infty$.

   Uwaga. W przypadku, gdy $q = 1$, kryterium nie rozstrzyga i trzeba skorzystać z innego kryterium.

6. **Kryterium Leibniza**
   Jeżeli
   - ciąg (b_n) jest nierosnący od $n_0 \in N$,
   - $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

   to szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ jest zbieżny.

Uwaga.

- Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to mówi się, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie.
- Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, jest zbieżny warunkowo.

Rozwiązanie.

a) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 3^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 6 \cdot 3^{n-1}$, czyli jest to szereg geometryczny, w którym $a = 6$, a $q = 3 > 1$, więc jest rozbieżny z kryterium 4.1 (kr. zb. szeregu geometrycznego).

b) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{1}{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, czyli jest to szereg geometryczny, w którym $a = \frac{5}{3}$, a $q = \frac{1}{3} < 1$, więc jest zbieżny z kryterium 4.1 (kr. zb. szeregu geometrycznego) oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5 \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{5}{2}$.

c) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest szeregiem harmonicznym i $\alpha = 3 > 1$, więc z kryterium 2 (kr. zb. szeregu harmonicznego) szereg jest zbieżny.

d) Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ jest szeregiem harmonicznym i $\alpha = \frac{1}{4} < 1$, więc z kryterium 2 (kr. zb. szeregu harmonicznego) szereg jest rozbieżny.

e) W rozważanym szeregu $a_n = \frac{\sin n}{n^3}$, więc korzystając z kryterium 3 (kr. porównawczego), należy znaleźć ciąg b_n, którego wszystkie wyrazy są mniejsze lub większe od a_n. Z tego, że $0 \leq \sin n \leq 1$, zachodzi nierówność

$$\frac{\sin n}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Czyli wystarczy wziąć $b_n = \frac{1}{n^3}$ i z tego, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest zbieżny (przykład 4.1), rozważany szereg jest również zbieżny.

f) W rozważanym szeregu $a_n = \frac{n^3}{\sin n}$, więc korzystając z kryterium 3 (kr. porównawczego), analogicznie należy znaleźć ciąg b_n. Z tego, że $0 \leq \sin n \leq 1$, wynika, że $1 \leq \frac{1}{\sin n}$, więc zachodzi nierówność

$$n^3 \leq \frac{n^3}{\sin n}.$$

Szereg o wyrazie ogólnym $b_n = n^3$ jest rozbieżny, ponieważ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności, bo $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 = \infty \neq 0$. Z kryterium 3 (kr. porównawczego) wyjściowy szereg jest również rozbieżny.

g) W rozważanym szeregu $a_n = \frac{n}{3^n}$, więc z kryterium 4 (kr. d'Alemberta)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot \cancel{3^n}}{n\cdot \underbrace{3^{n+1}}_{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1.$$

Czyli z kryterium 4 (kr. d'Alemberta) szereg jest zbieżny.

h) W rozważanym szeregu $a_n = \frac{3^n}{n}$, więc z kryterium 4 (kr. d'Alemberta)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{3}{\cancel{3^{n+1}}}\cdot n}{(n+1)\cdot \cancel{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n+1} = 3 > 1.$$

Czyli z kryterium 4 (kr. d'Alemberta) szereg jest rozbieżny.

i) W rozważanym szeregu $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, więc najwygodniej skorzystać z kryterium 5 (kr. Cauchy'ego)

$$\lim_{n\to\infty} \cancel{\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n}\right)^{\cancel{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = 3 > 1,$$

więc na podstawie kryterium 5 (kr. Cauchy'ego) szereg jest rozbieżny.

j) W rozważanym szeregu $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, z kryterium 5 (kr. Cauchy'ego)

$$\lim_{n\to\infty} \cancel{\sqrt[n]{}} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\cancel{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

więc na podstawie kryterium 5 (kr. Cauchy'ego) szereg jest zbieżny.

k) Jest to tzw. szereg anharmoniczny. Korzystając z kryterium 6 (kr. Leibniza), $b_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem nierosnącym oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, otrzymuje się, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ jest zbieżny. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ jest zbieżny warunkowo.

l) Jest to szereg naprzemienny, więc z kryterium 6 (kr. Leibniza) $b_n = \frac{1}{n^3}$ jest ciągiem nierosnącym oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, więc szereg jest zbieżny. Ponieważ szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest również zbieżny, to mówi się, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^3}$ jest bezwzględnie zbieżny.

Przykład 4.5. Obliczyć, jaki ułamek zwykły reprezentuje ułamek okresowy 0,(4) 0,(123).

Rozwiązanie. 0,(4) jest szeregiem geometrycznym, ponieważ

$$0{,}(4) = 0{,}4 + 0{,}04 + 0{,}004 + \cdots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

gdzie $a = \frac{4}{10}$ oraz $q = \frac{1}{10} < 1$. Z kryterium zbieżności szeregu geometrycznego 4.1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{9} = \frac{4}{9}.$$

Czyli $0{,}(4) = \frac{4}{9}$.
Analogicznie dla 0,(123) pierwszy wyraz ciągu geometrycznego $a = \frac{123}{1000}$

oraz $q = \frac{1}{1000} < 1$, więc

$$\begin{aligned}
0{,}(123) &= 0{,}123 + 0{,}000123 + 0{,}000000123 + \cdots = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{123}{1000^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{123}{1000} \cdot \left(\frac{1}{1000}\right)^{n-1} = \frac{\frac{123}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \\
&= \frac{123}{\cancel{1000}} \cdot \frac{\cancel{1000}}{999} = \frac{123}{999}. \qquad \text{Czyli } 0{,}(123) = \frac{123}{999}.
\end{aligned}$$

4.2. Zadania

Zadanie 4.1. Wyznaczyć sumę częściową S_n i sumę S szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz określić jego zbieżność

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2+5n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{6^{n+2}}$.

Zadanie 4.2. Mając daną sumę częściową szeregu, znaleźć wyraz ogólny szeregu i jego sumę

a) $S_n = \frac{n(2n+3)}{2n^2+2n+2}$,

b) $S_n = \frac{3^{n+1}}{4^{n+4}}$,

c) $S_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$,

d) $S_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$.

Zadanie 4.3. Sprawdzić warunek konieczny zbieżności szeregu

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+5n-n^2}{1+n^2+n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+4}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n}\right)$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n-1}{5^n}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{13n}$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n+1)}$.

Zadanie 4.4. Zbadać zbieżność szeregu (korzystając z wybranego kryterium zbieżności szeregu)

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{5^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^{n+1}}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-3}$,

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{\sqrt[7]{n}}$,

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^2+3}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{5^{n+3}}$,

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3+5n^2+6n+7}{8n+5+n^3}\right)^n$,

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)^n}$,

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5}$,

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{3^n}$,

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$,

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Zadanie 4.5. Obliczyć, jaki ułamek zwykły reprezentuje ułamek okresowy

a) 0,(14); b) 0,6(123); c) 0,2(3); d) 0,(285714).

4.3. Odpowiedzi

Zad. 4.1

a) $S_n = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n\right)$, zbieżny, $S = \frac{4}{3}$,

b) $S_n = \frac{3n}{5(n+1)}$, zbieżny, $S = \frac{3}{5}$,

c) $S_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$, rozbieżny,

d) $S_n = \frac{49}{36}\left(-1 + \left(\frac{7}{6}\right)^n\right)$, rozbieżny.

Zad. 4.2

a) $a_n = \frac{1+5n-n^2}{2(1+n^2+n^4)}$, $S = 1$,

b) $a_n = -\frac{3^n}{4^{n+4}}$, $S = 0$,

c) $a_n = \sqrt{2+n} - \sqrt{n}$, rozbieżny (suma nie istnieje),

d) $a_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n}$, $S = 0$.

Zad. 4.3 Warunek konieczny nie jest spełniony tylko w a), e), g), ponieważ

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+5n-n^2}{1+n^2+n} = -1 \neq 0$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^{n+4}} = 0$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} - 2\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n}\right) = 0$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7^n-1}{5^n} = \infty \neq 0$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{13n} = e^{13} \neq 0$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n(n+1)} = 0$.

Zad. 4.4 zbieżny: a), c), f), h), j), k) rozbieżny: b), d), e), g), i), l).

Zad. 4.5 a) $\frac{14}{99}$, b) $\frac{2041}{3333}$, c) $\frac{23}{99}$, d) $\frac{2}{7}$.

Rozdział 5

Funkcje zmiennej rzeczywistej, granice funkcji

Zadania dotyczące funkcji rzeczywistych jednej zmiennej: dziedziny, zbioru wartości, składania funkcji, funkcji odwrotnej oraz granic funkcji.

5.1. Przykłady

Przykład 5.1. Określić dziedzinę naturalną funkcji

a) $f(x) = \frac{2x-5}{4x+9}$,
b) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+6x+9}$,
c) $g(x) = \sqrt{-12-x+x^2}$,
d) $g(x) = \sqrt[3]{-12-x+x^2}$,
e) $h(x) = \ln(-x^2+x+12)$,
f) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{-12-x+x^2}}$,
g) $g(x) = \sqrt[4]{\frac{\log(x+4)}{2x+8}}$,
h) $g(x) = \sqrt[5]{\frac{\log(x+4)}{x+4}}$.

Dziedzina naturalna funkcji jest to największy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych, dla którego istnieją wartości funkcji. Przykładowe warunki na wyznaczenie dziedziny naturalnej:

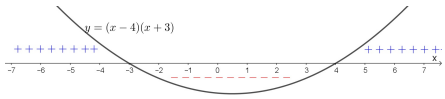
- wykluczyć dzielenie przez zero,
- wyrażenie pod pierwiastkiem parzystego stopnia musi być nieujemne,
- w przypadku, np. logarytmu, liczba logarytmowana musi być dodatnia, a podstawa logarytmu dodatnia i różna od 1.

Rozwiązanie.

a) Dla $f(x) = \frac{2x-5}{4x+9}$ należy wykluczyć zero w mianowniku $4x+9 \neq 0$, więc $x \neq -\frac{9}{4}$. Czyli dziedziną naturalną funkcji jest zbiór $D = R \setminus \left\{\frac{9}{4}\right\}$.

b) W przypadku funkcji $f(x) = \frac{2x-5}{x^2+6x+9}$ ponownie należy wykluczyć zero w mianowniku $x^2 + 6x + 9 \neq 0$, czyli $(x+3)^2 \neq$, więc $D = R \setminus \{-3\}$.

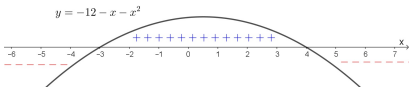
c) Dla $g(x) = \sqrt{-12 - x + x^2}$ wyrażenie pod pierwiastkiem musi spełniać nierówność $-12 - x + x^2 \geq 0$, czyli $(x+3)(x-4) \geq 0$,



czyli $D = (-\infty, -3\rangle \cup \langle 4, \infty)$.

d) W funkcji $g(x) = \sqrt[3]{-12 - x + x^2}$ występuje pierwiastek nieparzystego stopnia, brak jest ułamka, więc $D = R$.

e) We wzorze funkcji $h(x) = \ln(-x^2 + x + 12)$ jest logarytm naturalny, czyli podstawą jest $e \approx 2{,}718 > 1$. Wystarczy zająć się nierównością $-x^2 + x + 12 > 0$



czyli $D = \langle -3, 4\rangle$.

f) W przypadku funkcji $h(x) = \frac{1}{\sqrt{-12-x+x^2}}$ należy rozwiązać nierówność $-12 - x + x^2 > 0$. Korzystając z podpunktu c), otrzymuje się $D = (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$.

g) Wzór funkcji $g(x) = \sqrt[4]{\frac{\log(x+4)}{2x+8}}$ zawiera pierwiastek parzystego stopnia, logarytm dziesiętny i ułamek. W związku z powyższym warunki na dziedzinę naturalną funkcji są następujące

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ 2x + 8 \neq 0 \\ \frac{\log(x+4)}{2x+8} \geq 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x \in (-4, \infty) \\ x \neq -4 \\ \frac{\log(x+4)}{2(x+4)} \geq 0. \end{cases}$$

Z pierwszego warunku wiadomo, że mianownik ostatniej nierówności zawsze będzie dodatni, więc wystarczy zapewnić, żeby $\log(x+4) \geq 0$, czyli $\log(x+4) \geq \log 1$. Ponieważ podstawa logarytmu jest większa niż 1, opuszczając logarytm, nie zmienia się kierunku nierówności

$$x + 4 \geq 1, \text{ co ostatecznie daje } x \in \langle -3, \infty).$$

Część wspólna rozwiązań wszystkich warunków

$$\begin{cases} x \in (-4, \infty) \\ x \neq -4 \\ x \in \langle -3, \infty) \end{cases} \quad \text{daje} \quad D = \langle -3, \infty).$$

h) Funkcja $g(x) = \sqrt[5]{\frac{\log(x+4)}{x+4}}$ określona jest poprzez pierwiastek nieparzystego stopnia, więc warunki potrzebne do wyznaczenia naturalnej dziedziny funkcji są następujące

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases}, \text{ czyli } \begin{cases} x \in (-4, \infty) \\ x \neq -4 \end{cases}, \text{ więc } D = (-4, \infty).$$

Przykład 5.2. Zbadać parzystość/nieparzystość funkcji:

a) $f(x) = 3^{|x|}$, b) $f(x) = x^3 + x$, c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$.

Funkcja $f : X \to R$ jest:

- **parzysta**, gdy

$$\underset{x \in X}{\forall} -x \in X \text{ i } f(-x) = f(x),$$

- **nieparzysta**, gdy

$$\underset{x \in X}{\forall} -x \in X \text{ i } f(-x) = -f(x).$$

Aby zbadać parzystość/nieparzystość funkcji $y = f(x)$, sprawdzamy, czy do dziedziny należy x i $-x$, oraz obliczamy $f(-x)$ oraz $-f(x)$, następnie porównujemy z $f(x)$.

Rozwiązanie.

a)

$$\begin{aligned} D = R, & \quad \text{więc } x, -x \in D, \\ f(x) &= \boxed{3^{|x|}}, \\ f(-x) &= 3^{|-x|} = \boxed{3^{|x|}} = f(x), \\ -f(x) &= -3^{|x|} \neq f(-x), \end{aligned}$$

porównując, otrzymuje się $f(x) = f(-x)$, czyli funkcja jest parzysta.

b)
$$\begin{aligned} D = R \qquad & \text{więc } x, -x \in D, \\ f(x) &= x^3 + x, \\ f(-x) &= (-x)^3 + (-x) = \boxed{-x^3 - x} \neq f(x), \\ -f(x) &= \boxed{-x^3 - x} = f(-x), \end{aligned}$$

czyli funkcja jest nieparzysta.

c)
$$\begin{aligned} D = R \qquad & \text{więc } x, -x \in D, \\ f(x) &= x^3 + 2x^2 + 1, \\ f(-x) &= (-x)^3 + 2(-x)^2 + 1 = -x^3 + 2x^2 + 1 \neq f(x), \\ -f(x) &= -x^3 - 2x^2 - 1 \neq f(-x), \end{aligned}$$

więc funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta.

Przykład 5.3. Wyznaczyć złożenie funkcji $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ oraz $g \circ f$, jeżeli:

a) $f(x) = 5x+13, \quad g(x) = 3x+7,$ b) $f(x) = \frac{4x-5}{2x+1}, \quad g(x) = 3^x.$

Zadanie wykonać w dziedzinie określoności, tzn. przy założeniu, że zbiór wartości pierwszej funkcji jest równy dziedzinie drugiej ze składanych funkcji, przy odpowiednich ograniczeniach.

Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$. Złożeniem (superpozycją) funkcji g z f nazywa się funkcję $g \circ f : A \to C$, gdzie

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Rozwiązanie.

a) Dla funkcji $f(x) = 5x + 13, \quad g(x) = 3x + 7$ złożenia są postaci

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f\left(\boxed{g(x)}\right) = f\left(\boxed{3x+7}\right) = 5\left(\boxed{3x+7}\right) + 13 = 15x + 48, \\ (f \circ f)(x) &= f\left(\boxed{f(x)}\right) = f\left(\boxed{5x+13}\right) = 5\left(\boxed{5x+13}\right) + 13 = 25x + 78, \\ (g \circ g)(x) &= g\left(\boxed{g(x)}\right) = g\left(\boxed{3x+7}\right) = 3\left(\boxed{3x+7}\right) + 7 = 9x + 28, \\ (g \circ f(x)) &= g\left(\boxed{f(x)}\right) = g\left(\boxed{5x+13}\right) = 3\left(\boxed{5x+13}\right) + 7 = 15x + 46. \end{aligned}$$

b) Dla funkcji $f(x) = \frac{4x-5}{2x+1}$, $\quad g(x) = 3^x$ złożenia są postaci

$$(f \circ g)(x) = f\left(\boxed{g(x)}\right) = f\left(\boxed{3^x}\right) = \frac{4 \cdot \boxed{3^x} - 5}{2 \cdot \boxed{3^x} + 1} = \frac{4 \cdot 3^x - 5}{2 \cdot 3^x + 1},$$

$$(f \circ f)(x) = f\left(\boxed{f(x)}\right) = f\left(\boxed{\tfrac{4x-5}{2x+1}}\right) = \frac{4 \cdot \boxed{\frac{4x-5}{2x+1}} - 5}{2 \cdot \boxed{\frac{4x-5}{2x+1}} + 1} = \frac{25 - 6x}{9 - 10x},$$

$$(g \circ g)(x) = g\left(\boxed{g(x)}\right) = g\left(\boxed{3^x}\right) = 3^{\boxed{3^x}} = 3^{3^x},$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\boxed{f(x)}\right) = g\left(\boxed{\tfrac{4x-5}{2x+1}}\right) = 3^{\boxed{\frac{4x-5}{2x+1}}} = 3^{\frac{4x-5}{2x+1}}.$$

Przykład 5.4. Obliczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 5x + 1)$,

b) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^2 + 5x + 1)$,

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2 + 5x + 1)$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-6+4x+2x^2}{x-1}$,

e) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x-1}{-6+4x+2x^2}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{49^x-4^x}{7^x-2^x}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 5x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 5x}$,

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{10x}$.

Rozwiązanie. Granice funkcji liczy się podobnie do granic ciągu (identycznie w $\pm\infty$), więc można skorzystać z uwagi 3.1 z rozdziału 3 oraz z granic

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \qquad \lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Jednak granice funkcji liczy się w dowolnym punkcie, jednak interesujące są jedynie końce przedziałów określoności dziedziny funkcji.

a) Dziedziną funkcji $y = x^2 + 5x + 1$ jest zbiór liczb rzeczywistych, więc wartość funkcji jest granicą funkcji w 2

$$\lim_{x\to 2} \left(x^2 + 5x + 1\right) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = 15.$$

b) ∞ jest jednym z końców dziedziny, więc

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2+5x+1\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{5\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}_{x}}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\boxed{x^2}^{\nearrow\infty}\left(1+\boxed{\tfrac{5}{x^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\tfrac{1}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)=\infty.$$

c) $-\infty$ jest drugim końcem dziedziny, więc

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+5x+1\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{5\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}_{x}}+\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\boxed{x^2}^{\nearrow\infty}\left(1+\boxed{\tfrac{5}{x^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\tfrac{1}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)=\infty.$$

d) Dziedziną funkcji $y=\frac{-6+4x+2x^2}{x-1}$ jest $R\setminus\{1\}$, czyli 1 jest jednym z końców dziedziny, więc

$$\lim_{x\to1}\frac{-6+4x+2x^2}{x-1}=\left[\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{2\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to1}2(x+3)=2(1+3)=8.$$

e) Dziedziną funkcji $y=\frac{x-1}{-6+4x+2x^2}$ jest $R\setminus\{-3,1\}$, czyli -3 jest jednym z końców dziedziny, więc

$$\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{-6+4x+2x^2}=\lim_{x\to-3}\frac{x-1}{2(x-1)(x+3)}=\left[\frac{\cancel{-4}}{\cancel{-8}_{2}\cdot0^{\pm}}\right]=\left[\frac{1}{2\cdot0^{\pm}}\right]=\left[\frac{1}{0^{\pm}}\right]=\pm\infty.$$

f) Dziedziną funkcji $y=\frac{49^x-4^x}{7^x-2^x}$ jest zbiór $R\setminus\{0\}$, czyli 0 jest jednym z końców dziedziny, więc

$$\lim_{x\to0}\frac{49^x-4^x}{7^x-2^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{(7^x)^2-(2^x)^2}{7^x-2^x}=\lim_{x\to0}\frac{\cancel{(7^x-2^x)}\,(7^x+2^x)}{\cancel{7^x-2^x}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\boxed{7^x}^{\nearrow 1}+\boxed{2^x}^{\nearrow 1}\right)=2.$$

g) Dziedziną funkcji $y=\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$ jest $R\setminus\{k\pi\}, k\in Z$. 0 jest jednym z końców dziedziny, więc

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\left[\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}\cdot\frac{5x}{4x}\cdot\frac{4}{5}=\lim_{x\to0}\boxed{\frac{\sin 4x}{4x}}^{\nearrow 1}\cdot\boxed{\frac{5x}{\sin 5x}}^{\nearrow 1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}.$$

h) Dziedziną funkcji $y=\frac{\sin 4x}{\sin 5x}$ jest $R\setminus\{k\pi\}, k\in Z$. 0 jest jednym z końców dziedziny, więc

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}4x}{\sin 5x}=\left[\tfrac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}4x}{\sin 5x}\cdot\frac{5x}{4x}\cdot\frac{4}{5}=\lim_{x\to0}\boxed{\frac{\operatorname{tg}4x}{4x}}^{\nearrow 1}\cdot\boxed{\frac{5x}{\sin 5x}}^{\nearrow 1}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}.$$

i) Dziedziną funkcji $y = \left(1 + \frac{1}{5x}\right)^{10x}$ jest zbiór liczb rzeczywistych, więc ∞ jest jednym z końców dziedziny, czyli

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{5x}\right)^{10x} = \lim_{x\to\infty} \left(\boxed{\left(1 + \tfrac{1}{5x}\right)^{5x}}^{\,e} \right)^2 = e^2.$$

Przykład 5.5. Znaleźć asymptoty funkcji

a) $f(x) = \frac{8x^2-4}{x^2}$,

b) $f(x) = \frac{x^2}{4x-8}$,

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{dla} \quad x \geq 1 \\ 2x+5 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$.

Asymptoty funkcji $y = f(x)$

- Jeżeli
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty,$$
to prosta $x = a$ jest **asymptotą pionową lewostronną** funkcji f.
- Jeżeli
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty,$$
to prosta $x = a$ jest **asymptotą pionową prawostronną** funkcji f.
- Prosta $y = a_- x + b_-$ jest **asymptotą ukośną w** $-\infty$ funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy
$$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{oraz} \quad b_- = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - a_- x\right).$$
- Prosta $y = a_+ x + b_+$ jest **asymptotą ukośną w** ∞ funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy
$$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b_+ = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - a_+ x\right).$$
- **Asymptota pionowa lewo-/prawostronna** jest szczególnym przypadkiem asymptoty ukośnej w przypadku, gdy $a_- = 0$, $a_+ = 0$, odpowiednio.

Uwaga. Szukanie asymptot należy rozpocząć od wyznaczenia dziedziny funkcji, a następnie obliczyć odpowiednie granice.

Rozwiązanie.

a) $D = R\setminus\{0\}$ jest dziedziną funkcji $f(x) = \frac{8x^2-4}{x^2}$. Jeżeli istnieje asymptota pionowa, to będzie ona w $x = 0$, więc należy obliczyć granice jednostronne w 0

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{8x^2-4}{x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{8x^2-4}{x^2} = \left[\frac{-4}{0^+}\right] = -\infty,$$

więc $x = 0$ jest asymptotą pionową obustronną.
Asymptot ukośnych szuka się w $\pm\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{8x^2-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2-4}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(8-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\,x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8-\boxed{\frac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}}{\boxed{x}^{\nearrow -\infty}} =$$
$$= \frac{8}{-\infty} = 0 = a_-,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x^2-4}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-4}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(8-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^3}\,x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8-\boxed{\frac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}}{\boxed{x}^{\nearrow \infty}} =$$
$$= \frac{8}{\infty} = 0 = a_+,$$

czyli może istnieć jedynie asymptota pionowa.

$$b_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2-4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(8-\boxed{\frac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)}{\cancel{x^2}} = 8,$$
$$b_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-4}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(8-\boxed{\frac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)}{\cancel{x^2}} = 8,$$

więc asymptota pionowa obustronna dana jest równaniem $y = 8$.

b) Dla $f(x) = \frac{x^2}{4x-8}$ $D = R \setminus \{2\}$, więc

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{4x-8} = \frac{4}{4\cdot 2^- - 8} = \frac{4}{8^- - 8} = \frac{4}{0^-} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{4x-8} = \frac{4}{4\cdot 2^+ - 8} = \frac{4}{8^+ - 8} = \frac{4}{0^+} = \infty,$$

czyli asymptota pionowa obustronna ma równanie $x = 2$.
Należy sprawdzić asymptotę ukośną, czyli

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{4x-8}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x(4x-8)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(4-\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4-\boxed{\frac{8}{x}}^{\nearrow 0}} = \frac{1}{4} = a_-,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{4x-8}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(4x-8)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(4-\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4-\boxed{\frac{8}{x}}^{\nearrow 0}} = \frac{1}{4} = a_+$$

oraz

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2}{4x-8} - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-4+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-\boxed{\frac{4}{x}}^{\nearrow 0}+2} = \frac{1}{2} = b_-,$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{4x-8} - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{-4+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{-\boxed{\frac{4}{x}}^{\nearrow 0}+2} = \frac{1}{2} = b_+,$$

więc asymptota ukośna w $\pm\infty$ ma równanie $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

c) $D = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ dziedzina funkcji $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & \text{dla} \quad x \geq 1 \\ 2x+5 & \text{dla} \quad x \leq 0 \end{cases}$,
więc

$$\lim_{x\to 0^-} 2x+5 = 5, \qquad \lim_{x\to 1^+} \tfrac{1}{4}x^2 = \tfrac{1}{4},$$

czyli brak asymptot pionowych.
Należy sprawdzić, czy są asymptoty ukośne

$$\lim_{x\to-\infty} \tfrac{2x+5}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(2+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} \left(2+\boxed{\tfrac{5}{x}}^{\nearrow 0}\right) = 2 = a_-,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{4}x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\boxed{x}^{\nearrow\infty} = \infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} (2x+5-2x) = \lim_{x\to-\infty} 5 = 5 = b_-,$$

czyli asymptota ukośna w $-\infty$ ma równanie $y = 2x+5$, a asymptoty ukośnej w ∞ brak.

Przykład 5.6. Zbadać ciągłość funkcji

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{dla} \quad x < 2 \\ 5x-4 & \text{dla} \quad 2 \le x < 4 \\ x^2 & \text{dla} \quad x \ge 4 \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+3x+2 & \text{dla} \quad x < -2 \\ 0 & \text{dla} \quad x \ge -2 \end{cases}$.

- Funkcja f określona przynajmniej na otoczeniu x_0 jest ciągła w $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- Funkcja f określona przynajmniej na otoczeniu lewostronnym x_0 jest ciągła lewostronnie w $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$
- Funkcja f określona przynajmniej na otoczeniu prawostronnym x_0 jest ciągła prawostronnie w $x_0 \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$
- Funkcja jest ciągła w całej dziedzinie, gdy jest ciągła w każdym punkcie x należącym do dziedziny.

Rozwiązanie.

a) $D = R$ jest dziedziną funkcji f. Ciągłość należy zbadać w 2 i 4, ponieważ w pozostałych miejscach dziedziny jest ciągła, gdyż są to fragmenty funkcji elementarnych

$$\lim_{x\to 2^-}(3x+4) = 3\cdot 2+4 = 10, \qquad \lim_{x\to 2^+}(5x-4) = 5\cdot 2-4 = \boxed{6},$$
$$f(2) = 5\cdot 2-4 = \boxed{6},$$
$$\lim_{x\to 4^-}(5x-4) = 5\cdot 4-4 = \boxed{16}, \qquad \lim_{x\to 4^+} x^2 = 4^2 = \boxed{16},$$
$$f(4) = 4^2 = \boxed{16}.$$

Czyli funkcja $y = f(x)$ jest ciągła prawostronnie w 2, ponieważ

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

i nie jest ciągła lewostronnie w 2, bo

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq f(2)$$

oraz jest ciągła w 4, bo jest ciągła w 4 lewo- i prawostronnie

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4).$$

Podsumowując, funkcja ta jest ciągła na zbiorach $(-\infty, 2)$ oraz $\langle 2, \infty)$.

b) $D = R$ jest dziedziną funkcji $f(x)$. Miejsce, w którym należy zbadać ciągłość, to $x_0 = -2$, gdyż poza tym miejscem są to fragmenty funkcji elementarnych, więc

$$\lim_{x\to -2^-}(x^2+3x+2) = \boxed{0}, \qquad \lim_{x\to -2^+} 0 = \boxed{0}, \qquad f(-2) = \boxed{0},$$

czyli funkcja jest ciągła również w -2. Podsumowując rozważania, funkcja jest ciągła w zbiorze liczb rzeczywistych.

5.2. Zadania

Zadanie 5.1. Określić dziedzinę naturalną funkcji

a) $f(x) = \frac{2x-5}{-15-7x+2x^2} + 3x^3 + \sin x$,

b) $f(x) = \frac{2x-5}{x(x^2+6x+9)}$,

c) $g(x) = \sqrt{-15-x+6x^2}$,

d) $g(x) = \sqrt[3]{-15-x+6x^2}$,

e) $h(x) = \ln(5-13x+6x^2)$,

f) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{5-15x+10x^2}} + x(x^2+6)$,

g) $g(x) = \sqrt[4]{\frac{\log(5-15x+10x^2)}{x+8}}$,

h) $g(x) = \sqrt[5]{\log_{x+6}(x+7)}$.

Zadanie 5.2. Zbadać parzystość/nieparzystość funkcji:

a) $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$,

b) $f(x) = \log \frac{5-x}{5+x}$,

c) $f(x) = x\left(x^3 + x^5 + x^7\right)$,

d) $f(x) = \frac{x^2+2}{e^x}$,

e) $f(x) = (x^2 + x^4 + x^6)\cos x$,

f) $f(x) = x^2 + x^4 + x^5$.

Zadanie 5.3. Wyznaczyć złożenie funkcji $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$ oraz $g \circ f$, jeżeli:

a) $f(x) = 2x+5$, $g(x) = 3x-7$,

b) $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$,

c) $f(x) = x^6$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$,

d) $f(x) = (x+5)^2$, $g(x) = x-7$,

e) $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$,

f) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, $g(x) = \ln x$.

Zadanie wykonać w dziedzinie określoności, tzn. przy założeniu, że zbiór wartości pierwszej funkcji jest równy dziedzinie drugiej ze składanych funkcji, przy odpowiednich ograniczeniach.

Zadanie 5.4. Obliczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{9-x^2}{x-3}$,

b) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{18-2x^2}{4x+12}$,

c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{-2-x+x^2}{2x^2-2}$,

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{-2-x+x^2}{2x^2-2}$,

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{-2-x+x^2}{2x^2-2}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} \frac{-2-x+x^2}{2x^2-2}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{5^x-2^x}{25^x-4^x}$,

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5^x-2^x}{25^x-4^x}$,

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{36x^2+25} - 6x\right)$,

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt{36x^2+25}-6x}$,

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5}{x\left(-6x+\sqrt{25+36x^2}\right)}$,

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$,

m) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2}$.

Zadanie 5.5. Znaleźć asymptoty funkcji

a) $f(x) = \frac{6x^3-x+1}{x+x^3}$,

b) $f(x) = \frac{4x^3-8}{x^2+1}$,

c) $f(x) = \frac{4x^3-8}{x^2-4}$,

d) $f(x) = \frac{8}{x-4}$.

Zadanie 5.6. Zbadać ciągłość funkcji

a) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla} \quad x \le 2 \\ 30 & \text{dla} \quad 2 < x \le 4 \\ x^2+3x+2 & \text{dla} \quad x \ge 4 \end{cases}$,

b) $f(x) = \begin{cases} 5x-1 & \text{dla} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{dla} \quad 1 < x \le 4 \\ 5x-16 & \text{dla} \quad x \ge 4 \end{cases}$.

5.3. Odpowiedzi

Zad. 5.1

a) $D = R \setminus \{-\frac{3}{2}, 5\}$,
b) $D = R \setminus \{-3, 0\}$,
c) $D = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, \infty\right)$,
d) $D = R$,
e) $D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$,
f) $D = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$,
g) $D = \left(-8, \frac{1}{2}\right) \cup \left(1, \frac{15-\sqrt{65}}{20}\right\rangle \cup \left\langle \frac{15+\sqrt{65}}{20}, \infty\right)$,
h) $D = (-6, -5) \cup (-5, \infty)$.

Zad. 5.2 parzysta: c), e), nieparzysta: a), b).

Zad. 5.3

a)
$(f \circ g)(x) = -9 + 6x$,
$(f \circ f)(x) = 15 + 4x$,
$(g \circ g)(x) = -28 + 9x$,
$(g \circ f)(x) = 8 + 6x$,

b)
$(f \circ g)(x) = \frac{2}{x^3}$,
$(f \circ f)(x) = 4x$,
$(g \circ g)(x) = x^9$,
$(g \circ f)(x) = \frac{1}{8x^3}$,

c)
$(f \circ g)(x) = x^2$,
$(f \circ f)(x) = x^{36}$,
$(g \circ g)(x) = x^{1/9}$,
$(g \circ f)(x) = x^2$,

d)
$(f \circ g)(x) = 4 - 4x + x^2$,
$(f \circ f)(x) = 900 + 600x + 160x^2 + 20x^3 + x^4$,
$(g \circ g)(x) = -14 + x$,
$(g \circ f)(x) = 18 + 10x + x^2$,

e)
$(f \circ g)(x) = x$,
$(f \circ f)(x) = e^{e^x}$,
$(g \circ g)(x) = \ln(\ln x)$,
$(g \circ f)(x) = x$,

f)
$(f \circ g)(x) = 2 - \frac{5}{1+\ln x}$,
$(f \circ f)(x) = \frac{-9+x}{-2+3x}$,
$(g \circ g)(x) = \ln(\ln x)$,
$(g \circ f)(x) = \ln\left(2 - \frac{5}{1+x}\right)$.

Zad. 5.4

a) -6,
b) 3,
c) $\frac{3}{4}$,
d) $\frac{1}{2}$,
e) $\frac{1}{2}$,
f) $\mp\infty$,
g) $\frac{1}{2}$,
h) 0,
i) 0,
j) ∞,
k) $\frac{12}{5}$,
l) e^6,
m) 1.

Zad. 5.5

a) pozioma $y = 6$, pionowa $x = 0$,
b) ukośna $y = 4x$,
c) pionowe $x = -2, x = 2$, ukośna $y = 4x$,
d) pionowa $x = 4$, pozioma $y = 0$.

Zad. 5.6 a) ciągła na odcinkach $(-\infty, 2\rangle$, $(2, \infty)$, b) ciągła w R.

Rozdział 6

Pochodna funkcji

Zadania dotyczące obliczania pochodnych funkcji jednej zmiennej, pochodnych wyższych rzędów.

6.1. Przykłady

Przykład 6.1. Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x) = 5x - 4$,
b) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 13$,
c) $f(x) = 5\sqrt{x} + \sqrt[7]{x} - \frac{6}{x}$,
d) $f(x) = 13x^8 - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$,
e) $f(x) = \sin x + e^x - 2^x$,
f) $f(x) = 3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 4\log_3 x$,
g) $f(x) = 2\arccos x - 4\operatorname{arcctg} x$,
h) $f(x) = 5\operatorname{arctg} x + 6\cos x - 8\ln x$,
i) $f(x) = 4x^7 - \sin 2 + \sin x - 2e^x + e^{13}$.

Pochodne funkcji elementarnych

$(c)' = 0, \quad c \in R$,
$(x)' = 1$,
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in R \setminus \{0, 1\}$,
$(\sin x)' = \cos x$,
$(\cos x)' = -\sin x$,
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,
$(a^x)' = a^x \ln a$,
$(e^x)' = e^x$,
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$,
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Uwaga. Do oznaczenia pochodnej funkcji $y = f(x)$ używa się równoważnie oznaczeń $y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$.
Ponadto $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ lub symbolicznie $(f + g)' = f' + g'$.

Rozwiązanie.

a) $f'(x) = (5x-4)' = 5(x)' - (4)' = 5 \cdot 1 - 0 = 5,$

b) $f'(x) = (4x^3 - 2x^2 + 5x - 13)' = 4(x^3)' - 2(x^2)' + 5(x)' - (13)' =$
$= 4 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 2x^{2-1} + 5 \cdot 1 - 0 = 12x^2 - 4x + 5,$

c) $f'(x) = \left(5\sqrt{x} + \sqrt[7]{x} - \frac{6}{x}\right)' = \left(5x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{7}} - 6x^{-1}\right)' =$
$= 5(x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{7}})' - 6 \cdot (x^{-1})' = 5 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{7}x^{\frac{1}{7}-1} - 6 \cdot \frac{1}{-1-1}x^{-1-1} =$
$= 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{7}x^{-\frac{6}{7}} - 6 \cdot \frac{1}{-2}x^{-2} = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}} + \frac{6}{x^2},$

d) $f'(x) = \left(13x^8 - \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}\right)' = 13(x^8)' - 2(x^{-3})' - 3(x^{-1})' =$
$= 13 \cdot 8x^{8-1} - 2 \cdot (-3)x^{-3-1} - 3 \cdot (-1)x^{-1-1} =$
$= 13 \cdot 8x^7 - 2 \cdot (-3)x^{-4} - 3 \cdot (-1)x^{-2} = 104x^7 + \frac{6}{x^4} + \frac{3}{x^2},$

e) $f'(x) = (\sin x + e^x - 2^x)' = (\sin x)' + (e^x)' - (2^x)' = \cos x + e^x - 2^x \ln 2,$

f) $f'(x) = (3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 4\log_3 x)' = 3(\operatorname{tg} x)' - 2(\operatorname{ctg} x)' + 4(\log_3 x)' =$
$= 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) + 4 \cdot \frac{1}{x \ln 3} = \frac{3}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 x} + \frac{4}{x \ln 3},$

g) $f'(x) = (2\arccos x - 4\operatorname{arcctg} x)' = 2(\arccos x)' - 4(\operatorname{arcctg} x)' =$
$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{1+x^2},$

h) $f'(x) = (5\operatorname{arctg} x + 6\cos x - 8\ln x)' = 5(\operatorname{arctg} x)' + 6(\cos x)' - 8(\ln x)' =$
$= 5 \cdot \frac{1}{1+x^2} + 6 \cdot (-\sin x) - 8 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{1+x^2} - 6\sin x - \frac{8}{x},$

i) $f'(x) = (4x^7 - \sin 2 + \sin x - 2e^x + e^{13})' =$
$= 4(x^7)' - (\sin 2)' + (\sin x)' - 2(e^x)' + (e^{13})' =$
$= 4 \cdot 7x^{7-1} - 0 + \cos x - 2 \cdot e^x + 0 = 28x^6 + \cos x - 2e^x.$

Uwaga. Ponieważ $\sin 2$ i e^{13} są konkretnymi liczbami, do obliczenia pochodnych stosujemy wzór na pochodną z liczby

$$(\sin 2)' = 0, \quad (e^{13})' = 0.$$

Przykład 6.2. Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x) = (2x^3 + 7)e^x$,
b) $f(x) = (4x^3 + 2x^2 + 5)\sin x$,
c) $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^2+1}$,
d) $f(x) = \frac{3^x+x^4}{\sin x}$,
e) $f(x) = x^2(x^3 + 4x^2 + x)$,
f) $f(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{x^2}$.

Pochodna iloczynu i ilorazu funkcji

$$\begin{aligned}(u(x)\cdot v(x))' &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x),\\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}, \quad v(x)\neq 0,\end{aligned}$$

co symbolicznie można zapisać w postaci

$$\begin{aligned}(u\cdot v)' &= u'\cdot v + u\cdot v',\\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.\end{aligned}$$

Rozwiązanie.

a) Funkcja $f(x) = (2x^3 + 7)e^x$ jest przypadkiem iloczynu dwóch funkcji elementarnych, którego nie da się przekształcić do jednej funkcji elementarnej. W związku z tym, obliczając pochodną, trzeba skorzystać ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((2x^3+7)e^x\right)' = (2x^3+7)'\cdot(e^x) + (2x^3+7)\cdot(e^x)' =\\ &= (6x^2+0)\cdot e^x + (2x^3+7)\cdot e^x = e^x(2x^3+6x^2+7).\end{aligned}$$

b) Analogicznie

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left((4x^3+2x^2+5)\sin x\right)' =\\ &= (4x^3+2x^2+5)'\cdot\sin x + (4x^3+2x^2+5)\cdot(\sin x)' =\\ &= (12x^2+4x+0)\cdot\sin x + (4x^3+2x^2+5)\cdot\cos x =\\ &= (12x^2+4x)\sin x + (4x^3+2x^2+5)\cos x.\end{aligned}$$

c) Funkcja $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^2+1}$ jest przypadkiem ilorazu dwóch funkcji elementarnych, który nie da się przekształcić do jednej funkcji elementarnej. W związku z tym, obliczając pochodną, trzeba skorzystać ze wzoru

na pochodną ilorazu funkcji

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3+7}{x^2+1}\right)' = \frac{(2x^3+7)'\cdot(x^2+1)-(2x^3+7)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{(6x^2+0)\cdot(x^2+1)-(2x^3+7)\cdot(2x+0)}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{6x^2\cdot(x^2+1)-(2x^3+7)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^3+3x-7)}{(x^2+1)^2}.$$

d) Analogicznie

$$f'(x) = \left(\frac{3^x+x^4}{\sin x}\right)' = \frac{(3^x+x^4)'\cdot\sin x-(3^x+x^4)\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{(3^x\ln 3+4x^3)\cdot\sin x-(3^x+x^4)\cdot\cos x}{\sin^2 x}.$$

e) Funkcja $f(x) = x^2(x^3+4x^2+x)$ po wymnożeniu da się przedstawić jako wielomian $f(x) = x^5+4x^4+x^3$, więc można, ale nie trzeba korzystać z pochodnej iloczynu funkcji

$$f'(x) = (x^5+4x^4+x^3)' = 5x^4+16x^3+3x^2,$$

bądź alternatywnie z pochodnej iloczynu

$$f'(x) = (x^2(x^3+4x^2+x))' =$$
$$= (x^2)'\cdot(x^3+4x^2+x)+x^2\cdot(x^3+4x^2+x)' =$$
$$= 2x\cdot(x^3+4x^2+x)+x^2\cdot(3x^2+8x+1) = 5x^4+16x^3+3x^2.$$

f) Funkcja $f(x) = \dfrac{\boxed{x^3}+\boxed{4x^2}+\boxed{x}}{\boxed{\boxed{\boxed{x^2}}}}$ po uproszczeniu da się przedstawić jako wielomian $f(x) = \boxed{x}+\boxed{4}+\boxed{x^{-1}}$, więc można, ale nie trzeba korzystać z pochodnej ilorazu funkcji

$$f'(x) = (x+4+x^{-1})' = 1+0-1\cdot x^{-2} = 1-x^{-2} = 1-\tfrac{1}{x^2}$$

bądź alternatywnie z pochodnej ilorazu

$$f'(x) = \left(\frac{x^3+4x^2+x}{x^2}\right)' = \frac{(x^3+4x^2+x)'\cdot x^2-(x^3+4x^2+x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} =$$
$$= \frac{(3x^2+8x+1)\cdot x^2-(x^3+4x^2+x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^4-x^2}{x^4} = 1-\frac{1}{x^2}.$$

Przykład 6.3. Obliczyć pochodne funkcji złożonych

a) $f(x) = (2x^3+7)^{13}$,
b) $f(x) = \sin^{14} x$,
c) $f(x) = \ln(x^2+1)$,
d) $f(x) = \sqrt[3]{e^x+x^4}$,
e) $f(x) = e^{4x^3-12x+8}$,
f) $f(x) = \sin(1+\ln x)$,
g) $f(x) = x^{\sin x}$,
h) $f(x) = x^x$.

Pochodna funkcji złożonej jest to pochodna funkcji zewnętrznej f razy pochodna funkcji wewnętrznej g

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

co można symbolicznie zapisać w postaci

$$(f(\heartsuit))' = f'(\heartsuit) \cdot \heartsuit', \qquad \text{gdzie} \quad \heartsuit = g(x).$$

Uwaga. W pierwszym kroku należy ustalić postać funkcji zewnętrznej i wewnętrznej. Pomocne mogą być zadania dotyczące składania funkcji z rozdziału 5. Funkcję wewnętrzną oznaczamy $\heartsuit$.

Rozwiązanie.

a) Dla $f(x) = (2x^3 + 7)^{13}$

$$\begin{array}{lll} \text{wewnętrzna} & \heartsuit = 2x^3 + 7, & \heartsuit' = 6x^2, \\ \text{zewnętrzna} & \heartsuit^{13}, & (\heartsuit^{13})' = 13\heartsuit^{12}, \end{array}$$

więc stosując wzór na pochodną funkcji złożonej, otrzymuje się

$$f'(x) = 13 \cdot (2x^3 + 7)^{12} \cdot (6x^2)' = 78x^2 \cdot (2x^3 + 7)^{12}.$$

b) Dla $f(x) = \sin^{14} x = (\sin x)^{14}$

$$\begin{array}{lll} \text{wewnętrzna} & \heartsuit = \sin x, & \heartsuit' = \cos x, \\ \text{zewnętrzna} & \heartsuit^{14}, & (\heartsuit^{14})' = 14\heartsuit^{13}, \end{array}$$

więc stosując wzór na pochodną funkcji złożonej, otrzymuje się

$$f'(x) = 14 \cdot (\sin x)^{13} \cdot (\cos x)' = 14 \cos x \sin^{13} x.$$

c) Dla $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$$\begin{array}{lll} \text{wewnętrzna} & \heartsuit = x^2 + 1, & \heartsuit' = 2x, \\ \text{zewnętrzna} & \ln \heartsuit, & (\ln \heartsuit)' = \dfrac{1}{\heartsuit}, \end{array}$$

więc stosując wzór na pochodną funkcji złożonej, otrzymuje się

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot (2x)' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

d) Dla $f(x) = \sqrt[3]{e^x + x^4} = (e^x + x^4)^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{array}{lll} \text{wewnętrzna} & \heartsuit = e^x + x^4, & \heartsuit' = e^x + 4x^3, \\ \text{zewnętrzna} & \heartsuit^{\frac{1}{3}}, & (\heartsuit^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}\heartsuit^{-\frac{2}{3}}, \end{array}$$

więc stosując wzór na pochodną funkcji złożonej, otrzymuje się

$$f'(x) = \frac{1}{3}(e^x + x^4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (e^x + 4x^3)' = \frac{e^x + 4x^3}{3\sqrt[3]{(e^x + x^4)^2}}.$$

e) Dla $f(x) = e^{4x^3 - 12x + 8}$

$$\begin{array}{lll} \text{wewnętrzna} & \heartsuit = 4x^3 - 12x + 8, & \heartsuit' = 12x^2 - 12, \\ \text{zewnętrzna} & e^{\heartsuit}, & (e^{\heartsuit})' = e^{\heartsuit}, \end{array}$$

więc stosując wzór na pochodną funkcji złożonej otrzymuje się

$$f'(x) = e^{4x^3 - 12x + 8} \cdot (12x^2 - 12)' = (12x^2 - 12)e^{4x^3 - 12x + 8}.$$

f) Dla $f(x) = \sin(1 + \ln x)$

$$\begin{array}{lll} \text{wewnętrzna} & \heartsuit = 1 + \ln x, & \heartsuit' = \frac{1}{x}, \\ \text{zewnętrzna} & \sin\heartsuit, & (\sin\heartsuit)' = \cos\heartsuit, \end{array}$$

więc stosując wzór na pochodną funkcji złożonej, otrzymuje się

$$f'(x) = \cos(1 + \ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{\cos(1 + \ln x)}{x}.$$

Uwaga. Należy przekształcić funkcję, korzystając z $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$,
albo symbolicznie

$$\boxed{f^g = e^{g\ln f}},$$

a następnie skorzystać ze wzoru na pochodną funkcji złożonej.

g) $f(x) = \boxed{x^{\sin x} = e^{\sin x\cdot\ln x}}$,

wewnętrzna $\heartsuit = \sin x \cdot \ln x$, $\heartsuit' = (\sin x \cdot \ln x)' =$
$= (\sin x)' \ln x + \sin x (\ln x)' =$
$= \cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x$,

zewnętrzna $e^{\heartsuit}$, $(e^{\heartsuit})' = e^{\heartsuit}$,

$$f'(x) = e^{\sin x\cdot\ln x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \tfrac{1}{x} \cdot \sin x\right) =$$

$$= \left(\cos x \cdot \ln x + \tfrac{1}{x} \cdot \sin x\right)\boxed{e^{\sin x\cdot\ln x}} =$$

$$= \left(\cos x \cdot \ln x + \tfrac{1}{x} \cdot \sin x\right)\boxed{x^{\sin x}}.$$

h) $f(x) = \boxed{x^x = e^{x\ln x}}$,

wewnętrzna $\heartsuit = x \ln x$, $\heartsuit' = (x \ln x)' =$
$= (x)' \ln x + x(\ln x)' =$
$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$,

zewnętrzna $e^{\heartsuit}$, $(e^{\heartsuit})' = e^{\heartsuit}$,

$$f'(x) = e^{x\ln x} \cdot (\ln x + 1) = (\ln x + 1)\boxed{e^{x\ln x}} = \boxed{x^x}(\ln x + 1).$$

Przykład 6.4. Obliczyć pochodne do 3 rzędu włącznie

a) $f(x) = 7x^6 - 6x^7$,

b) $f(x) = e^x + \sin x$,

c) $f(x) = e^x(2x^3 - 3x^2)$,

d) $f(x) = (2x^3 + 3x^2)\ln x$.

Druga pochodna $f''(x)$ to pochodna z pochodnej $f'(f'(x))$. Natomiast trzecia pochodna $f'''(x)$ to pochodna z drugiej pochodnej $f'(f''(x))$.

Rozwiązanie.

a)
$$f(x) = \boxed{7x^6 - 6x^7},$$
$$f'(x) = (\boxed{7x^6 - 6x^7})' = 7 \cdot 6x^5 - 6 \cdot 7x^6 = \boxed{42x^5 - 42x^6},$$
$$f''(x) = (\boxed{42x^5 - 42x^6})' = 42 \cdot 5x^4 - 42 \cdot 6x^5 = \boxed{210x^4 - 252x^5},$$
$$f'''(x) = (\boxed{210x^4 - 252x^5})' = 210 \cdot 4x^3 - 252 \cdot 5x^4 = 840x^3 - 1260x^4.$$

b)
$$f(x) = \boxed{e^x + \sin x},$$
$$f'(x) = (\boxed{e^x + \sin x})' = \boxed{e^x + \cos x},$$
$$f''(x) = (\boxed{e^x + \cos x})' = \boxed{e^x - \sin x},$$
$$f'''(x) = (\boxed{e^x - \sin x})' = e^x - \cos x.$$

c)
$$f(x) = \boxed{e^x(2x^3 - 3x^2)},$$
$$f'(x) = (\boxed{e^x(2x^3 - 3x^2)})' = (e^x)'(2x^3 - 3x^2) + e^x(2x^3 - 3x^2)' =$$
$$= e^x(2x^3 - 3x^2) + e^x(6x^2 - 6x) = \boxed{e^x(2x^3 + 3x^2 - 6x)},$$
$$f''(x) = (\boxed{e^x(2x^3 + 3x^2 - 6x)})' =$$
$$= (e^x)'(2x^3 + 3x^2 - 6x) + e^x(2x^3 + 3x^2 - 6x)' =$$
$$= e^x(2x^3 + 3x^2 - 6x) + e^x(6x^2 + 6x - 6) = \boxed{e^x(2x^3 + 9x^2 - 6)},$$
$$f'''(x) = (\boxed{e^x(2x^3 + 9x^2 - 6)})' =$$
$$= (e^x)'(2x^3 + 9x^2 - 6) + e^x(2x^3 + 9x^2 - 6)' =$$
$$= e^x(2x^3 + 9x^2 - 6) + e^x(6x^2 + 18x) =$$
$$= e^x(2x^3 + 15x^2 + 18x - 6).$$

d)
$$f(x) = \boxed{(2x^3 + 3x^2)\ln x},$$
$$f'(x) = (\boxed{(2x^3 + 3x^2)\ln x})' = (2x^3 + 3x^2)'\ln x + (2x^3 + 3x^2)(\ln x)' =$$
$$= (6x^2 + 6x)\ln x + (2x^3 + 3x^2) \cdot \frac{1}{x} = \boxed{(6x^2 + 6x)\ln x + 2x^2 + 3x},$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (\boxed{(6x^2+6x)\ln x + 2x^2 + 3x})' = \\
&= (6x^2+6x)'\ln x + (6x^2+6x)(\ln x)' + (2x^2+3x)' = \\
&= (12x+6)\ln x + (6x^2+6x)\cdot\frac{1}{x} + 4x + 3 = \\
&= (12x+6)\ln x + 6x + 6 + 4x + 3 = \boxed{(12x+6)\ln x + 10x + 9},\\
f'''(x) &= (\boxed{(12x+6)\ln x + 10x + 9})' = \\
&= (12x+6)'\ln x + (12x+6)(\ln x)' + (10x+9)' = \\
&= 12\ln x + (12x+6)\cdot\frac{1}{x} + 10 = 12\ln x + 12 + \frac{6}{x} + 10 = \\
&= 12\ln x + \frac{6}{x} + 22.
\end{aligned}
$$

6.2. Zadania

Zadanie 6.1. Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x) = 17x - 128$,

b) $f(x) = 6x^5 - 2x^4 + 5x^2 - 1$,

c) $f(x) = 5\sqrt{x^3} + \sqrt[4]{x^5}$,

d) $f(x) = 5x^7 - \frac{5}{x^4} + \frac{2}{x}$,

e) $f(x) = 4\sin x - 5e^x - 5^x$,

f) $f(x) = 5\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x + 7\log_5 x$,

g) $f(x) = 7\arccos x + 8\operatorname{arcctg} x$,

h) $f(x) = 5\operatorname{arctg} x + 4\cos x - 6\ln x$,

i) $f(x) = 6\sqrt[5]{x^3} - \frac{2}{x^3} + x^{13} - 10x^{999}$,

j) $f(x) = 14\operatorname{tg} 7 - 2\operatorname{ctg} x$,

k) $f(x) = 13\ln 7 - xe^2$,

l) $f(x) = x^7 + 7^x$,

m) $f(x) = x^e + e^x + e^4$,

n) $f(x) = \cos x - 2\sin 3$.

Zadanie 6.2. Obliczyć pochodne funkcji

a) $f(x) = (4x + 2x^6 + 8)e^x$,

b) $f(x) = (4x^3 + 2x^2 + 5)\cos x$,

c) $f(x) = \frac{7x^4+2}{e^x+2}$,

d) $f(x) = \frac{e^x+2}{\sin x}$,

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(x^3 + 4x^2 + x)$,

f) $f(x) = \frac{x^3+4x^2+x}{\sqrt[3]{x^2}}$,

g) $f(x) = (3x^2 + \sin x)\cos x$,

h) $f(x) = (\ln x + 4 - 5\operatorname{tg} x)\operatorname{ctg} x$,

i) $f(x) = \frac{\sin x + 5\cos x}{\ln x}$,

j) $f(x) = (4x^7 + 6x^6 - 5x^9)e^{-x}$,

k) $f(x) = \frac{7x^4+6x^6-9x^5}{e^{2x}}$,

l) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+4x}{5x+7}$,

m) $f(x) = (e^x + x^e)\ln x$,

n) $f(x) = \frac{e^x+x^e+\sin 8}{x^2+5x}$.

Zadanie 6.3. Obliczyć pochodne funkcji złożonych

a) $f(x) = (17x^2 - 12x + e^x)^{999}$,
b) $f(x) = \cos^{22} x$,
c) $f(x) = \log_5(5x^6 - 12x^2 - 13)$,
d) $f(x) = e^{4x^3-12x+8}$,
e) $f(x) = \ln^6(5 + \ln x)$,
f) $f(x) = \sin 13x$,
g) $f(x) = \sin(3x^2 + 4x - 5)$,
h) $f(x) = x^{\cos 7+\sin x}$,
i) $f(x) = (5x - 2x^3 + 3)^7$,
j) $f(x) = 7^{5x-2x^3+3}$,
k) $f(x) = \operatorname{tg}(4x - 5)$,
l) $f(x) = \ln(\operatorname{ctg} x)$,
m) $f(x) = \log^6(2x + 3)$,
n) $f(x) = (6x - 4)^{6x-4}$.

Zadanie 6.4. Obliczyć pochodne do 3 rzędu włącznie

a) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 2x$,
b) $f(x) = x^e + e^x$,
c) $f(x) = \ln x$,
d) $f(x) = \sin(5x - 4)$,
e) $f(x) = \ln(2x)$,
f) $f(x) = 4^{3x-5}$,
g) $f(x) = (3x - 5)^4$,
h) $f(x) = e^{2x+e^x}$,
i) $f(x) = 7x^8 - 8x^7$,
j) $f(x) = 12x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 9x - 99$,
k) $f(x) = e^{\sin^2 x} \cdot e^{\cos^2 x}$,
l) $f(x) = \cos 2x$.

6.3. Odpowiedzi

Zad. 6.1

a) 17,
b) $30x^4 - 8x^3 + 10x$,
c) $\frac{5x^{1/4}}{4} + \frac{15\sqrt{x}}{2}$,
d) $35x^6 + \frac{20}{x^5} - \frac{2}{x^2}$,
e) $4\cos x - 5e^x - 5^x \ln 5$,
f) $\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{6}{\sin^2 x} + \frac{7}{x \ln 5}$,
g) $-\frac{7}{\sqrt[7]{1-x^2}} - \frac{8}{1+x^2}$,
h) $\frac{5}{1+x^2} - 4\sin x - \frac{6}{x}$,
i) $\frac{6}{x^4} + \frac{18}{5x^{2/5}} + 13x^{12} - 9990x^{998}$,
j) $\frac{2}{\sin^2 x}$,
k) $-e^2$,
l) $7x^6 + 7^x \ln 7$,
m) $e^x + ex^{e-1}$,
n) $-\sin x$.

Zad. 6.2

a) $2e^x\left(6 + 2x + 6x^5 + x^6\right)$,
b) $4x(1 + 3x)\cos x - \left(5 + 2x^2 + 4x^3\right)\sin x$,
c) $\frac{56x^3+e^x\left(-2+28x^3-7x^4\right)}{(2+e^x)^2}$,
d) $\frac{e^x \sin x-(e^x+2)\cos x}{\sin^2 x}$,
e) $\frac{5x^{2/3}}{3} + \frac{32x^{5/3}}{3} + \frac{11x^{8/3}}{3}$,
f) $\frac{1}{3x^{2/3}} + \frac{16x^{1/3}}{3} + \frac{7x^{4/3}}{3}$,
g) $\cos x(6x + \cos x) - \sin x\left(3x^2 + \sin x\right)$,
h) $(\frac{1}{x} - \frac{5}{\cos^2 x})\operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin^2 x}(\ln x + 4 - 5\operatorname{tg} x)$,
i) $\frac{(\cos x-5\sin x)\ln x-(\sin x+5\cos x)\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$,
j) $e^{-x}x^5\left(36 + 22x - 4x^2 - 45x^3 + 5x^4\right)$,
k) $-e^{-2x}x^3\left(-28 + 59x - 54x^2 + 12x^3\right)$,
l) $\frac{28+28x+73x^2+30x^3}{(7+5x)^2}$,
m) $\frac{e^x+x^e}{x} + \left(e^x + ex^{-1+e}\right)\ln x$,
n) $\frac{-5e^x+3e^x x+e^x x^2-5x^e+5ex^e-2x^{1+e}+ex^{1+e}-5\sin 8-2x\sin 8}{x^2(5+x)^2}$.

Zad. 6.3

a) $999\left(-12+e^x+34x\right)\left(e^x-12x+17x^2\right)^{998}$,

b) $-22\cos^{21}x\sin x$,

c) $\frac{-24x+30x^5}{\left(-13-12x^2+5x^6\right)\ln 5}$,

d) $e^{8-12x+4x^3}\left(-12+12x^2\right)$,

e) $\frac{6\ln^5(5+\ln x)}{x(5+\ln x)}$,

f) $13\cos 13x$,

g) $2(2+3x)\cos(3x^2+4x-5)$,

h) $x^{\cos 7+\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\cos 7+\sin x}{x}\right)$,

i) $7\left(5-6x^2\right)\left(3+5x-2x^3\right)^6$,

j) $7^{3+5x-2x^3}\left(5-6x^2\right)\ln 7$,

k) $\frac{4}{\cos^2(5-4x)}$,

l) $-\frac{1}{\sin x\cos x}$,

m) $\frac{12\ln^5(3+2x)}{(3+2x)\ln^6 10}$,

n) $(-4+6x)^{-4+6x}(6+6\ln(-4+6x))$.

Zad. 6.4

	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
a)	$2+12x^2+4x^3$	$24x+12x^2$	$24+24x$
b)	e^x+ex^{-1+e}	$e^x+(-1+e)ex^{-2+e}$	$e^x+(-2+e)(-1+e)ex^{-3+e}$
c)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$
d)	$5\cos(5x-4)$	$-25\sin(5x-4)$	$-125\cos(5x-4)$
e)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$
f)	$3\cdot 4^{-5+3x}\ln 4$	$9\cdot 4^{-5+3x}\ln^2 4$	$27\cdot 4^{-5+3x}\ln^3 4$
g)	$12(-5+3x)^3$	$108(-5+3x)^2$	$648(-5+3x)$
h)	$e^{e^x+2x}\left(2+e^x\right)$	$e^{e^x+2x}\left(4+5e^x+e^{2x}\right)$	$e^{e^x+2x}\left(8+19e^x+9e^{2x}+e^{3x}\right)$
i)	$-56x^6+56x^7$	$-336x^5+392x^6$	$-1680x^4+2352x^5$
j)	$-9-10x+18x^2+48x^3$	$-10+36x+144x^2$	$36+288x$
k)	0	0	0
l)	$-2\sin 2x$	$-4\cos 2x$	$8\sin 2x$

Rozdział 7

Pochodna - zastosowanie

Zadania dotyczące wykorzystania pochodnej do obliczania granic funkcji, badania monotoniczności, ekstremów, wypukłości/wklęsłości, punktów przegięcia, różniczki funkcji oraz rozwinięcia funkcji w szereg.

7.1. Przykłady

Przykład 7.1. Korzystając z reguły de L'Hospitala, obliczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

b) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{x-\pi/2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^4-4x^2+2)e^x$.

Reguła de L'Hospitala:
Jeżeli:

- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$ albo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,
- istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

to $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Uwaga. W przypadku innych rodzajów symboli nieoznaczonych wystarczy przekształcić do nieoznaczoności $\left[\frac{0}{0}\right]$ albo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\infty - \infty \qquad\qquad 0\cdot\infty$$

$$f-g = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}} \qquad\qquad f\cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}},$$

w przypadku nieoznaczoności typu:

$$1^\infty, 0^0, \infty^0 \qquad \text{po przekształceniu} \qquad f^g = e^{g\ln f}$$

potęga jest jedną z poprzednich typów nieoznaczoności.

Rozwiązanie.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3-x^2+x-1)'}{(x^2-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x+1}{2x}=\frac{3-2+1}{2}=1,$

b) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{\cos x}{x-\pi/2}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{(\cos x)'}{(x-\pi/2)'}=\lim\limits_{x\to \pi/2}\frac{-\sin x}{1}=-\sin\pi/2=-1,$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=e^0=1,$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^4-4x^2+2)e^x=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^4-4x^2+2}{\frac{1}{e^x}}=$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\boxed{x^4}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\frac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^4}}^{\nearrow 0}\right)}{\overset{1/e^{-\infty}=e^{\infty}}{\boxed{\frac{1}{e^x}}^{\nearrow\infty}}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{(x^4-4x^2+2)'}{(e^{-x})'}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^3-8x}{-e^{-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{(4x^3-8x)'}{(-e^{-x})'}=\lim_{x\to -\infty}\frac{12x^2-8}{e^{-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{(12x^2-8)'}{(e^{-x})'}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{24x}{-e^{-x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\overset{H}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{24}{\boxed{e^{-x}}^{\nearrow\infty}}=\frac{24}{\infty}=0.$$

Przykład 7.2. Zbadać monotoniczność funkcji

a) $f(x)=x^3-9x^2,$

b) $f(x)=-2x^3+6x^2+18x-4,$

c) $f(x)=\frac{x^5}{\ln x},$

d) $f(x)=\frac{e^x}{x^2+x+1}.$

Monotoniczność funkcji (czyli określenie przedziałów, w których funkcja jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca bądź stała) najłatwiej bada się, wykorzystując pierwszą pochodną.
Jeżeli dla każdego $x\in A\subset D$ funkcja $y=f(x)$ spełnia warunek

- $f'(x)>0$, to funkcja jest rosnąca ($\nearrow$) na A,
- $f'(x)<0$, to funkcja jest malejąca ($\searrow$) na A,
- $f'(x)=0$, to funkcja jest stała na A,
- $f'(x)\geq 0$, to funkcja jest niemalejąca na A (rosnąca bądź stała),
- $f'(x)\leq 0$, to funkcja jest nierosnąca na A (malejąca bądź stała),

Uwaga. Badając monotoniczność, skupić się należy na przedziałach, w których funkcja jest rosnąca lub malejąca. Miejsca, w których $f' = 0$, będą istotne dla ekstremów i punktów przegięcia (tzw. punktów stacjonarnych funkcji).

Uwaga. Badanie każdej funkcji należy rozpocząć od wyznaczenia dziedziny naturalnej funkcji (nie ma sensu badanie funkcji w przedziałach, w których nie jest ona określona).
W przypadku badania monotoniczności funkcji $y = f(x)$ należy:

- wyznaczyć dziedzinę naturalną D,
- obliczyć $f'(x)$ i jej dziedzinę $D_{f'}$,
- rozwiązać nierówności $f'(x) > 0$ oraz $f'(x) < 0$ (można rozwiązać jedną z nierówności i na tej podstawie wywnioskować odpowiedź dla drugiej nierówności),
- można wykonać szkic wykresu pochodnej, żeby odczytać rozwiązanie,
- podać przedziały monotoniczności.

Rozwiązanie.

a) Dla $f(x) = x^3 - 9x^2$

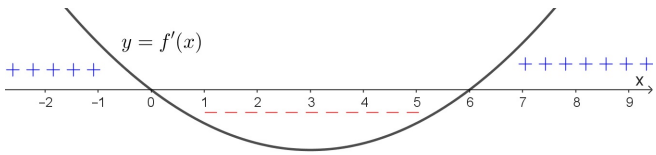
$$D = R$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x \qquad D_{f'} = R$$

$$f'(x) > 0 \qquad f'(x) < 0$$

$$3x^2 - 18x > 0 \qquad 3x^2 - 18x < 0$$

$$3x(x-6) > 0 \qquad 3x(x-6) < 0.$$



Funkcja jest rosnąca ($\nearrow$) na przedziałach $(-\infty, 0), (6, \infty)$, funkcja jest malejąca ($\searrow$) na przedziale $(0, 6)$.

b) Dla $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 18x - 4$

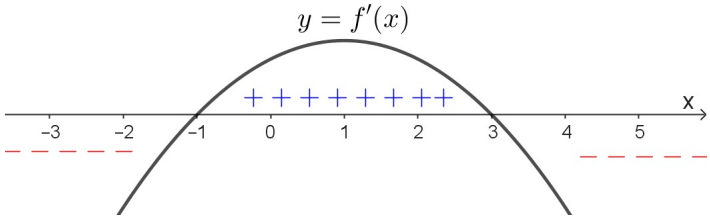
$$D = R$$

$$f'(x) = -6x^2 + 12x + 18 \qquad D_{f'} = R$$

$$f'(x) > 0 \qquad f'(x) < 0$$

$$-6x^2 + 12x + 18 > 0 \qquad -6x^2 + 12x + 18 < 0$$

$$-6(x+1)(x-3) > 0 \qquad -6(x+1)(x-3) < 0.$$



Funkcja jest rosnąca ($\nearrow$) na przedziale $(-1, 3)$,
funkcja jest malejąca ($\searrow$) na przedziałach $(-\infty, -1), (3, \infty)$.

c) Dla $f(x) = \frac{x^5}{\ln x}$

$$D = (0,1) \cup (1, \infty)$$

$$f'(x) = \frac{-x^4 + 5x^4 \ln x}{\ln^2 x} \qquad D_{f'} = (0,1) \cup (1, \infty)$$

$$f'(x) > 0 \qquad f'(x) < 0$$

$$\frac{-x^4 + 5x^4 \ln x}{\ln^2 x} > 0 \qquad \frac{-x^4 + 5x^4 \ln x}{\ln^2 x} < 0$$

$$x^4(-1 + 5\ln x)\ln^2 x > 0 \qquad x^4(1 + 5\ln x)\ln^2 x < 0,$$

$$\overset{+}{x^4}(\overset{\oplus}{-1 + 5\ln x})\overset{+}{\ln^2} x > 0 \qquad \overset{+}{x^4}(\overset{\ominus}{-1 + 5\ln x})\overset{+}{\ln^2} x < 0,$$

$$(-1 + 5\ln x) > 0 \qquad (-1 + 5\ln x) < 0$$

$$\ln x > \frac{1}{5} \qquad \ln x < \frac{1}{5}$$

$$\ln x > \ln e^{\frac{1}{5}} \qquad \ln x < \ln e^{\frac{1}{5}}$$

$$x > e^{\frac{1}{5}} \qquad x < e^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{oraz } x \in (0,1) \cup (1, \infty) \qquad e^{\frac{1}{5}} \approx 1,43$$

$f \nearrow$ na przedziale $(e^{\frac{1}{5}}, \infty)$ $\quad f \searrow$ na przedziałach $(0,1), (1, e^{\frac{1}{5}})$.

d) Dla $f(x) = \frac{e^x}{x^2+x+1}$

$$D = R$$

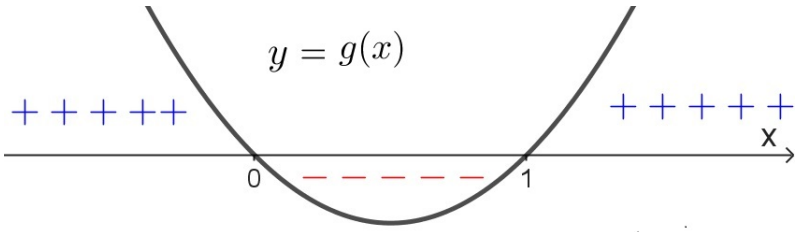
$$f'(x) = \frac{e^x(-1+x)x}{(1+x+x^2)^2} \qquad D_{f'} = R$$

$$f'(x) > 0 \qquad f'(x) < 0$$

$$\frac{e^x(-1+x)x}{(1+x+x^2)^2} > 0 \qquad \frac{e^x(-1+x)x}{(1+x+x^2)^2} < 0$$

$$\overset{+}{e^x}\overset{\oplus}{(-1+x)}x\overset{+}{(1+x+x^2)^2} > 0 \qquad \overset{+}{e^x}\overset{\ominus}{(-1+x)}x\overset{+}{(1+x+x^2)^2} < 0$$

$$g(x) = (x-1)x > 0 \qquad g(x) = (x-1)x < 0$$



$f \nearrow$ na przedziałach $(-\infty, 0), (1, \infty)$ $\qquad$ $f \searrow$ na przedziale $(0, 1)$.

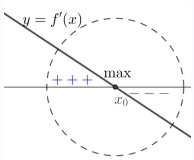
Przykład 7.3. Zbadać ekstrema lokalne funkcji

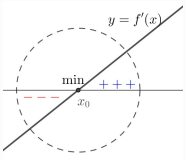
a) $f(x) = x^3 + 18x^2$,
b) $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 4$,
c) $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$,
d) $f(x) = (x^5 + 3x^4)e^x$.

I warunek wystarczający istnienia ekstremum:

- Jeżeli $y = f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i w sąsiedztwie tego punktu oraz spełnia warunki:
  1) $f'(x_0) = 0$,
  2) $\begin{cases} f \nearrow (f' > 0) & \text{dla } x \text{ należącego do lewostronnego sąsiedztwa } x_0 \\ f \searrow (f' < 0) & \text{dla } x \text{ należącego do prawostronnego sąsiedztwa } x_0, \end{cases}$

  to w x_0 ma maksimum lokalne właściwe.





- Jeżeli $y = f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i w sąsiedztwie tego punktu oraz spełnia warunki:
  1) $f'(x_0) = 0$,
  2) $\begin{cases} f \searrow (f' < 0) & \text{dla } x \text{ należącego do lewostronnego sąsiedztwa } x_0 \\ f \nearrow (f' > 0) & \text{dla } x \text{ należącego do prawostronnego sąsiedztwa } x_0, \end{cases}$

  to w x_0 ma minimum lokalne właściwe.

Uwaga. Może istnieć ekstremum tzw. ostrze ($f'(x_0)$ wtedy nie istnieje).

II warunek wystarczający istnienia ekstremum:

- Jeżeli $y = f(x)$ spełnia warunki:
  1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
  2. $f^{(n)}(x_0) < 0$, gdzie n jest parzysta ($n \geq 2$),

  to w $(x_0, f(x_0))$ jest maksimum lokalne właściwe.
- Jeżeli $y = f(x)$ spełnia warunki:
  1. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,
  2. $f^{(n)}(x_0) > 0$, gdzie n jest parzysta ($n \geq 2$),

  to w $(x_0, f(x_0))$ jest minimum lokalne właściwe.

Uwaga. W przypadku badania ekstremów funkcji $y = f(x)$ należy:

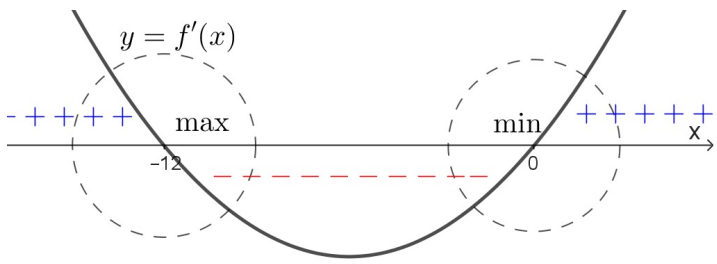
- wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji D,
- obliczyć $f'(x)$ i jej dziedzinę $D_{f'}$,
- rozwiązać równanie $f'(x) = 0$ w celu znalezienia miejsc podejrzanych o ekstrema, skorzystać z **I warunku** do określenia ekstremów,

lub

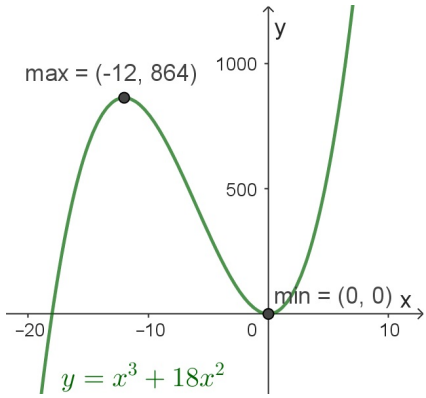
- obliczyć $f'(x)$, $f''(x), \ldots$, ich dziedziny i ich wartości w miejscach podejrzanych o ekstrema w celu potwierdzenia bądź wykluczenia ekstremum z wykorzystaniem **II warunku**.

Rozwiązanie.

a) Dla $f(x) = x^3 + 18x^2$ $\qquad D = R$
$f'(x) = 3x^2 + 36x$ $\qquad D_{f'} = R$
$f'(x) = 0$, tzn. $3x^2+36x = 0$, więc $3x(x+12) = 0$. Miejsca podejrzane o ekstremum to $x_{0,1} = -12$ oraz $x_{0,2} = 0$.



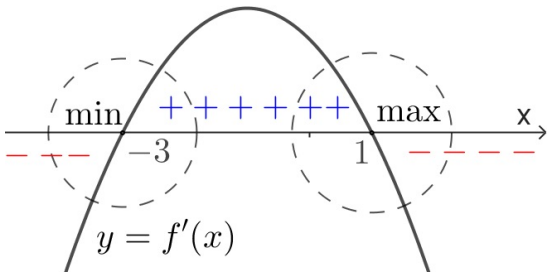
Z I warunku
dla $x_{0,1} = -12$ funkcja osiąga maksimum lokalne właściwe $(-12, f(-12)) = (-12, 864)$,
dla $x_{0,2}$ funkcja osiąga minimum lokalne właściwe $(0, f(0)) = (0, 0)$.



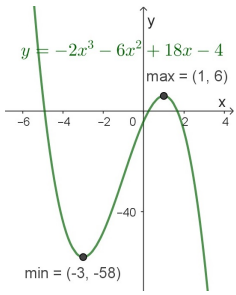
b) Dla $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 4 \qquad D = R$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 - 12x + 18 \quad D_{f'} = R \\ f'(x) &= 0 \\ -6x^2 - 12x + 18 &= 0 \\ -6(x+3)(x-1) &= 0, \end{aligned}$$

czyli miejsca podejrzane o ekstremum to $x_{0,1} = -3$ oraz $x_{0,2} = 1$.
Z I warunku



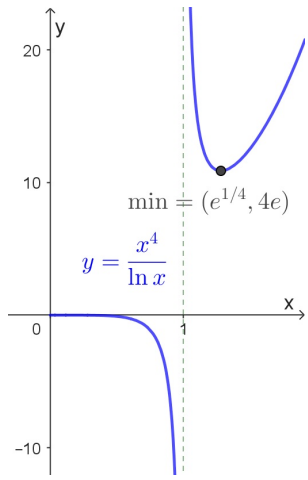
dla $x_{0,1} = -3$ funkcja osiąga minimum lokalne właściwe $(-3, f(-3)) = (-3, -58)$,
dla $x_{0,2}$ funkcja osiąga maksimum lokalne właściwe $(1, f(1)) = (1, 6)$.



c) Dla $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$ dziedzina to $D = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-x^3(1-4\ln x)}{\ln^2 x}, \quad D_{f'} = (0,1)\cup(1,\infty), \\ f'(x) &= 0 \\ -x^3(1-4\ln x) &= 0, \\ x = 0 \notin D \text{ lub } x &= e^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

czyli miejscem podejrzanym o ekstremum jest $x_0 = e^{1/4}$.
W tym przypadku wygodniej jest skorzystać z II warunku
$f''(x) = \frac{2x^2 - 7x^2\ln x + 12x^2\ln^2 x}{\ln^3 x}, \quad D_{f''} = (0,1)\cup(1,\infty)$,
wartość drugiej pochodnej w x_0
$f''(e^{1/4}) = \frac{2(e^{1/4})^2 - 7(e^{1/4})^2\ln(e^{1/4}) + 12(e^{1/4})^2\ln^2(e^{1/4})}{\ln^3(e^{1/4})} = 64\sqrt{e} > 0$,
więc $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$ ma minimum lokalne właściwe w $(e^{1/4}, f(e^{1/4}) = (e^{1/4}, 4e)$.



d) Dla $f(x) = (x^5 + 3x^4)e^x$ dziedzina to $D = R$.

$$f'(x) = e^x x^3 \left(12 + 8x + x^2\right), \quad D_{f'} = R,$$
$$f'(x) = 0$$
$$e^x x^3 \left(12 + 8x + x^2\right) = 0,$$
$$x = -6 \text{ lub } x = -2 \text{ lub } x = 0,$$

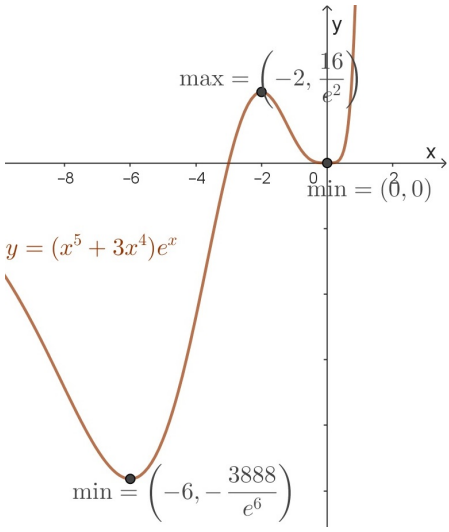
czyli miejsca podejrzane o ekstremum to $x_{0,1} = -6$, $x_{0,2} = -2$, $x_{0,3} = 0$.
Wygodniej jest skorzystać z II warunku, czyli
$f''(x) = e^x x^2 \left(36 + 44x + 13x^2 + x^3\right)$, $D_{f''} = R$.
Wartość drugiej pochodnej w miejscach podejrzanych o ekstremum:

	$x_{0,1}$	$x_{0,2}$	$x_{0,3}$
$f''(x_0)$	$\frac{864}{e^6}$	$-\frac{32}{e^2}$	0
	$+$	$-$	0
	min	max	$*$

więc $f(x) = (x^5 + 3x^4)e^x$ ma minimum lokalne właściwe w punkcie $(-6, f(-6)) = (-6, -\frac{3888}{e^6})$, maksimum lokalne właściwe w punkcie $(-2, f(-2)) = (-2, \frac{16}{e^2})$,
$*$ należy policzyć kolejne pochodne i ich wartości w $x_{0,3} = 0$

$$f'''(x) = e^x \left(72x + 168x^2 + 96x^3 + 18x^4 + x^5\right), \qquad f'''(0) = 0$$
$$f^{(4)}(x) = e^x \left(72 + 408x + 456x^2 + 168x^3 + 23x^4 + x^5\right) = 0,$$

$f^{(4)}(0) = 72 > 0$, więc funkcja ma minimum w $(0, f(0)) = (0, 0)$.



Przykład 7.4. Zbadać wypukłość/wklęsłość funkcji

a) $f(x) = x^3 - 9x^2$,

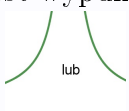
b) $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 18x - 4$,

c) $f(x) = \frac{x^5}{\ln x}$,

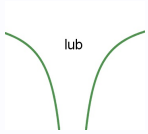
d) $f(x) = e^x(15 + 2x - x^2)$.

Jeżeli dla każdego $A \in\subset D$ funkcja $y = f(x)$ spełnia warunek

- $f''(x) > 0$, to funkcja jest wypukła (wypukła ku dołowi) na A,



- $f''(x) < 0$, to funkcja jest wklęsła (wypukła ku górze) na A.



Rozwiązanie.

a) Korzystając z przykładu 7.2,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 9x^2 & D &= R \\ f'(x) &= 6x^2 - 18x & D_{f'} &= R \\ f''(x) &= 12x - 18 & D_{f''} &= R \\ f''(x) &> 0 & f''(x) &< 0 \\ 12x - 18 &> 0 & 12x - 18 &< 0 \\ x &> \frac{3}{2} & x &< \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

czyli f wypukła dla $x \in (3/2, \infty)$ oraz f wklęsła dla $x \in (-\infty, 3/2)$.

b) Analogicznie

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^3 + 6x^2 + 18x - 4 & D &= R \\ f'(x) &= -6x^2 + 12x + 18 & D_{f'} &= R \\ f''(x) &= -12x + 12 & D_{f''} &= R \\ f''(x) &> 0 & f''(x) &< 0 \\ -12x + 12 &> 0 & -12x + 12 &< 0 \\ x &< 1 & x &> 1, \end{aligned}$$

czyli f wypukła dla $x \in (-\infty, 1)$ oraz f wklęsła dla $x \in (1, \infty)$.

c)

$$f(x) = \frac{x^5}{\ln x} \qquad D = (0,1) \cup (1,\infty)$$

$$f'(x) = \frac{-x^4(1 - 5\ln x)}{\ln^2 x} \qquad D_{f'} = (0,1) \cup (1,\infty)$$

$$f''(x) = \frac{x^3(2 - 9\ln x + 20\ln^2 x)}{\ln^3 x} \qquad D_{f''} = (0,1) \cup (1,\infty)$$

$$f''(x) > 0 \qquad f''(x) < 0$$

$$x^3\overbrace{(2 - 9\ln x + 20\ln^2 x)}^{2-9t+20t^2>0,\ \text{bo}\ \Delta<0}\ln^3 x > 0, \quad x^3\overbrace{(2 - 9\ln x + 20\ln^2 x)}^{2-9t+20t^2,\ \text{bo}\ \Delta<0}\ln^3 x < 0$$

oraz $x \in (0,1) \cup (1,\infty)$

$$\overset{+}{x^3}\overset{\oplus}{\ln^3 x} > 0 \qquad \overset{+}{x^3}\overset{\ominus}{\ln^3 x} < 0$$

$$\ln x > 0 \qquad \ln x < 0$$

$$x > 1 \qquad 0 < x < 1,$$

czyli f wypukła dla $x \in (1,\infty)$ oraz f wklęsła dla $x \in (0,1)$.

d)

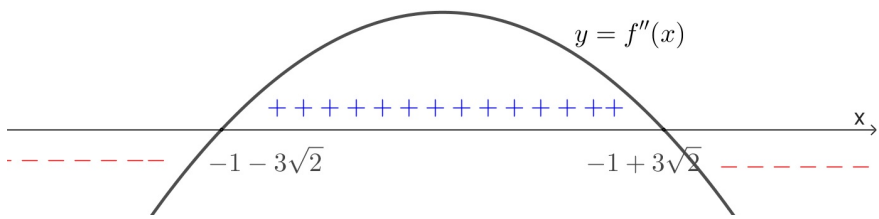
$$f(x) = e^x(15 + 2x - x^2) \qquad D = R$$

$$f'(x) = -e^x\left(-17 + x^2\right) \qquad D_{f'} = R$$

$$f''(x) = -e^x(-17 + 2x + x^2) \qquad D_{f''} = R$$

$$f''(x) > 0 \qquad f''(x) < 0$$

$$-e^x\left(-17 + 2x + x^2\right) > 0 \qquad -e^x\left(-17 + 2x + x^2\right) < 0$$



czyli f wypukła dla $x \in (-1-3\sqrt{2}, -1+3\sqrt{2})$ oraz f wklęsła dla $x \in (-\infty, -1-3\sqrt{2}), (-1+3\sqrt{2}, \infty)$.

Przykład 7.5. Znaleźć punkty przegięcia funkcji

a) $f(x) = x^3 + 18x^2$,

b) $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 4$,

c) $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$,

d) $f(x) = (x - x^2 + x^3)e^x$.

I warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia:
Jeżeli $y = f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 i w sąsiedztwie tego punktu oraz spełnia warunki:

1) w x_0 i jego sąsiedztwie istnieje f',

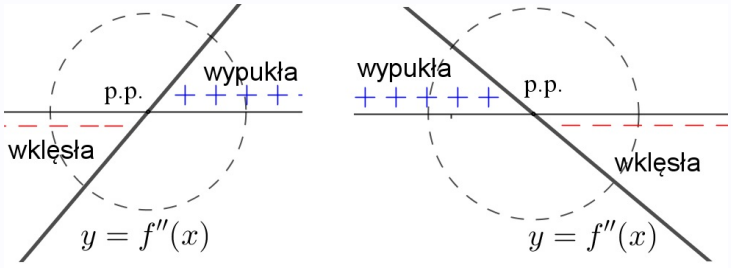
2) $\begin{cases} f \text{ wypukła } (f'' > 0) & \text{dla } x \text{ należącego do lewostronnego sąsiedztwa } x_0 \\ f \text{ wklęsła } (f'' < 0) & \text{dla } x \text{ należącego do prawostronnego sąsiedztwa } x_0, \end{cases}$

albo

1) w x_0 i jego sąsiedztwie istnieje f',

2) $\begin{cases} f \text{ wklęsła } (f'' < 0) & \text{dla } x \text{ należącego do lewostronnego sąsiedztwa } x_0 \\ f \text{ wypukła } (f'' > 0) & \text{dla } x \text{ należącego do prawostronnego sąsiedztwa } x_0, \end{cases}$

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.



II warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia:
Jeżeli $y = f(x)$ spełnia warunki:

1) $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, gdzie n jest nieparzyste ($n \geq 3$),

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

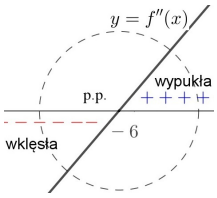
Uwaga. W przypadku szukania punktów przegięcia funkcji $y = f(x)$ należy:

- wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji D,
- obliczyć f', f'' i ich dziedziny,
- rozwiązać równanie $f''(x) = 0$ w celu znalezienia miejsc podejrzanych o to, że tam są punkty przegięcia, skorzystać z I warunku do weryfikacji,
  lub
- obliczyć $f', f'', f'', \ldots,$ ich dziedziny i ich wartości w miejscach podejrzanych o punkty przegięcia zgodnie z II warunkiem.

Rozwiązanie.

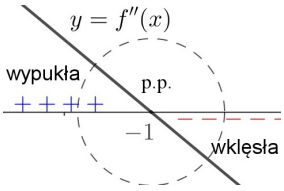
a)
$$f(x) = x^3 + 18x^2 \quad D = R$$
$$f'(x) = 3x^2 + 36x \quad D_{f'} = R$$
$$f''(x) = 6x + 36 \quad D_{f'} = R$$
$$f''(x) = 0 \to 6x + 36 = 0 \to x = -6,$$

czyli miejsce podejrzane o punkt przegięcia to $x_0 = -6$.
Korzystając z I warunku,



funkcja ma punkt przegięcia $(-6, f(-6)) = (-6, 432)$.

b) Dla $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x - 4$ dziedzina to $D = R$,
$$f'(x) = -6x^2 - 12x + 18 \quad D_{f'} = R$$
$$f''(x) = -12x - 12 \quad D_{f''} = R$$
$$f''(x) = 0 \to -12x - 12 = 0 \to x = -1,$$
czyli miejsca podejrzane o punkt przegięcia to $x_0 = -1$.
Korzystając z I warunku,



funkcja ma punkt przegięcia $(-1, f(-1)) = (-1, -26)$.

c) Dla $f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$ dziedzina to $D = (0,1) \cup (1,\infty)$.

$$f'(x) = \frac{-x^3(1-4\ln x)}{\ln^2 x} \qquad D_{f'} = (0,1)\cup(1,\infty)$$
$$f''(x) = \frac{x^2(2-7\ln x+12\ln^2 x)}{\ln^3 x} \qquad D_{f''} = (0,1)\cup(1,\infty)$$
$$f''(x) = 0$$

dla $t{=}\ln x$ zachodzi $2{-}7t{+}12t^2{>}0$, bo $\Delta{<}0$

$$x = 0 \notin D \qquad 2 - 7\ln x + 12\ln^2 x \neq 0 \qquad ,$$

więc brak punktów podejrzanych o punkt przegięcia.

d) Dla $f(x) = (x - x^2 + x^3)e^x$ dziedzina to $D = R$.

$$f'(x) = e^x\left(1 - x + 2x^2 + x^3\right) \qquad D_{f'} = R$$
$$f''(x) = e^x\left(3x + 5x^2 + x^3\right) \qquad D_{f''} = R$$
$$f''(x) = 0$$
$$0 = e^x\left(3x + 5x^2 + x^3\right), \text{ więc } 0 = x(x^2 + 5x + 3),$$

czyli miejsca podejrzane o punkty przegięcia to

$$x_{0,1} = 0, \quad x_{0,2} = \frac{1}{2}\left(-5 - \sqrt{13}\right), \quad x_{0,3} = \frac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{13}\right).$$

Korzystając z II warunku,

$$f'''(x_{0,1}) = 3 \neq 0$$
$$f'''(x_{0,2}) = \frac{1}{2}\left(13 + 5\sqrt{13}\right)e^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}} \neq 0$$
$$f'''(x_{0,3}) = \frac{1}{2}\left(13 - 5\sqrt{13}\right)e^{\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{13}\right)} \neq 0,$$

więc funkcja ma trzy punkty przegięcia w

$$(x_{0,1}, f(x_{0,1})) = (0,0)$$
$$(x_{0,2}, f(x_{0,2})) = \left(\frac{1}{2}\left(-5 - \sqrt{13}\right), -2\left(26 + 7\sqrt{13}\right)e^{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}}\right)$$
$$(x_{0,3}, f(x_{0,3})) = \left(\frac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{13}\right), 2\left(-26 + 7\sqrt{13}\right)e^{\frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{13}\right)}\right).$$

Przykład 7.6. Zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować wykres

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$, b) $f(x) = (x^2 - 4x + 2)e^x$.

Badanie przebiegu zmienności funkcji:

1) wyznaczenie naturalnej dziedziny funkcji (np. przykład 5.1),
2) sprawdzenie własności funkcji, takich jak np. nieparzystość/parzystość funkcji, miejsca zerowe, ciągłość (np. przykłady 5.2, 5.6),
3) obliczenie granic na końcach określoności dziedziny, sprawdzenie (wyznaczenie) asymptot (np. przykłady 5.4, 5.5),
4) badanie monotoniczności (przykład 7.2),
5) sprawdzanie (wyznaczanie)ekstremów (przykład 7.3),
6) badanie wypukłości/wklęsłości (przykład 7.4) oraz szukanie punktów przegięcia (przykład 7.5),
7) zestawienie w tabeli,
8) wykres.

Rozwiązanie.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$,

1) $D = R$,
2) $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 2 = x^4 - 4x^2 + 2 = f(x)$ – funkcja parzysta,
miejsca zerowe

$$x^4 - 4x^2 + 2 = 0 \qquad x^2 = t \geq 0$$
$$t^2 - 4t + 2 = 0, \qquad \Delta = 8$$
$$t_1 = 2 - \sqrt{2} > 0 \qquad t_2 = 2 + \sqrt{2} > 0$$
$$x_1^2 = 2 - \sqrt{2} \qquad x_2^2 = 2 + \sqrt{2}$$
$$x_{1,1} = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad x_{2,1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$
$$x_{1,2} = -\sqrt{2 - \sqrt{2}} \qquad x_{2,2} = -\sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

jest to wielomian, więc jest to funkcja ciągła,

3)

$$\lim_{x\to\infty}(x^4-4x^2+2)=\lim_{x\to\infty}\boxed{x^4}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\tfrac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\tfrac{2}{x^4}}^{\nearrow 0}\right)=\infty,$$

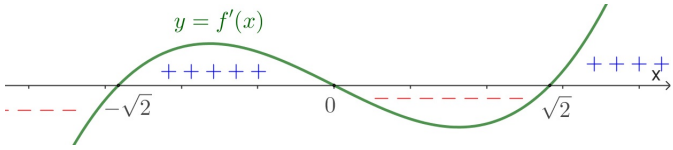
$$\lim_{x\to-\infty}(x^4-4x^2+2)=\lim_{x\to\infty}\boxed{x^4}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\tfrac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\tfrac{2}{x^4}}^{\nearrow 0}\right)=\infty,$$

brak asymptot pionowych,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4-4x^2+2}{x}=\lim_{x\to\infty}\boxed{x^3}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\tfrac{4}{x^2}}^{\nearrow 0}+\boxed{\tfrac{2}{x^4}}^{\nearrow 0}\right)=\pm\infty$$

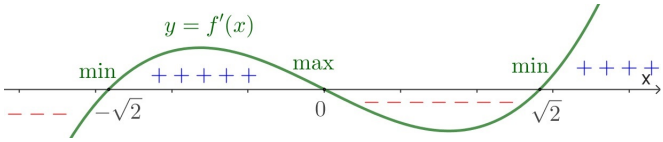
brak asymptot ukośnych,

4) $f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)=4x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$



$f\nearrow$ na przedziałach $(-\sqrt{2},0),(\sqrt{2},\infty)$,
$f\searrow$ na przedziałach $(-\infty,-\sqrt{2}),(0,\sqrt{2})$,

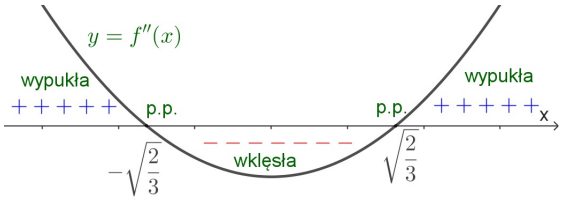
5)



f ma minimum lokalne właściwe w $(-\sqrt{2},-2)$ oraz $(\sqrt{2},-2)$,
f ma maksimum lokalne właściwe w $(0,2)$,

6)

$$f''(x)=12x^2-8=12\left(x^2-\tfrac{2}{3}\right)=12\left(x+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right),$$



więc punkty przegięcia $\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}},-\tfrac{2}{9}\right)$ oraz $\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}},-\tfrac{2}{9}\right)$

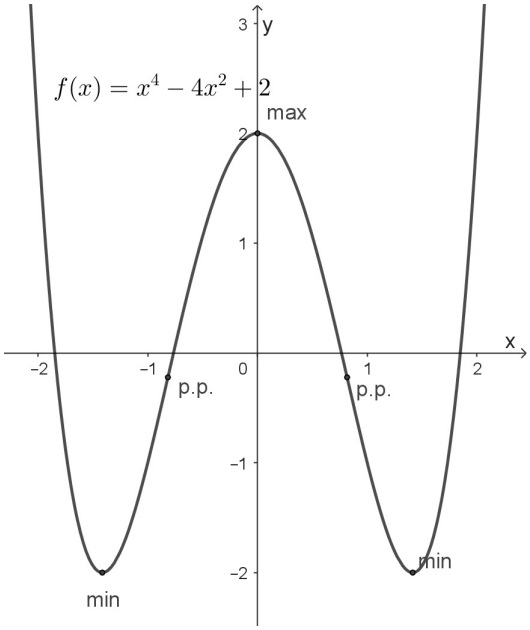
funkcja jest wypukła na przedziałach $\left(-\infty,-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$ oraz $\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}},\infty\right)$,

funkcja jest wklęsła na przedziale $\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}},\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)$,

7)

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},\infty)$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	∞ ↘	-2 min	↗	p.p. $-2/9$	↗	max 2	↘	$-2/9$ p.p.	↘	-2 min	↗ ∞

8)



b) $f(x) = (x^2 - 4x + 2)e^x$.

1) $D = R$,

2) $f(-x) = ((-x)^2 - 4(-x) + 2)\, e^{-x} = (x^2 + 4x + 2) \cdot \frac{1}{e^x} \neq f(x)$ – funkcja nie jest parzysta,
$-f(x) = -\,(x^2 - 4x + 2)\, e^x \neq f(x)$ – funkcja nie jest nieparzysta,
miejsca zerowe

$$(x^2 - 4x + 2)e^x = 0, \qquad e^x > 0, \quad \Delta = 8,$$
$$x_1 = 2 - \sqrt{2}, \qquad x_2 = 2 + \sqrt{2}.$$

funkcja jest ciągła,

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x^2-4x+2)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \boxed{xe^x}^{\nearrow\infty} \left(1 - \boxed{\frac{4}{x}}^{\nearrow 0} + \boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}\right) = \infty$

brak asymptoty ukośnej w ∞,

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2-4x+2)e^x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2-4x+2)}{xe^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2-4x+2)'}{(xe^{-x})'} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-4)}{e^{-x}-xe^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\boxed{2}^{\nearrow\infty}}{\boxed{xe^{-x}-2e^{-x}}^{\nearrow\infty}} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

może być asymptota pozioma w $-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-4x+2)e^x = \lim_{x\to\infty} \boxed{x^2}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\frac{4}{x}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)\boxed{e^x}^{\nearrow\infty} = \infty,$$

więc w ∞ brak asymptoty poziomej,

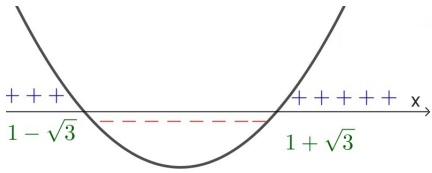
$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-4x+2)e^x = \lim_{x\to-\infty} \boxed{x^2}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\frac{4}{x}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)\boxed{e^x}^{\nearrow 0} =$$

$$= \infty\cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\boxed{x^2}^{\nearrow\infty}\left(1-\boxed{\frac{4}{x}}^{\nearrow 0}+\boxed{\frac{2}{x^2}}^{\nearrow 0}\right)}{\boxed{\frac{1}{e^x}}^{\nearrow\infty}} \overset{H}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-4x+2)'}{\left(\frac{1}{e^x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-4}{-e^{-x}} \overset{H}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{(2x-4)'}{(-e^{-x})'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\boxed{e^{-x}}^{\nearrow\infty}} = 0,$$

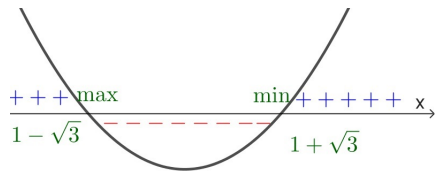
czyli istnieje asymptota pozioma $y=0$ w $-\infty$,

4) $f'(x) = e^x\left(-2-2x+x^2\right) = e^x\left(x-(1+\sqrt{3})\right)\left(x-(1-\sqrt{3})\right)$



$f \nearrow$ na przedziałach $(-\infty, 1-\sqrt{3}), (1+\sqrt{3}, \infty)$,
$f \searrow$ na przedziałach $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$,

5)



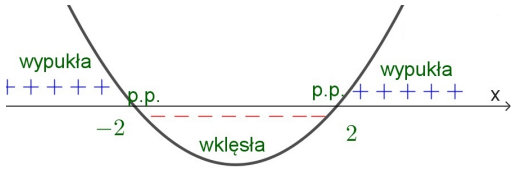
f ma minimum lokalne właściwe w $\left(1+\sqrt{3}, \left(2-2\sqrt{3}\right)e^{1+\sqrt{3}}\right)$,
f ma maksimum lokalne właściwe w $\left(1-\sqrt{3}, \left(2+2\sqrt{3}\right)e^{1-\sqrt{3}}\right)$,

6)
$$f''(x) = e^x\left(-4+x^2\right) = e^x(x+2)(x-2),$$
$$f''(x) = 0, \qquad x_1 = -2 \quad , x_2 = 2$$

miejsca podejrzane o punkt przegięcia,

$$f'''(x) = e^x\left(-4+2x+x^2\right)$$
$$f'''(x_1) = -\frac{4}{e^2} \neq 0, \qquad f'''(x_2) = 4e^2 \neq 0,$$

więc punkty przegięcia $\left(-2, \frac{14}{e^2}\right)$ oraz $(2, -2e^2)$

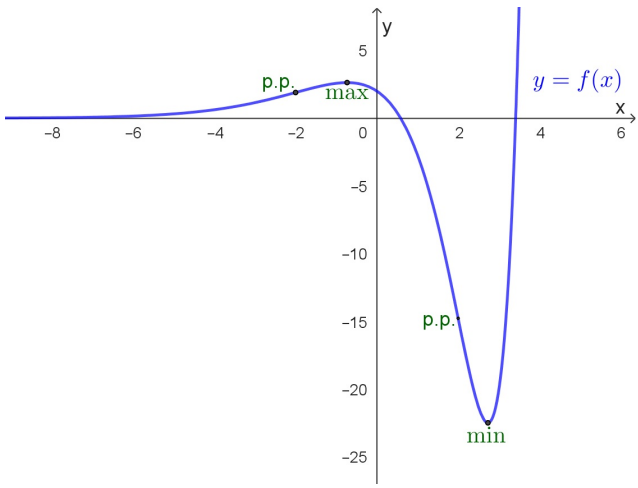


funkcja jest wypukła na przedziałach $(-\infty, -2)$ oraz $(2, \infty)$,
funkcja jest wklęsła na przedziale $(-2, 2)$,

7)

x	$(-\infty, -2)$	-2	$\left(-2, 1-\sqrt{3}\right)$	$1-\sqrt{3}$	$\left(1-\sqrt{3}, 2\right)$	2	$\left(2, 1+\sqrt{3}\right)$	$1+\sqrt{3}$	$\left(1+\sqrt{3}, \infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	0	p.p.		max		p.p.		min	∞

8)



Przykład 7.7. Rozwinąć funkcję $f(x)$ w szereg Taylora wokół a

a) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x - 13, \quad a = 1,$
b) $f(x) = e^x, \quad a = 0,$
c) $f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{2},$
d) $f(x) = \ln x, \quad a = 1.$

Funkcja $y = f(x)$ jest rozwijalna w szereg Taylora

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, gdy

1) f ma pochodne każdego rzędu w a,
2) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, gdzie $R_n = \frac{f^{(n)(c_n)}}{n!}(x-a)^n$ – reszta szeregu we wzorze Taylora, $c_n \in (a, x)$ dla $x > a$ lub $c_n \in (x, a)$ dla $x < a$.

Uwaga.

- Gdy $a = 0$, szereg Taylora nazywa się szeregiem Maclaurina.
- Warunek 2. jest spełniony, jeżeli wszystkie pochodne $f^{(n)}(x)$ są wspólnie ograniczone w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, czyli istnieje M taka, że $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$.

Rozwiązanie.

a) Należy obliczyć pochodne dowolnego rzędu funkcji $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x - 13$, i ich wartości dla $a = 1$

$$\begin{array}{ll}
f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 4x - 13 & f(1) = 5 \\
f'(x) = 24x^3 + 15x^2 + 6x + 4 & f'(1) = 49 \\
f''(x) = 72x^2 + 30x + 6 & f''(1) = 108 \\
f'''(x) = 144x + 30 & f'''(1) = 174 \\
f^{(4)}(x) = 144 & f^{(4)}(1) = 144 \\
f^{(5)}(x) = 0 & f^{(5)}(1) = 0 \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = 0 & f^{(n)}(1) = 0 \text{ dla } n \geq 5
\end{array}$$

oraz $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)(c_n)}}{n!}(x-1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0}{n!}(x-a)^n = 0$,
czyli
$f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + \cdots =$

$= 5+\frac{49}{1!}(x-1)+\frac{108}{2!}(x-1)^2+\frac{174}{3!}(x-1)^3+\frac{144}{4!}(x-1)^4+\frac{0}{5!}(x-1)^5+\cdots+$
$+\frac{0}{n!}(x-1)^n+\cdots$,
więc szereg Taylora wokół $a=1$ ma postać

$$6x^4+5x^3+3x^2+4x-13 = 5+49(x-1)+54(x-1)^2+29(x-1)^3+6(x-1)^4.$$

b) Z tego, że dla $f(x)=e^x$ pochodna dowolnego $n \in N$ jest postaci

$$f^{(n)}(x)=e^x, \quad \text{oraz } f^{(n)}(0)=1,$$

więc rozwinięcie w szereg Maclaurina jest postaci
$e^x = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\cdot+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n+\cdots$
oraz w przedziale $(-\delta,\delta)$ otrzymuje się, że $|e^x|<e^\delta=M$.
Ostatecznie

$$e^x = 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdot+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

c) Analogicznie

$$\begin{array}{ll}
f(x)=\sin x & f(\pi/2)=1\\
f'(x)=\cos x & f'(\pi/2)=0\\
f''(x)=-\sin x & f''(\pi/2)=-1\\
f'''(x)=-\cos x & f'''(\pi/2)=0\\
f^{(4)}(x)=\sin x & f^{(4)}(\pi/2)=1\\
f^{(5)}(x)=\cos x & f^{(5)}(\pi/2)=0\\
f^{(6)}(x)=-\sin x & f^{(6)}(\pi/2)=-1\\
f^{(7)}(x)=-\cos x & f^{(7)}(\pi/2)=0\\
f^{(8)}(x)=\sin x & f^{(8)}(\pi/2)=1\\
\vdots & \text{dla } k\in N\\
f^{(4k)}(x)=\sin x & f^{(4k)}(\pi/2)=1\\
f^{(4k+1)}(x)=\cos x & f^{(4k+1)}(\pi/2)=0\\
f^{(4k+2)}(x)=-\sin x & f^{(4k+2)}(\pi/2)=-1\\
f^{(4k+3)}(x)=-\cos x & f^{(4k+3)}(\pi/2)=0
\end{array}$$

funkcja sinus jest ograniczona, więc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n=0$.
Rozwinięcie $f(x)=\sin x$ wokół $a=\frac{\pi}{2}$ jest postaci

$$\sin x = 1-\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}+\cdots=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)!}.$$

d) Analogicznie

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \ln x, & f(1) = 0, \\
f'(x) = \frac{1}{x}, & f'(1) = 1, \\
f''(x) = \frac{-1}{x^2}, & f''(1) = -1, \\
f'''(x) = \frac{2}{x^3}, & f'''(1) = 2, \\
f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}, & f^{(4)}(1) = -6, \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}, & f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!
\end{array}$$

oraz $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(c_n)}{n!}(x-1)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cancel{(n-1)!}}{\cancel{n!}\,n}(x-1)^n =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \boxed{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}^{\nearrow 0} \cdot \boxed{(x-1)^n}^{\nearrow 0}$ bo x jest z sąsiedztwa 1 $= 0$. Czyli rozwinięcie $f(x) = \ln x$ wokół $a = 1$ jest postaci

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n} + \cdots =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Przykład 7.8. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0

a) $f(x) = x^3+4x^2+5x+1, \qquad x_0 = 2,$ b) $f(x) = e^{x+2}, \qquad x_0 = -2.$

Jeżeli funkcja $y = f(x)$ określona jest na otoczeniu punktu x_0 i ma pochodną w x_0, to wzór na styczną do wykresu $y = f(x)$ w punkcie x_0 dany jest wzorem

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Rozwiązanie.

a) Pochodna i jej wartość w $x_0 = 2$ dla funkcji $f(x) = x^3+4x^2+5x+1$:

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 5, \quad f'(2) = 33$$

oraz $f(2) = 35$, więc styczna w $x_0 = 2$ jest postaci

$$y = 35 + 33(x-2), \text{ czyli } y = 33x - 31.$$

b) Pochodna i jej wartość w $x_0 = -2$ dla funkcji $f(x) = e^{x+2}$

$$f'(x) = e^{x+2}, \quad f'(-2) = 1$$

oraz $f(-2) = 1$, więc

$$y = 1 + 1 \cdot (x+2), \text{ czyli } y = x + 3.$$

Przykład 7.9. Wykorzystując różniczkę funkcji, obliczyć wartości przybliżone wyrażeń i oszacować błąd bezwzględny
a) $\sqrt{80}$, b) $\cos(0,02)$.

Wzór na obliczanie przybliżonej wartości funkcji
Jeżeli $y = f(x)$ ma pochodną właściwą w x_0, to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

a błąd bezwzględny

$$\Delta y \approx |f'(x_0)||\Delta x|.$$

Rozwiązanie.

a) Należy znaleźć funkcję, która pozwoli skorzystać z powyższych wzorów. W rozpatrywanym przykładzie można przyjąć $f(x) = \sqrt{x}$ oraz za x_0 przyjąć punkt, który jest w niewielkiej odległości od x_0 i wartość funkcji łatwo obliczyć, więc przyjmijmy za $x_0 = 81$, wtedy $f(81) = \sqrt{81} = 9$ oraz różnica pomiędzy x_0 i szukanym to $\Delta x = -1$. Ponadto $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, wtedy $f'(81) = \frac{1}{2\sqrt{81}} = \frac{1}{18}$, więc

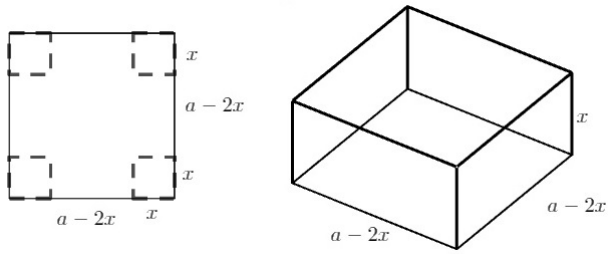
$$\begin{aligned} &f(81-1) = f(80) = \sqrt{80} \approx f(81) + f'(81)\Delta x = \\ &= 9 + \tfrac{1}{18} \cdot (-1) = 9 - \tfrac{1}{18} = 8\tfrac{17}{18} = 8,9(4), \\ &\Delta y \approx |f'(81)||\Delta x| = \tfrac{1}{18} \cdot |(-1)| = \tfrac{1}{18} = 0{,}0(5). \end{aligned}$$

b) Dla $\cos(0{,}02)$ funkcja $f(x) = \cos x$ oraz dla $x_0 = 0$ mamy $f(0) = 1$ i $\Delta x = 0{,}02$, wtedy $f'(x) = -\sin x$ i $f'(0) = 0$, czyli

$$\cos(0{,}02) = \cos(0 + 0{,}02) \approx 1 + 0 \cdot 0{,}02 = 1 \text{ oraz } \Delta y \approx 0 \cdot 0{,}02 = 0.$$

Przykład 7.10. [4] Z rogów arkusza blachy o boku $a = 30$ cm usunięto cztery równe kwadraty, z pozostałej części utworzono otwarte pudełko. Jaką wysokość powinno mieć to pudełko, żeby jego objętość była maksymalna?

Rozwiązanie.



Z rysunku widać, że aby obliczyć x, należy znaleźć ekstremum globalne funkcji

$$V(x) = x(a-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x,$$

gdzie $0 < x < 15 = a/2$. Punktem podejrzanym o ekstremum jest rozwiązanie równania $V'(x) = 0$, gdzie $V'(x) = 12x^2 - 240x + 900$

$$12x^2 - 240x + 900 = 0$$
$$12(x-5)(x-15) = 0.$$

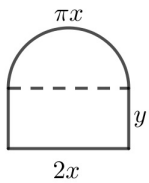
Miejscami podejrzanymi o ekstrema są $x_1 = 5$ i $x_2 = 15 \notin (0, 15)$. Należy sprawdzić, czy w $x_1 = 5$ jest maksimum.

$$V''(x) = 24x - 240, \quad V''(5) = -120 < 0,$$

więc rzeczywiście jest to maksimum. Czyli wysokość otrzymanego pudełka powinna wynosić 5 cm.

Przykład 7.11. [4] Kawałek drutu o długości 1 m wygięto, tworząc figurę wypukłą w kształcie prostokąta z półokręgiem zamiast jednego boku. Znaleźć wymiary, przy których figura ta zamyka największą z możliwych powierzchni.

Rozwiązanie.



Z rysunku widać, że korzystając ze wzoru na obwód, otrzymuje się

$$Ob = 2y + 2x + \pi x = 1, \text{ czyli } y = \frac{1}{2} - x - \frac{\pi x}{2},$$

gdzie $x, y > 0$, czyli

$$\frac{1}{2} - x - \frac{\pi x}{2} > 0 \quad \text{daje } x \in \left(0, \frac{1}{2+\pi}\right).$$

Ze wzoru na pole otrzymuje się funkcję

$$P(x) = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 = x + \left(-2 - \frac{\pi}{2}\right) x^2.$$

Należy znaleźć maksimum tej funkcji, czyli

$$\begin{aligned} P'(x) &= 1 + (-4 - \pi)x, \\ P'(x) &= 0 \end{aligned}$$

miejsce podejrzane o ekstremum to

$$x = \frac{1}{4+\pi} \in \left(0, \frac{1}{2+\pi}\right),$$
$$P''(x) = -4 - \pi, \quad P''\left(\frac{1}{4+\pi}\right) = -4 - \pi < 0,$$

więc dla $x = \frac{1}{4+\pi}$ m pole jest maksymalne wtedy, gdy $2x = \frac{2}{4+\pi} \approx 0{,}28$ m $y = \frac{1}{4+\pi} \approx 0{,}14$ m.

7.2. Zadania

Zadanie 7.1. Korzystając z reguły de L'Hospitala, obliczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-12+3x^2}{-4+x^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{12+12x+3x^2}{-4+x^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{4x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3e^x-3}{x^2-4x}$,

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3+3x+2)e^x$,

f) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{(x-2)(x+3)}$.

Zadanie 7.2. Zbadać monotoniczność funkcji

a) $f(x) = -13 + 9x - 6x^2 + x^3$,

b) $f(x) = 26 - 4x^3 - 6x^2 + 9x$,

c) $f(x) = \frac{x^3-x^6}{\ln x}$,

d) $f(x) = (x^4 + x^5)e^x$.

Zadanie 7.3. Zbadać ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 9$,

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 9$,

c) $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{e^{x+2}}$,

d) $f(x) = (x^3 - 3x^2)e^{x+2}$,

e) $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$,

f) $f(x) = (x^5 - 5x^4)e^{x+2}$.

Zadanie 7.4. Zbadać wypukłość/wklęsłość funkcji

a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 9$,
b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 9$,
c) $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{e^{x+2}}$,
d) $f(x) = (-x^2 + 4x - 1)e^x$,
e) $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^{x+2}$,
f) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$.

Zadanie 7.5. Znaleźć punkty przegięcia funkcji

a) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 9$,
b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x + 9$,
c) $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{e^{x+2}}$,
d) $f(x) = (-x^2 + 4x - 1)e^x$,
e) $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^{x+2}$,
f) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 5)$.

Zadanie 7.6. Zbadać przebieg zmienności funkcji i naszkicować wykres

a) $f(x) = 9x - 6x^2 + x^3$,
b) $f(x) = \frac{e^x}{24}(x - 6)$,
c) $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^{x+2}$,
d) $f(x) = \frac{x^2+5x+3}{x-1}$.

Zadanie 7.7. Rozwinąć funkcję $y = f(x)$ w szereg Taylora wokół a

a) $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$,
b) $f(x) = -\ln x$, $a = 1$.

Zadanie 7.8. Zapisać wzór Taylora dla $n = 2$ i przyjąć, że $f'(x_0) = 0$. Od czego zależy różnica $f(x) - f(x_0)$? Zapisać wzór Taylora dla

a) $f(x) = e^x$, dla $n = 5$,
b) $f(x) = \sin x$, dla $n = 4$,
c) $f(x) = \cos x$ dla $n = 3$.

Zadanie 7.9. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie x_0

a) $f(x) = 9x - 6x^2 + x^3$, $x_0 = 2$,
b) $f(x) = \frac{e^x}{24}(x - 6)$, $x_0 = 3$,
c) $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^{x+2}$, $x_0 = -2$,
d) $f(x) = \frac{x^2+5x+3}{x-1}$, $x_0 = 0$.

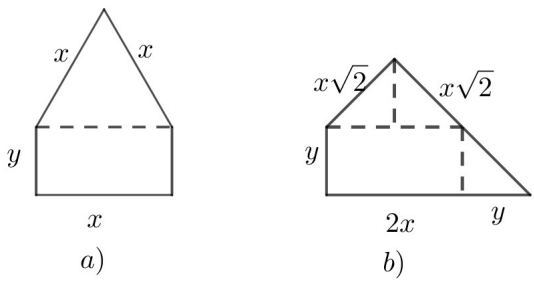
Zadanie 7.10. Wykorzystując różniczkę funkcji, obliczyć wartości przybliżone wyrażeń

a) $\ln 0{,}99$, b) $\sin 44°$, c) $\sqrt{4{,}002}$.

Zadanie 7.11. [2] Do pomiaru wysokości budynku zastosowano teodolit, który mierzy kąt z dokładnością 0,1°. Teodolit ustawiono w odległości 100 m od podstawy budynku i wycelowano w brzeg wierzchołka. Kąt, jaki tworzy oś teodolitu z poziomem, wynosi 35,7°. Z jaką dokładnością można obliczyć wysokość budynku?

Zadanie 7.12. Kawałek drutu o długości 1 m wygięto, tworząc figurę wklęsłą w kształcie prostokąta z półokręgiem zamiast jednego boku. Znaleźć wymiary, przy których figura ta zamyka największą z możliwych powierzchni.

Zadanie 7.13. Kawałek drutu o długości 1 m wygięto, tworząc figurę jak na rysunku. Znaleźć wymiary, przy których figura ta zamyka największą z możliwych powierzchni.



Zadanie 7.14. [4]
Materiał potrzebny do wyłożenia rowu nawadniającego jest dostępny w szerokościach 3 m lub 6 m. Inżynier, który projektuje rów, chce, aby pole przekroju rowu było maksymalne oraz aby szerszy materiał był użyty na dnie rowu, a węższy na ścianki (przekrój w kształcie trapezu). Jaka powinna być głębokość tego rowu?

Zadanie 7.15. [4]
Materiał potrzebny do wyłożenia rowu nawadniającego jest dostępny w szerokościach 3 m lub 6 m. Inżynier, który projektuje rów, chce, aby pole przekroju rowu było maksymalne oraz aby węższy materiał był użyty na dnie rowu, a szerszy na ścianki (przekrój w kształcie trapezu). Jaka powinna być głębokość tego rowu?

Zadanie 7.16. [4]
Drewniane pudełko bez pokrywki ma być zrobione tak, że boki jego podstaw są w stosunku 3 : 5, a pojemność ma wynosić 7500 cm^3. Znaleźć wymiary pudełka, które minimalizują powierzchnię użytego drewna.

Zadanie 7.17. [4]
Sztywność belki o przekroju prostokątnym o wymiarach wysokość – h cm, szerokość – k cm dana jest wzorem Akh^3, gdzie A – pewna stała. Jakie wymiary ma belka, którą można wyciąć z cylindrycznej kłody o średnicy 30 cm?

Zadanie 7.18. [4]
Dwa korytarze, jeden o szerokości 1,5 m, drugi o szerokości 2 m, łączą się pod kątem prostym. Jaką największą długość może mieć pręt, który można przenieść poziomo przez narożnik? (Wskazówka: wykorzystać kąt jako zmienną) Jeśli oba korytarze mają wysokość 3 m, to jaką największą długość może mieć pręt, który można przenieść przez ten narożnik w dowolnej pozycji?

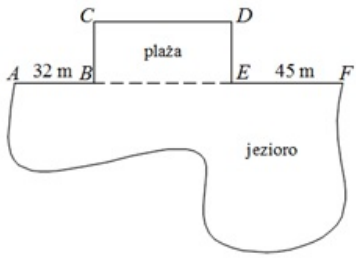
Zadanie 7.19. Zbadać, który z trójkątów prostokątnych o danej przeciwprostokątnej ma największe pole.

Zadanie 7.20. Wyznaczyć stosunek wysokości do średnicy najbardziej ekonomicznej puszki do konserw (zbiornika na ciecz) w postaci walca, tzn. takiej (takiego), która(y) przy danej z góry objętości V ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 7.21. Jaki stosunek długości boków powinna mieć prostokątna działka o danym polu powierzchni, by na ogrodzenie zużyć minimalną ilość (w rozumieniu: długość) siatki.

Zadanie 7.22. Odkryty basen pływacki ma mieć kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratowej. Zaprojektować go tak, aby przy danej łącznej powierzchni dna i ścian bocznych miał on największą objętość (inwestor ma 1000 m^2 płytek ceramicznych).

Zadanie 7.23. Jest koncepcja ogrodzenia fragmentu linii brzegowej i plaży w kształcie prostokąta przy prostoliniowym fragmencie brzegu jeziora siatką o długości 177 m. Planowana plaża ma być w kształcie prostokąta, schemat ogrodzenia w postaci łamanej (łańcucha odcinków). Długość siatki: $AB + BC + CD + DE + EF = 177$ m. Zaprojektować ogrodzenie tak, by obszar plaży ogrodzonej był największy, [10].

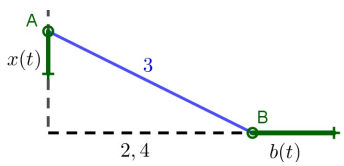


Zadanie 7.24. Niech $P(x)$ będzie polem kwadratu o boku x i niech $L(x)$ będzie obwodem kwadratu. Korzystając ze znanych wzorów na $P(x)$ i $L(x)$, pokazać, że $P'(x) = L(x)/2$. Podać interpretację geometryczną wyjaśniającą, dlaczego $\Delta P \approx \frac{L(x)}{2}\Delta x$ dla małego Δx.

Zadanie 7.25. Niech $P(r)$ będzie obszarem zawartym w okręgu o promieniu r, a $L(r)$ będzie długością okręgu. Pokaż, że $P'(r) = L(r)$ (użyć znanych wzorów z geometrii na pole i obwód koła).

Zadanie 7.26. Niech $V(r)$ będzie objętością kuli o promieniu r, a $P(r)$ będzie jej polem powierzchni. Pokaż, że $V'(r) = S(r)$ (użyć wzorów na objętość i pole powierzchni kuli).

Zadanie 7.27. Słup o długości 3 m ma jeden koniec na podłodze B, a drugi oparty o ścianę A. Jeśli dolna część słupa znajduje się 2,4 m od ściany i jeśli odsuwa się od ściany z prędkością 2 m/s, to z jaką prędkością wierzchołek A opada? [10]

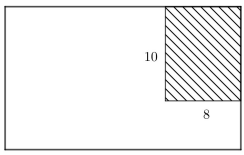


Zadanie 7.28. Słup o długości 3 m opiera się o pionową ścianę. Jeśli dolna część słupa odsuwa się od ściany z prędkością 2 m/s, jak szybko zmienia się kąt między wierzchołkiem słupa a ścianą, gdy kąt wynosi $\pi/4$ rad? [10]

Zadanie 7.29. Słup o długości 13 m ma jeden koniec na podłodze B, a drugi oparty o ścianę A. Jeśli dolna część słupa znajduje się 5 m od ściany i jeśli odsuwa się od ściany z prędkością 2 m/s, to z jaką prędkością wierzchołek A opada? [10]

Zadanie 7.30. Kanał o szerokości 1 m, którym spławiane są drewniane kloce (dłużyce), łączy obszar leśny z rzeką o szerokości 8 m i wpada pod kątem prostym. Jakiej maksymalnej długości dłużyce można spławiać tym systemem kanał-rzeka?

Zadanie 7.31. Dom ma wymiary 10×8 m w rzucie prostokątnym. Przy domu projektowany jest ogródek. Właściciel domu dysponuje siatką o długości 46 m. Część ogrodzenia stanowią ściany zewnętrzne domu. Jakie wymiary ogródka powinien przyjąć projektant, by ogrodzona część miała największą powierzchnię?



7.3. Odpowiedzi

Zad. 7.1 a) 3, b) 0, c) $\frac{1}{4}$, d) $-\frac{3}{4}$, e) 0, f) $\frac{e^2}{5}$.
Zad. 7.2

a) $f \nearrow$ dla $x \in (-\infty, 1), (3, \infty)$,
$f \searrow$ dla $x \in (1, 3)$,
b) $f \nearrow$ dla $x \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$,
$f \searrow$ dla $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, \infty)$,
c) $f \searrow$ dla $x \in (0, 1), (1, \infty)$,
d) $f \nearrow$ dla $x \in (-3-\sqrt{5}, -3+\sqrt{5}), (0, \infty)$,
$f \searrow$ dla $x \in (-\infty, -3-\sqrt{5}), (-3+\sqrt{5}, 0)$.

Zad. 7.3

a) $\max = \left(\frac{1}{3}, \frac{85}{9}\right)$,
$\min = (1, 9)$,
b) $\max = \left(-1-\sqrt{3}, 17+6\sqrt{3}\right)$,
$\min = \left(-1+\sqrt{3}, 17-6\sqrt{3}\right)$,
c) $\max = (0, 0)$, $\max = \left(4, \frac{32}{e^6}\right)$,
$\min = \left(1, -\frac{1}{e^3}\right)$,
d) $\max = (0, 0)$,
$\min = \left(-\sqrt{6}, -6(3+\sqrt{6})e^{2-\sqrt{6}}\right)$,
$\min = \left(\sqrt{6}, 6(-3+\sqrt{6})e^{2+\sqrt{6}}\right)$,
e) $\min = \left(-\frac{1}{2}, -\ln\frac{4}{3}\right)$,
f) $\min = \left(-2\sqrt{5}, \left(-2000-800\sqrt{5}\right)e^{-2\sqrt{5}}\right)$,
$\min = \left(2\sqrt{5}, \left(-2000+800\sqrt{5}\right)e^{2\sqrt{5}}\right)$,
$\max = (0, 0)$.

Zad. 7.4
a) wypukła: $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, wklęsła: $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$,
b) wypukła: $(-1, \infty)$, wklęsła: $(-\infty, -1)$,
c) wypukła: $(3-\sqrt{7}, 2)$, $(3+\sqrt{7}, \infty)$,
wklęsła: $(-\infty, 3-\sqrt{7})$, $(2, 3+\sqrt{7})$,
d) wypukła: $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$,
wklęsła: $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(\sqrt{5}, \infty)$,
e) wypukła: $(-3-\sqrt{7}, -2)$, $(-3+\sqrt{7}, \infty)$,
wklęsła: $(-\infty, -3-\sqrt{7})$, $(-2, -3+\sqrt{7})$,
f) wypukła: $(-3, 1)$,
wklęsła: $(-\infty, -3)$, $(1, \infty)$.

Zad. 7.5

a) p.p.: $\left(\frac{2}{3}, \frac{83}{9}\right)$,

b) p.p.: $(-1, 17)$,

c) p.p.: $(2, 0)$, $\left(3-\sqrt{7}, \left(58-22\sqrt{7}\right)e^{-5+\sqrt{7}}\right)$, $\left(3+\sqrt{7}, \left(58+22\sqrt{7}\right)e^{-5-\sqrt{7}}\right)$,

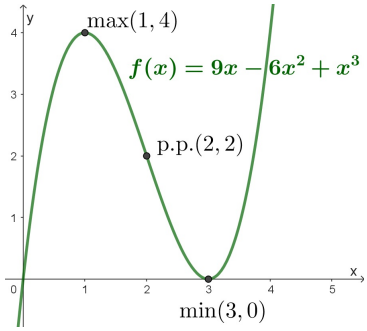
d) p.p.: $\left(-\sqrt{5}, \left(-6-4\sqrt{5}\right)e^{-\sqrt{5}}\right)$, $\left(\sqrt{5}, \left(-6+4\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}}\right)$,

e) p.p.: $(-2, 0)$, $\left(-3-\sqrt{7}, -2\left(29+11\sqrt{7}\right)e^{-1-\sqrt{7}}\right)$, $\left(-3+\sqrt{7}, \left(-58+22\sqrt{7}\right)e^{-1+\sqrt{7}}\right)$,

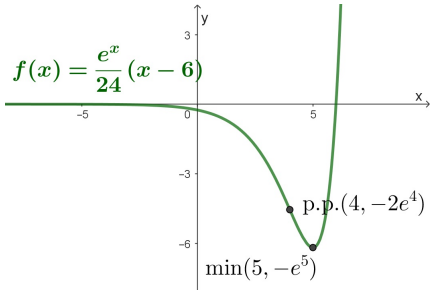
f) p.p.: $(-3, \ln 8)$, $(1, \ln 8)$.

Zad. 7.6

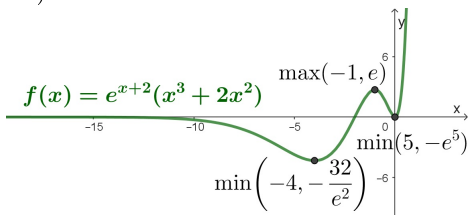
a)



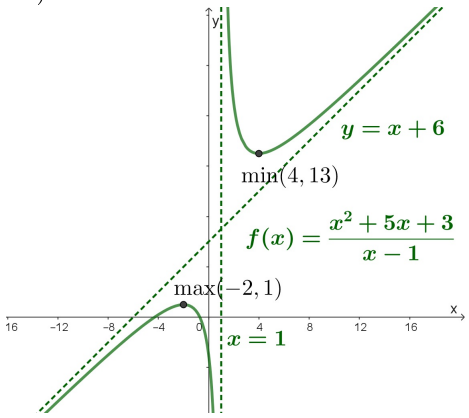
b)



c)



d)



Zad. 7.7 a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$, b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(x-1)^k}{k}$.

Zad. 7.8 $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_3$

a) $e^x \approx e^{x_0} + e^{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}e^{x_0}(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}e^{x_0}(x-x_0)^3 + \frac{1}{24}e^{x_0}(x-x_0)^4 + \frac{1}{120}e^{x_0}(x-x_0)^5 + R_6$,

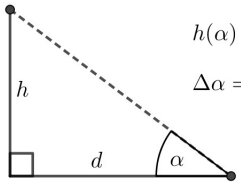
b) $\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0(x-x_0) - \frac{1}{2}\sin x_0(x-x_0)^2 - \frac{1}{6}\cos x_0(x-x_0)^3 + \frac{1}{24}\sin x_0(x-x_0)^4 + R_5$,

c) $\cos x \approx \cos x_0 - \sin x_0(x-x_0) - \frac{1}{2}\cos x_0(x-x_0)^2 + \frac{1}{6}\sin x_0(x-x_0)^3 + R_4$.

Zad. 7.9 a) $y = -3x + 8$, b) $y = -\frac{e^3}{12}x + \frac{e^3}{8}$, c) $y = 4x + 8$, d) $y = -8x - 3$.

Zad. 7.10 a) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}01$, $f(1) = 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) = 1$, więc $\ln 0{,}99 \approx -0{,}01$,
b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$, $\Delta x = -1^c irc = -\frac{\pi}{180} \approx -0{,}017$, $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, $f'(x) = \cos x$, $f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$, więc $\sin 44^\circ \approx 0{,}695$,
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}002$, $f(4) = 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(2) = 0{,}25$, więc $\sqrt{4{,}002} \approx 2{,}0005$.

Zad. 7.11



$$h(\alpha) = d \cdot \operatorname{tg}\alpha, \quad h'(\alpha) = \frac{d}{\cos^2\alpha}$$

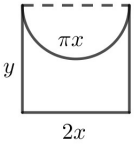
$$\Delta\alpha = 0,1^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0,00175,$$

$$\alpha = 35,7^\circ,$$

$$\Delta h \approx |h'(\alpha)| \cdot |\Delta\alpha| =$$

$$= \frac{100}{\cos^2(35,7^\circ)} \cdot 0,00175 = \frac{100}{0,8131^2} \cdot 0,00175 \approx 0,26\,\mathrm{m}.$$

Zad. 7.12



$$y = \frac{1}{2} + \left(-1 - \frac{\pi}{2}\right)x,$$

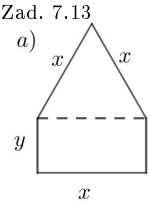
$$P(x) = x + \left(-2 - \frac{3\pi}{2}\right)x^2,$$

$$2x = \frac{2}{4+3\pi}\ \mathrm{m}\ ,$$

$$y = \frac{1+\pi}{4+3\pi}\ \mathrm{m}\ .$$

Zad. 7.13

a)

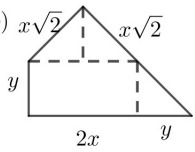


$$P(x) = x + \left(-2 - \frac{3\pi}{2}\right)x^2,$$

$$2x = \frac{2}{4+3\pi}\ \mathrm{m}\ ,$$

$$y = \frac{5-\sqrt{3}}{22}\ \mathrm{m}\ .$$

b)

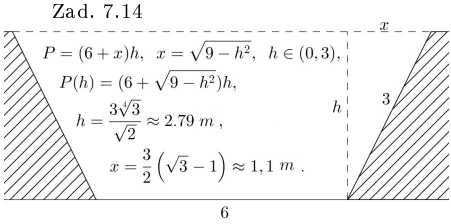


$$P(x) = \frac{1 + 4x - 8(1+\sqrt{2})x^2}{12 + 8\sqrt{2}}\ ,$$

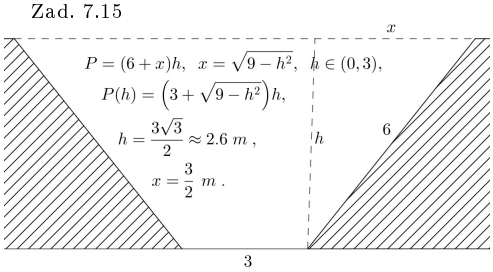
$$x = \frac{1}{4+4\sqrt{2}}\ ,$$

$$y = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\ \mathrm{m}\ .$$

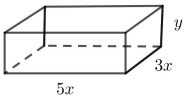
Zad. 7.14



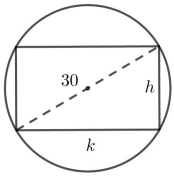
Zad. 7.15



Zad. 7.16 $y = \frac{500}{x^2}$, $P = 15x^2 + 16xy$, wymiary pudełka: $3x = 2\sqrt[3]{30^2} \approx 19{,}31$ cm, $5x = \frac{10\sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{3}} \approx 32{,}18$ cm, $y = \frac{5\sqrt[3]{15^2}}{2\sqrt[3]{2}} \approx 12{,}07$ cm.



Zad. 7.17



$k = \sqrt{30^2 - h^2}, \quad h \in (0, 30)$

$H = Akh^3,$

$H(h) = Ah^3\sqrt{30^2 - h^2},$

$h = 15\sqrt{3} \approx 25,98\,\text{cm},$

$k = 15\,\text{cm}$

Zad. 7.18

$l = l_1 + l_2 = \sqrt{(1.5 + x)^2 + (2 + y)^2},$

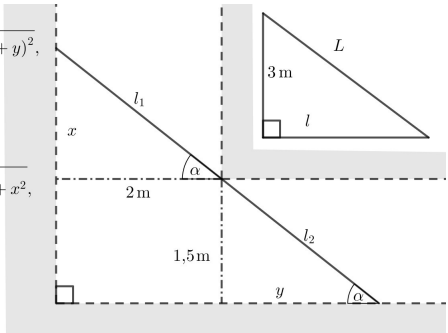
$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{1,5}{l_2} = \frac{x}{l_1}, \\ \cos\alpha &= \frac{y}{l_2} = \frac{2}{l_1}, \end{aligned}\right\} y = \frac{3}{x},$$

$l(x) = \sqrt{6.25 + \frac{9}{x^2} + \frac{12}{x} + 3x + x^2},$

$x = \sqrt[3]{6}, \quad y = \frac{3}{\sqrt[3]{6}},$

$l \approx 4,93283\,\text{m},$

$L = \sqrt{9 + l^2} \approx 5,77346\,\text{m}.$



Zad. 7.19

$c^2 = a^2 + b^2 \to b^2 = c^2 - a^2$

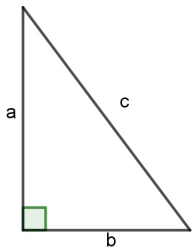
$P = \frac{ab}{2}$

$P(a) = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}$

$a \in (0, c)$

$P'(a) = \frac{c^2 - 2a^2}{2\sqrt{c^2 - a^2}}$

$P'(a) = 0$ dla $a = \frac{c}{\sqrt{2}}$



$P''(a) = \frac{3c^2a - 2a^3}{2\sqrt{c^2 - a^2}(-c^2 + a^2)}$ $P''(\frac{c}{\sqrt{2}}) = -2 < 0$

więc maksimum funkcja osiąga dla trójkąta o wymiarach:

$a = b = \frac{c}{\sqrt{2}}.$

Zad. 7.20

$V = \frac{\pi d^2 h}{4} \to h = \frac{4V}{\pi d^2}$

$P = \frac{\pi d^2}{2} + \pi d h$

$P(d) = \frac{d^2\pi}{2} + \frac{4V}{d}, \quad d > 0$

$P'(d) = d\pi - \frac{4V}{d^2}$

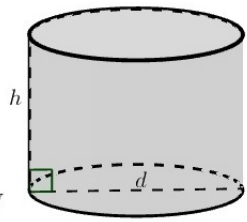
$P'(d) = 0$ dla $d = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$

$P''(d) = \pi + \frac{8V}{d^3}$

$P''\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right) = 3\pi > 0,$

więc minimum funkcja osiąga, gdy

$d = h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$



Zad. 7.21

$P = xy \to y = \frac{P}{x}$, $x, y > 0 \quad L = 2x + 2y = 2x + 2P\frac{1}{x}$, $L'(x) = 2 - 2P\frac{1}{x^2}$,
$L'(x) = 0$ dla $x = \sqrt{P}$, $L''(\sqrt{P}) = 2 + \frac{4}{\sqrt{P}} > 0$, więc funkcja osiąga minimum dla $x = y = \sqrt{P}$.

Zad. 7.22

$V = a^2 b$, $P = 1000 = a^2 + 4ab \to b = \frac{1000 - a^2}{4a}$, i $V(a) = \frac{a}{4}\left(1000 - a^2\right)$, $a \in (0, 10\sqrt{10})$, czyli
$V'(a) = 250 - \frac{3a^2}{4}$,
$V'(a) = 0$ dla $a = 10\sqrt{\frac{10}{3}}$, $V''(a) = -\frac{3a}{2}$ oraz $V''\left(10\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = -5\sqrt{30} < 0$, więc funkcja osiąga maksimum dla $a = 10\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 18{,}26$ m, $b = 5\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 9{,}13$ m.

Zad. 7.23

$P = ab$, $Ob = 177 = 2a + b \to b = 177 - 2a$, $a \in \langle 0; 88{,}5\rangle$, czyli $P(a) = a(177 - 2a)$, $P'(a) = 177 - 4a$, $P'(a) = 0$ dla $a = 44{,}25$; $P''(a) = -4$ oraz $P''(44{,}25) = -4 < 0$, więc funkcja osiąga maksimum dla $a = 44{,}25$ m oraz $b = 88{,}5$ m

Zad. 7.24

$P(x) = x^2$, więc $P'(x) = 2x$ oraz $L(x) = 4x \to 2x = \frac{L(x)}{2}$, czyli $P'(x) = \frac{L(x)}{2}$.

Zad. 7.25

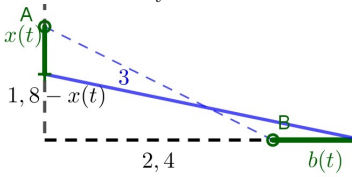
$P(r) = \pi r^2$, czyli $P'(r) = 2\pi r = L(r)$.

Zad. 7.26

$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, więc $V'(r) = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\pi r^2 = 4\pi r^2 = S(r)$.

Zad. 7.27

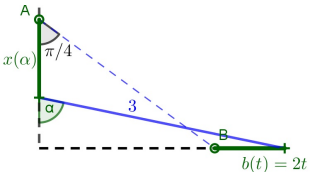
$v_B = 2$ m/s $= \frac{b}{t} \to b = 2t$,



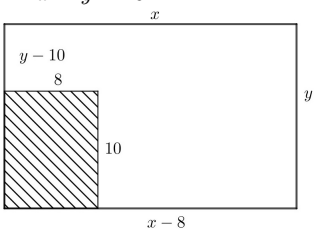
$(1,8 - x(t))^2 + (2,4 + 2t)^2 = 3^2 \to x(t) = 1,8 - \sqrt{9 - (2,4 + 2t)^2}$, więc $v_A(t) = x'(t) = \frac{2(2,4+2t)}{\sqrt{9-(2,4+2t)^2}}$,
$t \in \langle 0, 3/10\rangle$.

Zad. 7.28

$v_b = 2$ m/s $= \frac{b}{t} \to b = 2t$ oraz $\sin\alpha = \frac{3}{3/\sqrt{2}+2t} \to 2t = \frac{3}{\sin\alpha} - \frac{3}{\sqrt{2}}$,
z tw.Pitag. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}-x(t)}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}+2t}\right)^2 = 3^2$ otrzymuje się $x(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}}$, więc
$v(\alpha) = x'(\alpha) = \frac{3\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2\alpha}}\sin^3\alpha}$.



Zad. 7.29
$v_B = 2$ m/s $= \frac{b}{t} \to b = 2t$,
$(12 - x(t))^2 + (5 + 2t)^2 = 13^2 \to x(t) = 2\left(6 - \sqrt{36 - 5t - t^2}\right)$, więc $v_A(t) = x'(t) = -\frac{-5-2t}{\sqrt{36-5t-t^2}}$.
Zad. 7.30 Analogicznie do 7.18
Zad. 7.31
$L = 46 = x + (x - 8) + y + (y - 10) = 2x + 2y - 18 \to y = 32 - x$,
pole $P = xy - 80$, więc $P(x) = -x^2 + 32x - 80$; $x \in (0, 32)$ oraz $P'(x) = 32 - 2x$. Miejsce podejrzane o ekstremum ($P'(x) = 0$), to $x = 16$, $P''(x) = -2$, $P''(16) = -2 < 0$, czyli funkcja osiąga maksimum dla $x = y = 16$.



Rozdział 8

Całki nieoznaczone

Zadania dotyczące całek nieoznaczonych: całkowania funkcji elementarnych, całkowania przez części, podstawienie.

8.1. Przykłady

Przykład 8.1. Obliczyć całki nieoznaczone

a) $\int x^4 dx, \qquad \int \sqrt[5]{x^4} dx, \qquad \int \frac{2}{x^5} dx, \qquad \int \frac{2}{x} dx,$

b) $\int \left(4x^4 - 3x^2 + 2x - 5 + \frac{7}{x}\right) dx,$

c) $\int \left(\frac{5}{x^4} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[7]{x^4}\right) dx,$

d) $\int (4e^x + 5\sin x - 6\cos x - \sin 2)\, dx,$

e) $\int \left(3\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + e^2 + 5^x\right) dx,$

f) $\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2}{x^2+9}\right) dx,$

g) $\int \left(\frac{3}{\sin^2 x} - \frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\right) dx,$

h) $\int \left(\frac{5}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\right) dx,$

i) $\int \frac{x^3+27}{x+3} dx.$

Całki pewnych funkcji elementarnych

$$\int 0dx = c,$$

$$\int 1dx = \int dx = x + c,$$

$$\int adx = ax + c,$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + c,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + c,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c, \ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, \ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c,$$

gdzie $c \in R$.

Uwaga.

- $\int \Big(a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)\Big)dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx,$
- Całkując sumę/różnicę funkcji, stałą c dopisuje się tylko raz.

Rozwiązanie.

a) $$\int x^4 dx = \frac{1}{4+1}x^{4+1} + c = \tfrac{1}{5}x^5 + c,$$

$$\int \sqrt[5]{x^4}dx = \int x^{\frac{4}{5}}dx = \frac{1}{\frac{4}{5}+1}x^{\frac{4}{5}+1} = \tfrac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + c,$$

$$\int \frac{2}{x^5}dx = 2\int x^{-5}dx = 2 \cdot \frac{1}{-5+1}x^{-5+1} + c = \frac{\cancel{2}}{-\cancel{4}_{2}}x^{-4} + c = \frac{-1}{2x^4} + c,$$

$$\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{1}{x}dx = 2\ln|x| + c = 2\ln|x| + c,$$

b) $\displaystyle\int\left(4x^4-3x^2+2x-5+\frac{7}{x}\right)dx=$

$\displaystyle=4\int x^4dx-3\int x^2dx+2\int xdx-\int 5dx+7\int\frac{1}{x}dx=$

$=4\cdot\frac{1}{4+1}x^{4+1}-3\cdot\frac{1}{2+1}x^{2+1}+2\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1}-5x+7\ln|x|+c=$

$=4\cdot\frac{1}{5}x^5-\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^3+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}x^2-5x+7\ln|x|+c=$

$=\frac{4}{5}x^5-x^3+x^2-5x+7\ln|x|+c,$

c) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{x^4}+\frac{3}{\sqrt{x}}+2\sqrt[7]{x^4}\right)dx=5\int x^{-4}dx+3\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int x^{\frac{4}{7}}dx=$

$=5\cdot\frac{1}{-4+1}x^{-4+1}+3\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+2\cdot\frac{1}{\frac{4}{7}+1}x^{\frac{4}{7}+1}+c=$

$=-\frac{5}{3}x^{-3}+\frac{3}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{\frac{11}{7}}x^{\frac{11}{7}}+c=-\frac{5}{3x^3}+6\sqrt{x}+\frac{14}{11}x\sqrt[7]{x^4}+c,$

d) $\displaystyle\int(4e^x+5\sin x-6\cos x-\sin 2)\,dx=$

$\displaystyle=4\int e^xdx+5\int\sin xdx-6\int\cos xdx-\sin 2\int 1dx=$

$=4e^x+5(-\cos x)-6\cdot\sin x-(\sin 2)\cdot x+c=$

$=4e^x-5\cos x-6\sin x-x\sin 2+c,$

e) $\displaystyle\int\left(3\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x+e^2+5^x\right)dx=$

$\displaystyle=3\int\operatorname{tg}xdx-2\int\operatorname{ctg}xdx+e^2\int dx+\int 5^xdx=$

$=3\cdot(-\ln|\cos x|)-2\ln|\sin x|+e^2\cdot x+\frac{5^x}{\ln 5}+c=$

$=-3\ln|\cos x|-2\ln|\sin x|+xe^2+\frac{5^x}{\ln 5}+c,$

f) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{\cos^2x}+\frac{2}{x^2+9}\right)dx=2\int\frac{dx}{\cos^2x}+2\int\frac{dx}{x^2+3^2}=$

$=2\operatorname{tg}x+2\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c=2\operatorname{tg}x+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+c,$

g) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{\sin^2x}-\frac{2}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx=3\int\frac{dx}{\sin^2x}-2\int\frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}=$

$=3\cdot(-\operatorname{ctg}x)-2\cdot\arcsin\frac{x}{3}+c=-3\operatorname{ctg}x-2\arcsin\frac{x}{3}+c,$

h) $\displaystyle\int\left(\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx=5\int\frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}}+2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1^2}}=$

$$= 5\cdot\arcsin\tfrac{x}{2}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c = 5\arcsin\tfrac{x}{2}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c,$$

i) $$\int\frac{x^3+27}{x+3}dx = \int\frac{\cancel{(x+3)}(x^2-3x+9)}{\cancel{x+3}}dx = \int(x^2-3x+9)dx =$$
$$= \int x^2dx - 3\int xdx + \int 9dx = \tfrac{1}{3}x^3 - 3\cdot\tfrac{1}{2}x^2 + 9x + c = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + 9x + c.$$

Przykład 8.2. Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając ze wzoru na całkowanie przez części

a) $\int xe^x dx$,

b) $\int x^3\ln|x|dx$,

c) $\int \ln|x|dx$,

d) $\int(10x+5)\sin x dx$,

e) $\int(5x+10)e^x dx$,

f) $\int e^x\cos x dx$.

Uwaga.

- Wzór na całkowanie przez części:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx,$$

co symbolicznie można zapisać w postaci

$$\int u\cdot v'dx = \left|\begin{array}{c} u \quad v' \\ u' \leftarrow v \end{array}\right| = \boxed{u}\cdot\boxed{v} - \int\boxed{u'}\cdot\boxed{v}dx,$$

- $v = \int v'dx + c$, we wzorze na całkowanie przez części stałą c dopisujemy dopiero po całkowitym scałkowaniu (po pozbyciu się całki), więc

$$v = \int v'dx.$$

- Ze wzoru na całkowanie przez części korzysta się do całkowania iloczynu funkcji.

Rozwiązanie.

a) $$\int \overset{u}{x} \cdot \overset{v'}{e^x} dx = \left| \begin{array}{cc} x & e^x \\ 1 & e^x \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + c,$$

$v = \int e^x dx = e^x$ $\qquad$ $\int e^x dx = e^x + c$

b) $$\int x^3 \ln|x| dx = \int \overset{v'}{x^3} \cdot \overset{u}{\ln|x|} dx = \left| \begin{array}{cc} \ln|x| & x^3 \\ \frac{1}{x} & \frac{x^4}{4} \end{array} \right| =$$

$v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$

$$= \frac{x^4}{4} \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x^4}^{\,x^3}}{4} dx = \frac{x^4}{4} \ln|x| - \frac{x^4}{16} + c,$$

$\frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{16} + c$

c) $$\int \ln|x| dx = \int \overset{v'}{1} \cdot \overset{u}{\ln|x|} dx = \left| \begin{array}{cc} \ln|x| & 1 \\ \frac{1}{x} & x \end{array} \right| =$$

$v = \int 1 dx = x$

$$= x \cdot \ln|x| - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x} dx = x \ln|x| - x + c,$$

$\int x dx = x + c$

d) $$\int \overset{u}{(10x+5)} \cdot \overset{v'}{\sin x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} 10x+5 & \sin x \\ 10 & -\cos x \end{array} \right| =$$

$v = \int \sin x dx = -\cos x$

$$= (10x+5) \cdot (-\cos x) - \int 10 \cdot (-\cos x) dx =$$

$$= -(10x+5)\cos x + 10 \sin x + c.$$

$-10 \int \cos x dx = -10 \sin x + c$

e) $$\int \overset{u}{(5x+10)} \cdot \overset{v'}{e^x} dx = \left| \begin{array}{ll} \boxed{5x+10} & e^x \\ 5 \leftarrow & \boxed{e^x \downarrow} \end{array} \right| = \quad v = \int e^x dx = e^x$$

$$= \boxed{(5x+10)} \cdot \boxed{e^x} - \int \boxed{5} \cdot \boxed{e^x} dx = (5x+5)e^x + c,$$

$$5 \int e^x dx = 5e^x + c$$

f)

Uwaga. Należy dwukrotnie scałkować przez części.

$$\boxed{\mathrm{I}} = \int e^x \cdot \cos x = \int \overset{u}{\cos x} \cdot \overset{v'}{e^x} dx = \left| \begin{array}{ll} \cos x & e^x \\ -\sin x \leftarrow & \boxed{e^x} \end{array} \right| =$$

$$= e^x \cos x - \int e^x \cdot (-\sin x) dx = e^x \cos x + \int \overset{u}{\sin x} \cdot \overset{v'}{e^x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \sin x & e^x \\ \cos x \leftarrow & \boxed{e^x} \end{array} \right| = e^x \cos x + e^x \sin x - \boxed{\int e^x \cos x dx}^{\,I},$$

więc

$$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

czyli

$$I = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right) + c.$$

Przykład 8.3. Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie

a) $\int (3x+7)^{15} dx$,

b) $\int \sin(6x+5) dx$,

c) $\int x\sqrt{2x-4} dx$,

d) $\int e^{3x+2} dx$,

e) $\int x e^{x^2} dx$,

f) $\int \sin^6 x \cos^5 x dx$,

g) $\int \frac{e^x}{5+4e^x} dx$,

h) $\int (3x^2+1)(x^3+x+11)^{20} dx$,

i) $\int \sqrt{1-x^2} dx$,

j) $\int \frac{125 dx}{5\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

- Wzór na całkowanie przez podstawienie

$$\int f\Big(\boxed{g(x)}^{\,t}\Big)\cdot\boxed{g'(x)dx}^{\,dt} = \left|\begin{array}{rcl} g(x) & = & t \\ g'(x)dx & = & dt \end{array}\right| = \int f(t)dt.$$

- Wzór na całkowanie przez podstawienie można też zapisać

$$\int f(x)\cdot dx = \left|\begin{array}{rcl} x & = & \phi(t) \\ dx & = & \phi'(t)dt \end{array}\right| = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt,$$

gdzie $\phi(t)$ jest różniczkowalna i różnowartościowa w $\langle t_1, t_2\rangle$ i przekształca ten przedział w przedział $\langle a, b\rangle$ oraz $f(x)$ jest całkowalna na tym przedziale.

- Ze wzoru na całkowanie przez podstawienie korzysta się przy całkowaniu funkcji złożonych.
- Po scałkowaniu względem nowej zmiennej należy pamiętać, aby wrócić do zmiennej x. W myśl zasady zadanie w x-ach, więc odpowiedź też w x-ach.
- Za t podstawiamy funkcję wewnętrzną. Można pomyśleć: Gdyby w tym miejscu był x, to wiadomo by było, jak policzyć całkę, albo za to, co „gorzej wygląda”, przyjąć t.

Rozwiązanie.

a) $$\int (\boxed{3x+7}^{\,t})^{15}\boxed{dx}^{\,\frac{1}{3}dt} = \left|\begin{array}{rcl} 3x+7 & = & t \\ 3dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int t^{15}\cdot\frac{1}{3}dt =$$
$$= \tfrac{1}{3}\int t^{15}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{15+1}t^{15+1}+c = \frac{1}{48}t^{16}+c = \frac{1}{48}(3x+7)^{16}+c,$$

b) $$\int \sin(\boxed{6x+5}^{\,t})\boxed{dx}^{\,\frac{1}{6}dt} = \left|\begin{array}{rcl} 6x+5 & = & t \\ 6dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{6}dt \end{array}\right| = \int (\sin t)\cdot\frac{1}{6}dt =$$
$$= \tfrac{1}{6}\int \sin t dt = -\frac{1}{6}\cos t + c = -\frac{1}{6}\cos(6x+5)+c,$$

c) $$\int \boxed{x}^{\frac{1}{2}(t+4)} \sqrt{\boxed{2x-4}^{t}}\, \boxed{dx}^{\frac{1}{2}dt} = \left| \begin{array}{rcl} 2x-4 & = & t \\ x & = & \frac{1}{2}(t+4) \\ dx & = & \frac{1}{2}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{4}(t+4)\sqrt{t}dt = \frac{1}{4}\int (t\sqrt{t}+4\sqrt{t})dt = \frac{1}{4}\int (t^{3/2}+4t^{1/2})dt =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}\,2}\cdot\frac{\cancel{2}}{5}t^{5/2}+\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\cdot\frac{2}{3}t^{3/2}+c = \frac{t^{5/2}}{10}+\frac{2t^{3/2}}{3}+c = \frac{(2x-4)^{5/2}}{10}+\frac{2(2x-4)^{3/2}}{3}+c,$$

d) $$\int e^{3x+2}dx = \int e^{\boxed{3x+2}^{t}}\, \boxed{dx}^{\frac{1}{3}dt} = \left| \begin{array}{rcl} 3x+2 & = & t \\ 3dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{3}dt \end{array} \right| =$$

$$= \int e^t\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + c = \frac{1}{3}e^{3x+2}+c,$$

e) $$\int xe^{x^2}dx = \int e^{\boxed{x^2}^{t}}\, \boxed{xdx}^{\frac{1}{2}dt} = \left| \begin{array}{rcl} x^2 & = & t \\ 2xdx & = & dt \\ xdx & = & \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int e^t\cdot\frac{1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{x^2}+c,$$

f) $$\int \sin^6 x\cos^5 x dx = \int \sin^6 x\cos^4 x\cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{rcl} \cos^2 x & = & 1-\sin^2 x \\ \cos^4 x & = & (1-\sin^2 x)^2 \end{array} \right| = \int \sin^6 x(1-\sin^2 x)^2\cos x dx =$$

$$= \int (\boxed{\sin^6 x}^{t^6} - 2\boxed{\sin^8 x}^{t^8} + \boxed{\sin^{10} x}^{t^{10}})\boxed{\cos x dx}^{dt} = \left| \begin{array}{rcl} \sin x & = & t \\ \cos x dx & = & dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^6 - 2t^8 + t^{10})dt = \frac{t^7}{7} - 2\cdot\frac{t^9}{9} + \frac{t^{11}}{11} + c =$$

$$= \frac{\sin^7 x}{7} - \frac{2\sin^9 x}{9} + \frac{\sin^{11} x}{11} + c,$$

g) $$\int \frac{e^x}{5+4e^x}dx = \int \frac{1}{\boxed{5+4e^x}^{t}}\boxed{e^x dx}^{\frac{1}{4}dt} = \left| \begin{array}{rcl} 5+4e^x & = & t \\ e^x dx & = & \frac{1}{4}dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt = \frac{1}{4}\ln|t| + c = \frac{\ln|5+4e^x|}{4} + c,$$

h) $$\int (3x^2+1)(x^3+x+11)^{20}dx = \int (\overset{t}{\boxed{x^3+x+11}})^{20}\overset{dt}{\boxed{(3x^2+1)dx}} =$$

$$= \left| \begin{array}{rcl} x^3+x+11 & = & t \\ (3x^2+1)dx & = & dt \end{array} \right| = \int t^{20}dt = \frac{t^{21}}{21} + c = \frac{(x^3+x+11)^{21}}{21} + c,$$

i) $$\int \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{rcl} x & = & \sin t \\ dx & = & \cos t dt \\ t & \in & \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle \\ x & \in & \langle -1, 1 \rangle \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int \cos^2 t dt = \left| \begin{array}{l} \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 \\ cos^2 t = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} \end{array} \right| = \int \left(\frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2} \right) dt =$$

$$= \left| \begin{array}{rcl} 2t & = & y \\ 2dt & = & dy \\ dt & = & \frac{1}{2}dy \end{array} \right| = \int \frac{1}{2}(\cos y) \cdot \frac{1}{2}dy + \int \frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\sin y + \frac{1}{2}t + c =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + c = \left| \begin{array}{rcl} x & = & \sin t \\ t & = & \arcsin x \\ \sin 2t & = & 2\sin t\cos t \\ \cos t & = & \sqrt{1-\sin^2 t} \\ 2\sin t\cos t & = & 2x\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| = \frac{1}{4} \cdot 2x\sqrt{1-x^2} +$$

$$\frac{1}{2}\arcsin x + c = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c,$$

j) $$\int \frac{125dx}{5\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{125dx}{5x^{1/2}+x^{1/3}} = \left| \begin{array}{rcl} x & = & t^6 \\ dx & = & 6t^5dt \\ x^{1/2} & = & t^3 \\ x^{1/3} & = & t^2 \\ \sqrt[6]{x} & = & t \end{array} \right| = \int \frac{125 \cdot 6t^5}{5t^3+t^2}dt =$$

$$= 6\int \frac{125t^5}{t^2(5t+1)}dt = 6\int \frac{125t^3}{5t+1}dt = 6\int \left(25t^2 - 5t + 1 - \frac{1}{5t+1} \right) dt =$$

$$= 6\left(\frac{25t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + t - \frac{1}{5}\ln|5t+1| \right) + c =$$

$$= 6\left(\frac{25\sqrt{x}}{3} - \frac{5\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} - \frac{1}{5}\ln|5\sqrt[6]{x}+1| \right) + c.$$

8.2. Zadania

Zadanie 8.1. Obliczyć całki nieoznaczone

a) $\int (6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 13)dx,$

b) $\int (3x^4 + 5x^7 - 200x^8 - \frac{300}{x^{99}} + 300)dx,$

c) $\int (3x^4 + \frac{6}{x^7} - \frac{7\sqrt{x}}{x^8} - \frac{41\sqrt[3]{x^2}}{x^{200}} + 500 + \sqrt[6]{x^7})dx,$

d) $\int \left(2x^2 - 3x^4 + \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 5 + \frac{7}{x}\right) dx,$

e) $\int (6x^2 + 8x - 1)dx,$

f) $\int (1-x)(x-2)(x-3)dx,$

g) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}},$

h) $\int \frac{x^2(\sqrt{x} - x\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx,$

i) $\int \frac{x^3 + 125}{x+5}dx,$

j) $\int \sqrt{x\sqrt{x^3\sqrt[3]{x}}}dx,$

k) $\int \left(e^x - \frac{2}{x}\right) dx,$

l) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}dx,$

m) $\int \left(3^x 5^x + \frac{5}{x^3}\right) dx,$

n) $\int 7^x 5^{2x} dx,$

o) $\int \frac{(x^3 - 4x)dx}{3x^2 - 12}dx,$

p) $\int \frac{4x^2 - x + 5}{x^3}dx,$

q) $\int (1 + e^x)^2 dx,$

r) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}}dx,$

s) $\int \left(e^3 + x\ln 2 + 5x^e + 6e^x\right) dx.$

Zadanie 8.2. Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając ze wzoru na całkowanie przez części

a) $\int (2x-3)e^x dx,$

b) $\int x^4 \ln|x| dx,$

c) $\int \frac{\ln|x|}{x^3}dx,$

d) $\int (6x-2)\cos x dx,$

e) $\int (7x+4)e^x dx,$

f) $\int e^x \sin x dx.$

Zadanie 8.3. Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie

a) $\int (8x-4)^{15}dx$,

b) $\int \cos(5x-3)dx$,

c) $\int x\sqrt{4x-8}dx$,

d) $\int e^{-3x-2}dx$,

e) $\int \cos^6 x \sin^5 x dx$,

f) $\int \frac{e^x}{4-5e^x}dx$,

g) $\int \frac{dx}{8x-5}$,

h) $\int e^{-3x}dx$,

i) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx$,

j) $\int \operatorname{tg} x dx$,

k) $\int x\sqrt[3]{3x^2+1}dx$,

l) $\int \frac{dx}{x\ln^5|x|}$,

m) $\int \frac{\ln|x|}{x\sqrt{2+5\ln|x|}}dx$,

n) $\int \frac{\sin x dx}{1+2\cos x}$,

o) $\int \cos(5x-2)dx$,

p) $\int \sin(3x+5)dx$,

q) $\int \sin(2x-5)dx$,

r) $\int \frac{12x^2+32x-7}{4x^3+16x^2-7x}dx$,

s) $\int \frac{12x^2+32x-7}{(4x^3+16x^2-7x)^6}dx$,

t) $\int \frac{12x^2+32x-7}{\sqrt[5]{4x^3+16x^2-7x}}dx$,

u) $\int (4x^3+16x^2-7x)^{19}(12x^2+32x-7)dx$,

v) $\int (4x^3+3x^2+1)(x^4+x^3+x)^{20}dx$.

Zadanie 8.4. Obliczyć całki nieoznaczone

a) $\int 4x^3\ln|x|dx$,

b) $\int e^x\cos x dx$,

c) $\int (7x^6+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)dx$,

d) $\int \left(4e^2x^3+(1+e)x^e+e^{3x+4x^2}(3+8x)\right)dx$,

e) $\int (3x+1)\sin(5x-2)dx$,

f) $\int \left(\frac{12}{x}+(10x-1)\cos(5x^2-x)\right)dx$.

8.3. Odpowiedzi

Zad. 8.1

a) $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + 13x + c$,

b) $\frac{3x^5}{5} + \frac{5x^8}{8} - \frac{200x^9}{9} + \frac{150}{49x^{98}} + 300x + c$,

c) $\frac{3x^5}{5} - \frac{1}{x^6} + \frac{14}{13x^{13/2}} + \frac{123}{595x^{595/3}} + 500x + \frac{6x^{13/6}}{13} + c$,

d) $\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^5}{5} + 8x^{1/4} + 5x + 7\ln|x| + c$,

e) $2x^3 + 4x^2 - x + c$,

f) $6x - \frac{11x^2}{2} + 2x^3 - \frac{x^4}{4} + c$,

g) $\frac{3}{2}\frac{x^{2/3}}{\sqrt[3]{5}} + c$,

h) $\frac{6x^{19/6}}{19} - \frac{x^4}{4} + c$,

i) $25x - \frac{5x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$,

j) $\frac{3}{7}x^{7/3} + c$,

k) $e^x - 2\ln|x| + c$,

l) $e^x - x + c$,

m) $-\frac{5}{2x^2} + \frac{15^x}{\ln 15} + c$,

n) $\frac{175^x}{\ln 175} + c$,

o) $\frac{x^2}{6} + c$,

p) $-\frac{5}{2x^2} + \frac{1}{x} + 4\ln|x| + c$,

q) $2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + x + c$,

r) $\frac{3x^{2/3}}{2} + \frac{6x^{5/6}}{5}$,

s) $e^3x + \frac{\ln 2}{2}x^2 + \frac{5x^{e+1}}{e+1} + 6e^x$.

Zad. 8.2

a) $(2x-5)e^x + c$,

b) $-\frac{x^5}{25} + \frac{1}{5}x^5\ln|x| + c$,

c) $-\frac{1}{4x^2} - \frac{\ln|x|}{2x^2} + c$,

d) $6\cos x - 2\sin x + 6x\sin x + c$,

e) $(7x-3)e^x + c$,

f) $\frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) + c$.

Zad. 8.3

a) $\frac{1}{128}(-4+8x)^{16} + c$,

b) $-\frac{1}{5}\sin(3-5x) + c$,

c) $\frac{4}{15}(-2+x)^{3/2}(4+3x) + c$,

d) $-\frac{1}{3}e^{-2-3x} + c$,

e) $-\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{2\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^{11} x}{11} + c$,

f) $-\frac{\ln|-4+5e^x|}{5} + c$,

g) $\frac{\ln|-5+8x|}{8} + c$,

h) $-\frac{1}{3}e^{-3x} + c$,

i) $\left(-\frac{16}{21} + \frac{4e^x}{7}\right)(1+e^x)^{3/4} + c$,

j) $-\ln|\cos x| + c$,

k) $\frac{(1+3x^2)^{4/3}}{8} + c$,

l) $-\frac{1}{4\ln^4|x|} + c$,

m) $\frac{2}{75}(-4+5\ln|x|)\sqrt{2+5\ln|x|} + c$,

n) $-\frac{1}{2}\ln|1+2\cos x| + c$,

o) $\frac{1}{5}\sin(5x-2) + c$,

p) $-\frac{1}{3}\cos(5+3x) + c$,

q) $-\frac{1}{2}\cos(2x-5) + c$,

r) $\ln|4x^3 + 16x^2 - 7x| + c$,

s) $-\frac{1}{5x^5(-7+16x+4x^2)^5} + c$,

t) $\frac{5}{4}\left(x\left(-7+16x+4x^2\right)\right)^{4/5} + c$,

u) $\frac{1}{20}x^{20}\left(-7+16x+4x^2\right)^{20} + c$,

v) $\frac{1}{21}x^{21}\left(1+x^2+x^3\right)^{21} + c$.

Zad. 8.4

a) $-\frac{x^4}{4} + x^4\ln|x| + c$,

b) $\frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}e^x\sin x + c$,

c) $x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + c$,

d) $e^{3x+4x^2} + e^2x^4 + x^{1+e} + c$,

e) $-\frac{1}{5}(1+3x)\cos(5x-2) + \frac{3}{25}\sin(5x-2) + c$,

f) $12\ln|x| + \sin(5x^2 - x) + c$.

Rozdział 9

Całki oznaczone, niewłaściwe, zastosowanie rachunku całkowego

Zadania dotyczące obliczania całek oznaczonych i zastosowania całek do obliczania pól, objętości itp. oraz całek niewłaściwych.

9.1. Przykłady

Przykład 9.1. Obliczyć całki oznaczone

a) $\int\limits_0^1 (6x^5 - 5x^4 - 1)dx$,

b) $\int\limits_1^2 \frac{3x^2+x}{x^3}dx$,

c) $\int\limits_1^2 (1+e^x)dx$

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$,

e) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$,

f) $\int\limits_0^1 (3x+5)^5 dx$.

Całka oznaczona funkcji f na przedziale $\langle a, b\rangle$ jest liczbą daną wzorem

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

gdzie $F(x) = \int f(x)dx$ oraz f jest ciągła na przedziale $\langle a, b\rangle$.

Uwaga.

- Obliczanie całki oznaczonej wykonuje się analogicznie jak całki nieoznaczonej.
- Można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną, a następnie wstawić granice całkowania.

Rozwiązanie.

a) I sposób
Polega na tym, że najpierw oblicza się całkę nieoznaczona, a następnie wstawia się obliczoną funkcję do całki oznaczonej i liczy jej wartości w granicach całkowania.
Całka nieoznaczona

$$\int (6x^5 - 5x^4 - 1)dx = \cancel{6} \cdot \frac{x^6}{\cancel{6}} - \cancel{5} \cdot \frac{x^5}{\cancel{5}} - x + c = \underbrace{x^6 - x^5 - x}_{F(x)} + c.$$

Całka oznaczona

$$\int_0^1 (6x^5 - 5x^4 - 1)dx = \underbrace{x^6 - x^5 - x}_{F(x)}\Big|_0^1 = \underbrace{(1^6 - 1^5 - 1)}_{F(1)} - \underbrace{(0^6 - 0^5 - 0)}_{F(0)} = -1$$

$$\overset{\text{alternatywny}}{\underset{\text{zapis}}{=}} \Big[x^6 - x^5 - x\Big]_0^1 = (1^6 - 1^5 - 1) - (0^6 - 0^5 - 0) = -1.$$

II sposób
Oblicza się bezpośrednio całkę oznaczoną

$$\int_0^1 (6x^5 - 5x^4 - 1)dx = \left[\cancel{6} \cdot \frac{x^6}{\cancel{6}} - \cancel{5} \cdot \frac{x^5}{\cancel{5}} - x\right]_0^1 = \Big[\underbrace{x^6 - x^5 - x}_{F(x)}\Big]_0^1 =$$

$$= (1^6 - 1^5 - 1) - (0^6 - 0^5 - 0) = -1.$$

b) $$\int_1^2 \frac{3x^2 + x}{x^3}dx = \int_1^2 (3x^{-1} + x^{-2})dx = \left[3\ln x + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1}\right]_1^2 =$$

$$= \left[3\ln x - \tfrac{1}{x}\right]_1^2 = (3\ln 2 - \tfrac{1}{2}) - (3\underbrace{\ln 1}_{0} - \tfrac{1}{1}) = 3\ln 2 + \tfrac{1}{2},$$

c) $$\int_1^2 (1 + e^x)dx = \Big[x + e^x\Big]_1^2 = (2 + e^2) - (1 + e^1) = 1 - e + e^2,$$

d)

Uwaga. Należy zastosować wzór na całkowanie przez części (analogiczny jak dla całki nieoznaczonej)

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{array} \right| = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot(-\cos x)dx =$$

$$= \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \underbrace{\Big(-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\Big)}_{-\pi/2\cdot 0=0} - \underbrace{(-0\cdot\cos 0)}_{-0\cdot 1=0} + \underbrace{(\sin\frac{\pi}{2})}_{1} - \underbrace{(\sin 0)}_{0} = 1,$$

e)

Uwaga. Ten przykład wymaga skorzystania ze wzoru na całkowanie przez podstawienie. Można go rozwiązać na dwa sposoby:

- obliczyć najpierw całkę nieoznaczoną, a następnie wstawić otrzymaną funkcję w granicach całkowania, czyli $F(b) - F(a)$,
- zastosować wzór na całkowanie przez podstawienie, zmieniając granice całkowania

$$\int_a^b f\Big(g(x)\Big)\cdot g'(x)dx = \left| \begin{array}{rcl} g(x) & = & t \\ g'(x)dx & = & dt \\ a & \to & g(a) \\ b & \to & g(b) \end{array} \right| = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt,$$

gdzie $g'(x)$ jest ciągła, $g(x)$ rosnąca dla $x \in \langle a, b\rangle$ oraz $f(t)$ ciągła na $\langle g(a), g(b)\rangle$.

I sposób

Całka nieoznaczona

$$\int \cos 2x dx = \left| \begin{array}{rcl} 2x & = & t \\ 2dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int (\cos t)\cdot\frac{1}{2}dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + c = \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{F(x)} + c,$$

więc całka oznaczona

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} == \frac{1}{2}\sin \cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} - \frac{1}{2}\sin \cancel{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0} - \tfrac{1}{2}\underbrace{\sin(-\pi)}_{0} = 0,$$

II sposób

Bezpośrednio ze wzoru na całkowanie przez podstawienie (ze zmianą granic całkowania)

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left|\begin{array}{rcl} 2x & = & t \\ 2dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{2}dt \\ -\frac{\pi}{2} & \to & \cancel{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) = -\pi \\ \frac{\pi}{2} & \to & \cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} = \pi \end{array}\right| = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\cos t)\cdot\frac{1}{2}dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = \left[\frac{1}{2}\sin t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(-\pi)}_{0} = 0,$$

f) analogicznie do poprzedniego przykładu

I sposób

$$\int (3x+5)^5 dx = \left|\begin{array}{rcl} 3x+5 & = & t \\ 3dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int t^5\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^5 dt =$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{t^6}{6} + c = \tfrac{t^6}{18} + c = \underbrace{\frac{(3x+5)^6}{18}}_{F(x)} + c,$$

czyli

$$\int\limits_{0}^{1} (3x+5)^5 dx = \left[\frac{(3x+5)^6}{18}\right]_0^1 = \left(\frac{(3\cdot 1+5)^6}{18}\right) - \left(\frac{(3\cdot 0+5)^6}{18}\right) =$$

$$= \tfrac{8^6}{18} - \tfrac{5^6}{18} = \tfrac{27391}{2} = 13695{,}5.$$

II sposób (ze zmianą granic całkowania)

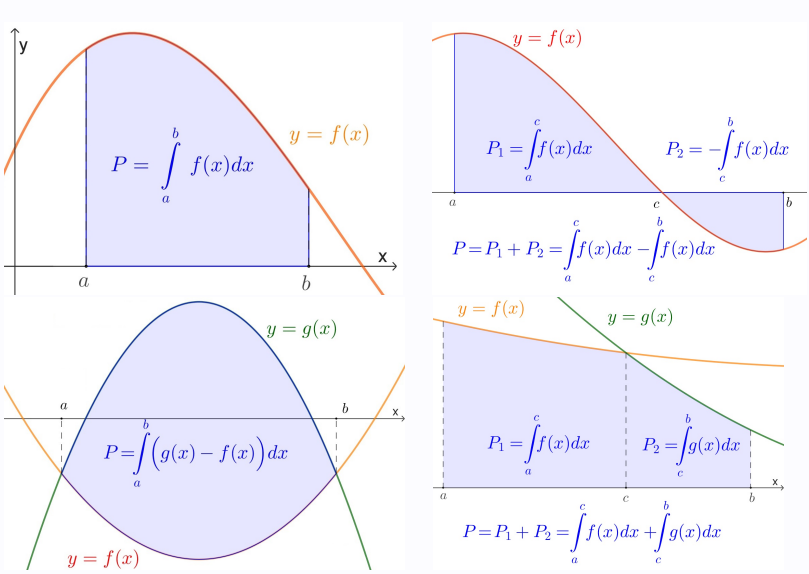
$$\int_0^1 (3x+5)^5 dx = \left| \begin{array}{rcl} 3x+5 & = & t \\ 3dx & = & dt \\ dx & = & \frac{1}{3}dt \\ 0 & \to & 5 \\ 1 & \to & 8 \end{array} \right| = \int_5^8 t^5 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int_5^8 t^5 dt =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{t^6}{6}\right]_5^8 = \left[\frac{t^6}{18}\right]_5^8 = \frac{8^6}{18} - \frac{5^6}{18} = \frac{27391}{2} = 13695{,}5.$$

Przykład 9.2. Obliczyć pole obszaru

a) ograniczonego przez dodatnią część osi OX i wykresem funkcji $y = -2x^2 + 4x$,
b) ograniczonego dodatnią częścią osi OY oraz wykresami funkcji $y = e^x$, $y = ex$,
c) ograniczonego wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x-3)$ i osią Ox,
d) ograniczonego wykresami funkcji $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ oraz $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 5$,
e) ograniczonego dodatnią częścią osi OX oraz wykresami funkcji $y = 2x^2$, $y = -x + 3$.

Pole trapezu krzywoliniowego

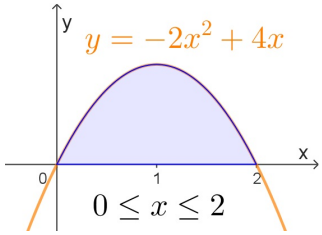


Uwaga. Aby obliczyć pole, należy:

- wykonać szkic wykresu funkcji,
- wyznaczyć granice całkowania,
- obliczyć całkę oznaczoną.

Rozwiązanie.

a) Przekształcając wyrażenie $y = -2x^2 + 4x$ do postaci iloczynowej $y = -2x(x-2)$, bądź licząc $\Delta, x_1 = 0, x_2 = 2$, można wykonać szkic wykresu i ustalić granice całkowania.

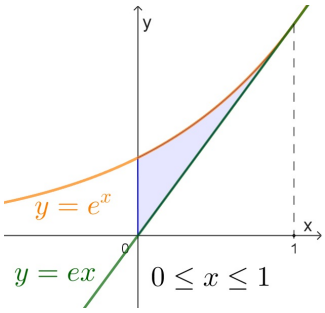


Następnie obliczyć pole, korzystając z odpowiedniego wzoru

$$P = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[-2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}x^2\right]_0^2 = \left[\frac{-2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left(\tfrac{-2}{3} \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2\right) - \left(\tfrac{-2}{3} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2\right) = \tfrac{-16}{3} + 8 = \tfrac{8}{3} \approx 2{,}(6).$$

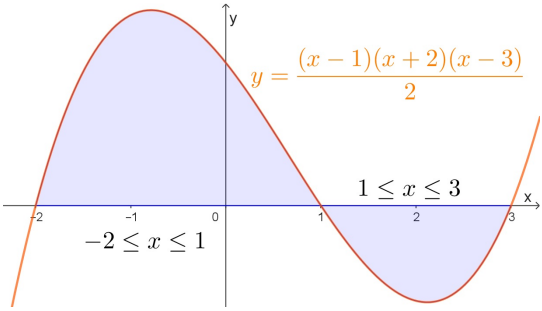
b) Należy wykonać wykresy funkcji i wyznaczyć granice całkowania. Następnie obliczyć pole, korzystając z odpowiedniego wzoru



$$P = \int_0^1 (e^x - ex)dx = \left[e^x - e \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = (e^1 - e \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2) - (e^0 - e \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^2) =$$

$$= e - \tfrac{1}{2}e - 1 = \tfrac{1}{2}e - 1 \approx 0{,}36.$$

c) Należy wykonać wykres funkcji i wyznaczyć granice całkowania. Trzeba zwrócić uwagę, że część wykresu leży pod osią OX i pole należy policzyć zgodnie z odpowiednim wzorem na pole

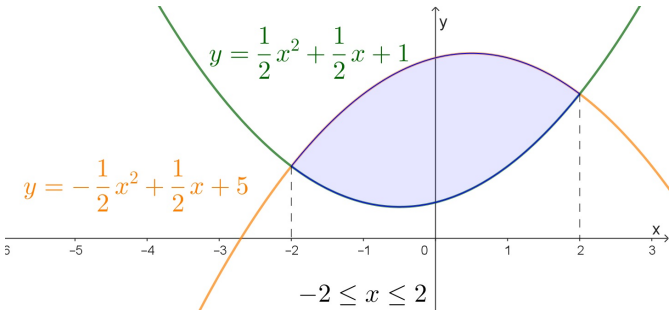


$$P = \int_{-2}^{1} \frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{2} dx - \int_{1}^{3} \frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{2} dx =$$

$$= \int_{-2}^{1} \left(3 - \frac{5}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) dx - \int_{1}^{3} \left(3 - \frac{5}{2}x - x^2 + \frac{1}{2}x^3\right) dx =$$

$$= \left[3x - \tfrac{5x^2}{4} - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^4}{8}\right]_{-2}^{1} - \left[3x - \tfrac{5x^2}{4} - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^4}{8}\right]_{1}^{3} = \tfrac{63}{8} + \tfrac{8}{3} = \tfrac{253}{24} \approx 10\tfrac{13}{24}.$$

d) Należy wykonać wykresy funkcji i wyznaczyć granice całkowania. Następnie obliczyć pole, korzystając z odpowiedniego wzoru



$$P = \int_{-2}^{2} \left(\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 5\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right) \right) dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx =$$

$$= \left[4x - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(4 \cdot 2 - \tfrac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot (-2) - \tfrac{(-2)^3}{3}\right) = \tfrac{32}{3} \approx 10{,}(6).$$

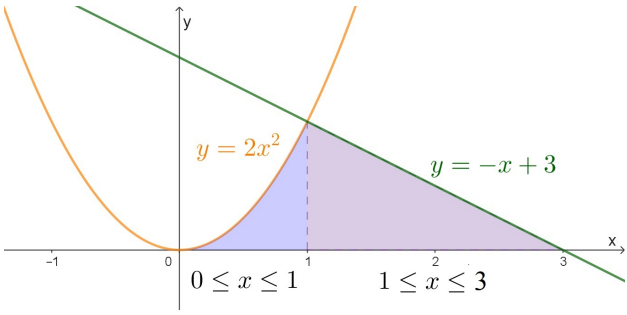
e) Po wykonaniu wykresów funkcji widać, że należy zastosować odpowiedni wzór na pole, obliczyć odciętą (współrzędną x-sową punktu przecięcia wykresów), czyli rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = -x + 3 \end{cases},$$

więc

$$\begin{aligned} 2x^2 &= -x + 3 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \quad & \Delta = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5 \\ x_1 = 1 > 0, \quad & x_2 = -\frac{3}{2} < 0. \end{aligned}$$

Z treści przykładu wynika, że należy wziąć pod uwagę dodatnią część osi OX, więc drugi pierwiastek automatycznie zostaje odrzucony i z wykresu oraz wzoru na pole otrzymuje się



$$P = \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^3 (-x+3)dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 =$$
$$= \left(\tfrac{2}{3} - 0\right) + \left(-\tfrac{9}{2} + 9 + \tfrac{1}{2} - 3\right) = \tfrac{8}{3} \approx 2{,}(6)$$

Przykład 9.3.

a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią OX oraz krzywą $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = 6t - 6$, $1 \le t \le 3$.
b) Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią OX oraz krzywą $x(t) = -6t + 6$, $y(t) = t^2 + 2t$, $1 \le t \le 3$.

Uwaga.

- Dla krzywej zadanej parametrycznie równaniami $x = g(t)$, $y = h(t)$, gdzie $g(t), h(t)$ są ciągłe dla $t_1 \leq t \leq t_2$ oraz $g(t)$ jest rosnąca i ma ciągłą pochodną na tym przedziale, pole obszaru ograniczonego łukiem tej krzywej oraz prostymi $x = x_1$ i $x = x_2$, gdzie $x_1 = g(t_1)$, $x_2 = g(t_2)$, dane jest wzorem

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt,$$

- gdy $g(t)$ jest malejąca na przedziale $t_1 \leq t \leq t_2$, wówczas

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| dx = -\int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt,$$

Rozwiązanie.

a) Ponieważ $x = g(t) = t^2 + 2t$ jest równaniem paraboli, więc łatwo sprawdzić, że jest to funkcja ciągła i rosnąca dla $t > -1$, czyli dla $t \in \langle 1, 3 \rangle$. Ponadto z tego, że $g'(t) = 2t + 2$ oraz $|y| = |h(t)| = 6t - 6$, otrzymuje się

$$P = \int_1^3 (6t - 6)(2t + 2) dt = \int_1^3 (12t^2 - 12) dt = \left[4t^3 - 12t\right]_1^3 = 80.$$

b) Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, $x = g(t) = -6t + 6$ jest ciągła na przedziale $t \in \langle 1, 3 \rangle$ i malejąca oraz $g'(t) = -6$ i $|y| = t^2 + 2t$ na rozważanym odcinku, więc

$$P = -\int_1^3 (t^2 + 2t)(-6) dt = \int_1^3 (6t^2 + 12t) dt = \left[2t^3 + 6t^2\right]_1^3 = 100.$$

W tym przypadku pole można policzyć tak jak poprzednio, po uprzednim przepisaniu funkcji z postaci parametrycznej do postaci jawnej.

Z tego, że $x = -6t + 6$, łatwo otrzymać, że $t = -\frac{1}{6}x + 1$. Następnie wystarczy wstawić otrzymane t do równania na y

$$y = \left(-\frac{1}{6}x + 1\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{6}x + 1\right) = \frac{1}{36}(x-6)(x-18) = \frac{1}{36}x^2 - \frac{2}{3}x + 3$$

oraz policzyć, że $x_1 = g(1) = 0$ i $x_2 = g(3) = -12$. Z postaci iloczynowej otrzymanej funkcji można wywnioskować, że $|y| = y$ dla $x \in \langle -12, 0\rangle$, więc

$$P = -\int_0^{-12} \left(\frac{1}{36}x^2 - \frac{2}{3}x + 3\right) dx = \left[-\frac{1}{108}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 3x\right]_0^{-12} = 100.$$

Przykład 9.4. Obliczyć długość łuku krzywej

a) $f(x) = x^2 - 6x + 11, x \in \langle 1, 4\rangle$,
b) $f(x) = \cosh x, x \in \langle 0, 1\rangle$,
c) $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = 6t - 6$, $t \in \langle 0, 1\rangle$,
d) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $t \in \langle 0, \pi/4\rangle$.

Długość łuku krzywej $y = f(x)$ dla $a \le x \le b$:

$$\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

gdzie f jest funkcją ciągłą na $\langle a, b\rangle$ oraz f' ciągłą na (a, b).
Gdy krzywa dana jest parametrycznie równaniami $x = g(t)$, $y = h(t)$ i te funkcja mają ciągłe pochodne na przedziale $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ i łuk tej krzywej nie ma części wielokrotnych, wtedy długość łuku dana jest wzorem:

$$\Gamma = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Pomocne będą wzory na całki

- $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$, dla $x \in R$,
- $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c$, dla $|x| \geq a$.

Rozwiązanie.

a) Funkcja $f(x) = x^2 - 6x + 11$ jest ciągła na odcinku $\langle 1, 4\rangle$ oraz $f'(x) = 2x - 6$, więc długość łuku paraboli wynosi

$$\Gamma = \int_1^4 \sqrt{1+(2x-6)^2}dx = \left| \begin{array}{rcl} 2x-6 & = & t \\ dx & = & \frac{dt}{2} \\ 1 & \to & -4 \\ 4 & \to & 2 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{-4}^{2} \sqrt{1^2+t^2}dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{t}{2}\sqrt{t^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_{-4}^{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4}\ln\left|2+\sqrt{5}\right| +$$

$$+\sqrt{17} + \tfrac{1}{4}\ln\left|-4+\sqrt{17}\right| = \tfrac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{17} + \tfrac{1}{4}\ln\left|\tfrac{2+\sqrt{5}}{-4+\sqrt{17}}\right| \approx 6{,}13.$$

b)

Uwaga.

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\quad (\sinh x)' = \cosh x$,

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\quad (\cosh x)' = \sinh x$,

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\quad \displaystyle\int \sinh x dx = \cosh x + c$,

$\cosh^2 x = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$, $\quad \displaystyle\int \cosh x dx = \sinh x + c$.

Funkcja $f(x) = \cosh x$ jest tzw. krzywą łańcuchową i jest to funkcja ciągła na odcinku $\langle 0, 1\rangle$ oraz $f'(x) = \sinh x$, więc

$$\Gamma = \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2 x}dx = \int_0^1 \cosh x dx = [\sinh x]_0^1 = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \tfrac{e-e^{-1}}{2} - \tfrac{e^0-e^0}{2} = \tfrac{e-e^{-1}}{2} \approx 1{,}18.$$

c) Krzywa dana jest parametrycznie i $x'(t) = 2t + 2$, $y'(t) = 6$ są ciągłe dla $t \in \langle 0, 1\rangle$ oraz $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 4t^2 + 8t + 40 = 4((t+1)^2 + 9)$,

więc

$$\Gamma = \int_0^1 2\sqrt{(t+1)^2+9}dt = \left| \begin{array}{rcl} t+1 & = & z \\ dt & = & dz \\ 0 & \to & 1 \\ 1 & \to & 2 \end{array} \right| = \int_1^2 2\sqrt{z^2+3^2}dz =$$

$$= \left[z\sqrt{z^2+9} + 9\ln\left|z+\sqrt{z^2+9}\right|\right]_1^2 \approx 6{,}73.$$

d) Analogicznie $x'(t) = \cos t$, $y'(t) = -\sin t$ są ciągłe dla $t \in \langle 0, \pi/4\rangle$, ponadto $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$, więc

$$\Gamma = \int_0^{\pi/4} dt = [t]_0^{\pi/4} = \pi/4 \approx 0{,}79.$$

Przykład 9.5. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej przez obrót funkcji

a) $f(x) = 2x - 2$ wokół osi OX dla $x \in \langle 1, 2\rangle$,

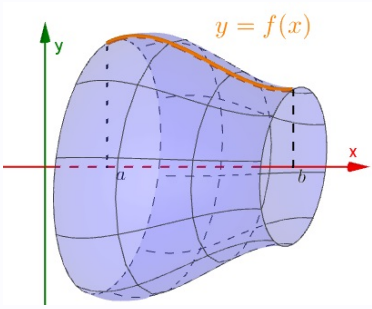
b) $f(x) = 2 - \frac{x^2}{2}$ wokół osi OY dla $x \in \langle 0, 2\rangle$.

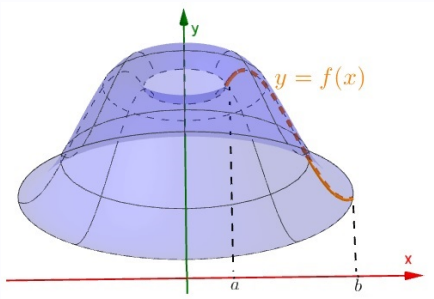
- Objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji $y = f(x)$ nieujemnej i ciągłej dla $x \in \langle a, b\rangle$ wokół osi OX jest dana wzorem:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

oraz
pole powierzchni bocznej tej bryły (gdy funkcja $f(x)$ ma ciągłą pochodną na tym przedziale) dane wzorem:

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx.$$

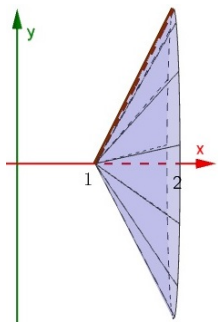




- Objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji $y = f(x)$ nieujemnej i ciągłej dla $x \in \langle a, b\rangle$ wokół osi OY jest dana wzorem:
$$V = 2\pi \int_a^b xydx$$
oraz
pole powierzchni bocznej tej bryły (gdy funkcja $f(x)$ ma ciągłą pochodną na tym przedziale oraz $a \leq 0$) dane wzorem:
$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}dx.$$

Rozwiązanie.

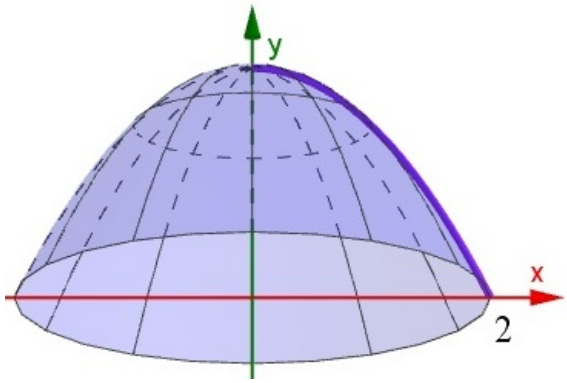
a) Funkcja $y = 2x - 2$ jest ciągła i nieujemna na odcinku $\langle 1, 2\rangle$, więc
$$V = \pi\int_1^2 (2x-2)^2 dx = \pi\int_1^2 (4x^2 - 8x + 4)dx = \pi\left[\frac{4x^3}{3} - 4x^2 + 4x\right]_1^2 =$$
$= \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}19,$
$$S = 2\pi\int_1^2 (2x-2)\sqrt{1+2^2}dx = 2\pi\sqrt{5}\int_1^2 (2x-2)dx = 2\sqrt{5}\pi\left[x^2 - 2x\right]_1^2 =$$
$= 2\sqrt{5}\pi \approx 14{,}05.$



b) Funkcja jest ciągła i nieujemna na odcinku $\langle 0, 2\rangle$, więc
$$V = 2\pi\int_0^2 x\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx = 2\pi\int_0^2 \left(2x - \frac{1}{2}x^3\right)dx = 2\pi\left[x^2 - \frac{1}{8}x^4\right]_0^2 =$$
$= 2\pi \approx 6{,}28,$

$$S = 2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+x^2}dx = \left|\begin{array}{rcl} 1+x^2 & = & t \\ 2xdx & = & dt \\ xdx & = & \frac{1}{2}dt \\ 0 & \to & 1 \\ 2 & \to & 5 \end{array}\right| = \pi\int_1^5 \sqrt{t}dt = \pi\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_1^5 =$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(-1+5\sqrt{5}\right) \approx 21{,}32.$$



Przykład 9.6. Obliczyć środek ciężkości

a) łuku $f(x) = \cosh x$ dla $x \in \langle 0{,}5; 1\rangle$,

b) pola trapezu krzywoliniowego ograniczonego funkcją $y = -x^2 + 4$ na odcinku $\langle 0, 1\rangle$.

- Współrzędne środka ciężkości (ξ, η) łuku krzywej $y = f(x)$ o początku w punkcie $A = (a, f(a))$ i końcu $B = (b, f(b))$ o stałej gęstości liniowej λ dane są wzorami:

$$\xi = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx}, \qquad \eta = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}dx}{\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx},$$

przy założeniu, że f' jest ciągła na (a, b).

- Współrzędne środka ciężkości (ξ, η) trapezu krzywoliniowego o stałej gęstości powierzchniowej ograniczonego łukiem krzywej $y = f(x)$ o początku w punkcie $A = (a, f(a))$ i końcu $B = (b, f(b))$ o stałej gęstości liniowej λ dane są wzorami:

$$\xi = \frac{\int\limits_a^b xydx}{\int\limits_a^b ydx}, \qquad \eta = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2dx}{\int\limits_a^b ydx},$$

przy założeniu, że f jest ciągła na $\langle a, b\rangle$.

Rozwiązanie.

a) Korzystając z uwagi zamieszczonej na stronie 163, otrzymuje się $\sqrt{1+(y')^2} = \cosh x$, czyli

$$\xi = \frac{\int\limits_{0,5}^1 x\cosh xdx}{\int\limits_{0,5}^1 \cosh xdx}, \qquad \eta = \frac{\int\limits_{0,5}^1 \cosh^2 xdx}{\int\limits_{0,5}^1 \cosh xdx}.$$

Trzeba obliczyć trzy całki:

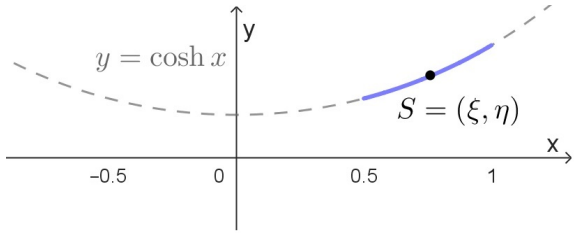
$$\int\limits_{0,5}^1 x\cosh xdx = [x\sinh x - \cosh x]_{0,5}^1 = -\frac{1}{e} + \frac{3}{4\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{4},$$

$$\int\limits_{0,5}^1 \cosh xdx = [\sinh x]_{0,5}^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{e}{2},$$

$$\int\limits_{0,5}^1 \cosh^2 xdx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sinh(2x)}{4}\right]_{0,5}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8e^2} + \frac{1}{8e} - \frac{e}{8} + \frac{e^2}{8},$$

więc

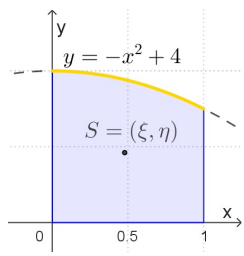
$$\xi = \frac{-\frac{1}{e}+\frac{3}{4\sqrt{e}}+\frac{\sqrt{e}}{4}}{-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{e}{2}} = \frac{4+\sqrt{e}+e}{2+2e^{3/2}} \approx 0{,}76 \qquad \eta = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{8e^2}+\frac{1}{8e}-\frac{e}{8}+\frac{e^2}{8}}{-\frac{1}{2e}+\frac{1}{2\sqrt{e}}-\frac{\sqrt{e}}{2}+\frac{e}{2}} =\approx 1{,}32.$$



b) Ze wzorów na środek ciężkości trapezu krzywoliniowego otrzymuje się

$$\xi = \frac{\int\limits_0^1 x(-x^2+4)dx}{\int\limits_0^1 (-x^2+4)dx} = \frac{\int\limits_0^1 (-x^3+4x)dx}{\int\limits_0^1 (-x^2+4)dx} = \tfrac{21}{44} \approx 0{,}48,$$

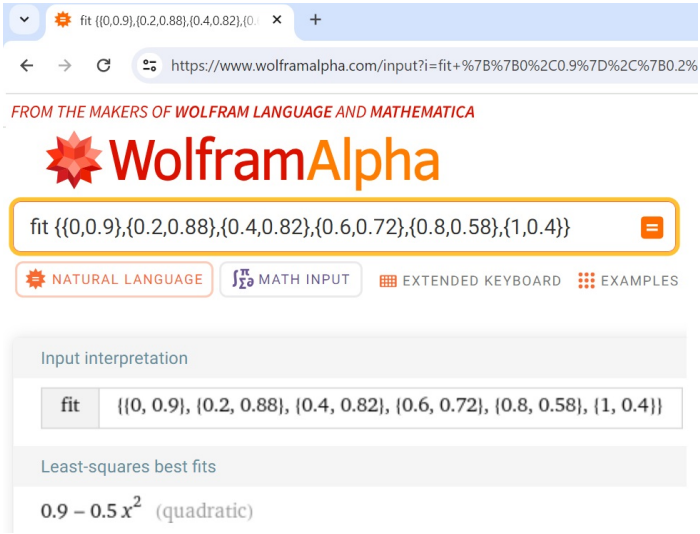
$$\eta = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (-x^2+4)^2 dx}{\int\limits_1^1 (-x^2+4)dx} = \tfrac{203}{110} \approx 1{,}85$$



Przykład 9.7. Korzystając z tabeli pomiarów pola przekroju bagażnika pewnego samochodu

odległość x m	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
pole $S(x)$ m^2	0,90	0,88	0,82	0,72	0,58	0,40

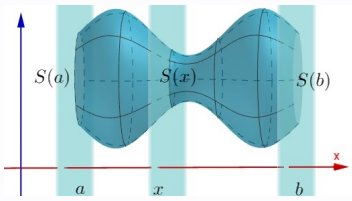
i metody najmniejszych kwadratów (np. w programie Wolfram Alpha z wykorzystaniem polecenia *fit*)



otrzymuje się wielomian pola przekroju poprzecznego w odległości x m od przedniej ścianki $S(x) = 0{,}9 - 0{,}5x^2$, gdy odległość pomiędzy ścianami (przednią i tylną) wynosi 1 m. Obliczyć objętość tego bagażnika [4].

Gdy dla $x \in \langle a, b\rangle$ $S(x)$ jest ciągłą funkcją pola przekroju bryły płaszczyzną prostopadłą do osi OX w punkcie x, to objętość tej bryły dana jest wzorem:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$



Rozwiązanie. $V = \int_0^1 (0{,}9 - 0{,}5x^2)dx = \left[\frac{9x}{10} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{11}{15} \approx 0{,}73 \text{ m}^3.$

Całki niewłaściwe

Przykład 9.8. Obliczyć całkę

a) $\int_0^\infty e^x dx$, b) $\int_{-\infty}^0 \frac{4}{x^2+1}dx$, c) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$, d) $\int_0^2 \frac{1}{2x-4}dx$.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx, \qquad \text{gdzie } f(x) \text{ określona na } \langle a, \infty),$$

$$\int_{\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx, \qquad \text{gdzie } f(x) \text{ określona na } (-\infty, b\rangle,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} \int_{a+h}^b f(x)dx, \quad \text{gdzie } f(x) \text{ określona na } (a, b\rangle,\ h > 0,$$

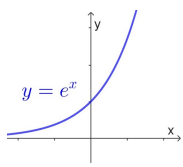
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} \int_a^{b-h} f(x)dx, \quad \text{gdzie } f(x) \text{ określona na } \langle a, b)\ h > 0.$$

Ponadto jeżeli granica ta jest:

- właściwa (otrzymany wynik jest liczbą), to całka jest zbieżna,
- niewłaściwa ($\pm\infty$), to całka jest rozbieżna do $\pm\infty$,
- w pozostałych przypadkach całka jest rozbieżna.

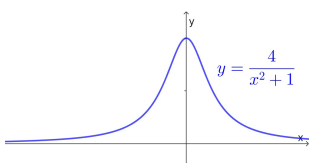
Rozwiązanie.

a) Funkcja $f(x) = e^x$ jest określona na R, więc



$$\int_0^{\infty} e^x dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^x dx = \lim_{A\to\infty} [e^x]_0^A = \lim_{A\to\infty} (e^A - e^0) = \infty - 1 = \infty.$$

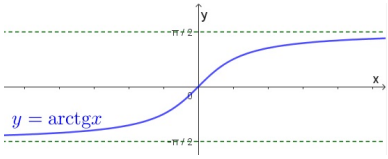
b) Funkcja $f(x) = \frac{4}{x^2+1}$ jest określona na R, więc



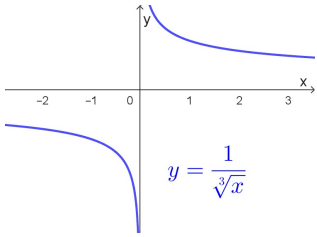
$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{4}{x^2+1}dx = \lim_{B\to-\infty} \int\limits_{B}^{0} \frac{4}{x^2+1}dx = 4 \lim_{B\to-\infty} [\operatorname{arctg} x]_B^0 =$$

$$= 4 \lim_{B\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} B) = 4\,(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg}(-\infty)) =$$

$$= 4\left(0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi.$$



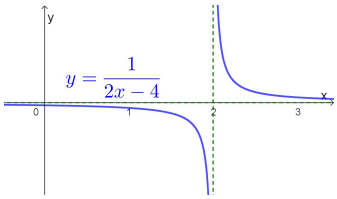
c) Funkcja $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ jest określona na $R \setminus \{0\}$, więc



$$\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{h\to0^+} \int\limits_{-1}^{0-h} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \lim_{h\to0^+} \left[\frac{3x^{2/3}}{2}\right]_{-1}^{0-h} = \frac{3}{2} \lim_{h\to0^+} \left[x^{2/3}\right]_{-1}^{0-h} =$$

$$= \tfrac{3}{2} \lim_{h\to0^+} \left((-h)^{2/3} - 1\right) = \tfrac{3}{2}\left((-0^+)^{2/3} - 1\right) = \tfrac{3}{2}\,(0-1) = -\tfrac{3}{2}.$$

d) Funkcja $f(x) = \frac{1}{2x-4}$ jest określona na $R \setminus \{2\}$, więc



$$\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2x-4}dx = \int\limits_{0}^{2} \frac{1}{2x-4}dx = \lim_{h\to0^+} \int\limits_{0}^{2-h} \frac{1}{2x-4}dx =$$

$$= \lim_{h\to0^+} \left[\tfrac{1}{2}\ln|2x-4|\right]_0^{2-h} = \tfrac{1}{2} \lim_{h\to0^+} (\ln|2(2-h)-4| - \ln|-4|) =$$

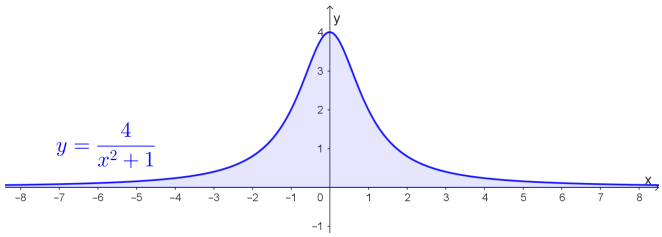
$$= \tfrac{1}{2} \lim_{h\to0^+} (\ln 2h - \ln 4) = -\infty - \ln 4 = -\infty.$$

Przykład 9.9. Obliczyć pole obszaru, którego brzegiem jest krzywa

a) $y = \frac{4}{x^2+1}$ i oś OX,
b) $y = e^{-x}$ oraz dodatnia część osi OX i OY,
c) $y = \ln x$ i proste $x = 0, x = e$.

Rozwiązanie.

a) Korzystając ze wzorów na stronie 157 i wykresu funkcji

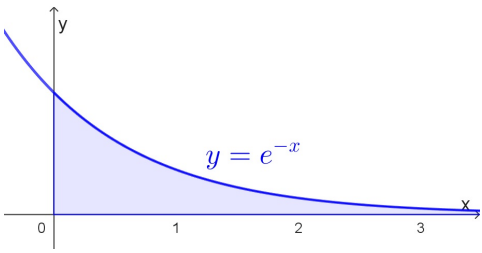


$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{4}{x^2+1} \right| dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = 4 \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty} [\operatorname{arctg} x]_{-A}^{A} = 4 \lim_{A\to\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg}(-A)) =$$

$$= 4\,(\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}(-\infty)) = 4\left(\tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = 4\pi \approx 12{,}57.$$

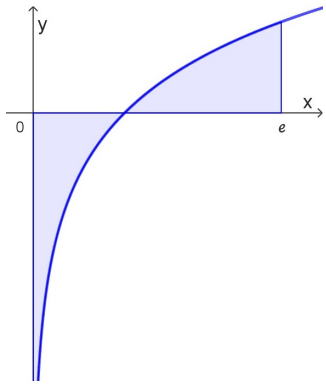
b) Analogicznie dla funkcji $f(x) = e^{-x}$



$$P = \int_{0}^{\infty} \left|e^{-x}\right| dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} e^{-x} dx = \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_{0}^{A} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(-e^{-A} + e^{0}\right) = -e^{-\infty} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

c) Dla funkcji $f(x) = \ln x$ na odcinku $(0, e\rangle$ otrzymuje się



$$P = \int_0^e |\ln x|\, dx = -\int_0^1 \ln x dx + \int_1^e \ln x dx = -\lim_{h\to 0^+} \int_{0+h}^1 \ln x dx +$$

$$+ \int_1^e \ln x dx = -\lim_{h\to 0^+} [x\ln|x| - x]_h^1 + [x\ln|x| - x]_1^e =$$

$$= -\lim_{h\to 0^+} (1\ln 1 - 1 - h\ln h + h) + (e\ln e - e - 1\ln 1 + 1) = 2.$$

Przykład 9.10. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Całkowe kryterium zbieżności szeregu
Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą, dodatnią i malejącą na przedziale $\langle n_0, \infty)$ i $n_0 \in N$, to

$$\text{całka niewłaściwa } \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx \text{ i szereg } \sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$$

są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne.

Rozwiązanie. W przypadku szeregu $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ wystarczy rozważyć funkcję $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ na przedziale $\langle 2, \infty)$, a następnie całkę

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_2^{A} \frac{1}{x\ln x}dx = \left| \begin{array}{lcr} \ln x & = & t \\ \frac{1}{x}dx & = & dt \\ 2 & \to & \ln 2 \\ A & \to & \ln A \end{array} \right| = \lim_{A\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln A} \frac{1}{t}dt =$$

$$= \lim_{A\to\infty} [\ln|t|]_{\ln 2}^{\ln A} = \lim_{A\to\infty} (\ln(\ln A) - \ln(\ln 2)) = (\ln(\ln\infty) - \ln(\ln 2)) = \infty.$$

Czyli całka $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \infty$ jest rozbieżna do ∞, a więc szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ również.

9.2. Zadania

Zadanie 9.1. Obliczyć całki oznaczone

a) $\int_0^1 (7x^6 - 6x^5 - 2x)dx$,

b) $\int_{-1}^1 (x^7 - x^3 + e + \sin 2)dx$,

c) $\int_1^3 (\sqrt[3]{x^2})dx$,

d) $\int_1^e \frac{4x^3 + 2x^4 + x^2}{x^3}dx$,

e) $\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} (2x + 4e^x)dx$,

f) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+5}dx$,

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx$,

h) $\int_1^e (2x - 25x^4\ln x)dx$,

i) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x dx$,

j) $\int_0^1 (4x+1)^5 dx$,

k) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$,

l) $\int_{-1}^1 (2x^3 + 3x + 1)^6(6x^2 + 3)dx$,

m) $\int_1^2 (\log_2 x + 2^x)dx$,

n) $\int_{-1}^1 e^{6x-5}dx$.

Zadanie 9.2. Obliczyć pole obszaru

a) ograniczonego dodatnimi częściami osi oraz krzywą $y = -x^2 + 2x + 3$,

b) ograniczonego wykresami funkcji $y = \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x - 2$ oraz $y = -x^2 + 3x + 3$,

c) ograniczonego wykresem funkcji $y = 2\sin x$, osią OX oraz prostymi $x = 0$ i $x = \pi$,

d) ograniczonego krzywymi $y = \cos x$ i $y = \frac{2}{\pi}x - 1$ oraz $y = -\frac{9}{2\pi}x - 1$,

e) ograniczonego wykresami funkcji $y = 2x^2$ i $y = 4x$,

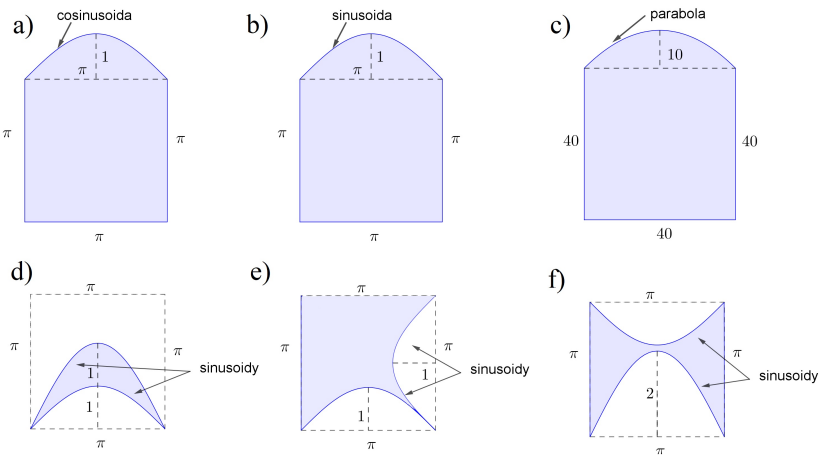
f) ograniczonego wykresem funkcji $y = -3x^2 + 27$ i dodatnimi częściami osi.

Zadanie 9.3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych oraz krzywą daną parametrycznie

a) $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$ dla $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$,

b) $x(t) = \cos t$, $y(t) = t$ dla $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zadanie 9.4. Obliczyć pola działek o następujących kształtach



Zadanie 9.5. Obliczyć długość łuku krzywych

a) $y = -x^2 + 4$, dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$,

b) $y = 2\sqrt{x}$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$,

c) cykloidy $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ dla $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$,

d) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ dla $t \in \langle 0, 1\rangle$.

Zadanie 9.6. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły powstałej

a) z obrotu względem osi OX, funkcji $y = 2x - 4$ na odcinku $\langle 2, 4\rangle$,
b) obrotu względem osi OY, funkcji $y = 3 - \cosh x$ na odcinku $\langle 0, 1\rangle$.

Zadanie 9.7. Obliczyć

a) środek ciężkości łuku $y = 3x - 7$ dla $x \in \langle 2, 4\rangle$,
b) środek ciężkości obszaru ograniczonego funkcją $y = \pi + \sin x$ dla $x \in \langle 0, \pi\rangle$.

Zadanie 9.8. Korzystając z tabeli pomiarów pola przekroju łodzi w odległości x od jej dzioba (łódź ma długość 10 m)

odległość x m	0	2	4	6	8	10
pole $S(x)$ m^2	0,1	1,1	1,8	2	1,7	1,2

i metody najmniejszych kwadratów (np. w programie Wolfram Alpha z wykorzystaniem polecenia *fit*) otrzymać wielomian pola przekroju poprzecznego w odległości x m od przedniej ścianki i obliczyć objętość kadłuba łodzi [4].

Zadanie 9.9. Oblicz całkę

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{x+2}dx$, b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+4}dx$, c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}}dx$, d) $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{2x-4}dx$.

Zadanie 9.10. Obliczyć pole obszaru, którego brzegiem jest krzywa

a) $f(x) = \frac{3}{4x^2+1}dx$ i oś OX,
b) $f(x) = e^x$ i oś OX dla $x \in (-\infty, 1\rangle$,
c) $f(x) = \ln x$ i oś OX dla $x \in (0, 2e\rangle$.

Zadanie 9.11. Zbadać zbieżność szeregu

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, b) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n}{n^2+4}$, c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{4n^3}{n^4+9}$, d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} e^{-x}$.

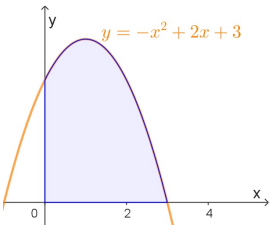
9.3. Odpowiedzi

Zad. 9.1

a) -1,
b) $2e + 2\sin 2$,
c) $-\frac{3}{5} + \frac{3}{5}e^{5/3}$,
d) $-4 + 4e + e^2$,
e) 6,
f) $\frac{1}{3}\ln\frac{6}{5}$,
g) $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi\sqrt{2}}{8}$,
h) $-2 + e^2 - 4e^5$,
i) 0,
j) 651,
k) $-\frac{1}{9} + \frac{\pi}{18}$,
l) $\frac{296320}{7}$,
m) $2 + \frac{1}{\ln 2}$,
n) $\frac{-1+e^{12}}{6e^{11}}$.

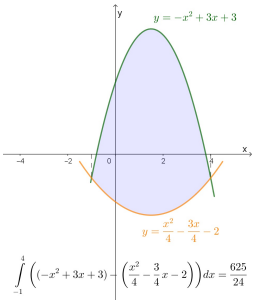
Zad. 9.2

a)



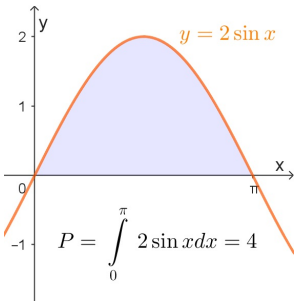
$$P = \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3)dx = 9$$

b)



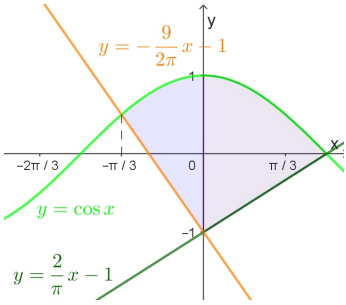
$$\int_{-1}^{4} \left((-x^2 + 3x + 3) - \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3}{4}x - 2\right)\right)dx = \frac{625}{24}$$

c)



$$P = \int_0^{\pi} 2\sin x dx = 4$$

d)



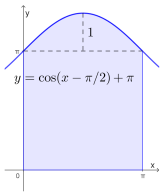
$$P = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \left(\cos x - \left(-\frac{9}{2\pi}x - 1\right)\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)\right) dx = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3},$$

e) $P = 8/3$, f) $P = 54$

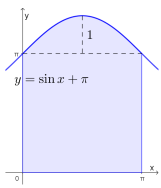
Zad. 9.3 a) $\frac{\pi}{4}$, b) 1.

Zad. 9.4 a) $\pi^2 + 2$, b) $\pi^2 + 2$, c) $5600/3$, d) 2, e) $\pi^2 - 4$, f) $\pi^2 - 6$.

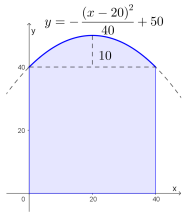
a)



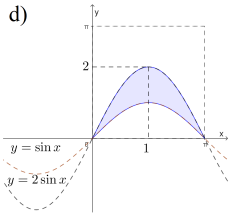
b)



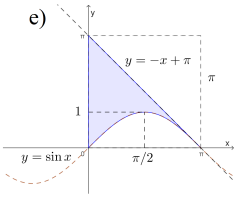
c)



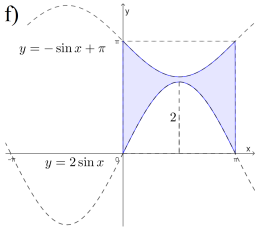
d)



e)



f)



Zad. 9.5 a) $\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \ln(2+\sqrt{5})\right)$, b) $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$, c) 16, d) $\frac{1}{27}\left(-8 + 13\sqrt{13}\right)$.

Zad. 9.6 a) $V = \frac{32\pi}{3}$, $S = 8\sqrt{5}\pi$, b) $V = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e}\right)\pi$, $S = \frac{2(-1+e)\pi}{e}$.

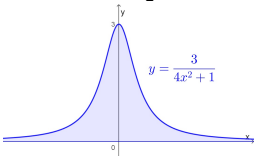
Zad. 9.7 a) $(\xi, \eta) = (3, 2)$, b) $(\xi, \eta) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\left(\frac{9\pi}{2(2+\pi^2)} + \frac{\pi^3}{2+\pi^2}\right)\right)$.

Zad. 9.8 $S(x) = -0{,}0513x^2 + 0{,}6205x + 0{,}0964$,

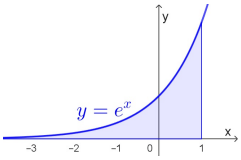
$$V = \int_0^{10} \left(-0{,}0513x^2 + 0{,}6205x + 0{,}0964\right) dx \approx 14{,}889 \text{ m}^3.$$

Zad. 9.9 a) ∞, b) $\frac{\pi}{4}$, c) $\frac{4}{3}$, d) ∞.

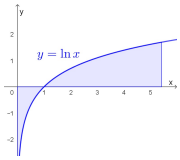
Zad. 9.10 a) $\frac{3\pi}{2}$, b) e, c) $2 + e\ln 4$.



b) e,



c) $2 + e\ln 4$.



Zad. 9.11

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{A\to\infty} \left[\operatorname{arctg} x\right]_1^A = \frac{\pi}{4}$, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ jest zbieżny,

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{2x}{x^2+4}dx = \lim_{A\to\infty} \left[\ln|x^2+4|\right]_3^A = \infty$, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+4}$ jest rozbieżny do ∞.

c) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{4x^3}{x^4+9}dx = \lim_{A\to\infty} \left[\ln|x^4+9|\right]_4^A = \infty$, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4x^3}{x^4+9}$ jest rozbieżny do ∞.

d) $\displaystyle\int_2^\infty e^{-x}dx = \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_2^A = \frac{1}{e^2}$, więc szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-x}$ jest zbieżny.

Rozdział 10

Liczby zespolone

Zadania dotyczące działań na liczbach zespolonych, a także rozkładania wyrażeń wymiernych na ułamki proste w celu obliczania całek z funkcji wymiernych.

10.1. Przykłady

Przykład 10.1. Wykonać działania na liczbach zespolonych (przedstawić w postaci algebraicznej):

a) $i^3, i^4, i^5, i^6, i^{2000}, i^{1001}$,

b) $(2+3i)+(5-2i)$,

c) $4(2+3i)-3(5-2i)$,

d) $(2-4i)(1-i)$,

e) $\frac{2-4i}{1+i}$,

f) $(6-3i)\cdot(\overline{2+4i})+3i^{13}$.

$$i^2=-1,$$

gdzie i – jednostka urojona.
Zbiór liczb zespolonych oznacza się przez C.

Liczbę

$$z=x+y\,i,$$

taką że $x, y \in R$, nazywamy **liczbą zespoloną w postaci algebraicznej**, natomiast
x – częścią rzeczywistą liczby zespolonej z,
y – częścią urojoną liczby zespolonej z.

Niech $z_1 = x_1 + y_1 i$ oraz $z_2 = x_2 + y_2 i$, gdzie $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) \pm (y_1 + y_2)i$,
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$,
- $\overline{z_1} = \overline{x_1 + y_1 i} = x_1 - y_1 i$, liczbę $\overline{z_1}$ nazywa się liczbą sprzężoną do z_1,
- $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}}$.

Rozwiązanie.

a) $i^3 = \boxed{i^2}^{=-1} \cdot i, = -1 \cdot i = -i$,

$i^4 = \boxed{i^2}^{=-1} \cdot \boxed{i^2}^{=-1} = (-1)^2 = 1$,

$i^5 = \boxed{i^4}^{=1} \cdot i = 1 \cdot i = i$,

$i^6 = \left(\boxed{i^2}^{=-1}\right)^3 = (-1)^3 = -1$,

$i^{2000} = \left(\boxed{i^2}^{=-1}\right)^{1000} = (-1)^{1000} = 1$,

$i^{1001} = \left(\boxed{i^2}^{=-1}\right)^{500} \cdot i = (-1)^{500} \cdot i = i$,

b) $(2 + 3i) + (5 - 2i) = (2 + 5) + (3 - 2)i = 7 + i$,

c) $4(2 + 3i) - 3(5 - 2i) = 8 + 12i - 15 + 6i = -7 + 18i$,

d) mnożenie wykonuje się tak jak w liczbach zespolonych, pamiętając, że $\boxed{i^2 = -1}$

$(2-4i)(1-i) = 2\cdot 1 + 2\cdot(-i) - 4i\cdot 1 - 4i\cdot(-i) = 2 - 2i - 4i + 4\boxed{i^2}^{=-1} =$
$= 2 - 2i - 4i - 4 = -2 - 6i$,

e) $\frac{2-4i}{1+i} = \frac{2-4i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{(2-4i)(1-i)}{1^2-(i)^2} = \frac{-2-6i}{2} = -1 - 3i$,

f) $(6 - 3i) \cdot (\overline{2 + 4i}) + 3i^{13} = (6 - 3i) \cdot (2 - 4i) + 3i = 0 - 30i + 3i = -27i$.

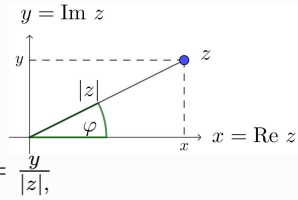
Przykład 10.2. Liczby zespolone przedstawić w postaci trygonometrycznej i wykładniczej

a) $1 + i, \quad 2 - 2i, \quad -1 + \sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3} - i$,

b) $(1+i)^5, \quad (2-2i)^4(-1+\sqrt{3}i)^3\ (-\sqrt{3}-i)^{24}.$

Liczbę zespoloną z można zapisać w postaci:

- algebraicznej
  $z = x + yi$, gdzie $x, y \in R$,
- trygonometrycznej
  $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
  gdzie $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{|z|}$, $\sin\varphi = \frac{y}{|z|}$,
- wykładniczej
  $z = |z|e^{i\varphi}$.



Wartości funkcji sinus i cosinus.

	I ćwiartka					II ćwiartka			
φ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

	III ćwiartka					IV ćwiartka			
φ	$180°$	$210°$	$225°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$	$330°$	$360°$
	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\varphi$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\sin\varphi$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Rozwiązanie.

a) Jeżeli $z_1 = 1+i$, to $x_1 = 1$, oraz $y_1 = 1$, więc $|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ oraz

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\}$$

czyli $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$. Mając obliczone $|z_1|$ i argument

główny φ_1 (odczytany, np. z tabeli), liczbę zespoloną można zapisać w postaci:

$$z_1 = \underbrace{1+i}_{\text{p. algebraiczna}} = \underbrace{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}_{\text{p. trygonometryczna}} = \underbrace{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}_{\text{p. wykładnicza}}.$$

Analogicznie
jeżeli $z_2 = 2-2i$, to $x_2 = 2$, $y_2 = -2$, $|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_2 = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_2 = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\text{ czyli } \varphi_2 = \tfrac{7\pi}{4}\text{, więc}$$

$$z_2 = 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{7\pi}{4} + i\sin\tfrac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Jeżeli $z_3 = -1+\sqrt{3}i$, to $x_3 = -1$, $y_3 = \sqrt{3}$, $|z_3| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_3 = \frac{-1}{2}\\ \sin\varphi_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\text{ czyli } \varphi_3 = \tfrac{2\pi}{3}\text{, więc}$$

$$z_3 = -1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\tfrac{2\pi}{3} + i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Jeżeli $z_4 = -\sqrt{3}-i$, to $x_4 = -\sqrt{3}$, $y_4 = -1$, $|z_4| = 2$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_4 = \frac{-\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi_4 = \frac{-1}{2}\end{array}\right\}\text{ czyli } \varphi_4 = \tfrac{7\pi}{6}\text{, więc}$$

$$z_4 = -\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\tfrac{7\pi}{6} + i\sin\tfrac{7\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}.$$

Wzór de Moivre'a $\quad z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right).$

b) Korzystając z postaci trygonometrycznych otrzymanych w poprzednim podpunkcie i wzoru de Moivre'a, mamy

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right)\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\left(\cos 5\cdot\tfrac{\pi}{4} + i\sin 5\cdot\tfrac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{5\pi}{4} + i\sin\tfrac{5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4-4i.$$

Najprościej jest w tym przykładzie skorzystać z postaci wykładniczej

$$(2-2i)^4(-1+\sqrt{3}i)^3(-\sqrt{3}+i)^{24} = \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^4\cdot\left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3\cdot\left(2e^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^{24} =$$

$$= 2^6\cdot 2^3\cdot 2^{24}e^{i\frac{7\pi}{4}\cdot 4 + i\frac{2\pi}{3}\cdot 3 + i\frac{7\pi}{6}\cdot 24} = 2^{33}e^{i(7\pi+2\pi+28\pi)} = 2^{33}e^{i37\pi} =$$

$= 2^{33}(\cos 37\pi + i\sin 37\pi)$, z okresowości funkcji trygonometrycznych $\cos 37\pi = \cos\pi$ oraz $\sin 37\pi = \sin\pi$, więc

$$(2-2i)^4(-1+\sqrt{3}i)^3(-\sqrt{3}+i)^{24} = 2^{33}(\cos\pi + i\sin\pi) =$$
$$= 2^{33}e^{i\pi} = 2^{33}(-1+i\cdot 0) = -2^{33}.$$

Przykład 10.3. Obliczyć $\sqrt{-9}$, $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$.

Każda liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, ma dokładnie n **pierwiastków** stopnia n. Zbiór pierwiastków ma postać:

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\},$$

gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Jeżeli $z = -9$, to $x = -9$, $y = 0$, $|z| = \sqrt{(-9)^2+0^2} = 9$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{-9}{9} = -1\\ \sin\varphi = \frac{0}{9} = 0\end{array}\right\}\text{ czyli } \varphi = \pi, \text{ więc}$$

$$z = -9 = 9(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Szukane są pierwiastki drugiego stopnia dla $z = -9$,

więc $z_k = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right)$ dla $k = 0, 1$, czyli

$$z_0 = \sqrt{9}\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 0\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2\cdot 0\pi}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0+i) = 3i,$$
$$z_1 = \sqrt{9}\left(\cos\frac{\pi+2\cdot 1\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2\cdot 1\pi}{2}\right) = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 3(0-i) = -3i.$$

Dla $\sqrt[6]{1}$ jest 6 pierwiastków z liczby zespolonej $z = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, ponieważ $|z| = 1$, $\cos\varphi = \frac{1}{1} = 1$, $\sin\varphi = \frac{0}{1} = 0$, czyli $\varphi = 0$,

stąd $z_k = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6}\right)$ dla $k = 0, 1, \ldots, 5$, czyli

$$z_0 = 1, \qquad z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$
$$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad z_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

W przypadku $\sqrt[5]{\sqrt{3}-i}$ jest 5 pierwiastków z liczby
$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$z_k = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{5}\right)$ dla $k = 0, 1, \ldots, 4$, czyli

$$z_0 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{30} + i\sin\frac{11\pi}{30}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{30} + i\sin\frac{23\pi}{30}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+4\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= \sqrt[5]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\frac{\sqrt[5]{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[5]{2}}{2}i,$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+6\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{47\pi}{30} + i\sin\frac{47\pi}{30}\right),$$

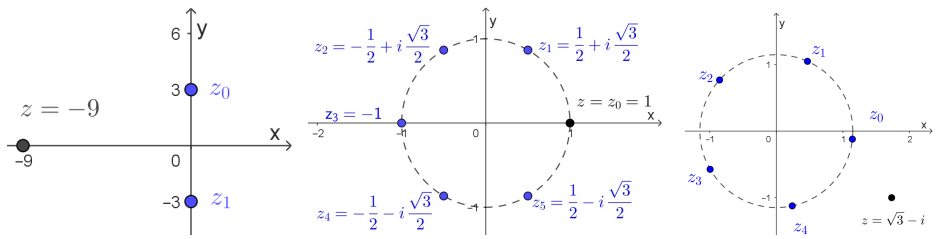
$$z_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+8\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{59\pi}{30} + i\sin\frac{59\pi}{30}\right).$$

Przykład 10.4. Narysować zbiory liczb zespolonych na płaszczyźnie zespolonej

a) rozwiązania z przykładu 10.3,
b) $|z-(2+2i)| = 2$, $2+2i$, $1+3i$, $3+3i$, $1+i$, $3+i$, $1{,}5+0{,}7i$, $2{,}5+0{,}7i$, $2+0{,}5i$.

Rozwiązanie.

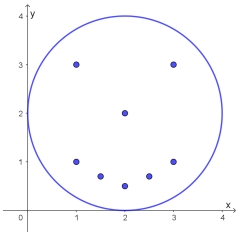
a)



b) Równanie $|z-(2+2i)| = 2$ można zapisać w postaci $|x+yi-(2+2i)| = 2$ lub inaczej $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2} = 2$, a to jest równanie okręgu $(x-2)^2+(y-2)^2 = 4$ o środku w punkcie $(2,2)$

i promieniu 2. Wystarczy nanieść na układ współrzędnych pozostałe liczby zespolone jako punkty

$2+2i=(2,2)$, $1+3i=(1,3)$, $3+3i=(3,3)$,
$1+i=(1,1)$, $3+i=(3,1)$, $1{,}5+0{,}7i=(1{,}5;0{,}7)$,
$2{,}5+0{,}7i=(2{,}5;0{,}7)$, $2+0{,}5i=(2;0{,}5)$.



Przykład 10.5. Rozwiązać równanie w liczbach zespolonych

a) $z^2+2z+4=0$,
b) $z^2+4=0$,
c) $z^2+2z+2=0$,
d) $z^2-2z+9=0$.

W zbiorze liczb zespolonych C równanie

$$az^2+bz+c=0, \quad a,b,c\in R$$

- dla $\Delta =\geq 0$ rozwiązuje się tak samo jak w liczbach rzeczywistych,
- gdy $\Delta=-d<0$ (dla $d\in R_+$), to za pierwiastek z wyróżnika trójmianu kwadratowego wystarczy wziąć jeden z pierwiastków $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-d}=\pm i\sqrt{d}$, a następnie zastosować znane wzory

$$z_1=\tfrac{-b-i\sqrt{d}}{2a}, \quad z_2=\tfrac{-b+i\sqrt{d}}{2a}.$$

Rozwiązanie.

a) Dla równania $z^2+2z+4=0$ otrzymuje się $\Delta=-12$, $\sqrt{\Delta}=2\sqrt{3}i$, więc

$z_1=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{2}=-1-\sqrt{3}i, \quad z_2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{2}=-1+\sqrt{3}i.$

b) Analogicznie dla $z^2+4=0$, $\Delta=-16$, $\sqrt{\Delta}=4i$, więc

$z_1=\frac{0-4i}{2}=-2i, \quad z_2=\frac{0+4i}{2}=2i,$

c) $z^2+2z+2=0$, $\Delta=-4$, $\sqrt{\Delta}=2i$, więc

$z_1 = \frac{-2-2i}{2} = -1-i, \quad z_2 = \frac{-2+2i}{2} = -1+i,$

d) $z^2 - 2z + 9 = 0$. $\Delta = -32$, $\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{2}i$, więc

$z_1 = \frac{2-4\sqrt{2}i}{2} = 1 - 2\sqrt{2}i, \quad z_2 = \frac{2+4\sqrt{2}i}{2} = 1 + 2\sqrt{2}i.$

Przykład 10.6. Obliczyć całki nieoznaczone z funkcji wymiernych (najpierw rozłożyć funkcje na ułamki proste)

a) $\frac{2x^2+2}{(x-1)(x-2)(x+3)}$, b) $\frac{-14+16x+13x^2}{(x-1)(1+x+x^2)}$, c) $\frac{5x^2-x+18}{(x+2)(x^2+4)}$.

Niech $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x-a_1)^{k_1}\dots(x-a_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}}$, gdzie wielomian $P(x)$ jest niższego stopnia niż $Q(x)$ oraz $x^2+p_ix+q_i$ nie mają pierwiastków rzeczywistych, tzn. $\Delta < 0$. Jeżeli $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ jest funkcją wymierną, to istnieją stałe $A_{i,k}, B_{j,l}, C_{j,l}$, takie że

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{i,k}}{(x-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{l_j} \frac{B_{j,l}x + C_{j,l}}{(x^2+p_jx+q_j)^l}$$

składniki sumy nazywa się ułamkami prostymi [9].

Prostsza wersja:

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)(x^2+px+q)} = \\ = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{x-b} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q},$$

gdzie stopień wielomianu $P(x) < 5$ oraz $p^2 - 4q < 0$, czyli brak pierwiastków równania $x^2+px+q=0$.

W przypadku braku pierwiastków równania $x^2+px+q=0$, czyli gdy $\Delta = p^2-4q < 0$, korzysta się na przykład z liczb zespolonych przy wyznaczaniu współczynników B, C.

Rozwiązanie.

a) Postulowany rozkład na ułamki proste

$$f(x) = \frac{2x^2+2}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+3}.$$

Wystarczy obliczyć A_1, A_2, A_3. W tym celu mnożymy powyższe równanie najpierw przez $x-1$

$$f(x)(x-1) = \frac{2x^2+2}{(x-2)(x+3)} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x-2} + \frac{A_3(x-1)}{x+3},$$

a następnie liczymy wartość otrzymanego wyrażenia dla $x=1$

$$f(x)(x-1)|_{x=1} = \frac{2x^2+2}{(x-2)(x+3)}\bigg|_{x=1} = A_1 + \frac{A_2(x-1)}{x-2} + \frac{A_3(x-1)}{x+3}\bigg|_{x=1},$$

czyli $A_1 = \frac{2\cdot 1^2+2}{(1-2)(1+3)} = -1$. Analogicznie, żeby wyznaczyć A_2, należy pomnożyć przez $x-2$, a następnie obliczyć wartość otrzymanego wyrażenia dla $x=2$

$$A_2 = f(x)(x-2)|_{x=2} = \frac{2x^2+2}{(x-1)(x+3)}\bigg|_{x=2} = \frac{2\cdot 2^2+2}{(2-1)(2+3)} = 2$$

oraz po pomnożeniu przez $x+3$ i obliczeniu dla $x=3$

$$A_3 = f(x)(x+3)|_{x=-3} = \frac{2x^2+2}{(x-1)(x-2)}\bigg|_{x=-3} = \frac{2\cdot(-3)^2+2}{(-3-1)(-3-2)} = 1,$$

czyli

$$f(x) = \frac{2x^2+2}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3}.$$

Po rozkładzie na ułamki proste można przejść do policzenia całki

$$\int \frac{2x^2+2}{(x-1)(x-2)(x+3)}dx = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3}\right)dx =$$
$$= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + \ln|x+3| + c = \ln\left|\frac{(x-2)^2(x+3)}{x-1}\right| + c.$$

b) Ponieważ x^2+x+1 nie da się rozłożyć na czynniki w liczbach rzeczywistych ($\Delta < 0$), postulowana postać rozkładu na ułamki proste

$$f(x) = \frac{-14+16x+13x^2}{(x-1)\left(1+x+x^2\right)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}.$$

Analogicznie jak w poprzednim przykładzie

$$A = f(x)(x-1)|_{x=1} = \frac{-14+16x+13x^2}{1+x+x^2}\bigg|_{x=1} = 5.$$

Do policzenia B i C skorzystać należy z jednego z rozwiązań równania $x^2+x+1=0$ w liczbach zespolonych

$$\Delta=-3,\quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{3}i,\quad x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

to znaczy $\quad Bx+C|_{x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=f(x)(x^2+x+1)|_{x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=$
$=\left.\frac{-14+16x+13x^2}{x-1}\right|_{x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$, czyli

$B\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+C=\left.\frac{-14+16x+13x^2}{x-1}\right|_{x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ po uproszczeniu

$C-\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}B}{2}i=15+4\sqrt{3}i$. Dwie liczby zespolone są sobie równe, gdy mają takie same części rzeczywiste i urojone

$\begin{cases} C-\frac{B}{2}=15 \\ \frac{\sqrt{3}B}{2}=4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=8 \\ C=19 \end{cases}$. Po rozłożeniu na ułamki proste

$$f(x)=\frac{-14+16x+13x^2}{(x-1)\left(1+x+x^2\right)}=\frac{5}{(x-1)}+\frac{8x+19}{1+x+x^2}$$

oraz skorzystaniu z tego, że $\frac{8x+19}{1+x+x^2}=4\frac{2x+1}{1+x+x^2}+15\frac{1}{1+x+x^2}$ i z postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, można policzyć całkę z tej funkcji, korzystając z metody podstawienia i wzorów ze strony 142

$$\int\frac{-14+16x+13x^2}{(x-1)\left(1+x+x^2\right)}dx=\int\frac{5}{(x-1)}dx+\int\frac{8x+19}{1+x+x^2}dx=$$
$$=\int\frac{5}{(x-1)}dx+4\int\frac{2x+1}{1+x+x^2}dx+15\int\frac{1}{(x+1/2)^2+3/4}dx=$$
$$=5\ln|x-1|+4\ln|x^2+x+1|+10\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$$

c) Analogicznie $f(x)=\frac{5x^2-x+18}{(x+2)(x^2+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$,

$$A=f(x)(x+2)|_{x=-2}=\left.\frac{5x^2-x+18}{x^2+4}\right|_{x=-2}=5,$$
$$x^2+4=0,\quad \sqrt{\Delta}=\sqrt{-16}=4i,\quad x_{1,2}=\pm 2i,$$
$$Bx+C|_{x=2i}=f(x)(x^2+4)|_{x=2i}=\left.\frac{5x^2-x+18}{x+2}\right|_{x=2i},$$
$$C+2Bi=-1\Rightarrow B=0, C=-1$$
$$f(x)=\frac{5x^2-x+18}{(x+2)(x^2+4)}=\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x^2+4},$$

więc

$$\int \frac{5x^2 - x + 18}{(x+2)(x^2+4)}dx = \int \frac{5}{x+2}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx =$$

$$= 5\ln|x+2| - \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{x}{2} + c.$$

10.2. Zadania

Zadanie 10.1. Zapisać w postaci algebraicznej

a) $(1+3i)(\overline{3i-2}) + \frac{5i}{1+2i}$,

b) $\frac{(2-2i)^3}{1+i} + i(2+7i)$,

c) $\left(\frac{1+3i}{1-i} - 2i\right)^{20}$,

d) $\left(\frac{2-3i}{i^{13}} + (\overline{4-3i})(5-2i) - 23\right)^3$.

Zadanie 10.2. Liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej i wykładniczej

a) $2+2\sqrt{3}i$, b) $-3+3i$, c) $-4\sqrt{3}-4i$, d) $\frac{(1+2i)\left(1-\sqrt{3}i+\overline{(-\sqrt{3}+i)}\right)}{(2-i)(1+i)}$.

Zadanie 10.3. Obliczyć $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{-36}$, $\sqrt[3]{16-16i}$, $\sqrt[5]{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}$, $\sqrt[3]{27i}$.

Zadanie 10.4. Narysować zbiory liczb zespolonych na płaszczyźnie zespolonej $|z-i| = 2$, $|z-(1+2i)| = 0{,}5$, $|z-(-1+2i)| = 0{,}5$, $|z-i| = 0{,}5$, oraz liczby zespolone: $\pm\frac{1}{2}$, $\overline{\frac{1}{2}i}$, $1+\frac{1}{2}i$, $-\left(\overline{1+\frac{1}{2}i}\right)$.

Zadanie 10.5. Rozwiązać równanie w zbiorze liczb zespolonych

a) $z^2 - 6z + 18 = 0$,

b) $z^2 + 18 = 0$,

c) $z^2 - z + 2 = 0$,

d) $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Zadanie 10.6. Obliczyć całki z funkcji wymiernych

a) $\frac{39+11x+5x^2}{(x+4)(x^2+9)}$,

b) $\frac{1-3x+4x^2}{(x-1)(x^2+1)}$,

c) $\frac{1-3x+x^2+3x^3}{(x^2-1)(x^2+1)}$.

10.3. Odpowiedzi

Zad. 10.1 a) $9-8i$, b) $-23+2i$, c) 1, d) $-125i$.

Zad. 10.2

a) $2+2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$,

b) $-3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

c) $-4\sqrt{3}-4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$,

d) $1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Zad. 10.3

$\sqrt[3]{-27}: z_0 = -3, z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\sqrt[4]{-36}: z_0 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i, z_1 = \sqrt{3} + \sqrt{3}i, z_2 = \sqrt{3} - \sqrt{3}i, z_3 = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i$,

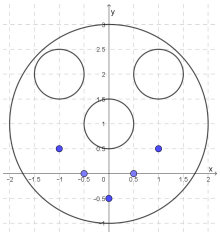
$\sqrt[3]{16-16i}: z_0 = -2-2i, z_1 = 1+\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right), z_2 = 1-\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$,

$\sqrt[5]{-\sqrt{2}+\sqrt{6}i}: z_0 = 2^{3/10}\left(\cos\frac{2\pi}{15} + i\sin\frac{2\pi}{15}\right)$, $z_1 = 2^{3/10}\left(\cos\frac{8\pi}{15} + i\sin\frac{8\pi}{15}\right)$,

$z_2 = 2^{3/10}\left(\cos\frac{14\pi}{15} + i\sin\frac{14\pi}{15}\right)$, $z_3 = 2^{3/10}\left(\cos\frac{20\pi}{15} + i\sin\frac{20\pi}{15}\right)$, $z_4 = 2^{3/10}\left(\cos\frac{26\pi}{15} + i\sin\frac{26\pi}{15}\right)$,

$\sqrt[3]{27i}: z_0 = -3i$, $z_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$.

Zad. 10.4



Zad. 10.5

a) $z_1 = 3-3i, z_2 = 3+3i$,

b) $z_1 = -3\sqrt{2}i, z_2 = 3\sqrt{2}i$,

c) $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$,

d) $z_1 = 2-i$, $z_2 = 2+i$.

Zad. 10.6

a) $f(x) = \frac{3}{(x+4)} + \frac{2x+3}{x^2+9}$, $\displaystyle\int f(x)dx = 3\ln|4+x| + \operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \ln|9+x^2| + c$,

b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)} + \frac{3x}{x^2+1}$, $\displaystyle\int f(x)dx = \ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + c$,

c) $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)} + \frac{3x}{x^2+1}$, $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + c$.

Bibliografia

[1] Cewe A., Nahorska H., Pancer I., *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2020, http://www.wkskopernik.pl/babijczuk.edu.pl/matematyka-tablice_i_wzory-liceum/tablice_matematyczne-cewe,nahorska,pancer.pdf [dostęp 4.01.2024].

[2] Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna 1*, Oficyna Wydawnicza GIS, Wrocław 2001.

[3] https://ciekawe.org/2016/06/18/geometria-roslin-ciag-fibonaccieg o-w-przyrodzie/ [dostęp 4.01.2024].

[4] Jędrychowski W. (tł.), *Matematyka w szkole średniej, I–III*, WSiP, Warszawa 1988.

[5] Jurlewicz T., Skoczylas Z., *Algebra liniowa 1*, Oficyna Wydawnicza GIS, Wrocław 2007.

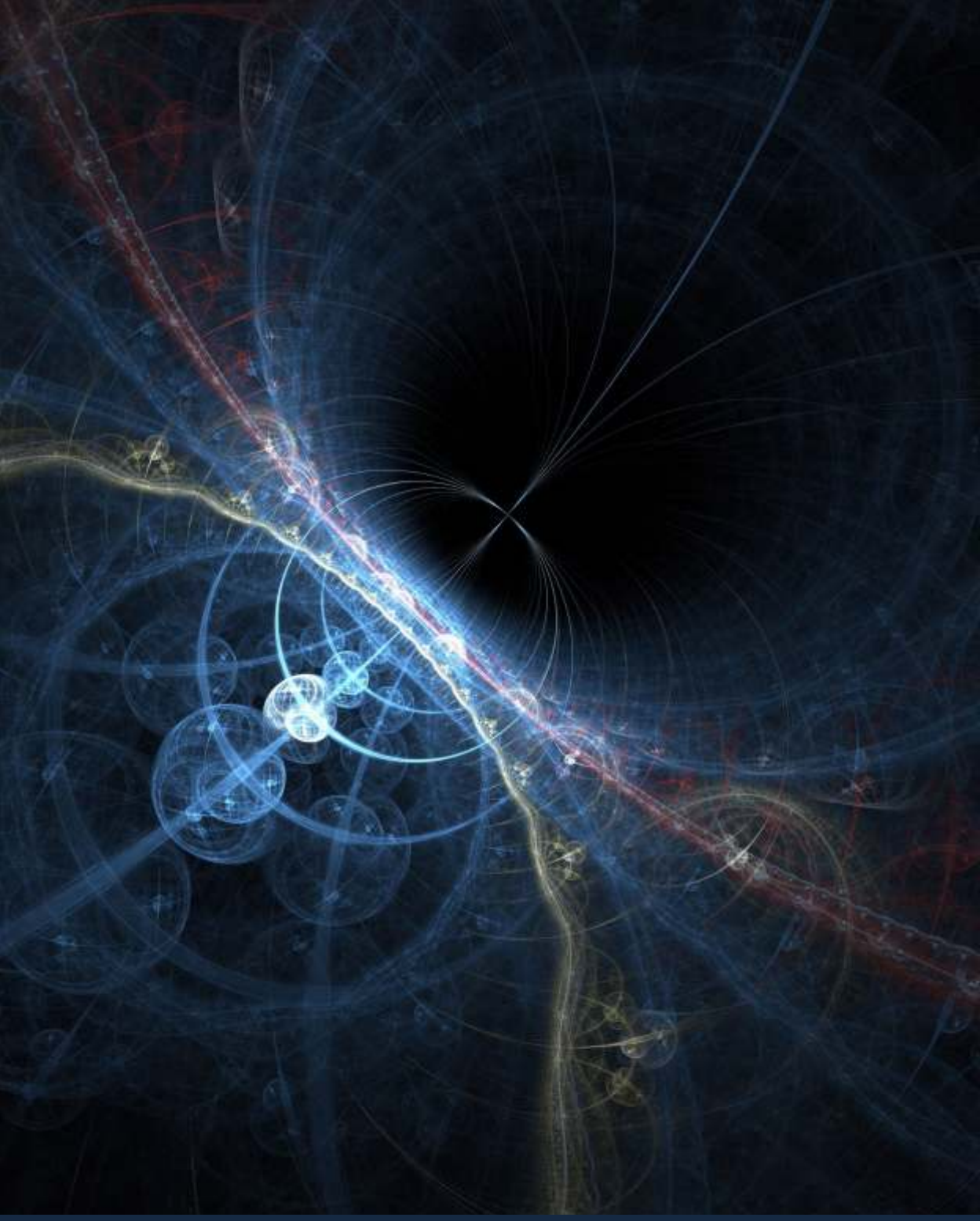
[6] Koshy T., *Fibonacci and Fibonacci Lucas Numbers with Applications*, John Wiley and Sons Inc., NY, 2001.

[7] Krysicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.

[8] https://pre-epodreczniki.open.agh.edu.pl/tiki-index.php?page=Metody+obliczania+granic+ci%C4%85g%C3%B3w [dostęp 26.09.2024].

[9] Rudnicki R., *Wykłady z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.

[10] Sigurd A., Joel R., *Math 221: First Semester Calculus*, 2009, https://people.math.wisc.edu/~angenent/Free-Lecture-Notes/free221.pdf [dostęp 4.01.2024].



Politechnika
Białostocka