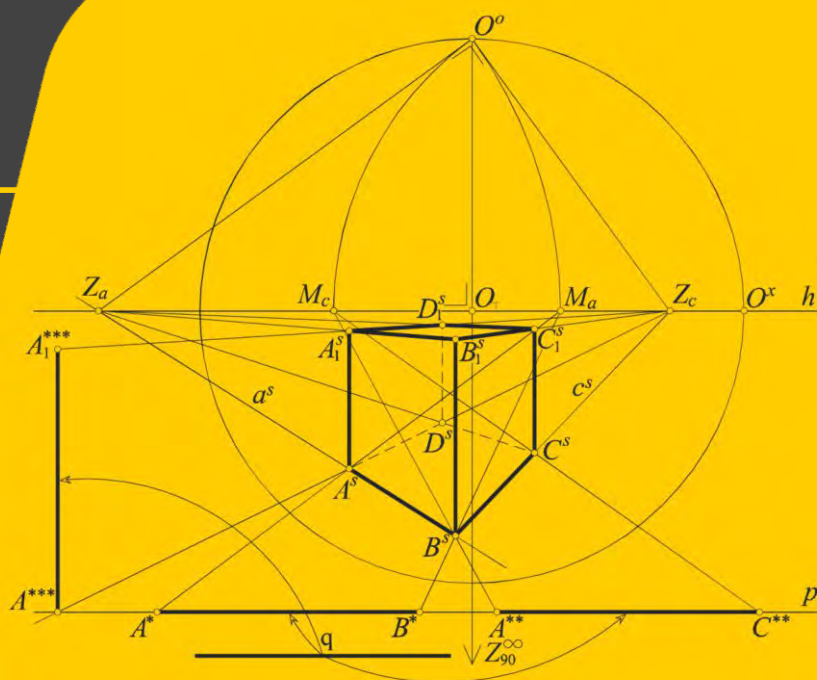


# GEOMETRIA ODWZOROWAŃ INŻYNIERSKICH

EDWIN KOŹNIEWSKI



Politechnika  
Białostocka

Edwin Koźniewski

# **GEOMETRIA ODWZOROWAŃ INŻYNIERSKICH**



**Politechnika  
Białostocka**

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ  
BIAŁYSTOK 2025

Recenzent:  
dr hab. inż. arch. Maria Helenowska-Peschke, prof. PG

Redaktor naukowy dyscypliny inżynieria lądowa, geodezja i transport:  
prof. dr hab. inż. Katarzyna Zabielska-Adamska

Redakcja i korekta językowa:  
Edyta Chrzanowska

Skład, rysunki i modele wirtualne:  
Edwin Koźniewski

Okładka:  
Marcin Dominów

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2025

ISBN 978-83-68077-94-0  
ISBN 978-83-68077-93-3 (eBook)  
DOI: 10.24427/978-83-68077-93-3



Publikacja jest udostępniona na licencji  
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0  
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie  
[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl).  
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Druk: Agencja Reklamowa TOP Anieszka Łuczak

---

Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej  
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok  
e-mail: [oficina.wydawnicza@pb.edu.pl](mailto:oficina.wydawnicza@pb.edu.pl)  
[www.pb.edu.pl](http://www.pb.edu.pl)

# Spis treści

|                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Wstęp</b> . . . . .                                                         | 7  |
| <b>Rozdział 1. Rzut aksonometryczny</b> . . . . .                              | 11 |
| 1.1. O rzutach i elementach niewłaściwych w geometrii . . . . .                | 11 |
| 1.2. Aparat rzutujący . . . . .                                                | 13 |
| 1.3. Klasyfikacja rzutów . . . . .                                             | 15 |
| 1.4. Rzut równoległy – niezmienniki . . . . .                                  | 17 |
| 1.5. Twierdzenie o punkcie węzłowym . . . . .                                  | 20 |
| 1.6. Twierdzenie Pohlkego . . . . .                                            | 22 |
| 1.6.1. Rodzaje aksonometrii . . . . .                                          | 30 |
| 1.6.2. Aksonometria prostokątna . . . . .                                      | 32 |
| 1.6.3. Przykłady rysunków aksonometrycznych . . . . .                          | 33 |
| 1.6.4. Konstrukcje w aksonometrii . . . . .                                    | 35 |
| 1.7. Cień rzucony i własny bryły w aksonometrii . . . . .                      | 36 |
| 1.8. Podsumowanie . . . . .                                                    | 38 |
| <b>Rozdział 2. Rzuty Monge’a</b> . . . . .                                     | 41 |
| 2.1. Rzuty prostokątne na dwie rzutnie. Metoda Monge’a . . . . .               | 41 |
| 2.2. Metody europejska i amerykańska . . . . .                                 | 45 |
| 2.3. Rzuty i kład odcinka . . . . .                                            | 47 |
| 2.4. Rzuty i ślady prostej . . . . .                                           | 48 |
| 2.5. Cienie w rzutach Monge’a . . . . .                                        | 51 |
| 2.6. Odwzorowanie płaszczyzny . . . . .                                        | 55 |
| 2.7. Odwzorowanie stożka, walca i sfery . . . . .                              | 61 |
| 2.8. Istota konstrukcji geometrycznej 2D. Konstrukcje klasyczne . . . . .      | 63 |
| 2.9. Zastosowania programu CAD w konstrukcji figur i brył . . . . .            | 65 |
| <b>Rozdział 3. Przenikanie brył</b> . . . . .                                  | 69 |
| 3.1. Elementy wspólne prostej (okręgu) i płaszczyzny . . . . .                 | 69 |
| 3.1.1. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w położeniu<br>rzutującym . . . . . | 69 |
| 3.1.2. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w położeniu ogólnym . . . . .       | 72 |
| 3.1.3. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w aksonometrii . . . . .            | 74 |



|                    |                                                                                     |            |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.1.4.             | Przenikanie ostrosłupów i graniastosłupów . . . . .                                 | 75         |
| 3.2.               | Transformacje rzutni lub obiektu . . . . .                                          | 81         |
| 3.2.1.             | Rzutnia boczna . . . . .                                                            | 82         |
| 3.2.2.             | Obrót figury . . . . .                                                              | 83         |
| 3.2.3.             | Przenikanie trzech ostrosłupów – wieże z przyporami . . .                           | 85         |
| 3.3.               | Cienie wzajemne w aksonometrii . . . . .                                            | 90         |
| <b>Rozdział 4.</b> | <b>Rozwiązywanie dachów . . . . .</b>                                               | <b>99</b>  |
| 4.1.               | Obroty i kłady . . . . .                                                            | 99         |
| 4.1.1.             | Kład płaszczyzny określonej przez punkt i prostą<br>warstwową . . . . .             | 101        |
| 4.1.2.             | Kład płaszczyzny określonej ogólnie . . . . .                                       | 102        |
| 4.2.               | Prostopadłość w rzutach Monge’a . . . . .                                           | 103        |
| 4.3.               | Rozwiązywanie dachów . . . . .                                                      | 107        |
| 4.3.1.             | Dachy na budynkach wolnostojących . . . . .                                         | 107        |
| 4.3.2.             | Dachy z sąsiadami . . . . .                                                         | 115        |
| 4.3.3.             | Dachy rozwiązywane za pomocą CAD . . . . .                                          | 118        |
| 4.3.4.             | Poprawność rozwiązania dachu . . . . .                                              | 125        |
| 4.3.5.             | Oś środkowa i szkielet prosty wielokąta . . . . .                                   | 127        |
| <b>Rozdział 5.</b> | <b>O krzywych i powierzchniach . . . . .</b>                                        | <b>131</b> |
| 5.1.               | Analityczny opis krzywych i powierzchni . . . . .                                   | 131        |
| 5.2.               | Niektóre sposoby tworzenia powierzchni . . . . .                                    | 131        |
| 5.2.1.             | Zakreślanie przez obrót. Powierzchnie obrotowe . . . . .                            | 132        |
| 5.2.2.             | Zakreślanie przez przesunięcie. Powierzchnie walcowe . . .                          | 134        |
| 5.2.3.             | Zakreślanie przez ruch śrubowy. Powierzchnie śrubowe . . .                          | 135        |
| 5.2.4.             | Elipsa jako obraz okręgu w powinowactwie . . . . .                                  | 137        |
| 5.2.5.             | Opisy algebraiczne elipsy . . . . .                                                 | 141        |
| 5.2.6.             | Mimośrodowa własność elipsy . . . . .                                               | 142        |
| 5.2.7.             | Przekroje stożka obrotowego . . . . .                                               | 143        |
| 5.2.8.             | Hiperboloida obrotowa i schody kręcone . . . . .                                    | 153        |
| 5.2.9.             | Konstrukcja schodów kręconych za pomocą geometrii<br>brył . . . . .                 | 161        |
| 5.2.10.            | Konstrukcja schodów kręconych realizowana poza<br>programem AutoCAD . . . . .       | 162        |
| 5.3.               | Krzywe i powierzchnie w budownictwie . . . . .                                      | 163        |
| 5.3.1.             | Powierzchnie stopnia drugiego . . . . .                                             | 163        |
| 5.3.2.             | Twierdzenia o rozpadzie linii przenikania powierzchni<br>stopnia drugiego . . . . . | 164        |
| 5.4.               | O powierzchniach prostokreślnych . . . . .                                          | 172        |
| 5.5.               | Powierzchnia siodłowa . . . . .                                                     | 178        |
| 5.6.               | O powierzchniach prostokreślnych rozwijalnych . . . . .                             | 180        |

|                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Rozdział 6. Rzut cechowany</b>                                  | 187 |
| 6.1. Definicja rzutu cechowanego                                   | 187 |
| 6.2. Rzut cechowany prostej                                        | 189 |
| 6.3. Odwzorowanie płaszczyzny                                      | 191 |
| 6.4. Elementy wspólne: płaszczyzna–płaszczyzna, płaszczyzna–prosta | 193 |
| 6.5. Prosta prostopadła do płaszczyzny                             | 194 |
| 6.6. Wzajemne położenie prostych                                   | 194 |
| 6.7. Odwzorowanie krzywych i powierzchni                           | 195 |
| 6.8. Projekt robót ziemnych przy budowie drogi                     | 199 |
| <b>Rozdział 7. Rzut środkowy</b>                                   | 211 |
| 7.1. Rzut środkowy i jego niezmienniki                             | 211 |
| 7.2. Odwzorowanie prostej                                          | 213 |
| 7.3. Odwzorowanie płaszczyzny                                      | 214 |
| 7.4. Przynależność punktu do prostej i płaszczyzny                 | 216 |
| 7.5. Elementy wspólne                                              | 217 |
| 7.6. Równoległość prostych i płaszczyzn                            | 217 |
| 7.7. Prosta prostopadła do płaszczyzny                             | 220 |
| 7.8. Kład płaszczyzny                                              | 222 |
| 7.9. Punkty mierzenia                                              | 226 |
| 7.10. Mierzenie na prostej prostopadłej                            | 227 |
| 7.11. Punkty dzielenia                                             | 237 |
| 7.12. Częściowe punkty mierzenia                                   | 238 |
| 7.13. Zasada zmniejszania                                          | 239 |
| <b>Rozdział 8. Przekształcenia geometryczne</b>                    | 243 |
| 8.1. Przekształcenia geometryczne we współrzędnych                 | 243 |
| 8.1.1. Rzutowanie w układzie współrzędnych                         | 243 |
| 8.1.2. Układy współrzędnych                                        | 244 |
| 8.1.3. Przesunięcie równoległe                                     | 248 |
| 8.1.4. Obrót                                                       | 249 |
| 8.1.5. Jednokładność                                               | 250 |
| 8.1.6. Kolineacja środkowa                                         | 251 |
| 8.1.7. Twierdzenie Desarguesa                                      | 252 |
| 8.1.8. Powinowactwo osiowe                                         | 253 |
| 8.1.9. Powinowactwo osiowe prostokątne                             | 253 |
| 8.1.10. Skalowanie                                                 | 256 |
| 8.2. Jak zmierzyć przenikające się dachy z wieżami?                | 257 |
| <b>Bibliografia</b>                                                | 263 |
| <b>Skorowidz</b>                                                   | 267 |



# Wstęp

Skrypt *Geometria odwzorowań inżynierskich* obejmuje tematykę zajęć z geometrii wykreślnej, które prowadzone są (lub były) przez autora na wydziałach budownictwa i nauk o środowisku oraz architektury Politechniki Białostockiej od ponad trzydziestu lat. Dlatego w publikacji zamieszczono rysunki z całego okresu nauczania od 1992 roku, realizowane w różnych wersjach środowiska AutoCAD. Z uwagi na obecny charakter przedmiotu i oczekiwania programów nauczania inżynierów autor świadomie nie eksponuje nazwy *geometria wykreślna*, która przy swojej szacownej historii była ważną dla inżyniera dziedziną wiedzy zarówno teoretycznej, jak i praktycznej<sup>1</sup>. Warto zwrócić uwagę, że nazwa ta nie koresponduje z nazwą *geometria opisowa*, która figuruje w wielu językach europejskich: francuskim (*Géométrie descriptive*), angielskim (*Descriptive Geometry*), niemieckim (*darstellende Geometrie*), hiszpańskim (*geometría descriptiva*), włoskim (*geometria descrittiva*), węgierskim (*ábrázoló geometria*), bułgarskim (*deskriptivna geometriya*). Jedynie po rosyjsku (*nachertatel'naya geometriya*) mamy podobieństwo z określeniem w języku polskim.

Można umownie przyjąć, że do roku 1982, tj. do ukazania się pierwszej wersji programu AutoCAD (1.0), rysunkowe części projektu wykonywane były za pomocą rysowania (kreślenia) ołówkiem lub tuszem. Do tego czasu (i oczywiście długo później aż do upowszechnienia się kom-

---

<sup>1</sup> Geometria wykreślna w Polsce może poszczycić się dokonaniem zarówno w nauce jak i w nauczaniu tego przedmiotu. Świadczą o tym znamienite postacie (wymieniamy alfabetycznie i tylko osoby z tytułem profesora): Kazimierz Władysław Bartel (1882–1941), Stanisław Garlicki (1875–1935), Bogusław Grochowski (1923–2011), Wiktor Jankowski (1913–1996), Roman Matla (1929–1990), Edward Otto (1908–1986), Franciszek Otto (1904–2000), Marian Palej (1923–2001), Zbigniew Pałasiński (1921–1991), Antoni Karol Plamitzer (1889–1954), Stanisław Polański (1919–1997), Stefan Przewłocki (ur. 1933), Franciszek Sapalski (1791–1838), Stanisław Szerszeń (1889–1975), Bronisław Ślusarczyk (1917–1982), Teofil Żebrawski (1800–1887).

puterów osobistych) rysunki były wykonywane wykreślnie. Stąd nazwa przedmiotu *geometria wykreślna*, która jako jeden z prerekwizytów podstaw projektowania, w tym rysunku technicznego, była jak najbardziej uprawniona. Wówczas „kreślenie” za pomocą cyrkla (okrąg) i linijki (prosta) odpowiadało wykonywanej czynności kreślarskiej. Każdy szczegół rysunku mógł być, czy raczej musiał być zrobiony przez kreślarza. Obecnie rysunek jest sporządzany wirtualnie za pomocą programu komputerowego i mamy do czynienia bardziej z przetwarzaniem istniejących elementów rysunku niż ich tworzeniem. Zatem student powinien być przygotowany nie tyle do kreślenia, ile do korzystania ze zintegrowanych programów komputerowych, w których tworzenie rysunku jest czynnością towarzyszącą procesowi projektowania. Potrzebna jest więc tu bardziej umiejętność tworzenia obiektu geometrycznego (figury, bryły) z danych elementów (obiektów elementarnych – entycji). Wymaga ona wyobraźni przestrzennej, znajomości własności rzutów: środkowego, równoległego (prostokątnego) oraz zasad tworzenia tych rzutów. Wszystko to stanowi główny cel niniejszego opracowania. Stąd propozycja nazwy skryptu: *geometria odwzorowań inżynierskich* wydaje się najbardziej odpowiednia.

Autor stara się realizować powyższą koncepcję nauczania geometrii na bazie konkretnych przykładów obiektów przypominających elementy budynków i budowli. Stosuje przy tym nazewnictwo figur i brył geometrycznych: dom, dach (połac, okap, kalenica), wieża. Wykorzystując je, wprowadza potrzebne pojęcia i procedury rysowania (kreślenia) obiektów geometrycznych. Stara się unikać przesadnych formalizmów, a więc nadmiernego cytowania oczywistych definicji i twierdzeń geometrycznych. Dane pojęcie, algorytm geometryczny czy procedura pojawiają się wtedy, gdy są naprawdę niezbędne.

Szczególnie rozbudowana jest tzw. *geometria dachów*, wszak na przykładzie rozwiązania dachu można podać najważniejsze konstrukcje w rzutach Monge’a<sup>2</sup>: prostopadłość prostej do płaszczyzny, konstrukcja kładu płaszczyzny na jedną z rzutni, zastosowanie zasady przynależności punktu do prostej i do płaszczyzny. Można powiedzieć, że na geometrii dachów można omówić całą teorię rzutów Monge’a. Więcej, w ujęciu tradycyjnym tylko dzięki zastosowaniu tej metody można w pełni rozwiązać dach z wyznaczeniem rzeczywistych wielkości połaci. Zaprojektowanie

---

<sup>2</sup> Gaspard Monge (1746–1818) – matematyk i inżynier francuski. W swoim dziele *Géométrie descriptive* wprowadził metodę rzutów obiektu geometrycznego na dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny – rzutnie. Uważany jest za twórcę geometrii wykreślniej, a metoda ta jest nazywana *metodą Monge’a*.

szkieletu dachu to też jego wizualizacja, czyli rysunek poglądowy. I tu dochodzimy do konieczności narysowania obiektu w aksonometrii, która jako odwzorowanie pozwala osobie postronnej „zobaczyć” obiekt bez konieczności studiowania geometrii. Omówiono ją w rozdziale pierwszym niniejszego opracowania. Zaznaczyć jednak należy, że w technologii komputerowej aksonometria, czyli rysunek aksonometryczny, a więc wizualizacja komputerowa, jest jedną z emanacji zaprojektowanego obiektu, nie zaś celem samym w sobie. Mówiąc wprost, aksonometria obiektu nie jest konstruktem, a tylko jego prezentacją.

W technologii komputerowej, np. w środowisku programu AutoCAD, zupełnie inaczej przebiega konstrukcja dachu. Po wyborze wielokąta podstawy dachu obiekt modelujemy w 3D, używając w zasadzie dwu poleceń: EXTRUDE oraz TAPER FACES.

W ostatnim rozdziale omówiono podstawowe informacje z zakresu geometrii analitycznej, czy dokładniej grafiki komputerowej. Znajdziemy w nim analityczny opis rzutów równoległego i środkowego oraz wykorzystanie współrzędnych jednorodnych do opisu izometrycznych i afinicznych przekształceń przestrzeni.

Dodajmy jeszcze, że w technologii komputerowej modelowanie 3D obiektów budowlanych może odbywać się na podstawie tzw. chmury punktów, uzyskanej ze skaningu laserowego, zawierającej istotne dane o obiekcie, takie jak: współrzędne punktów w przestrzeni, barwy poszczególnych elementów, znaczniki czasu oraz dokumentację fotograficzną.

Powierzchnie, głównie stopnia drugiego, oraz krzywe, jako ich przekroje, są referowane w aspekcie zastosowań w architekturze i w budownictwie (przekrycia) oraz w inżynierii środowiska (geometria połączeń rur). Krzywe, zwłaszcza stożkowe, jako przekroje powierzchni obrotowych: stożka (okrąg, elipsa, parabola, hiperbola) i walca (okrąg, elipsa) zaprezentowano w aspekcie różnych definicji.

Rzut środkowy został omówiony z punktu widzenia programu dla kierunku budownictwo, ale tak, by można było kontynuować wykład w drugiej części skryptu z myślą o kierunkach architektury, architektury wnętrz, gospodarki przestrzennej czy też architektury krajobrazu.

Na zakończenie warto jeszcze zauważyć, że podstawą narracji wykładu jest sekwencyjna historia obrazów (film rysunkowy) prowadzona ze szczupłym uzupełnieniem tekstowym, przypominająca komiks. Uzasadnieniem przyjęcia takiej formy wykładu jest z jednej strony przedmiot pracy inżyniera budownictwa – tworzenie modeli geometrycznych realnych obiektów, z drugiej zaś – łatwość percepcji wizualnej Czytelnika.

Czytelnikom korzystającym z niniejszego opracowania autor będzie wdzięczny za wszystkie zauważone usterki, a także za sugestie dotyczące zarówno treści, jak i formy.

## Rozdział 1

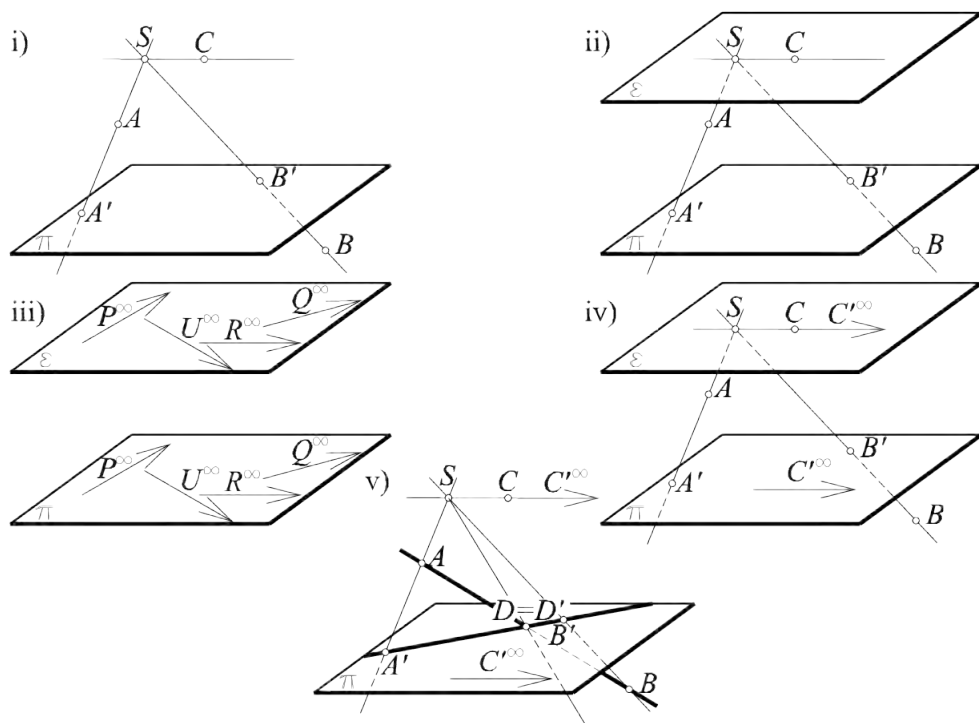
# Rzut aksonometryczny

### 1.1. O rzutach i elementach niewłaściwych w geometrii

Przy rzutowaniu przestrzeni euklidesowej  $E^3$  mamy do czynienia z płaszczyzną  $\pi$  zwaną *rzutnią* oraz *środkiem rzutowania*  $S$  lub *kierunkiem rzutowania*  $S^\infty$  nieleżącym na płaszczyźnie  $\pi$ . *Rzutem* punktu  $X$ , różnego od  $S$ , z punktu  $S$  na płaszczyznę  $\pi$  nazywamy punkt  $X'$  przebiecia tej płaszczyzny prostą  $SX$ . Prostą  $SX$  nazywamy *prostą rzutującą* lub *promieniem rzutującym* punktu  $X$ . Rzut jest więc przekształceniem postaci:  $f : E^3 - \{S\} \mapsto \pi$ . Dokładniej jest to przekształcenie  $f : E^3 - \varepsilon \mapsto \pi$ , gdzie  $\varepsilon$  jest płaszczyzną przechodzącą przez punkt  $S$  i równoległą do płaszczyzny  $\pi$ . Rzutem punktu  $A$  jest punkt  $A'$ , punktu  $B$  punkt  $B'$ , punkt  $C$  zaś nie ma rzutu, ponieważ  $C \in \varepsilon$  (rys. 1.1). Promień  $SC$  nie przecina płaszczyzny  $\pi$ . Wygodniej byłoby jednak, gdyby wszystkie punkty, oprócz punktu  $S$  miały swoje rzuty. Możemy więc umówić się, że prosta  $SC \parallel \pi$  ma z rzutnią punkt wspólny. Taki „punkt”, a w rzeczywistości kierunek, nazywać będziemy *punktem w nieskończoności* lub *punktem niewłaściwym* w odróżnieniu od dotychczasowych punktów, które nazywać będziemy *punktami właściwymi* lub krótko *punktami*. Punkty niewłaściwe oznaczać będziemy przez  $A^\infty, B^\infty, \dots$ . Dlaczego takie punkty nazywamy punktami w nieskończoności, o tym przekonują nas fotografie i rysunki (rys. 1.2, 1.3). Równoległe krawędzie korony drogi, krawędzie ścian budynku lub innego obiektu budowlanego „przecinają się” gdzieś bardzo daleko. Jest to zresztą jedna z własności rzutu środkowego na którego zasadzie oparte jest nasze widzenie. Punkty niewłaściwe mają te same własności geometryczne co punkty euklidesowe i w związku z tym nic nie stoi na przeszkodzie, by uznać je za „normalne” punkty. Na dowolnej prostej leży zatem dokładnie jeden punkt niewłaściwy (kierunek tej



prostej). Prostą uzupełnioną punktem niewłaściwym nazywać będziemy *prostą rzutową*. Zbiór wszystkich punktów niewłaściwych (kierunków w przestrzeni euklidesowej  $E^3$ ) nazywać będziemy *płaszczyzną niewłaściwą* i oznaczać przez  $\omega^\infty$ . Przestrzeń euklidesową uzupełnioną wszystkimi punktami niewłaściwymi nazywać będziemy *przestrzenią rzutową z wyróżnionymi elementami niewłaściwymi* i oznaczać będziemy przez  $P^3$  (t.j.  $P^3 = E^3 \cup \omega^\infty$ ). Wówczas rzut  $g$  przestrzeni rzutowej  $P^3$  na płaszczyznę właściwą  $\pi$  zapiszemy w postaci  $g : P^3 - \{S\} \mapsto \pi$ .



Rysunek 1.1: W przestrzeni euklidesowej  $E^3$ : i) punkt  $C$  nie ma rzutu, ii) płaszczyzna  $\epsilon$  jest zbiorem wszystkich punktów, które nie mają rzutów; w przestrzeni rzutowej  $P^3$ : iii) dwie płaszczyzny równoległe mają nieskończenie wiele wspólnych punktów niewłaściwych, mają więc wspólną prostą niewłaściwą (zbiór wszystkich kierunków równoległych do płaszczyzny), iv), v) rzutem punktu  $C$  jest punkt niewłaściwy  $C'^\infty$

Po przyjęciu powyższej umowy na płaszczyźnie, i w przestrzeni geometrycznej, spełnione są np. takie własności: *każde dwie proste na płaszczyźnie przecinają się lub każda prosta w przestrzeni ma punkt wspólny z dowolną płaszczyzną*. Pozostają prawdziwe takie zdania jak: *przez każde*

dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta. Co więcej, jeżeli zdanie, które mówi o punktach i prostych na płaszczyźnie (punktach i płaszczyznach w przestrzeni), jest prawdziwe, to również prawdziwe jest zdanie, gdy zamienimy punkty na proste, proste na punkty (punkty na płaszczyzny, płaszczyzny na punkty w przestrzeni), a relację „przechodzi” na „leży na” i odwrotnie. Zasadę tę nazywamy *dualnością*, a pary elementów (punkt, prosta) na płaszczyźnie, (punkt, płaszczyzna) w przestrzeni nazywamy *dualnymi*. Obiekty dualne na płaszczyźnie to *trójkąt–trójbok*, *czworokąt–czworobok*. Jak wytłumaczyć analitycznie pojęcie punktu niewłaściwego (w nieskończoności)? Czy proste równoległe mają wspólny punkt? <sup>1</sup>

## 1.2. Aparat rzutujący

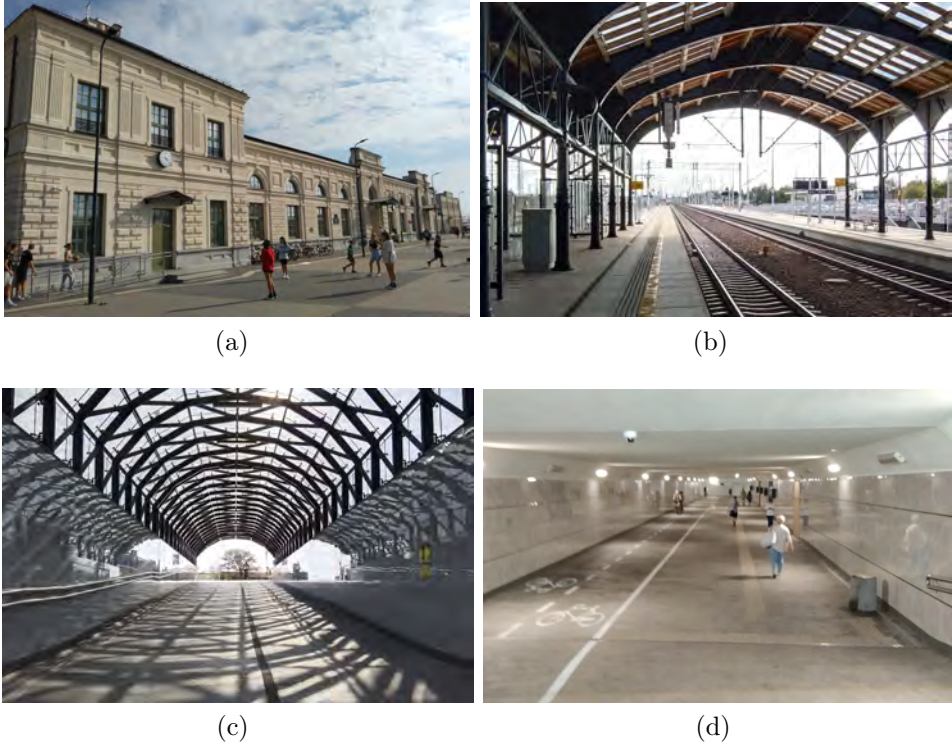
Po tak przyjętych umowach *aparat rzutujący* stanowi para obiektów: (*punkt, płaszczyzna*) czyli (*środek rzutowania, rzutnia*), symbolicznie: ( $S, \pi$ ). W przypadku, gdy punkt  $S$  jest niewłaściwy ( $S = K^\infty$  (rys. 1.6)), otrzymujemy aparat *rzutu równoległego* ( $K^\infty, \pi$ ), zaś w przypadku, gdy punkt  $S$  jest właściwy otrzymujemy aparat *rzutu środkowego* ( $S, \pi$ ). W przyrodzie spotykamy w zasadzie takie modele. Są to m.in.: proces powstawania obrazu w oku, w aparacie fotograficznym, cień rzucony przez przedmiot przy oświetleniu punktowym (żarówka); natomiast uproszczonym modelem rzutu równoległego jest (w zadowalającym nas przybliżeniu) światło słoneczne.

---

<sup>1</sup> Rozważmy układ równań przedstawiający dwie proste równoległe, a następnie przekształćmy go, wprowadzając dla punktu  $(x, y)$  o współrzędnych  $x, y$  współrzędne jednorodne  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{array} \right. \equiv \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \\ x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad x_3 \neq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 = x_3 \end{array} \right.$$

Układ powyższy ma rozwiązanie, jeżeli jedną z dwu pierwszych zmiennych potraktujemy jako parametr. Otrzymujemy wówczas rozwiązanie postaci  $(x_1, x_2, x_3) = t(-1, 1, 0)$ , gdzie  $t = x_2$ ,  $t \in R$ . Rozwiązanie to (nieskończenie wiele trójek liczb we współrzędnych jednorodnych) interpretujemy jako punkt niewłaściwy (trzecia współrzędna równa zero).



Rysunek 1.2: Obserwacja realnych obiektów zawierających linie równoległe uzasadnia uzupełnienie przestrzeni elementami niewłaściwymi; wystarczy choćby krótki spacer po dworcu kolejowym w Białymstoku: a) budynek dworca z roku 1862; b) perony; c) wejście do przejścia podziemnego; d) przejście podziemne, fot. autor

Tak określony rzut

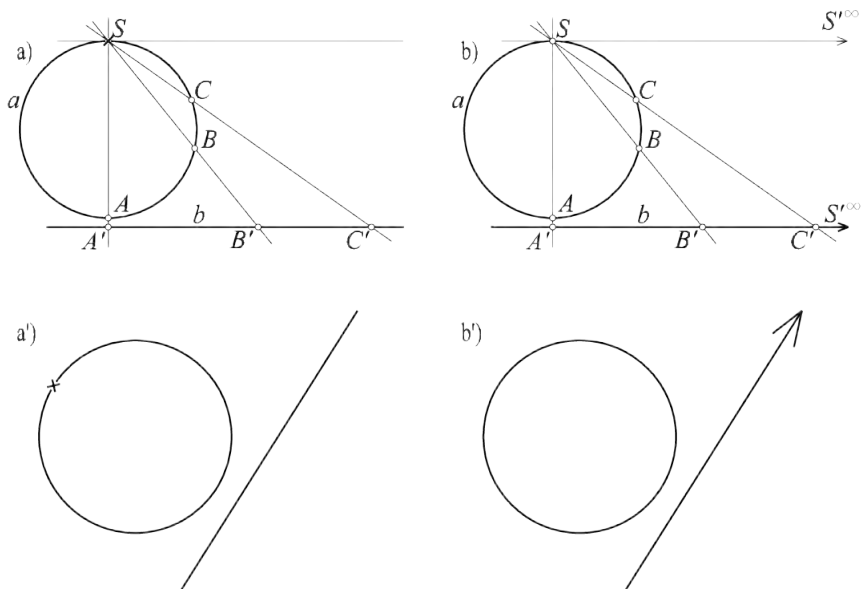
$$g : P^3 - \{S\} \mapsto \pi$$

jest przekształceniem przestrzeni  $P^3$  z wyłączeniem punktu  $S$ , na płaszczyznę  $\pi$ . Obowiązują więc wszystkie, znane z matematyki, własności odwzorowań. W szczególności: jeżeli przez  $\mathbb{F}$  i  $\mathbb{G}$  oznaczmy dwie dowolne figury zawarte w przestrzeni  $P^3$  ( $\mathbb{F}, \mathbb{G} \subseteq P^3$ ), to:

$$\mathbb{F} \subseteq \mathbb{G} \mapsto g(\mathbb{F}) \subseteq g(\mathbb{G}) \quad (1.1)$$

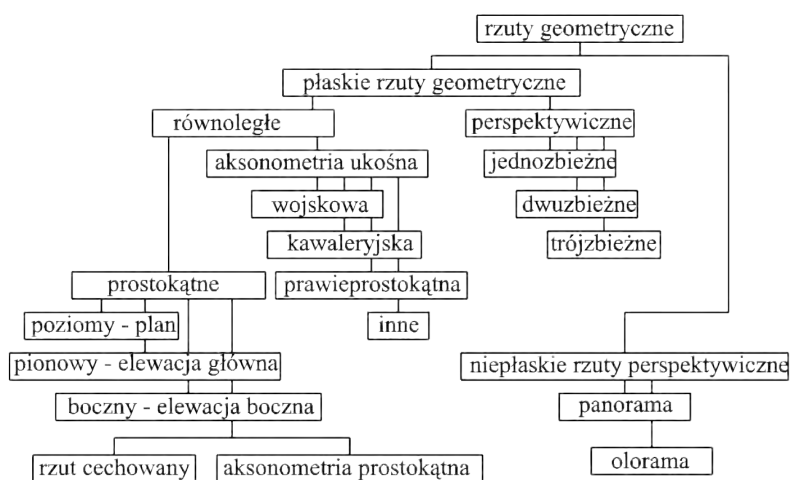
$$A \in \mathbb{F} \cap \mathbb{G} \mapsto g(A) \in g(\mathbb{F}) \cap g(\mathbb{G}) \quad (1.2)$$

Warunek (1.1) oznacza w szczególności **przynależność rzutu punktu należącego do figury do rzutu tej figury**, warunek (1.2) oznacza **przecinanie się rzutów figur przecinających się**.



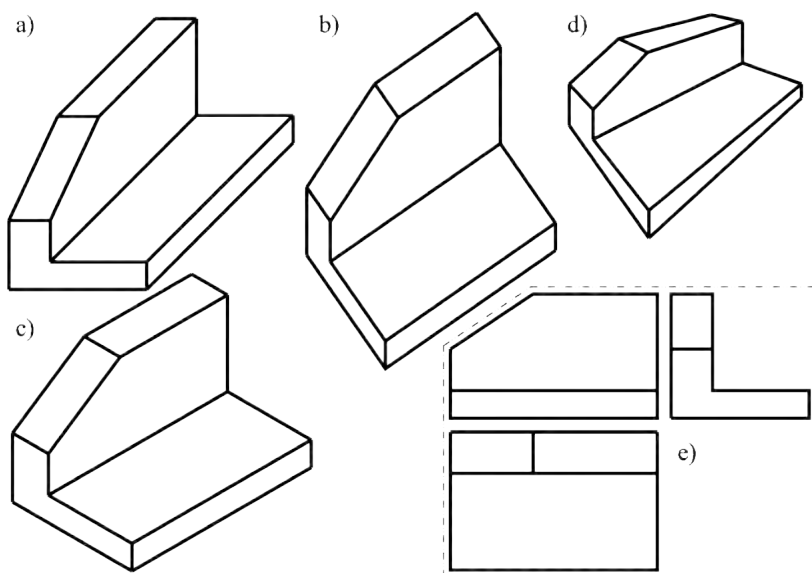
Rysunek 1.3: Proste euklidesowa i rzutowa; a) odwzorowanie okręgu na prostą euklidesową – punkt  $S$  nie ma swojego obrazu, a') prosta euklidesowa ma o jeden punkt mniej niż okrąg; b) odwzorowanie okręgu na prostą rzutową – obrazem punktu  $S$  jest punkt  $S'^{\infty}$ , b') prosta rzutowa ma tyle samo punktów co okrąg

### 1.3. Klasyfikacja rzutów



Rysunek 1.4: Jeden z przykładów klasyfikacji rzutów

Rzuty aksonometryczne wyszczególnione na rysunku 1.4 służą do poglądowego przedstawiania obiektów trójwymiarowych na płaszczyźnie. Zwykle są to obiekty o mniejszych wymiarach, np. meble (rysunki ofertowe, ilustrujące sposób montażu regału, komody itp.). Według własności rzutów perspektywicznych najczęściej wykonujemy realistyczne rysunki, obrazy, szkice, na których przedstawiamy obiekty większe, budynki, drogi, zespoły budynków. Natomiast rzuty prostokątne służą do tworzenia dokumentacji technicznej. Obecnie coraz częściej, rzuty obiektu są jego pochodną w *geometrii brył*, czyli w technologii 3D. Wówczas zarówno aksonometria, perspektywa, jak i rzuty prostokątne powstają w wyniku operacji  $3D \mapsto 2D$  gwarantowanych przez środowisko.

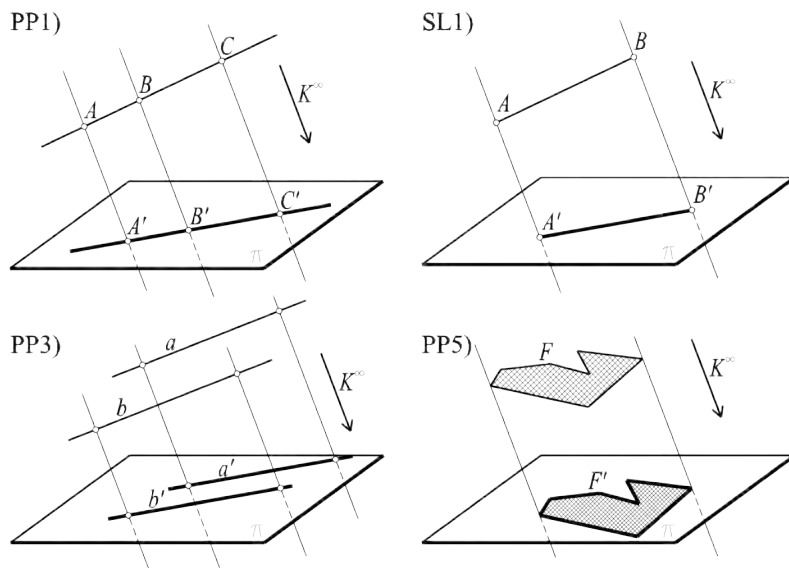


Rysunek 1.5: Przykłady różnych rzutów tego samego obiektu: a) aksonometria ukośna, b) dimetria wojskowa, c) izometria równokątna, d) perspektywa (dwuzbieżna), e) trzy rzuty prostokątne

Na rysunku 1.5 przedstawiliśmy figurę w różnych rzutach, które będziemy omawiać w kolejnych rozdziałach tego skryptu. Na początku założyliśmy, że rzutnia jest płaszczyzną i takie rzuty (rzutowania) nazywamy *rzutami (rzutowaniami) płaskimi*. W przyrodzie i praktycznej działalności człowieka spotykamy rzuty (rzutowania), w których rzutnią jest pewna powierzchnia, np. walca, sfery. O rzutach takich mówi się zwłaszcza w kontekście rzutu środkowego. Rzut środkowy na sferze (gdy sfera

jest rzutnią) nazywamy *oloramą*, rzut środkowy na walcu (gdy rzutnią jest powierzchnia) nazywamy *panoramą* [6].

## 1.4. Rzut równoległy – niezmienniki



Rysunek 1.6: Ilustracja trzech niezmienników rzutu równoległego oraz jednej z własności bezpośrednio wynikającej z dwóch pierwszych niezmienników

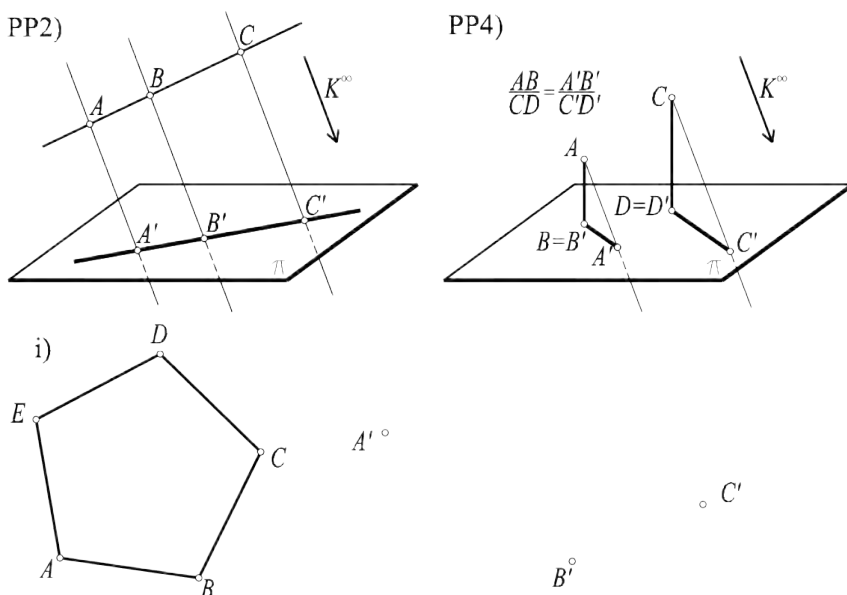
Aby osiąść umiejętności wykonywania rzutów zadanych figur geometrycznych, ich odtwarzania (restytucji) na podstawie rzutów oraz analizowania własności figur na podstawie ich rzutów dobrze jest znać własności, które nie zmieniają się przy rzutowaniu równoległym. Własności takie nazywać będziemy *niezmiennikami*. Niezmiennikami rzutu równoległego są:

**PP1:** *współliniowość punktów – w rzucie równoległym rzuty trzech punktów leżących na jednej prostej leżą na jednej prostej* (rys. 1.6).

Zanim sformułujemy drugi niezmiennik, wprowadzimy wcześniej pojęcie stosunku podziału odcinka.

Niech dany będzie odcinek  $[AB]$  oraz punkt  $C \neq B$ . *Stosunkiem podziału odcinka  $[AB]$  punktem  $C$*  nazywamy liczbę <sup>2</sup>  $(AB, C) = \begin{cases} \frac{AC}{BC} & \text{gdy } \neg \mathbf{B}(ACB), \\ -\frac{AC}{BC} & \text{gdy } \mathbf{B}(ACB), \end{cases}$  gdzie symbol  $\mathbf{B}(ACB)$  oznacza, że punkt  $C$  leży między punktami  $A$  i  $B$ ,  $\neg$  jest symbolem negacji.

**PP2:** *stosunek podziału odcinka – rzut równoległy zachowuje stosunek podziału odcinka, czyli  $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$  (rys. 1.7).*



Rysunek 1.7: Ilustracja geometryczna pozostałych dwóch niezmienników rzutu równoległego oraz założenia do przykładu 1.1 (cdn.)

Niezmiennik **PP2** w połączeniu z **PP1** mówi w szczególności o tym, że

**SL1:** *rzutem równoległym prostej jest prosta, odcinka zaś odcinek* (rys. 1.6).

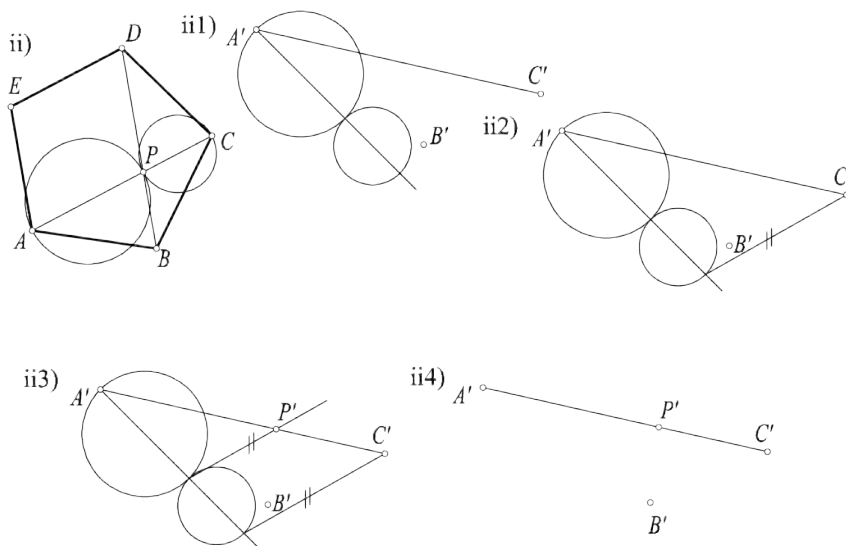
<sup>2</sup> Definicja stosunku podziału odcinka ma swoje źródło w interpretacji wektorowej. Mianowicie stosunek podziału  $(AB, C)$  odcinka  $[AB]$  punktem  $C (C \neq B)$  określa się jako liczbę  $\lambda$  taką, że  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BC}$ . Stąd właśnie wynika, że stosunek podziału  $\lambda = (AB, C)$  odcinka  $[AB]$  punktem  $C$  leżącym między punktami  $A, B$  jest liczbą ujemną. Wszak wektory  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$  mają wtedy przeciwne zwroty.

**PP3:** równoległość prostych, tj. rzuty dwu prostych równoległych są prostymi równoległymi (rys. 1.6).

**PP4:** stosunek długości odcinków równoległych do siebie, nierównoległych do kierunku rzutu, jest zachowany w rzucie równoległym (rys. 1.7).

**PP5:** związki miarowe figury płaskiej równoległej do rzutni, tzn. rzutem równoległym figury płaskiej równoległej do rzutni jest figura do niej przystająca (rys. 1.6).

**Przykład 1.1.** Dany jest rzut równoległy  $A', B', C'$  trzech wierzchołków  $A, B, C$  pięciokąta foremnego  $[ABCDE]$  (rys. 1.7). Uzupełnić obrazy pozostałych (dwóch) wierzchołków w tym rzucie.

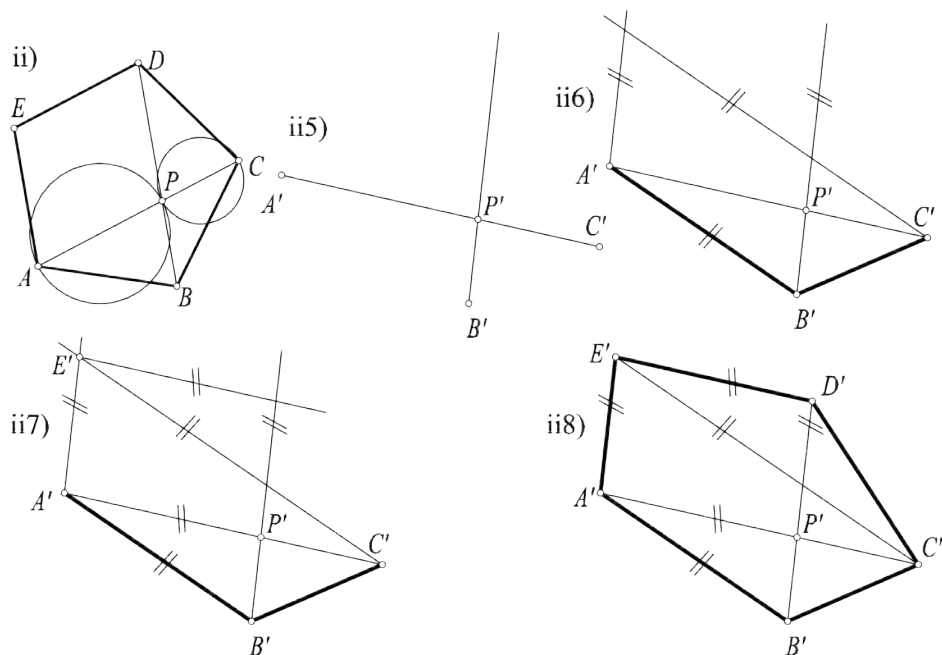


Rysunek 1.8: Konstrukcja rzutu pięciokąta foremnego – przykład wykorzystania niezmiennika PP2 – podział odcinka  $[A'C']$  w stosunku  $(AC, P)$ . Okręgi o środkach na odcinkach wskazują na równość odpowiednich odcinków (cdn.)

Rysunki 1.8, 1.9 stanowią ilustrację konstrukcji pięciokąta foremnego w rzucie równoległym na podstawie danych obrazów trzech wierzchoł-



ków owego pięciokąta w tym rzucie, tj. *rozwiązanie zagadnienia z przykładu 1.1*:



Rysunek 1.9: Konstrukcja rzutu równoległego pięciokąta foremnego (cd.) – przykład trzykrotnego wykorzystania niezmiennika **PP3**

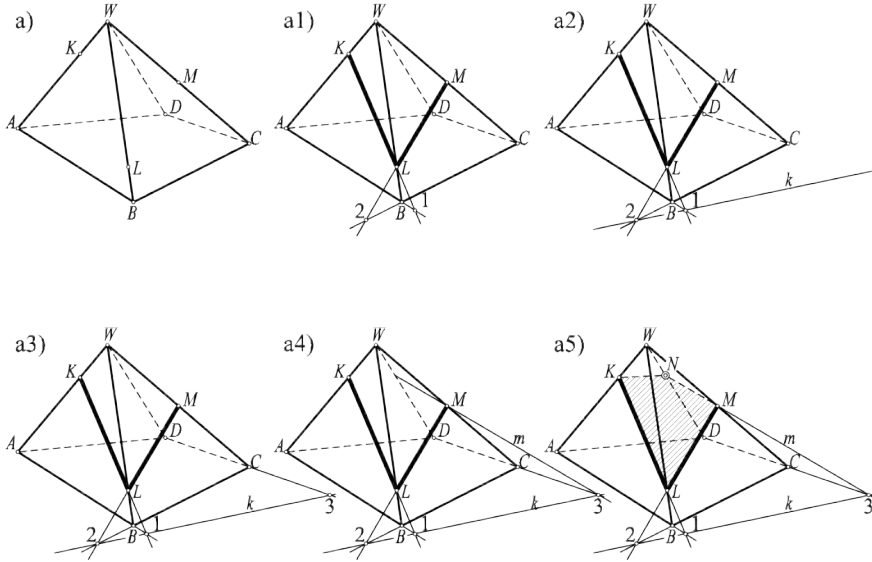
## 1.5. Twierdzenie o punkcie węzłowym

Przy kreśleniu przekrojów figur przestrzennych płaszczyznami wygodnie jest posługiwać się prostym twierdzeniem.

**Twierdzenie 1.1.** W danej trójce płaszczyzn krawędzie jej poszczególnych par pokrywają się lub są trzema różnymi prostymi przecinającymi się w jednym punkcie.

Rozwiążmy następujący problem.

**Przykład 1.2.** Dany jest ostrosłup czworokątny  $[ABCDW]$  o podstawie  $[ABCD]$  na płaszczyźnie  $\alpha$  oraz płaszczyzna  $\beta(KLM)$  określona przez punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na krawędziach  $[AW], [BW], [CW]$ . Wyznaczyć przekrój  $[ABCDW] \cap \beta$ .



Rysunek 1.10: Konstrukcja przekroju ostrosłupa  $[ABCDW]$  płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na krawędziach bocznych  $[AW]$ ,  $[BW]$ ,  $[CW]$

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 1.2. Rozważmy kolejno trzy trójki płaszczyzn  $\alpha, \beta, \gamma_1(ABW)$ ;  $\alpha, \beta, \gamma_2(BCW)$ ;  $\alpha, \beta, \gamma_3(CDW)$  oraz odpow-

wiednie diagramy. Diagram  $\underbrace{\gamma_1}_{(AB)} \alpha \xleftarrow{k(??) \rightarrow 1} \beta$  pokazuje, że proste  $(AB)$

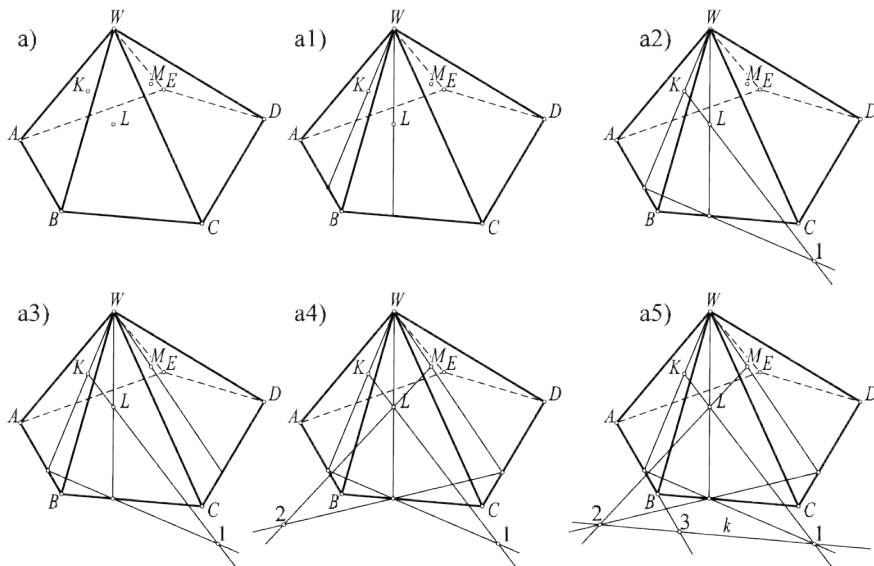
i  $(KL)$  mają wspólny punkt 1 oraz szukana krawędź  $k(??)$  (symbole ?? oznaczają dwa nieznane punkty szukanej prostej) przechodzi przez

punkt 1 (rys. 1.10a1). Diagram  $\underbrace{\gamma_2}_{(BC)} \alpha \xleftarrow{k(1?) \rightarrow 2} \beta$  pokazuje, że proste

$(BC)$  i  $(LM)$  mają wspólny punkt 2, więc szukana krawędź  $k$  przecho-

dzi również przez punkt 2 (rys. 1.10a2). Diagram  $\underbrace{\alpha \beta \xleftarrow{m(M?) \rightarrow 3}}_k \gamma_3$

pokazuje, że proste  $k$  i  $(CD)$  mają wspólny punkt 3 oraz szukana krawędź  $m$  przechodząca przez punkt  $M$  przechodzi również przez punkt 3 (rys. 1.10a3, 1.10a4). Przecięcie  $(DW) \cap m = \{N\}$  prostych  $(DW)$ ,  $m$  daje szukany punkt  $N$  (rys. 1.10a4, 1.10a5).



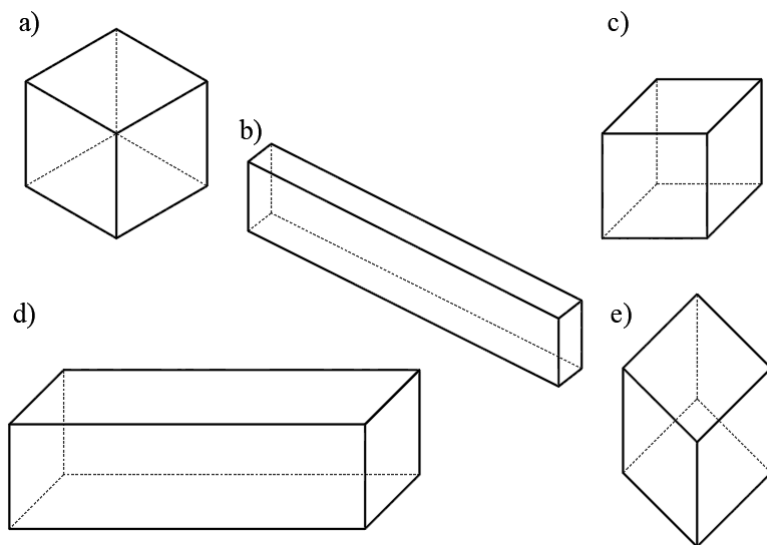
Rysunek 1.11: Konstrukcja przekroju ostrosłupa  $[ABCDW]$  płaszczyzną przechodzącą przez trzy punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na ścianach  $[ABW]$ ,  $[BCW]$ ,  $[CDW]$ . Pierwsze etapy polegające na znalezieniu krawędzi  $k$

**Przykład 1.3.** Dany jest ostrosłup pięciokątny  $[ABCDEW]$  o podstawie  $[ABCDE]$  na płaszczyźnie  $\alpha$  oraz płaszczyzna  $\beta(KLM)$  określona przez punkty  $K, L, M$  leżące odpowiednio na ścianach  $[ABW]$ ,  $[BCW]$ ,  $[CDW]$ . Wyznaczyć przekrój  $[ABCDEW] \cap \beta$ .

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 1.3. W celu wyznaczenia pomocniczej prostej  $k$  (rys. 1.11a5), a więc wcześniej punktów 1, 2, wyznaczamy płaszczyzny pomocnicze  $[KLW]$  (rys. 1.11a1, 1.11a2),  $[LMW]$  (rys. 1.11a3, 1.11a4); łącząc punkty 3,  $K$  (rys. 1.11a5), kontynuujemy podobnie jak w przykładzie 1.2 (rys. 1.10).

## 1.6. Twierdzenie Pohlkego

Spójrzmy na rysunek 1.12. Który z przedstawionych tam obrazów możemy uznać za rzut równoległy sześcianu? Szkicując odręcznie lub za pomocą przyrządów obiekty przestrzenne, być może nie zastanawialiśmy się, na ile dowolnie można wykonać to zadanie. Jakie zasady należy zachować, by np. odwzorowana figura mogła być uznana za rzut równoległy sześcianu?

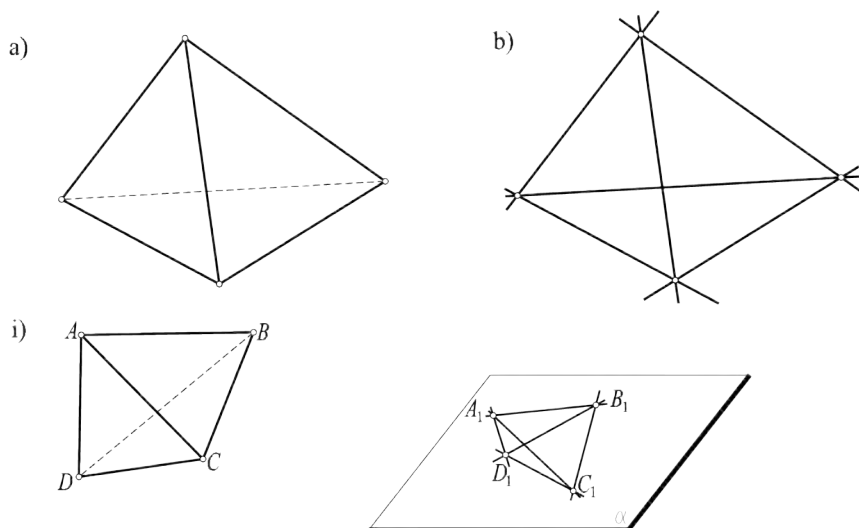


Rysunek 1.12: Którą z przedstawionych figur możemy uznać za rzut równoległy sześcianu?

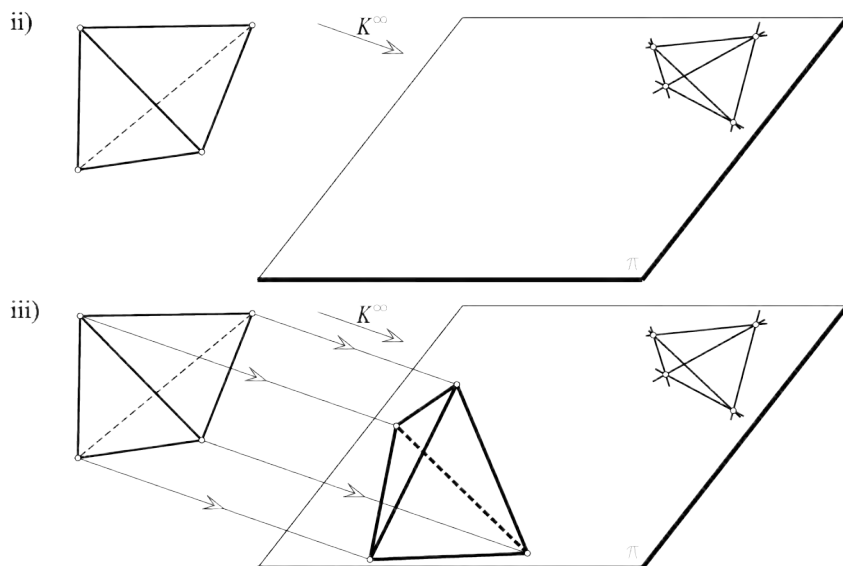
Odpowiemy teraz na to pytanie. Okazuje się, że przy tworzeniu rysunków – jak to często mówimy – poglądowych mamy dość dużą swobodę. Prawdziwe jest bowiem następujące.

**Twierdzenie 1.2** (Pohlkego). Każdy czworokąt można zrzutować równolegle na czworokąt zupełny podobny do z góry danego czworokąta zupełnego.

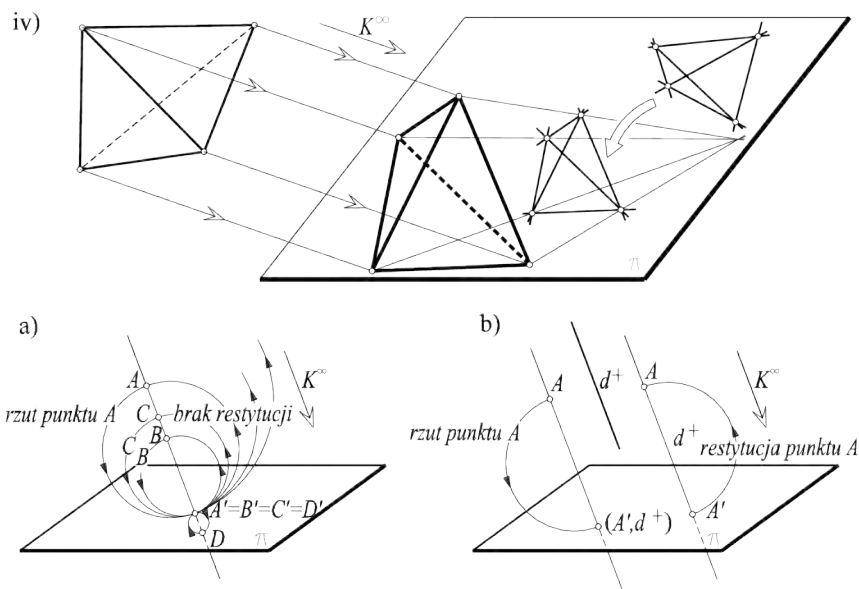
Inaczej, każdy *czworokąt zupełny* (rys. 1.13b) *może być uważany, przy pominięciu skali, za rzut równoległy danego czworokątianu* (rys. 1.13a). Dowód tw. Pohlkego można znaleźć w podręczniku [5]. Ilustrację twierdzenia Pohlkego zawierają rysunki: rys. 1.13i, 1.14, 1.15iv. Zanim wykorzystamy tę własność do opisanie pewnej metody odwzorowania przestrzeni na płaszczyznę, zauważmy, że rzutem równoległym dowolnego punktu danego promienia rzutującego (prostej rzutującej) jest ten sam punkt. Rzut równoległy nie jest więc *odwzorowaniem odwracalnym* (*restytuowalnym*), tzn. na podstawie rzutu  $A'$  punktu  $A$  nie można odtworzyć położenia samego punktu  $A$ . Ale wystarczy podać np. względną odległość w określonej skali i już punkt jest restytuowalny (rys. 1.15a, 1.15b).



Rysunek 1.13: a) Czworoscian przedstawiony w pewnym rzucie, b) czworokąt zupełny – zbiór czterech punktów, z których każde trzy są niewspółliniowe, i sześciu prostych przechodzących przez te punkty, i) założenia do twierdzenia Pohlkego: dla dowolnego czworoscianu i czworokąta zupełnego zawartego w płaszczyźnie  $\alpha$



Rysunek 1.14: Ilustracja twierdzenia Pohlkego: ii) istnieją rzutnia  $\pi$  i kierunek  $K^\infty \dots$ , iii) ...takie, że rzutem równoległym czworoscianu jest czworokąt zupełny...



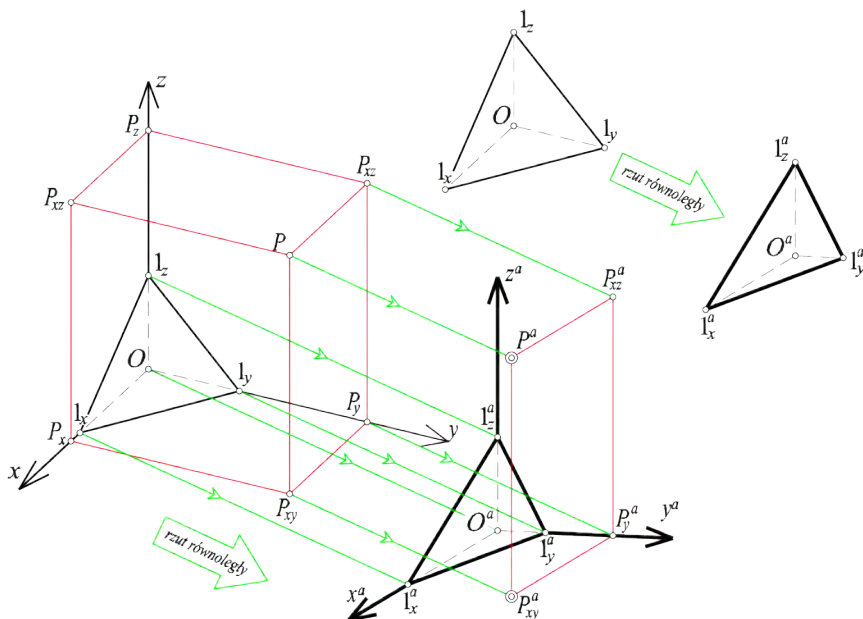
Rysunek 1.15: Ilustracja twierdzenia Pohlkego (cd.): iv) ...podobny do danego czworokąta zupełnego, a) rzut równoległy nie jest restytuowalny, b) restytucja punktu  $A$  jest możliwa, gdy oprócz rzutu  $A'$  znamy odległość względną  $d^+$  punktu od rzutni mierzoną równoległe do kierunku rzutowania

Oprócz rzutu równoległego potrzebna więc będzie jeszcze dodatkowa informacja. W zależności od tego otrzymamy różne metody odwzorowania przestrzeni na płaszczyznę. Interesować nas będą te odwzorowania, które są użyteczne w pracy inżyniera. Pierwszą, którą omówimy, jest *metoda aksonometryczna*. Polega ona na tym, że każdy punkt jest rzutowany wraz ze swoim środowiskiem, mianowicie z prostokątnym układem współrzędnych i swymi współrzędnymi.

Zauważmy, że układ współrzędnych  $Oxyz$  jest jednoznacznie określony, gdy znany jest początek układu  $O$  oraz trzy punkty jednostkowe osi:  $1_x, 1_y, 1_z$ . Układ współrzędnych jest więc określony, gdy dany jest czworokąt  $[O1_x1_y1_z]$ . Rzutując równoległe przestrzeń, czyli dowolny punkt  $P$  o współrzędnych geometrycznych (punktach)  $P_x, P_y, P_z$ , wraz z ustalonym układem współrzędnych w rzeczywistości rzutujemy trzy punkty  $P_x, P_y, P_z$  i czworokąt  $[O1_x1_y1_z]$ . Otrzymujemy, zgodnie z twierdzeniem Pohlkego, czworokąt zupełny  $[O^a1_x^a1_y^a1_z^a]$  podobny do dowolnie przyjętego czworokąta zupełnego oraz rzut równoległy  $P^a$  punktu  $P$ , czyli punkty  $P_x^a, P_y^a, P_z^a$ . Dowolność kształtu czworokąta zupełnego  $[O^a1_x^a1_y^a1_z^a]$  indu-

kuje tzw. *wektor zniekształcenia* (deformacji)  $[s_x, s_y, s_z]$ , którego współrzędne wyrażają następująco:

$$s_x = \frac{O^a l_x^a}{O l_x}, s_y = \frac{O^a l_y^a}{O l_y}, s_z = \frac{O^a l_z^a}{O l_z}. \quad (1.3)$$



Rysunek 1.16: Ilustracja rzutu aksonometrycznego

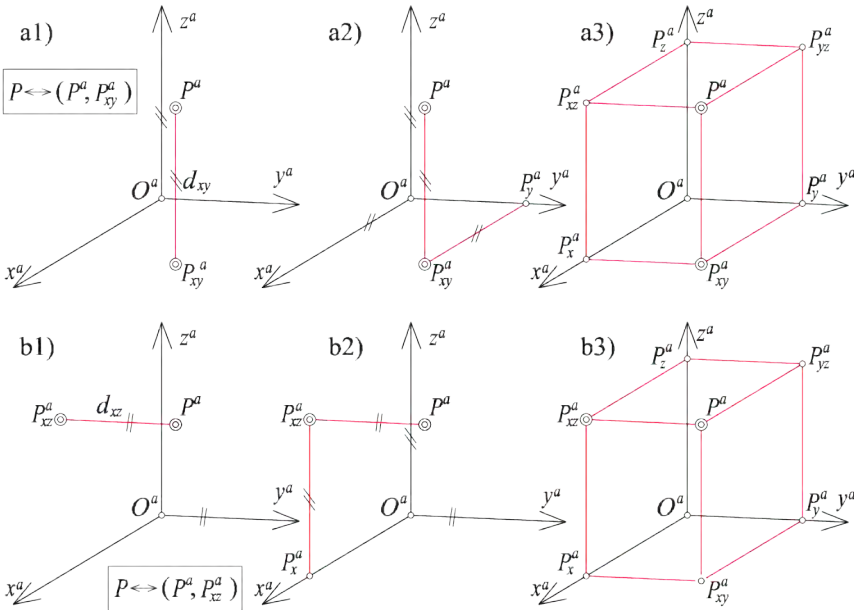
Rzut równoległy zachowuje stosunek podziału odcinka. Zatem między współrzędnymi punktu  $P$  i współrzędnymi jego rzutu aksonometrycznego  $P^a$  zachodzą równości  $O^a P_x^a = s_x O P_x$ ,  $O^a P_y^a = s_y O P_y$ ,  $O^a P_z^a = s_z O P_z$  z uwzględnieniem uporządkowania punktów (rys. 1.16). Zauważmy ponadto, że aby wyznaczyć współrzędne dowolnego punktu  $P$ , wystarczy znać położenie rzutu układu współrzędnych  $[O^a l_x^a l_y^a l_z^a]$  i dwa punkty: rzut aksonometryczny  $P^a$  punktu  $P$  i rzut aksonometryczny  $P_r^a$  rzutu prostokątnego  $P_r$  punktu  $P$  na dowolną oś lub płaszczyznę układu. Mamy zatem wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$P \longleftrightarrow (P^a, P_r^a), \quad (1.4)$$

gdzie  $r \in \{x, y, z, xy, yz, xz\}$  (rys. 1.17). Ponadto warto zauważyć, że parę  $(P^a, P_r^a)$  możemy równoważnie przedstawić jako parę  $(P^a, d_{r*})$ , co symbolicznie możemy zapisać

$$(P^a, P_r^a) \longleftrightarrow (P^a, d_{r*}), \quad (1.5)$$

gdzie  $r \in \{x, y, z, xy, yz, xz\}$ , a  $*$   $\in \{x, y, z\} - \{r\}$  dla  $r \in \{x, y, z\}$  oraz  $*$   $=''$  (znak pusty), gdy  $r \in \{xy, xz, yz\}$ . Stąd położenie dowolnego punktu jest określone, gdy mamy jego rzut i odległość od pewnej płaszczyzny układu współrzędnych (dokładniej rzutu równoległego płaszczyzny układu współrzędnych).



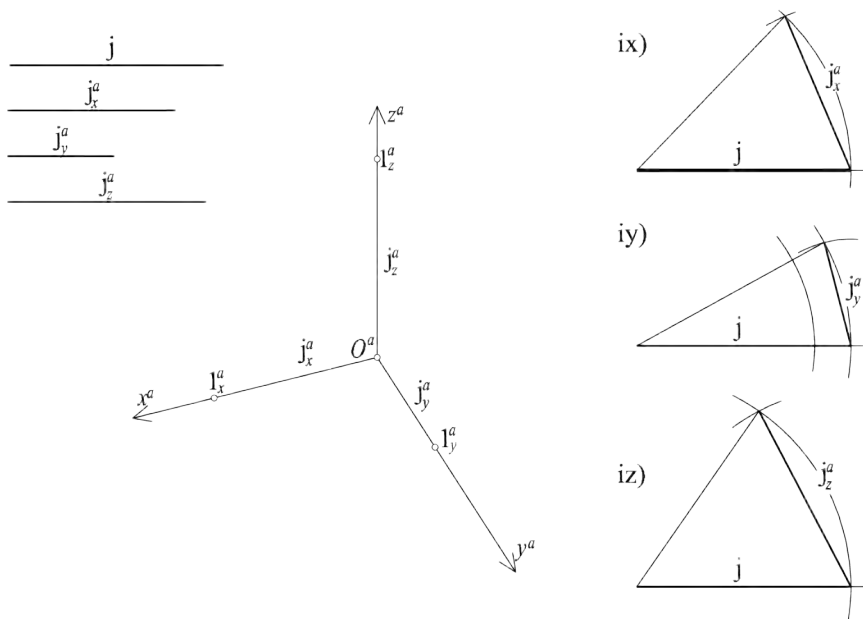
Rysunek 1.17: Identyfikacja rzutu aksonometrycznego punktu

Podobnie odcinek, prosta, półprosta w aksonometrii będą reprezentowane przez dwa swoje rzuty. Prosta  $p$  może być reprezentowana przez parę  $(p^a, p_r^a)$ , odcinek  $[AB]$  – przez parę  $([A^a B^a], [A_r^a B_r^a])$ .

Aparat rzutu aksonometrycznego określony jest przez układ osi  $O^a x^a y^a z^a$  oraz wektor zniekształceń  $[s_x, s_y, s_z]$ . Zgodnie z twierdzeniem Pohlkego układ osi możemy przyjąć dowolnie, podobnie jak wektor zniekształceń. Pewne aparaty rzutu aksonometrycznego mają swój prak-



tyczny sens i historyczne nazwy. Niektóre z nich wyróżnimy i omówimy w kolejnym podrozdziale.

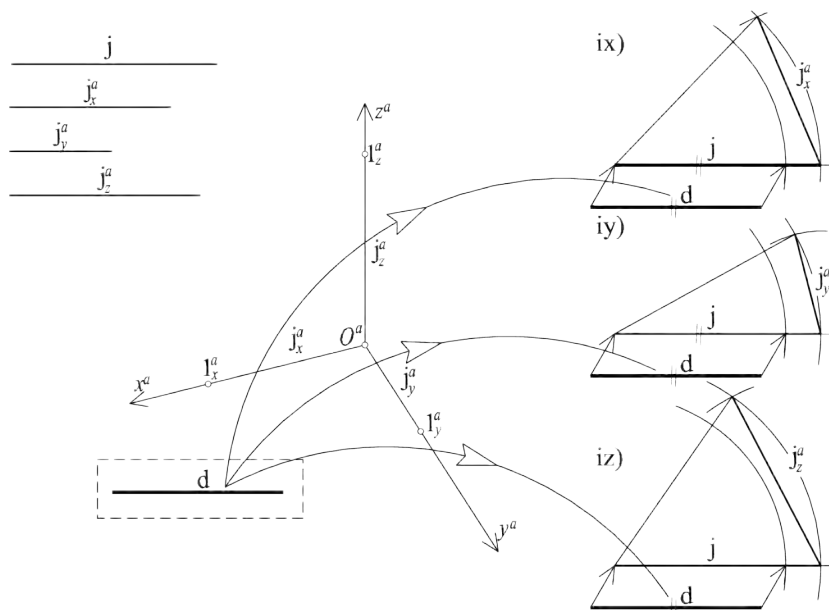


Rysunek 1.18: Konstrukcja trójkątów skrótów dla poszczególnych osi przy danych obrazach odcinka jednostkowego w rzucie równoległym definiującym aksonometrię

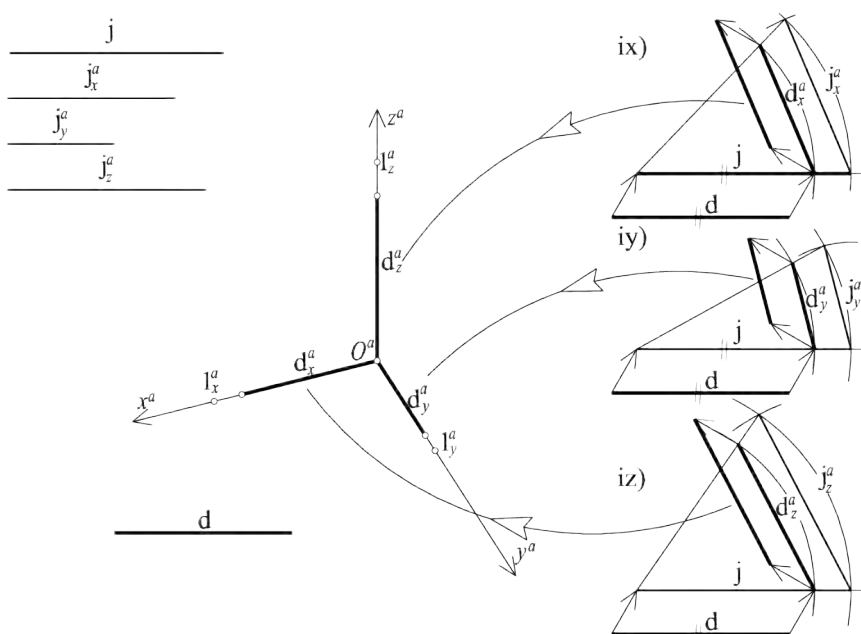
Tymczasem podamy następujący przykład konstrukcji aksonometrii sześcianu.

**Przykład 1.4.** Dany jest aparat rzutujący w postaci układu osi  $O^a x^a y^a z^a$ , gdzie odcinek jednostkowy  $j$  uległ deformacji (skróceniu) na poszczególnych osiach odpowiednio:  $j_x^a$ ,  $j_y^a$ ,  $j_z^a$  jak na rysunku 1.18. Skonstruować rzut aksonometryczny sześcianu o krawędzi  $d$  (rys. 1.19).

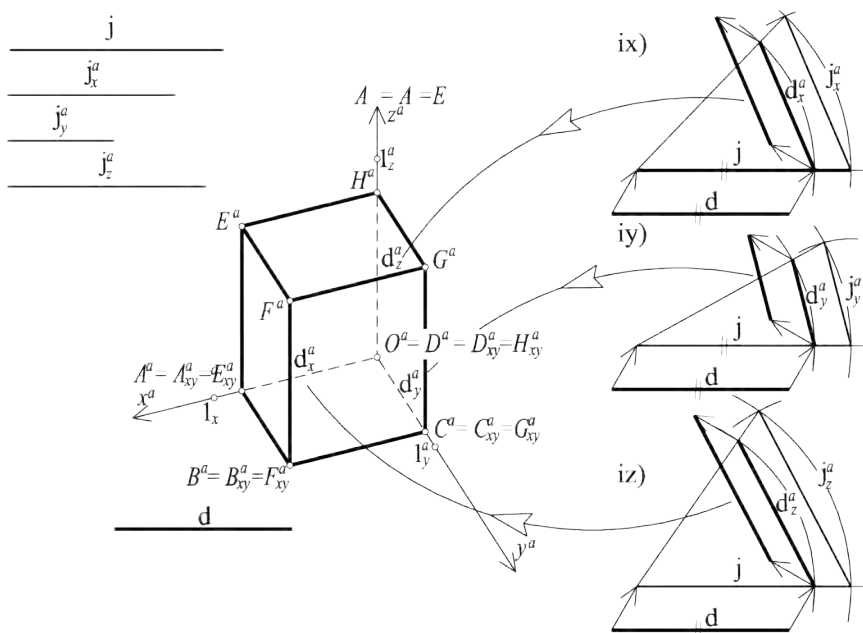
*Rozwiązanie* problemu z przykładu 1.4. W celu wyznaczenia aksonometrii sześcianu najpierw konstruujemy tzw. *trójkąty skrótów* dla poszczególnych osi, tj. trójkąty równoramienne o ramionach równych odcinkowi  $j$  i odpowiednio podstawach  $j_x^a$ ,  $j_y^a$ ,  $j_z^a$  (rys. 1.18). Następnie odkładamy odcinek  $d$  na bokach poszczególnych trójkątów (rys. 1.19) i skracamy (rys. 1.20). By otrzymać założony sześcian, odkładamy na osiach skróty odcinka  $d$  (rys. 1.21).



Rysunek 1.19: Konstrukcja aksonometrii sześcianu o krawędzi równej odcinkowi o długości  $d$  przy użyciu trójkątów skrótów poszczególnych osi (cdn.)



Rysunek 1.20: Konstrukcja aksonometrii sześcianu (cdn.)



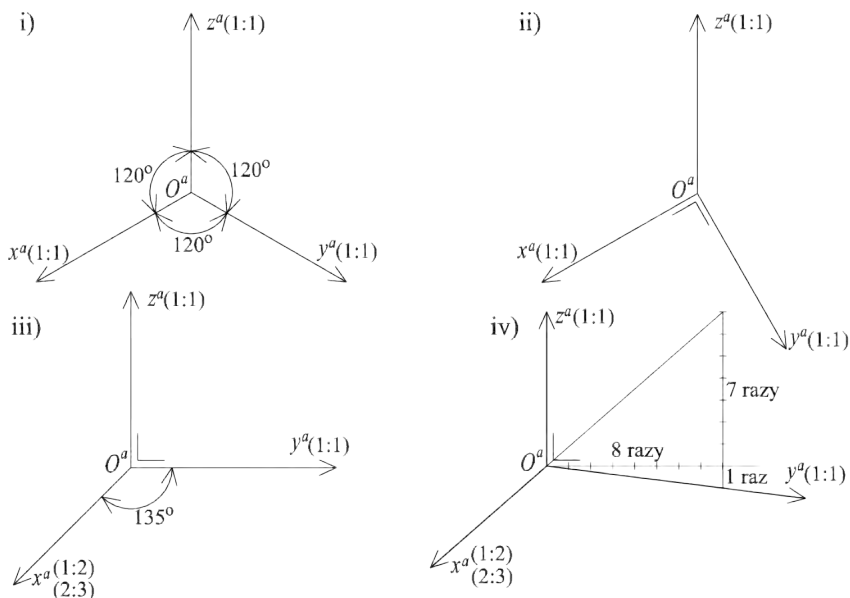
Rysunek 1.21: Konstrukcja aksonometrii sześcianu

### 1.6.1. Rodzaje aksonetrii

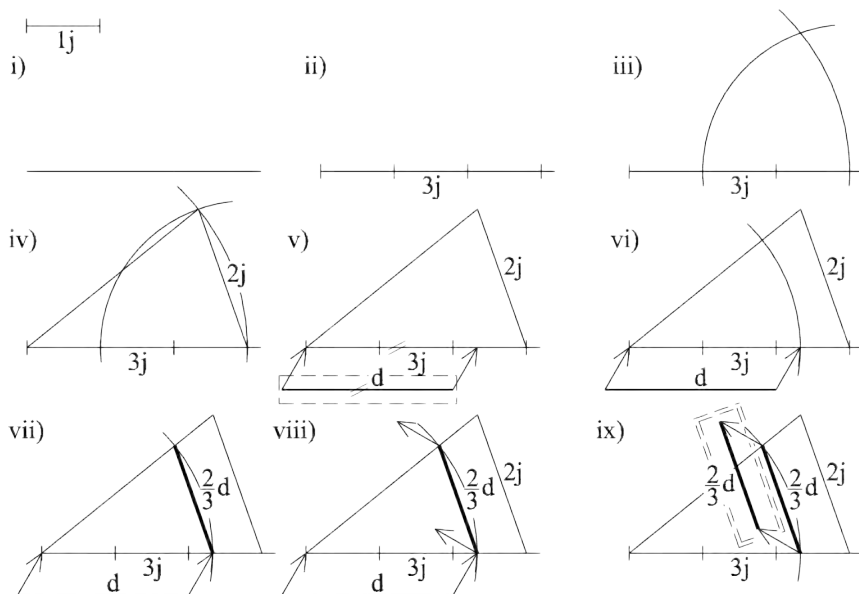
**IR.** *Izometria równokątna.* Osie układu tworzą równe kąty ( $120^\circ$ ), stosunki skrótów są jednakowe i równe 1, tzn.  $s_x = s_y = s_z = 1$  (przy czym każdą oś oznaczamy wtedy symbolem „1:1”, odczytując, że skrót jest „jeden do jeden”) (rys. 1.22i).

**IW.** *Izometria wojskowa.* Osie  $Ox$ ,  $Oy$  są wzajemnie prostopadłe, stosunki skrótów są jednakowe i równe 1, tzn.  $s_x = s_y = s_z = 1$  (rys. 1.22ii). Płaszczyzna  $Oxy$  jest izometryczna, co jest konsekwencją równoległości płaszczyzn  $Oxy \parallel O^a x^a y^a$ .

**DK.** *Dimetria kawalerska.* Osie  $Oy$ ,  $Oz$  są wzajemnie prostopadłe, oś  $Ox$  tworzy z pozostałymi kąty o mierze  $135^\circ$ , stosunki skrótów są  $s_y = s_z = 1$ ,  $s_x = 1 : 2$  lub  $s_x = 2 : 3$  (rys. 1.22iii). Płaszczyzna  $Oyz$  jest izometryczna, co jest konsekwencją równoległości płaszczyzn  $Oyz \parallel O^a y^a z^a$ .



Rysunek 1.22: Rodzaje aksonometrii (sposób określania osi układu i skrótów na osiach): i) izometria równokątna, ii) izometria wojskowa, iii) dimetria kawalerska, iv) aksonometria prawie prostokątna

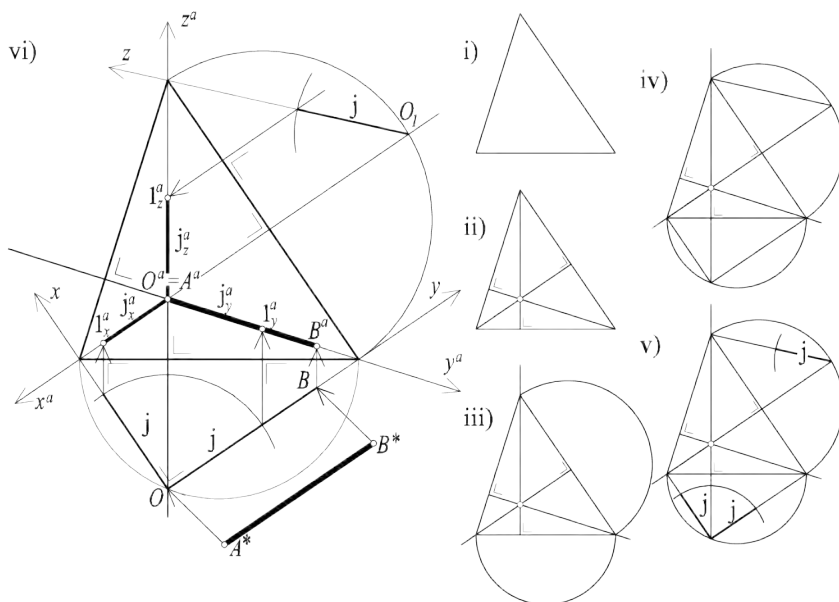


Rysunek 1.23: Konstrukcja trójkąta skrótów dla skrótu  $2:3$  ( $s_x = \frac{2}{3}$ )

**APP.** *Aksonometria prawie prostokątna.* Konstrukcje układu osi objaśnia rysunek 1.22iv, stosunki skrótów przyjmuje się  $s_y = s_z = 1$ ,  $s_x = 2 : 3$  lub  $s_x = 3 : 4$ .

Konstrukcję trójkąta skrótów dla wybranego skrótu, np.  $s_x = \frac{2}{3}$ , przedstawiamy na rysunku 1.23.

### 1.6.2. Aksonometria prostokątna



Rysunek 1.24: Tworzenie układu osi i zasady skrótów na osiach aksonometrii prostokątnej

**AP.** *Aksonometria prostokątna.* Osie układu aksonometrycznego są wysokościami z góry danego trójkąta  $[1_x^a 1_y^a 1_z^a]$  (ostrokątnego). Zasada aparatu rzutującego aksonometrii prostokątnej opiera się na dwóch następujących własnościach (twierdzeniach) geometrycznych.

**APW1.** *Trzy parami prostopadłe półproste o wspólnym początku można przeciąć płaszczyzną w dowolnym, z góry danym trójkącie ostrokątnym.*

**APW2.** *Jeżeli trzy parami prostopadłe półproste  $Ox, Oy, Oz$  o wspólnym początku  $O$  przetniemy płaszczyzną  $\pi$  trójkącie  $[XYZ]$  (ostrokątnym), to rzutem prostokątnym punktu  $O$  na płaszczyznę  $\pi$  jest punkt przecięcia się wysokości trójkąta  $[XYZ]$ .* W aksonometrii prostokątnej kierunek

rzutowania jest prostopadły do rzutni aksonometrycznej. Osie i skróty dla kierunków osi, tzn. układ aksonometryczny, przyjmujemy w następujący sposób:

1. Przyjmujemy dowolny trójkąt zwany *trójkątem śladów aksonometrycznych* (rys. 1.24i). Można przyjąć, że są to faktycznie ślady osi układu rzeczywistego na rzutni. Konstruujemy osie aksonometryczne zawierające wysokości tego trójkąta (rys. 1.24ii, 1.24iii).
2. Mechanizm wyznaczania skrótów dla odpowiednich kierunków osi obrazuje rysunek 1.24iv.

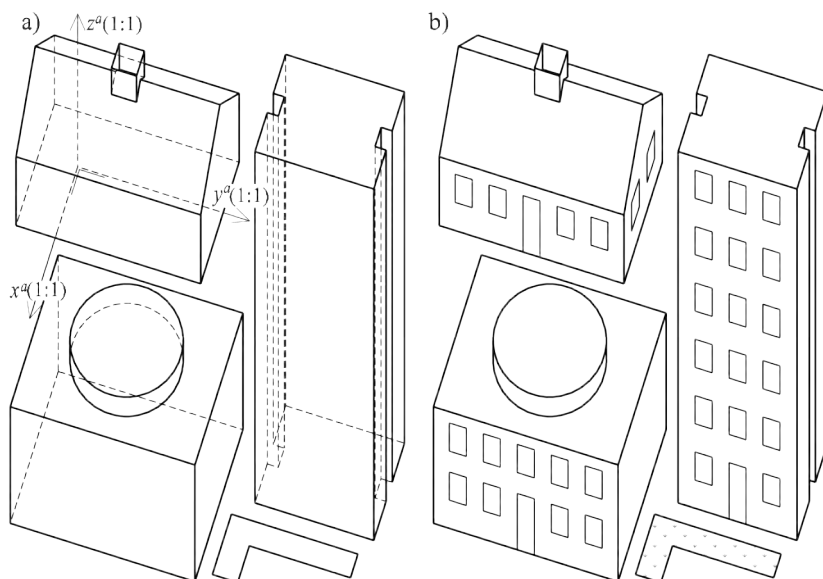
Cięciwy półokręgów są kładami osi aksonometrycznych. Na nich odkładamy rzeczywiste długości odcinków na osiach. Skrócone odcinki otrzymujemy, odpowiednio rzutując te pierwsze na proste zawierające wysokości trójkąta (rys. 1.24iv).

Na rysunku 1.24iv pokazano ponadto sposób odkładania dowolnego odcinka w aksonometrii prostokątnej wzdłuż określonej osi, czyli konstrukcji punktu o określonym położeniu. Na osi  $Oy$  odłożono odcinek  $[A^*B^*]$ , konstruując na tej osi punkt  $B^a$  odległy od początku układu  $O$  o odcinek  $[A^*B^*]$ .

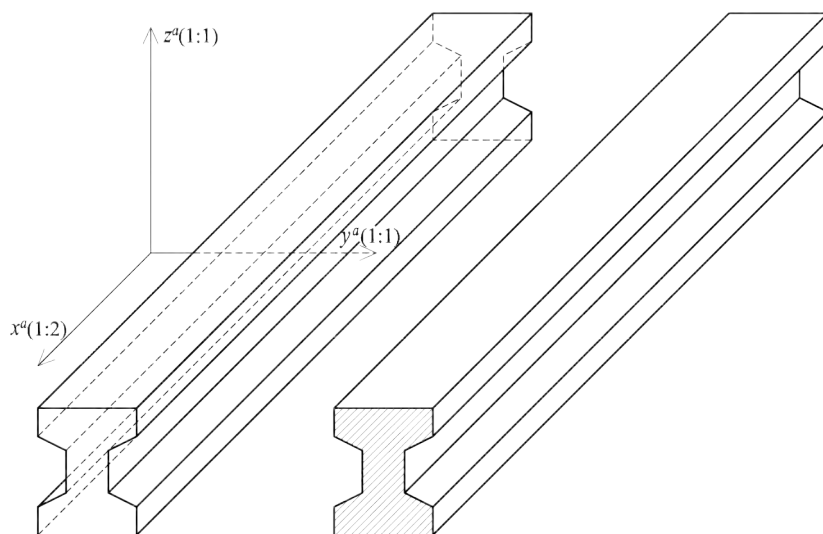
### 1.6.3. Przykłady rysunków aksonometrycznych

Powyższe rozróżnienie rodzajów aksonometrii ma dziś, w dobie systemów CAD, już znaczenie bardziej historyczne niż praktyczne. Za pomocą techniki komputerowej (np. w AutoCAD-zie) otrzymuje się dowolną wizualizację obiektu odwzorowanego w przestrzeni wirtualnej środowiska AutoCAD-a. Warto jednak pamiętać, że wizualizacja obiektu zależy od kierunku rzutowania i położenia obiektu względem rzutni. Pewne aksonometrie dają dobrą wizualizację, inne słabą. W szczególności izometria wojskowa jest użyteczna, jeżeli chcemy, by plan obiektu był w naturalnej wielkości, dimetria kawalerska zaś jest użyteczna wtedy, gdy chcemy, by przekrój poprzeczny był w naturalnej wielkości i kształcie, np. dwuteownik (rys. 1.26). Na rysunku 1.25 przedstawiamy fragment makiety osiedla w izometrii wojskowej. Zauważmy, że z rysunku łatwo odczytujemy plan budynku i jego usytuowanie względem innych budynków, kołowy obiekt

na dachu, trawnik itp. Z łatwością odczytujemy też rzeczywistą wysokość budynku.



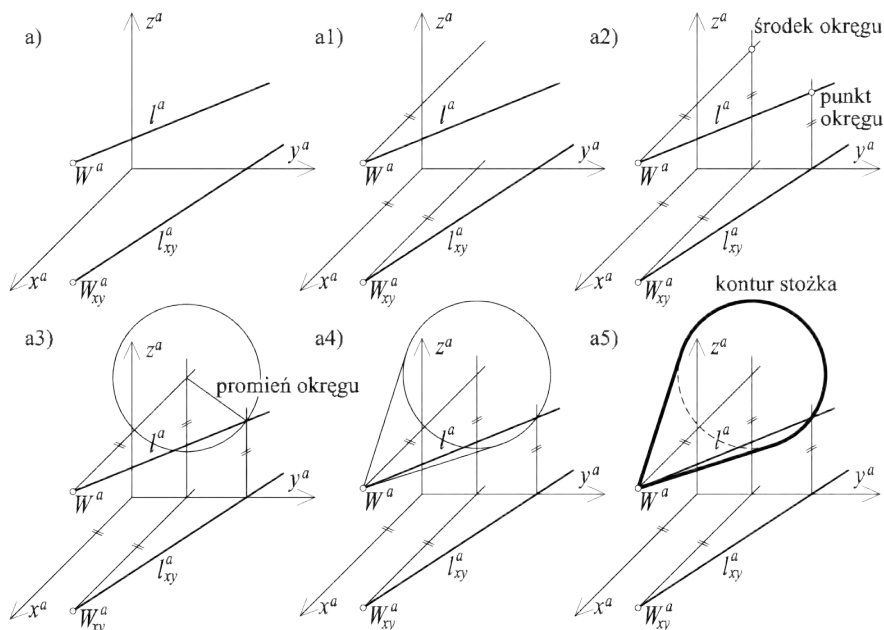
Rysunek 1.25: Osiedle w izometrii wojskowej. Płaszczyzna  $xy$  jest izometryczna. Podstawy (plany) budynków mają naturalny kształt. Podobnie w naturalnym kształcie i wymiarach (w pewnej skali) odwzorowany jest plan zagospodarowania terenu



Rysunek 1.26: Dimetria kawalerska dwuteownika

## 1.6.4. Konstrukcje w aksonometrii

**Przykład 1.5.** Dany jest rzut aksonometryczny półprostej  $l(l^a, l_{xy}^a)$  o początku  $W(W^a, W_{xy}^a)$  w dimetrii kawalerskiej (rys. 1.27). Narysować dimetrię kawalerską stożka obrotowego o wierzchołku  $W$  i osi prostopadłej do płaszczyzny  $Oyz$  (równoległej do osi  $Ox$ ) i podstawie (koło) leżącej na płaszczyźnie  $Oyz$ .



Rysunek 1.27: Konstrukcja dimetrii kawalerskiej stożka obrotowego o podstawie (okręgu) na płaszczyźnie  $Oxy$ , którego tworzącą jest dana prosta  $l \longleftrightarrow (l^a, l_{xy}^a)$  o wierzchołku  $W$  ( $W \in l$ ): a) dana prosta  $l$  z wierzchołkiem  $W$  odwzorowana w aksonometrii, a1) konstruujemy oś symetrii stożka prostopadłą do płaszczyzny  $Oxy$ , a2) znajdujemy punkty przebiecia płaszczyzny  $Oxy$  obydwoima prostymi, a3) konstruujemy okrąg podstawy stożka o środku w jednym z punktów przechodzący przez drugi punkt), a4) stożek przedstawiony jest w postaci konturowej (rzut określony jest przez okrąg i dwa odcinki styczne), a5) pogrubienie linii konturowych

*Rozwiązanie problemu z przykładu 1.5.* Na płaszczyźnie  $Oyz$ , jako na jedynej w dimetrii kawalerskiej, zachowane są związki miarowe (w określonej skali). Stąd podstawę stożka odwzoruje się na koło. Tworzące konturowe stożka<sup>3</sup> będą styczne do okręgu podstawy. Środek koła podstawy

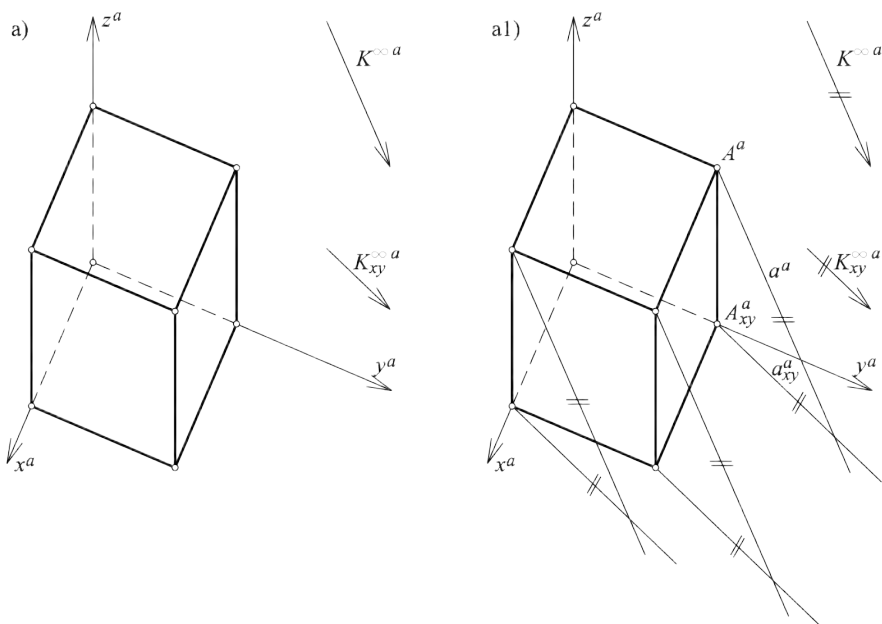
<sup>3</sup> Stożek odwzorowany jest w postaci konturowej. Kontur stożka stanowią łuk okręgu i dwa odcinki stycznych (rys. 1.27a5). Figura ograniczona, której brzegiem jest



jest punktem przecięcia osi stożka z płaszczyzną  $Oyz$ . Promień wyznaczymy, znajdując punkt przecięcia prostej  $l$  z płaszczyzną  $Oyz$ . W prostej  $l$  zawiera się jedna z tworzących stożka. Na rysunku 1.27 przedstawiono w etapach konstrukcję dimetrii kawalerskiej stożka.

## 1.7. Cień rzucony i własny bryły w aksonometrii

Rozróżniamy dwa rodzaje oświetlenia: *centralne* i *równoległe*. W pierwszym źródło światła da się sprowadzić do jednego punktu. Drugi odpowiada oświetleniu słonecznemu. Wobec prostoliniowego rozchodzenia się światła promienie świetlne tworzą w przypadku oświetlenia centralnego wiązkę prostych o środku znajdującym się w źródle światła, a w przypadku oświetlenia równoległego – wiązkę prostych równoległą o środku niewłaściwym (w nieskończoności).

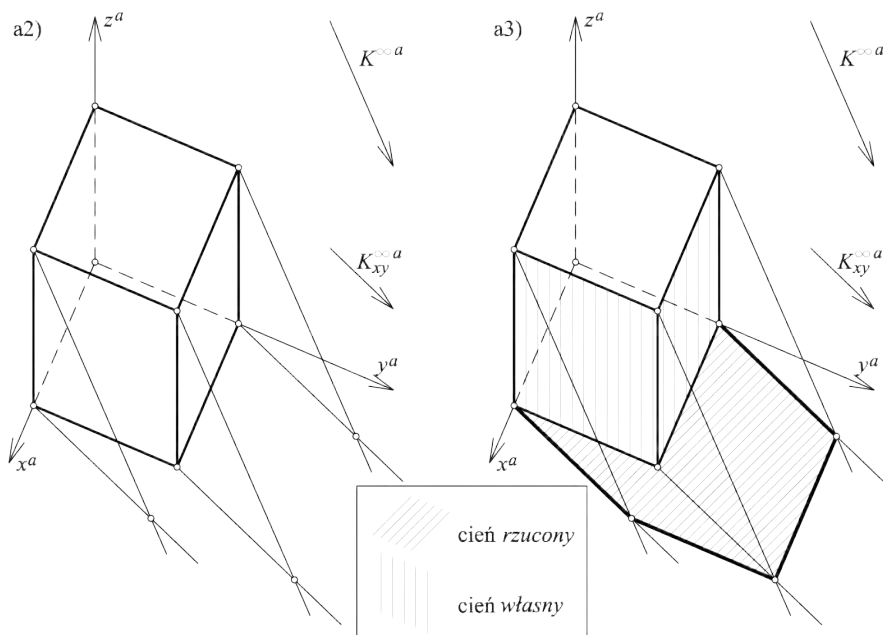


Rysunek 1.28: Konstrukcja cieni sześcianu: a) kierunek światła  $K^{\infty}$  jest określony przez swój rzut aksonometryczny  $K^{\infty a}$  oraz rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego  $K_{xy}^{\infty a}$  na płaszczyznę  $Oxy$ ; a1) prowadzimy przez punkt  $A^a$  prostą (promień) o kierunku  $K^{\infty a}$ , a przez  $A_{xy}^a$  prostą (promień) o kierunku  $K_{xy}^{\infty a}$ , podobnie postępujemy w odniesieniu do pozostałych punktów (cdn.)

ów kontur, jest rzutem stożka. Inaczej, tj. w postaci szkieletowej, jest odwzorowany sześcian (rys. 1.21).

Geometryczna charakteryzacja procesu oświetlenia przedmiotu prowadzi do określenia *stożka światła* oświetlanego przedmiotu, czyli zbioru wszystkich prostych wiązki oświetlającej, które przecinają ten przedmiot (jest to oczywiście ogólniejsze pojęcie niż znane ze szkoły pojęcie stożka). Pełny opis zasad wyznaczania cieni z ewentualnym wykorzystaniem do tworzenia algorytmów komputerowych jest dość skomplikowany. Pewne elementy problematyki związanej z wyznaczaniem cieni omówimy w następnych wykładach. Tymczasem przedstawimy pierwsze zadanie na konstrukcję cienia.

**Przykład 1.6.** Dane są rzut aksonometryczny sześcianu oraz kierunek oświetlenia równoległego (rys.1.28). Wyznaczyć cień własny i rzucony sześcianu na płaszczyznę  $Oxy$ .



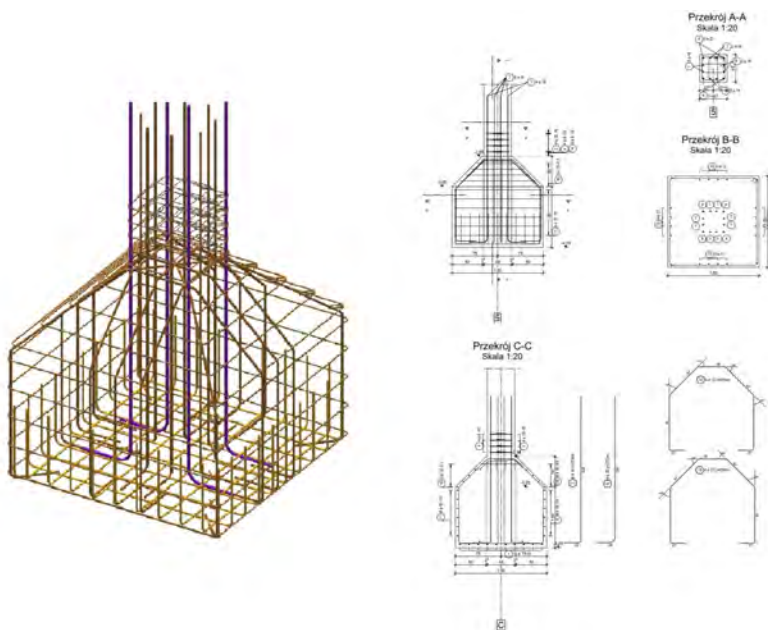
Rysunek 1.29: Konstrukcja cieni sześcianu (cd.): a2) znajdujemy punkty przecięcia tych promieni z płaszczyzną  $Oxy$ , są to punkty, w których rzut aksonometryczny pokrywa się z rzutem aksonometrycznym rzutu prostokątnego; a3) zważywszy, że cienie punktów leżących na płaszczyźnie  $Oxy$  pokrywają się z tymi punktami, zaznaczamy cień rzucony i cień własny sześcianu

*Rozwiązanie zadania z przykładu 1.6. Cieniem rzuconym punktu jest punkt przecięcia promienia świetlnego z najbliższą napotkaną*

płaszczyzną lub powierzchnią niebędącą elementem innego obiektu oświetlanego obiektu (rys. 1.29), *cieniem własnym* jest ta część i strona brzegu figury znajdująca się w stożku lub walcu świetlnym, z której „wychodzi”<sup>4</sup> promień świetlny. Z *cieniem wzajemnym* lub *cieniem do wnętrza* mamy do czynienia wówczas, gdy promień świetlny wielokrotnie przecina brzeg figury. Do konstrukcji cieni jeszcze będziemy powracać.

## 1.8. Podsumowanie

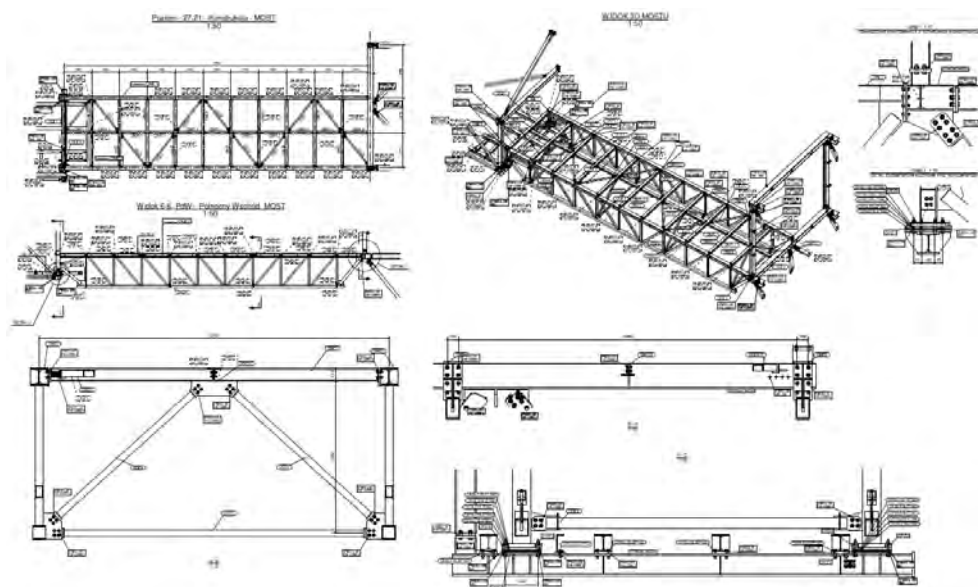
Poznaliśmy zasady wykonywania rysunków w aksonometrii. Przedstawiony podział i konstrukcje mają obecnie sens bardziej historyczny niż praktyczny.



Rysunek 1.30: Fragment dokumentacji w środowisku Allplan, źródło: [36]

<sup>4</sup> W przypadku cieni wygodnie jest mówić o stronach płaszczyzny lub powierzchni dwustronnej. Płaszczyzna i powierzchnia dwustronna rozcinają co najmniej lokalnie przestrzeń na dwie strony. W odniesieniu do strony brzegu przedmiotu oświetlanego, w której znajduje się źródło światła, mówimy, że promień „wchodzi”, w odniesieniu do strony przeciwnej mówimy, że promień „wychodzi”. Punkt niewłaściwy w odniesieniu do procesu oświetlania traktujemy jako wektor swobodny.

Obecnie rysunek inżynierski tworzony jest w sposób rzeczywisty z wykorzystaniem geometrii brył [10]. Komputerowe (wirtualne) realizowanie obiektu inżynierskiego przebiega dokładnie tak samo jak składanie pomyślanego obiektu z puzzli 3D. W praktyce zwykle nie konstruujemy rzutu aksonometrycznego, ani innych rzutów, lecz wykonujemy realny obiekt 3D. Odpowiednie oprogramowanie, takie jak np. AutoCAD, ArchiCAD (rys. 1.32), Allplan (rys. 1.30) czy Tekla Structures (rys. 1.31), kreuje rzut aksonometryczny i pozostałe rzuty automatycznie [43], [36], [37]. Praca w wymienionych programach opiera się na wykonywaniu przekrojów i widoków skojarzonych ze stworzonym wcześniej modelem 3D (każda zmiana w nim jest aktualizowana w dokumentacji), dzięki czemu wszystkie opracowane już arkusze mogą zostać automatycznie zaktualizowane. Naturalnie, omawiana logika tworzenia obiektów geometrycznych 3D dotyczy przede wszystkim oprogramowania AutoCAD [28].

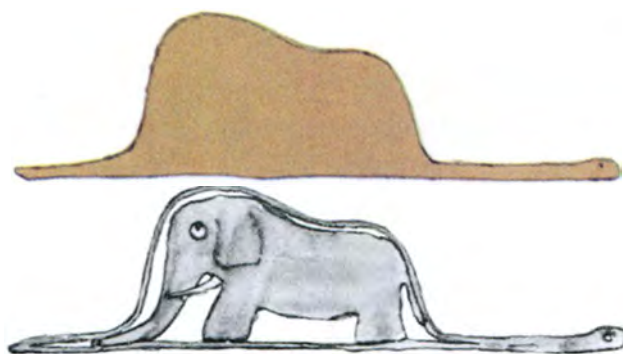


Rysunek 1.31: Rzuty i aksonometria technologicznego mostu kratowego (rysunek montażowo-złożeniowy) w Tekla Structures [37], wyk. B. Koźniewski

Znajomość zasad rzutowania ułatwia rozumienie procesu tworzenia obiektu, a także odczytywania i analizowania rzutów obiektu.



Rysunek 1.32: Przykładowe rysunki w środowisku ArchiCAD-a, źródło: [43]

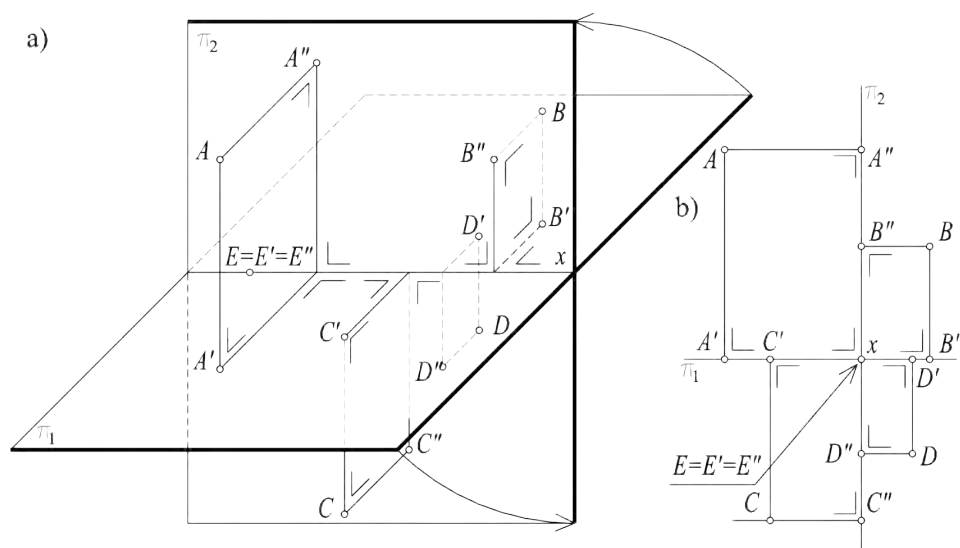


Rysunek 1.33: Rysunki Antoine'a de Saint-Exupéry z książki *Mały Książę* [32] przypominają i wyjaśniają „różnicę” między rzutem czworoscianu i czworokątem zupełnym (rys. 1.13ab). Musimy bowiem chcieć zobaczyć sześć linii jako obraz trójwymiarowego czworoscianu na rysunkach 1.13a, 1.13b; pomagamy sobie, stosując linię kreskową na oznaczenie krawędzi niewidocznej

## Rozdział 2

# Rzuty Monge'a

### 2.1. Rzuty prostokątne na dwie rzutnie. Metoda Monge'a



Rysunek 2.1: Rzuty prostokątne na dwie rzutnie: a) punkt rzutowany jest w kierunku prostopadłym na dwie rzutnie. Strzałki pokazują sposób realizacji odwzorowania Monge'a; b) uzupełnienie rysunku poglądowego – ilustracja punktów i ich rzutów widzianych z prawej lub z lewej strony (rzut boczny, profil)

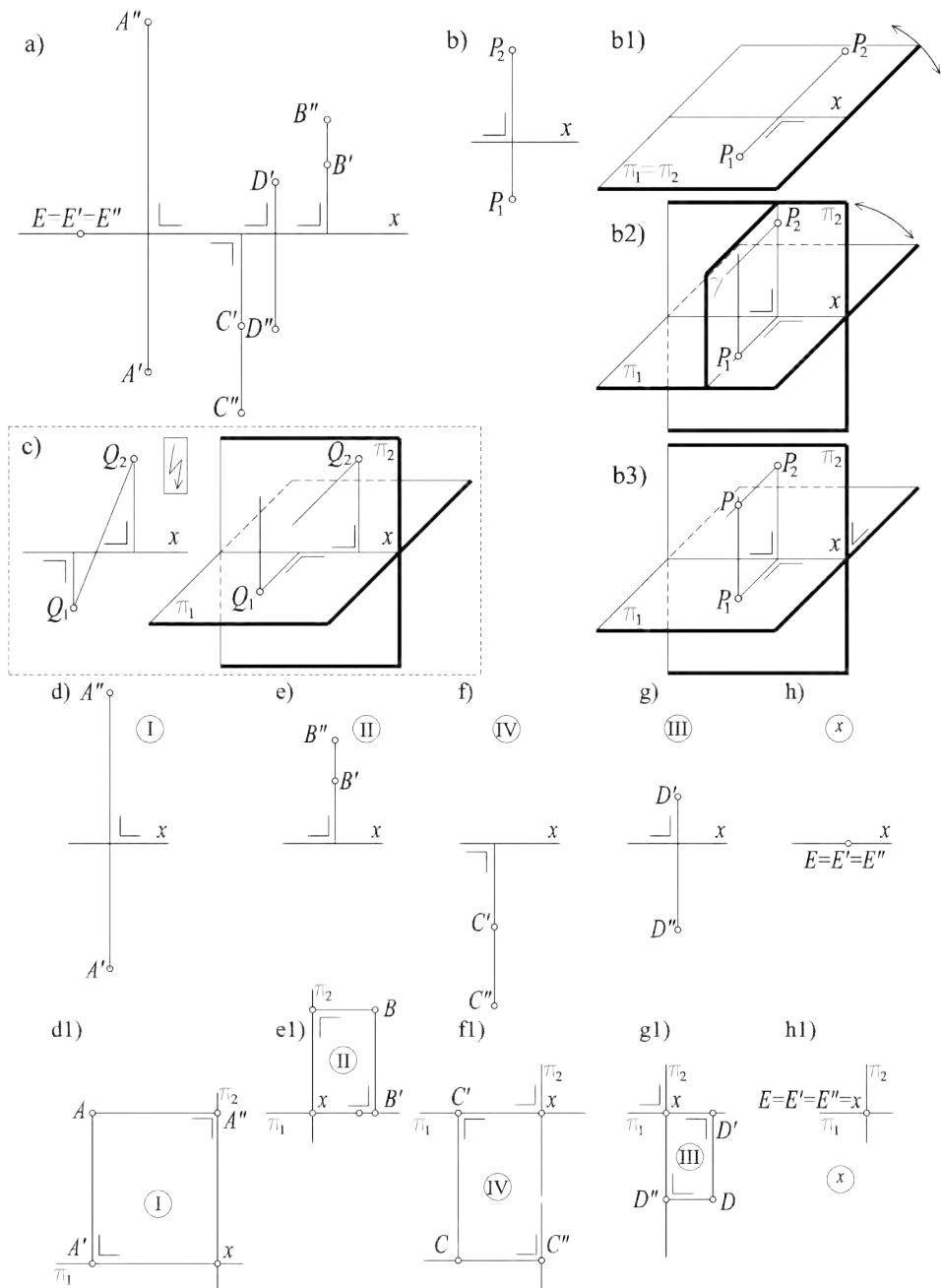
Szczególne miejsce w zastosowaniach technicznych mają rzuty prostokątne. Zwykle, z uwagi na odwracalność odwzorowania, obiekty przedstawia się za pomocą dwóch lub więcej (trzech–sześciu) rzutów. Jeden rzut, nawet jeśli jest to rzut prostokątny, nie wystarcza, by na jego podstawie odtworzyć obiekt. Oprócz rzutu punktu potrzebna jest jeszcze jakaś informacja, np. względna wysokość punktu. Omawiana tutaj metoda Monge'a

polega na dołączeniu drugiego rzutu prostokątnego, który zastąpi wymaganą wysokość, dając jeszcze coś więcej, mianowicie drugi obraz – tzw. *widok z przodu* (*widok główny*, *elewację obiektu*, por. rys. 2.3). Rzut prostokątny jest rzutem równoległym o kierunku prostopadłym do rzutni. Z tego też powodu nie będziemy musieli określać kierunku rzutowania, który jest wyznaczony przez położenie rzutni. Aby dla dowolnego punktu mieć jego wysokość, wystarczy dla danej rzutni przyjąć drugą prostopadłą rzutnię. W ten sposób otrzymujemy dwie prostopadłe rzutnie  $\pi_1, \pi_2$  ( $\pi_1 \perp \pi_2$ ) przecinające się w prostej  $x$  zwanej *osią rzutów* ( $\pi_1 \cap \pi_2 = x$ ). Każdy punkt  $X$  rzutować będziemy na obie rzutnie: *poziomą*  $\pi_1$  i *pionową*  $\pi_2$  (na rys. 2.1a  $X \in \{A, B, C, D, E\}$ ) i otrzymamy parę punktów: rzut *poziomy*  $X'$  (na rys. 2.1  $X' \in \{A', B', C', D', E'\}$ ) i rzut *pionowy*  $X''$  (na rys. 2.1  $X'' \in \{A'', B'', C'', D'', E''\}$ ). Dla większej czytelności rysunku poglądowego 2.1a obok, na rysunku 2.1b, przedstawiono jego profilowe uzupełnienie. Jest to ilustracja tzw. *rzutu bocznego* punktów przedstawionych na rysunku poglądowym. O rzucie tym będziemy jeszcze mówić dokładniej.

Układ  $(\pi_1, \pi_2)$  dwu płaszczyzn (rzutni), stanowiący aparat rzutujący *dwurzutu Monge'a*, rozcina przestrzeń  $P^3$  na cztery części (ćwiartki). Przyjmujemy, że punkt  $A$  leży w części I, punkt  $B$  – w części II, punkt  $D$  – w części III, punkt  $C$  – w części IV (rys. 2.1, 2.2). Zwykle obiekt umieszczamy w I części, jednak w celu rozwiązania różnych zagadnień (np. znalezienia cieni) musimy „wyjść” poza nią. Rzuty dowolnego punktu leżą na prostej prostopadłej do osi rzutów. Prosta tę nazywamy *odnoszącą*. Powstaje pytanie, czy każda para punktów, tj. para punktów  $(P_1, P_2)$  leżących na prostej prostopadłej do osi rzutów, jest dwurzutem pewnego punktu  $P$ ? Odpowiedź jest twierdząca. Wynika to z faktu, że po „ponownym” rozłożeniu obu rzutni w przestrzeni dwie proste przechodzące przez punkty  $P_1, P_2$ , każda prostopadłe do odpowiedniej rzutni, leżą w jednej płaszczyźnie, a więc przecinają się w punkcie, którego rzuty prostokątne stanowi wyjściowa para punktów (rys. 2.2b, b1, b2). Rozumowanie to nie będzie mieć zastosowania do pary punktów, które nie leżą na odnoszącej (rys. 2.2c, zwróćmy uwagę na umieszczany w podobnych przypadkach znak „Uwaga! Niebezpieczeństwo!”). Taka para nie może stanowić rzutów żadnego punktu.

Metoda Monge'a w zakresie punktu daje pełną restytuowalność (odwracalność). Symbolicznie zapisujemy to następująco

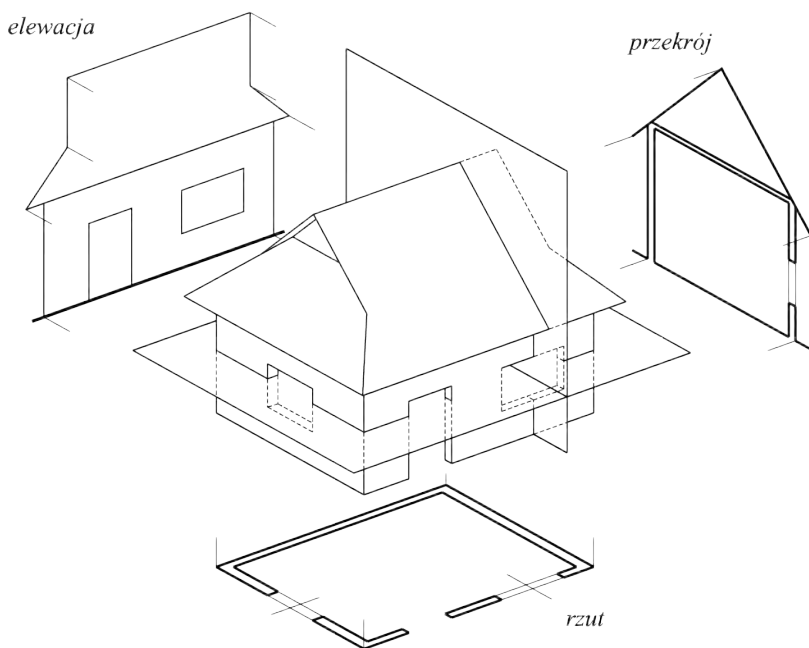
$$X \longleftrightarrow (X', X''). \quad (2.1)$$



Rysunek 2.2: Odwzorowanie Monge'a: a) każdemu punktowi przyporządkowana jest para punktów: jego rzut poziomy ('') i rzut pionowy (''). Przy przyjętej osi rzutów lub orientacji poziomej (pionowej) punkty obu rzutów leżą na tzw. odnoszącej; b) odwzorowanie Monge'a jest wzajemnie jednoznaczne, każda para punktów leżących na odnoszącej jest obrazem pewnego punktu; c) dwa punkty nieleżące na odnoszącej nie stanowią obrazu żadnego punktu; d–h) wzajemne położenie rzutów dowolnego punktu względem osi określa równocześnie jego położenie względem rzutni



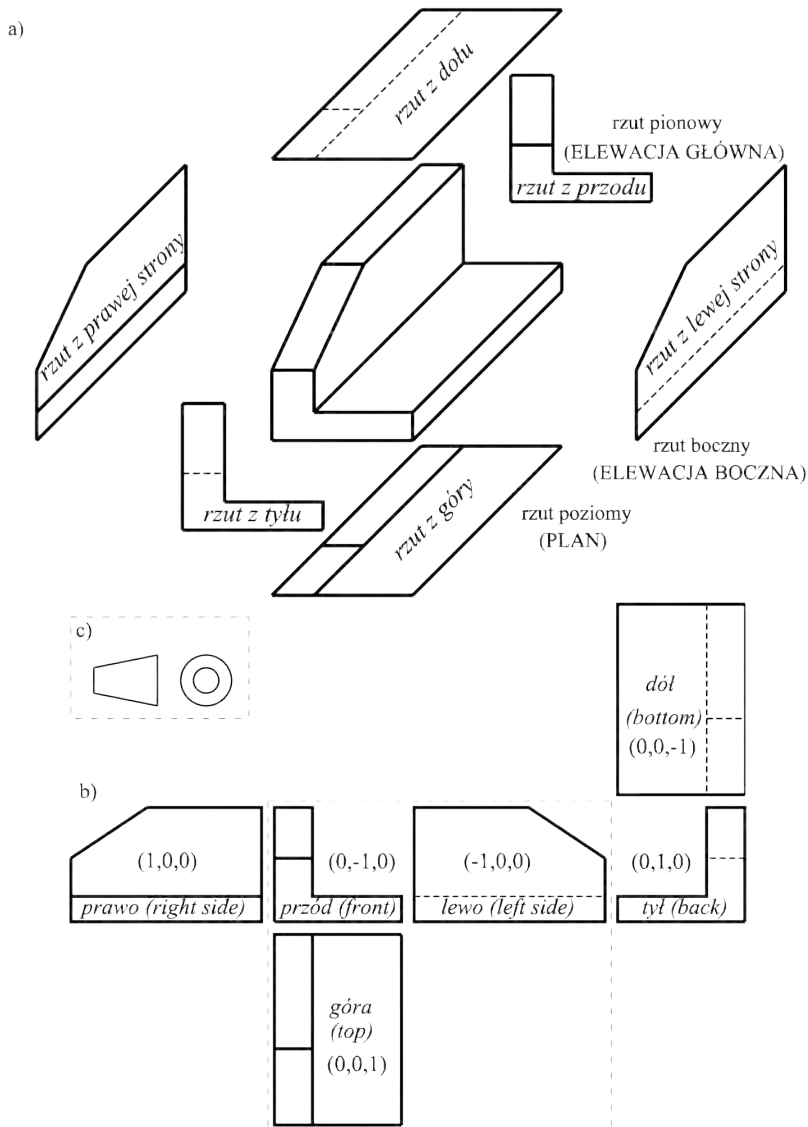
Oznacza to, że przy znanym położeniu aparatu rzutującego, na podstawie danych dwóch rzutów (dwurzutu – obrazu) punktu jednoznacznie odtwarzamy położenie punktu (znajdujemy przeciwobraz – rzutowany punkt). Na podstawie wzajemnego położenia rzutów potrafimy określić położenie punktu w przestrzeni względem rzutni. Na rysunku 2.2d–h) mamy ilustrację położenia rzutów punktów w zależności od przynależności punktów do różnych części przestrzeni wyznaczonych przez rzutnie w odwzorowaniu Monge'a, na rysunku 2.2d1–h1 punkty te widziane są z profilu. Odległość punktu od rzutni pionowej (także odległość rzutu poziomego tego punktu od osi  $x$ ) nazywamy *głębokością* punktu, a odległość punktu od rzutni poziomej (także odległość rzutu pionowego tego punktu od osi  $x$ ) nazywamy *wysokością* punktu. Przyjmujemy też umowę: jeżeli punkt leży pod rzutnią poziomą, to ma wysokość ujemną, jeżeli punkt leży przed rzutnią, to ma głębokość dodatnią itd.



Rysunek 2.3: Przykład odwzorowania Monge'a wybranych elementów obiektu budowlanego (dom z dachem z półszczytem górnym poglądowo przedstawiony w aksonometrii): rzut poziomy (') wybranego przekroju poziomego, w rysunku budowlanym nazywany *rzutem*; rzut pionowy (") obiektu (tzw. *widok*), w wyniku takiego ustawienia obiektu względem rzutni otrzymujemy tzw. *elewację główną*; rzut boczny (""') wybranego przekroju pionowego budynku, w rysunku budowlanym zwany *przekrojem*

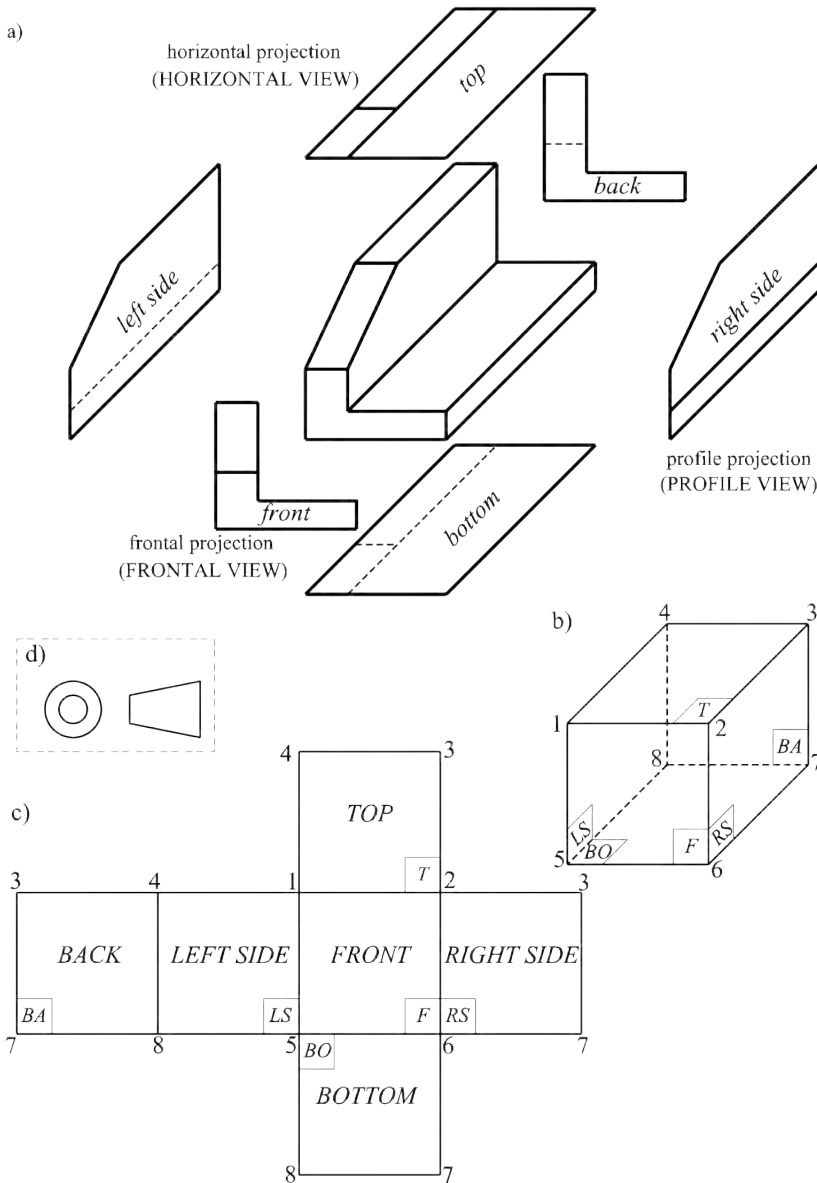
## 2.2. Metody europejska i amerykańska

Czasami punkt (obiekt) rzutowany jest równocześnie na sześć rzutni.



Rysunek 2.4: Ilustracja metody europejskiej: a) przedmiot znajduje się między obserwatorem i rzutnią. Elementy niewidoczne zaznaczone są linią przerywaną; b) schemat wizualizacji w programie AutoCAD obiektu znajdującego się w globalnym układzie współrzędnych (WCS, World Coordinate System), układy liczb oznaczają współrzędne wektorów (wersorów) swobodnych określających kierunek (i zwrot) obserwacji w WCS; c) oznaczenie graficzne metody (europejskiej) rzutowania

Przyjmuje się wtedy, że przedmiot znajduje się wewnątrz sześcianu.

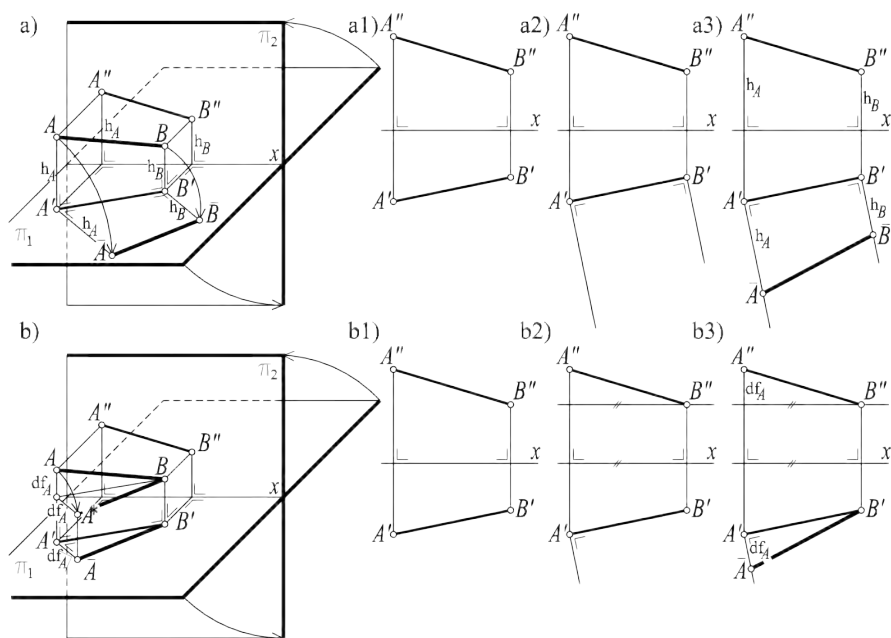


Rysunek 2.5: Ilustracja metody amerykańskiej: a) rzutnia znajduje się między obserwatorem i przedmiotem. W układzie rzutów niektóre są jak gdyby poprzestawiane w porównaniu z układem rzutów według metody europejskiej; rysunek schematyczny rzutowania według metody amerykańskiej (TAP, Third Angle Projection); b) sposób rozmieszczenia rzutni; c) rozwinięcie rzutni; d) oznaczenie graficzne metody (amerykańskiej) rzutowania

Pozostaje ustalić, gdzie znajduje się obserwator. Konsekwencją umów dotyczących wzajemnego położenia punktu obserwacji (obserwatora) i przedmiotu w układzie rzutni jest rozróżnienie dwu zasad rzutowania: *europejskiej* i *amerykańskiej*. W metodzie europejskiej przyjmuje się, że przedmiot (punkt, figura) znajduje się między obserwatorem i rzutnią (rys. 2.4). Natomiast w metodzie amerykańskiej przyjmuje się, że rzutnia znajduje się między obserwatorem a przedmiotem (rys. 2.5).

## 2.3. Rzuty i kład odcinka

Rzut prostokątny jest rzutem równoległym. Obowiązują więc wszystkie niezmienniki rzutu równoległego. W szczególności rzutem odcinka jest para odcinków (rys. 2.6a1). Odcinek, będąc jednoznacznie określony przez swoje końce, jest przez nie również jednoznacznie odwzorowany w rzutach.



Rysunek 2.6: Rzuty i kład odcinka: a) kład trapezowy; a1–a3) konstrukcja kładu trapezowego w rzutach Monge'a; b) kład różnicowy; b1–b3) konstrukcja kładu różnicowego w rzutach Monge'a

W odniesieniu do odcinka metoda Monge'a, podobnie jak w przypadku punktu, daje pełną restytuowalność (odwracalność), czyli

$$[XY] \longleftrightarrow ([X'Y'], [X''Y'']). \quad (2.2)$$

Punkt i odcinek są podstawowymi obiektami przy tzw. *reprezentacji szkieletowej* figur (brył) geometrycznych. Odcinek w rzucie prostokątnym ulega na ogół deformacji, dokładniej skróceniu (w rzucie równoległym może ulec także wydłużeniu). W celu „zmierzenia odcinka” wykonujemy konstrukcję jego kładu. *Kładem*<sup>1</sup> dowolnej figury płaskiej  $\mathbb{F}$  na daną rzutnię nazywać będziemy obrót tej figury dokoła prostej leżącej w płaszczyźnie figury  $\mathbb{F}$  o taki kąt, że płaszczyzna figury  $\mathbb{F}$  uzyskuje położenie równoległe do rzutni. Otrzymujemy wówczas, z uwagi na niezmiennik **PP5**, naturalne kształt i wielkość figury  $\mathbb{F}$ . Kład odcinka przedstawia rysunek 2.6. Na rysunkach 2.6a–a3 zilustrowano kład trapezowy w ujęciu poglądowym. Kład *trapezowy* ma ścisły związek z położeniem rzutni, z tzw. *metodą śladową*<sup>2</sup> (w konstrukcji potrzebna jest oś rzutów). Kład *różnicowy* realizowany jest metodą *bezśladową*<sup>3</sup>, w której rzuty charakteryzują obiekt bez odwoływania się do położenia względem rzutni. W zastosowaniach rzutów prostokątnych do zapisu konstrukcji mamy do czynienia jedynie z metodą bezśladową. Co więcej, rzuty poziomy i pionowy (a także) boczny często są wykonywane (drukowane) na różnych arkuszach papieru. Nie usprawiedliwia to wszakże zrezygnowania z zasady przynależności rzutów punktu do wspólnej odnoszącej (przestroga jest rysunek 2.2c). Szczególnie jeśli konstrukcja (np. tworzenie figury bryły geometrycznej) wykonywana jest metodą Monge'a.

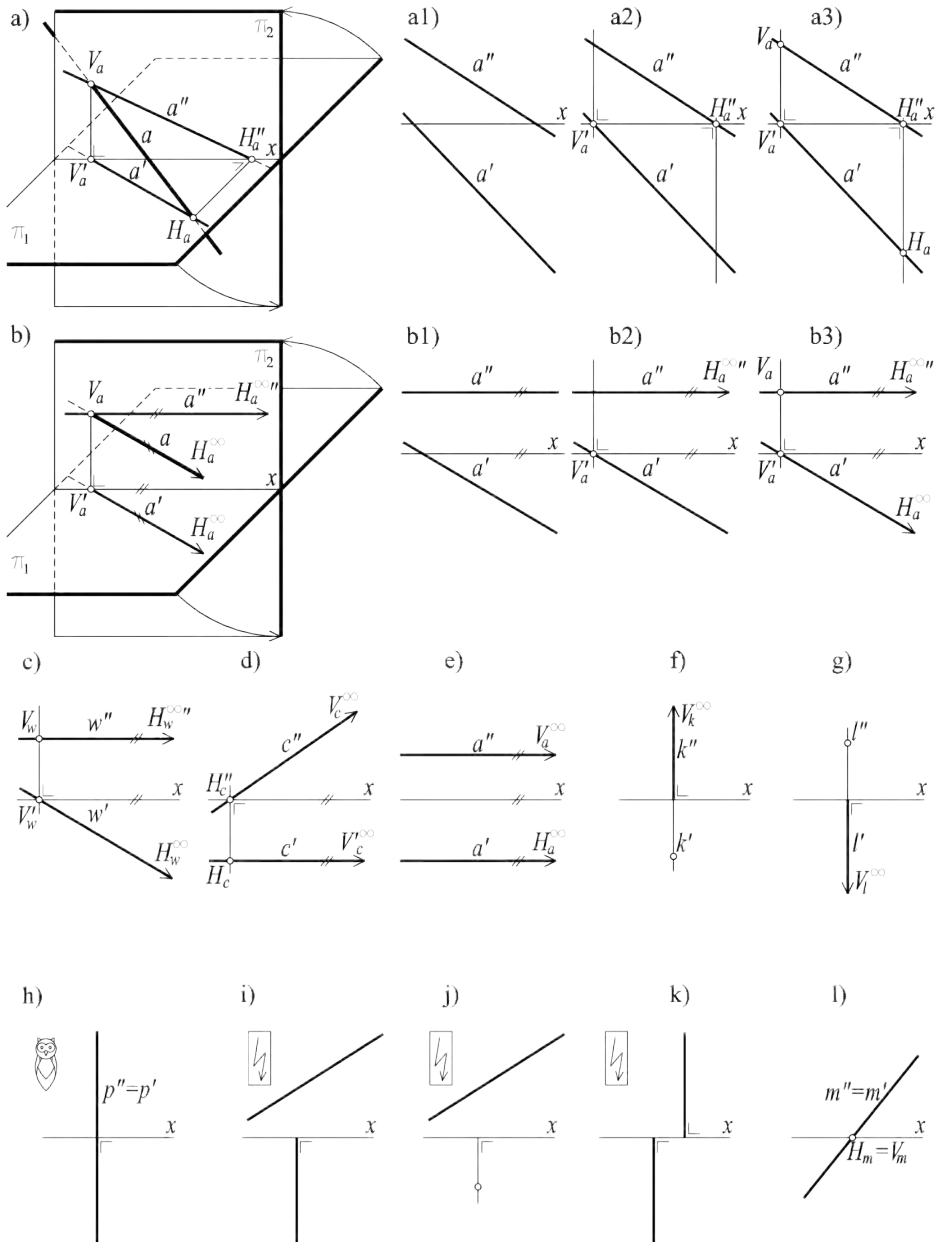
## 2.4. Rzuty i ślady prostej

Prosta, podobnie jak punkt i odcinek, odwzorowana jest przez swoje dwa rzuty: poziomy i pionowy. Na rysunku 2.7 rzutami prostej  $a$  są proste  $a'$  i  $a''$ .

<sup>1</sup> Do pojęcia kładu jeszcze powrócimy przy okazji dokładnego omówienia kładu płaszczyzny.

<sup>2</sup> Z punktu widzenia teorii konfiguracji rzutowych *metoda śladowa* związana jest z tzw. *konfiguracją Monge'a* omówioną w artykule [21].

<sup>3</sup> Z punktu widzenia teorii konfiguracji rzutowych *metoda bezśladowa* związana jest z tzw. *konfiguracją Veblena-Younga* omówioną w artykule [21].



Rysunek 2.7: Rzuty i ślady prostej: a) ślady prostej w położeniu ogólnym; a1–a3) konstrukcja śladów prostej; b) prosta pozioma (warstwowa) i jej ślady (ślad poziomy jest punktem niewłaściwym); b1–b3) konstrukcja śladów prostej poziomej (warstwowej). Różne położenia prostych: c) prosta pozioma lub warstwowa ( $w \parallel \pi_1 \longleftrightarrow w'' \parallel x$ ); d) prosta czołowa ( $c \parallel \pi_2 \longleftrightarrow c' \parallel x$ ); e) prosta równoległa do obu rzutni ( $a \parallel x \longleftrightarrow a' \parallel x \parallel a''$ ); f) prosta poziomo rzutująca ( $k \perp \pi_1 \longleftrightarrow k'' \perp x$  i  $k'$  jest punktem); g) prosta pionowo rzutująca ( $k \perp \pi_2 \longleftrightarrow k' \perp x$  i  $k''$  jest punktem); h) prosta profilowa ( $p \perp x \wedge p \perp \pi_1 \wedge p \perp \pi_2$ ) (jedyna sytuacja w rzutach Monge'a, gdzie prosta nie jest jednoznacznie określona – stąd obok znak „sowy” informujący, że sytuacja wymaga wyjątkowego zastanowienia się); i–k) pary prostych nieprzedstawiające prostej w rzutach Monge'a; l) prosta leżąca w płaszczyźnie dwusiecznej układu rzutni Monge'a

Oprócz rzutów prostej często wygodnie jest posługiwać się jej pewnymi punktami szczególnymi, tzw. śladami prostej. Punkty przebicia prostą obu rzutni nazywać będziemy *śladami* tej prostej. Punkt  $H_a$  przebicia rzutni poziomej  $\pi_1$  prostą  $a$  nazywamy *śladem poziomym* prostej  $a$ , punkt  $V_a$  przebicia rzutni pionowej  $\pi_2$  prostą  $a$  nazywamy *śladem pionowym* prostej  $a$  (rys. 2.7). Ślad poziomy  $H_a$  prostej  $a$  leży na rzucie poziomym  $a'$  prostej  $a$  i na odnoszącej punktu przecięcia  $H''_a$  rzutu pionowego  $a''$  z osią rzutów  $x$ , ślad pionowy  $V_a$  leży na rzucie pionowym  $a''$  prostej  $a$  i na odnoszącej punktu przecięcia  $V'_a$  rzutu poziomego  $a'$  z osią rzutów  $x$  (rys. 2.7a). Na rysunkach 2.7a1–a3 przedstawiono konstrukcję śladów prostej w rzutach Monge'a. Jeżeli prosta jest równoległa do którejś z rzutni, to ślad na tej rzutni jest punktem niewłaściwym. Na rys. 2.7b przedstawiono rzuty i ślady prostej poziomej (warstwowej). Na rysunkach 2.7b1–b3 przedstawiono rzuty i konstrukcję śladów prostej poziomej w rzutach Monge'a. Prosta (odcinek) może zajmować różne położenia względem układu rzutni  $(\pi_1, \pi_2)$ , w tym także względem osi rzutów  $x$ . Jeżeli prosta (odcinek) nie jest równoległa ani prostopadła do żadnego z obiektów:  $\pi_1$ ,  $\pi_2$ ,  $x$ , to mówimy, że zajmuje położenie *ogólne*. Proste niespełniające żadnego z powyższych warunków mają względem rzutni położenia *szczególne*. Proste w położeniach szczególnych zwykle mają także swoje specjalne nazwy: prostą równoległą do rzutni poziomej (często oznaczaną literą „ $w$ ”), czyli spełniającą warunek:  $w||\pi_1 \iff w''||x$ , nazywamy *prostą poziomą* lub *warstwową* (rys. 2.7c), prostą równoległą do rzutni pionowej (często oznaczaną literą „ $c$ ”), czyli spełniającą warunek:  $c||\pi_2 \iff c'||x$ , nazywamy *prostą czołową* (rys. 2.7d), prosta może być równocześnie prostą poziomą i pionową, czyli  $a||x \iff a'||x||a''$  (rys. 2.7e), prostą prostopadłą do rzutni poziomej nazywamy *poziomo rzutującą* (rys. 2.7f), prostą prostopadłą do rzutni pionowej nazywamy *pionowo rzutującą* (Rys. 2.7g), prostą, prostopadłą do osi rzutów  $x$ , nieprostopadłą do żadnej z rzutni, nazywamy *profilową* (rys. 2.7h). Zwróćmy szczególną uwagę na rysunek 2.7i. Nieprzypadkowo nie zaznaczono tam śladów, gdyż zarówno one, jak i prosta nie są wyznaczone jednoznacznie. Jest to jedyny przypadek, kiedy nie zachodzi zależność  $p \longleftarrow (p', p'')$ . Mamy tylko  $p \longrightarrow (p', p'')$ . Dochodzimy, przy okazji, do stwierdzenia, że restytuowalność (odwracalność) w odniesieniu do prostych w metodzie Monge'a zachodzi z pewnym wyjątkiem, czyli w ograniczonym zakresie. Zachodzi mianowicie implikacja

$$(p \not\perp x \vee p \perp \pi_1 \vee p \perp \pi_2) \longrightarrow (p \longleftrightarrow (p', p'')). \quad (2.3)$$

Ta niepełna odwracalność dotyczy jedynie bardzo szczególnego przypadku. Restytucję w odniesieniu do prostej profilowej można osiągnąć różnymi sposobami. Omówmy dwa z nich: (1) Możemy na prostej profilowej wybrać dwa punkty i ich rzuty i wtedy mamy odwzorowany odcinek, który jest zawsze restytuowalny. (2) Wprowadzamy trzecią rzutnię boczną (rys. 2.1b, 2.3)  $\pi_3$  ( $\pi_1 \perp \pi_3 \perp \pi_2$ ) i w nowym układzie rzutni ( $\pi_2, \pi_3$ ) lub ( $\pi_1, \pi_3$ ) prosta jest już restytuowalna.

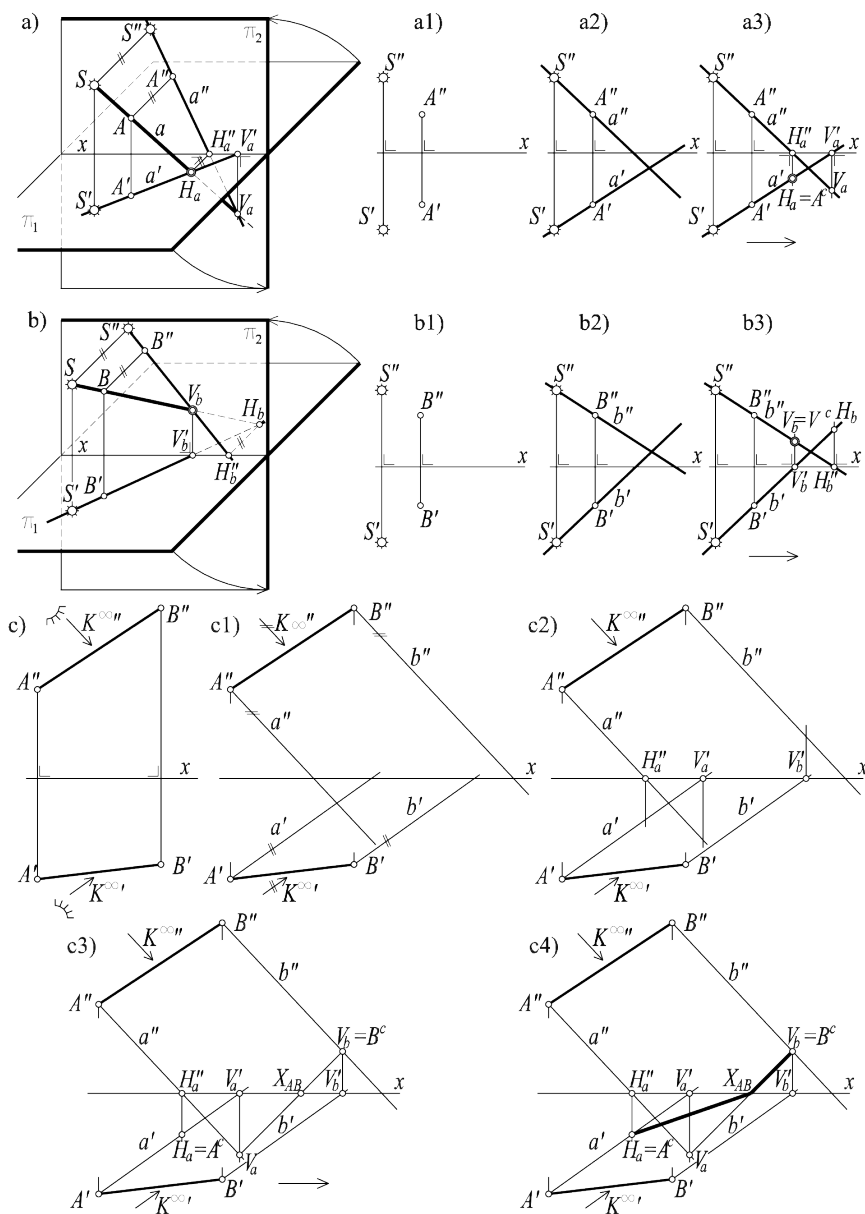
## 2.5. Cienie w rzutach Monge'a

Wyznaczenie cienia sprowadza się w elementarnych przypadkach do takich zagadnień jak:

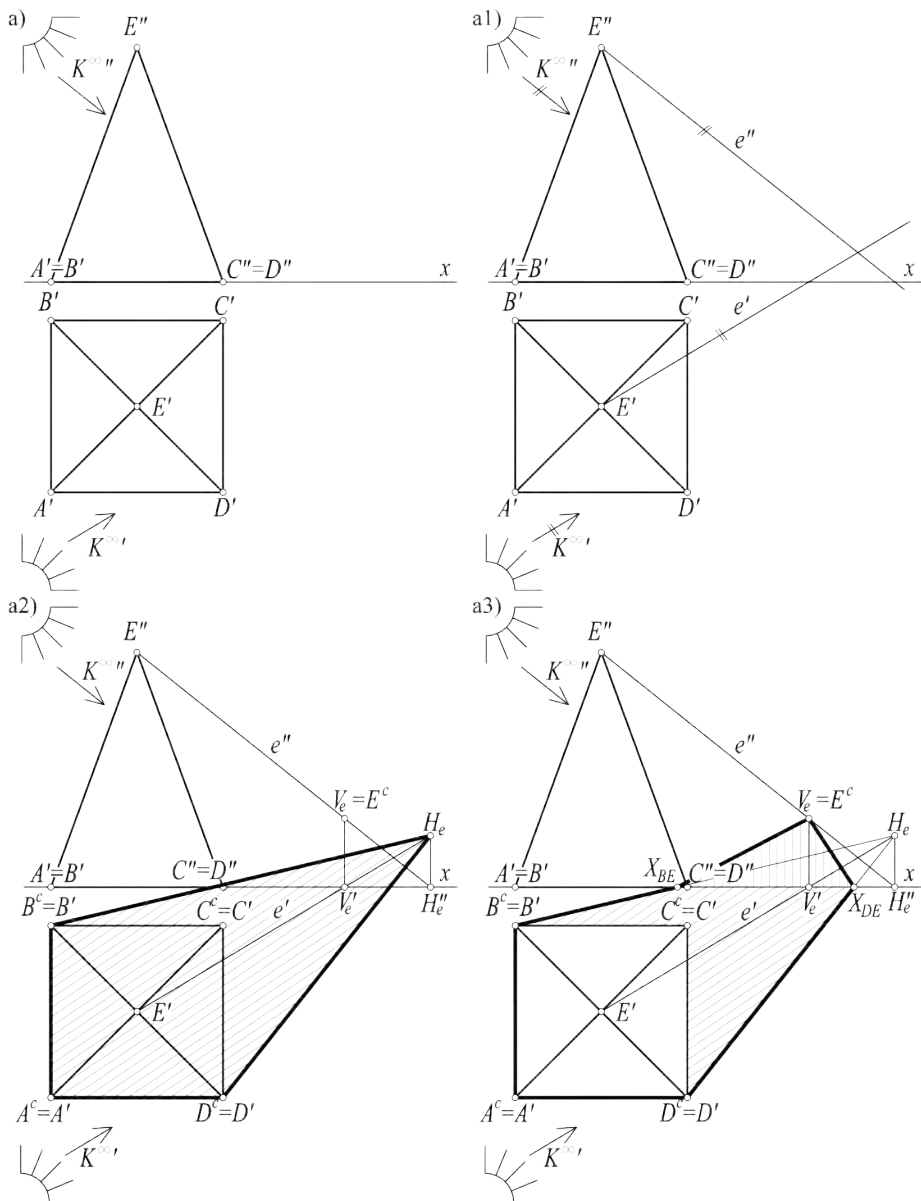
- wyznaczenie punktu przebicia promienia świetlnego, z najbliższą napotkaną płaszczyzną lub powierzchnią,
- wyznaczenie przecięcia płaszczyzny świetlnej, zwykle walca lub stożka świetlnego, z najbliższą napotkaną płaszczyzną,
- wyznaczenie przecięcia figury płaszczyzną świetlną,
- wyznaczenie linii przenikania się figury z walcem (stożkiem) świetlnym,
- wyznaczenie linii styczności walca (stożka) świetlnego z figurą.

Ślad prostej możemy interpretować jako *cień* pewnego punktu, jeżeli prostą tę przyjmiemy za promień świetlny, a rzutnię za tło, czyli płaszczyznę przedmiotu, na który ów oświetlony punkt rzuca cień. Jeżeli np. rzutnie Monge'a uznamy odpowiednio za podłogę i ścianę pokoju, prostą zaś przyjmiemy za promień świetlny pewnego punktu, przez który ta prosta przechodzi, to jeden z dwóch śladów będzie cieniem punktu na odpowiednią rzutnię. Będzie to mianowicie ten ze śladów, który leży wcześniej na prostej (promieniu świetlnym) w orientacji wyznaczonej przez parę punktów: *punkt świetlny* (źródło światła) i punkt oświetlany. Na rysunkach 2.8a–b3 punkt  $S$  interpretujemy jako punktowe źródło światła. Punkt  $A$  rzuca cień na rzutnię poziomą, gdyż prosta  $a$  wcześniej przebija rzutnię poziomą (podłogę) niż rzutnię pionową (ścianę) w orientacji od punktu  $S$  (źródła światła) do punktu  $A$  (punktu oświetlanego). Strzałka na rysunku 2.8a3 wskazuje kierunek biegu promienia. Punkt  $B$  rzuca natomiast cień na rzutnię pionową, gdyż prosta  $b$  wcześniej przebija rzutnię pionową (ścianę) niż rzutnię poziomą (podłogę) w orientacji od punktu  $S$  (źródła światła) do punktu  $B$  (punktu oświetlanego). Strzałka na rysunku 2.8b3 wskazuje kierunek biegu promienia.





Rysunek 2.8: Cienie w rzutach Monge'a przy oświetleniu punktowym ( $S(S', S'')$  – źródło światła): a) cień punktu  $A(A', A'')$  na rzutnię poziomą; a1)–a3) konstrukcja cienia punktu  $A(A', A'')$  na rzutnię poziomą; b) cień punktu  $B(B', B'')$  na rzutnię pionową; b1)–b3) konstrukcja cienia punktu  $B(B', B'')$  na rzutnię pionową; Cień odcinka w rzutach Monge'a przy oświetleniu równoległym ( $K^\infty(K^{\infty'}, K^{\infty''})$  – źródło światła): c) założenia; c1) przez punkty  $A$  i  $B$  rysujemy promienie (proste  $a(a', a'')$ ,  $b(b', b'')$ ); c2)–c3) znajdujemy ślady prostych  $a(a', a'')$ ,  $b(b', b'')$ , punkty  $V_a$ ,  $V_b$  wyznaczają cień odcinka na rzutni pionowej (przy założeniu, że „chwilowo” nie ma rzutni poziomej) i równocześnie punkt  $X_{AB}$  załamania się cienia; c4) ostateczny cień odcinka



Rysunek 2.9: Cień ostrosłupa przy oświetleniu równoległym: a) ostrosłup  $[ABCDE]$  i kierunek oświetlenia ( $K^\infty(K^\infty', K^\infty'')$  – źródło światła); a1) przez punkt  $E$  rysujemy promień (prostą)  $e(e', e'')$ ; a2) znajdujemy ślady prostej  $e(e', e'')$ , a następnie cień ostrosłupa na rzutni poziomej (przy założeniu, że „chwilowo” nie ma rzutni pionowej) jako powłokę wypukłą punktów (czyli najmniejszy zbiór wypukły zawierający dane punkty)  $[A^c B^c H_e D^c]$ ; a3) równocześnie otrzymujemy punkty  $X_{BE}$  i  $X_{DE}$  załamania się cieni  $[B^c H_e]$  i  $[D^c H_e]$  odcinków  $[BE]$  i  $[DE]$  powłoki i ostateczny kształt cienia ostrosłupa rzucony na dwie rzutnie. Punkty  $X_{BE}$  i  $X_{DE}$  są punktami przecięcia się prostych  $(B^c H_e)$  i  $(D^c H_e)$  z osią rzutów  $x$ . Nie zakreskowano części cienia zasłoniętego przez ostrosłup. Zauważmy ponadto, że w praktyce mówienie o tej (zasłoniętej) części cienia nie ma sensu



Rysunek 2.10: Cienie w praktyce budowlanej. Obiekty budowlane nie mogą pozbawiać sąsiadujących budynków „dostępu” do światła słonecznego. Zgodnie z prawem budowlanym obiekt mieszkalny musi być przez określony czas w bezpośrednim obszarze działania promieni słonecznych. Stąd powstała konieczność zaprojektowania wysokiego hotelu z „dziurą”: a) wizualizacja modelu komputerowego 3D projektu budynku z symulacją cienia; b–c) hotel w budowie (archiwalne zdjęcie) – olbrzymia część budynku stoi na „nodze” (Hotel Intercontinental w Warszawie u zbiegu ulic Siennej i Emilii Plater – wówczas najwyższy żelbetowy budynek w Polsce, 2003), fot. autor

By znaleźć cień punktu, prowadzimy przez punkt prostą (rys. 2.8a2, 2.8b2), znajdujemy ślady (rys. 2.8a3, 2.8b3) i by stwierdzić, który ślad możemy uznać za cień, „przesuwamy się” po osi  $x$  w kierunku strzałki i analizujemy położenie rzutów śladów danej prostej. Ten ślad danej prostej jest cieniem, który „spotkaliśmy” wcześniej. Na rysunkach 2.8a, 2.8a3 cieniem  $A^c$  punktu  $A$  jest ślad  $H_a$ , na rysunkach 2.8b, 2.8b3 cieniem  $B^c$  punktu  $B$  jest ślad  $V_b$ .

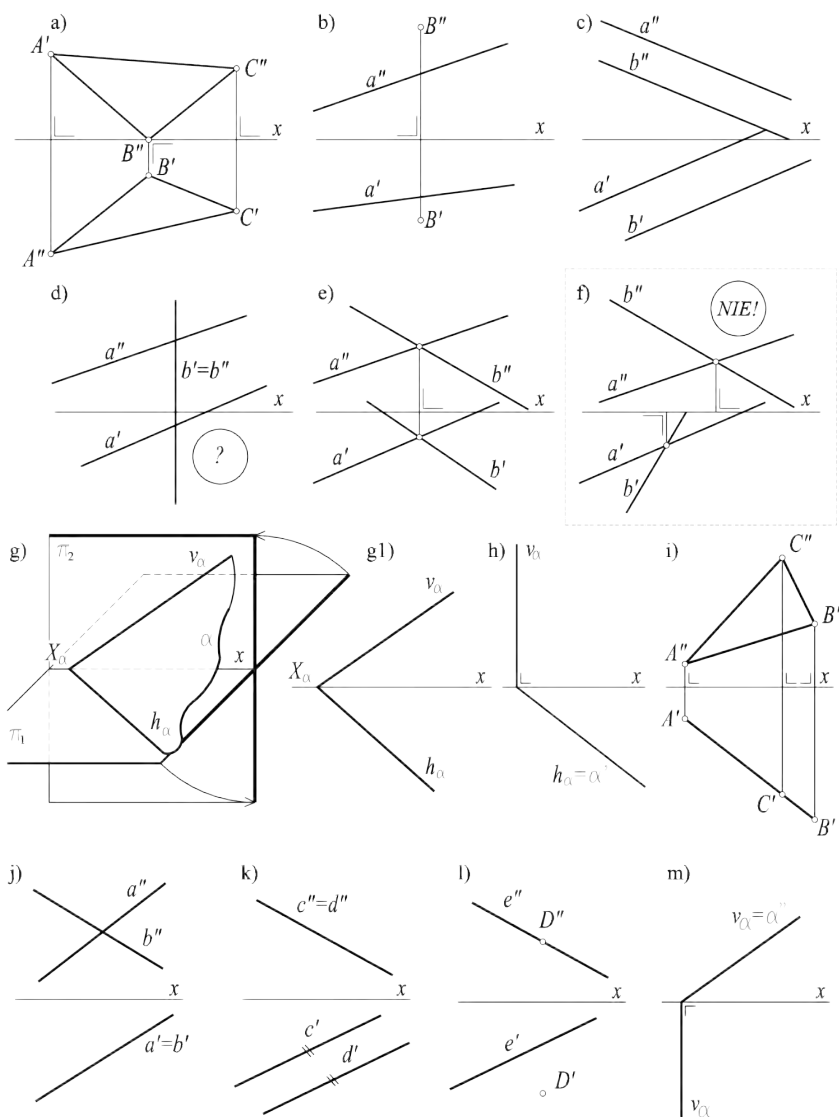
Jeżeli omówione wcześniej dwa punkty  $A$  i  $B$  należą do tego samego obiektu, to jego cień rzucony na dwie płaszczyzny ulegnie załamaniu. Ograniczając zagadnienie do odcinka, rozwiązanie zadania znalezienia cienia przedstawia (w kilku odsłonach) rysunek 2.8c–c4. Cień odcinka załamuje się w punkcie  $X_{AB}$ , w którym jeden z odcinków  $[H_aH_b]$ ,  $[V_aV_b]$  przecina oś rzutów  $x$ . Zatem w odniesieniu do obiektów (brył) o przedstawieniu szkieletowym problem został rozwiązany całkowicie. Bowiem cień figury o *reprezentacji szkieletowej*, tj. zawierającej punkty jako wierzchołki, odcinki jako krawędzie i wielokąty jako ściany, wyznaczamy, znajdując cień jej wszystkich wierzchołków. Następnie, jeśli jest to *figura wypukła*<sup>4</sup>, znajdujemy *powłokę wypukłą*<sup>5</sup> punktów będących cieniami wierzchołków oświetlonej figury.

## 2.6. Odwzorowanie płaszczyzny

Rzutem prostokątnym płaszczyzny, o ile nie jest ona prostopadła do rzutni, jest płaszczyzna. W takim rozumieniu rzutu odwzorowanie płaszczyzny nie ma sensu. Pozostaje więc reprezentacja płaszczyzny poprzez elementy ją wyznaczające, takie jak: trzy punkty, punkt i prosta, dwie proste przecinające się (równoległe) (rys. 2.11a–c,e). Jak wiadomo, dwie proste skośne nie określają jednoznacznie płaszczyzny (rys. 2.11f). Ponadto, jeżeli jedna z dwu prostych jest prostą profilową i w rzutach prostokątnych nie jest zaznaczony ich punkt przecięcia się, to proste o takich rzutach również nie określają płaszczyzny (rys. 2.11d).

<sup>4</sup> Figurę nazywamy *wypukłą*, jeżeli zawiera wszystkie odcinki, których końcami są dowolne punkty tej figury.

<sup>5</sup> *Powłokę wypukłą* zbioru punktów nazywamy najmniejszy (w sensie zawierania) zbiór wypukły, do którego należą wszystkie punkty wyjściowego zbioru. W grafice komputerowej wśród algorytmów wyznaczających powłokę wypukłą warto wymienić algorytmy Grahama oraz Greena i Silvermana [7].

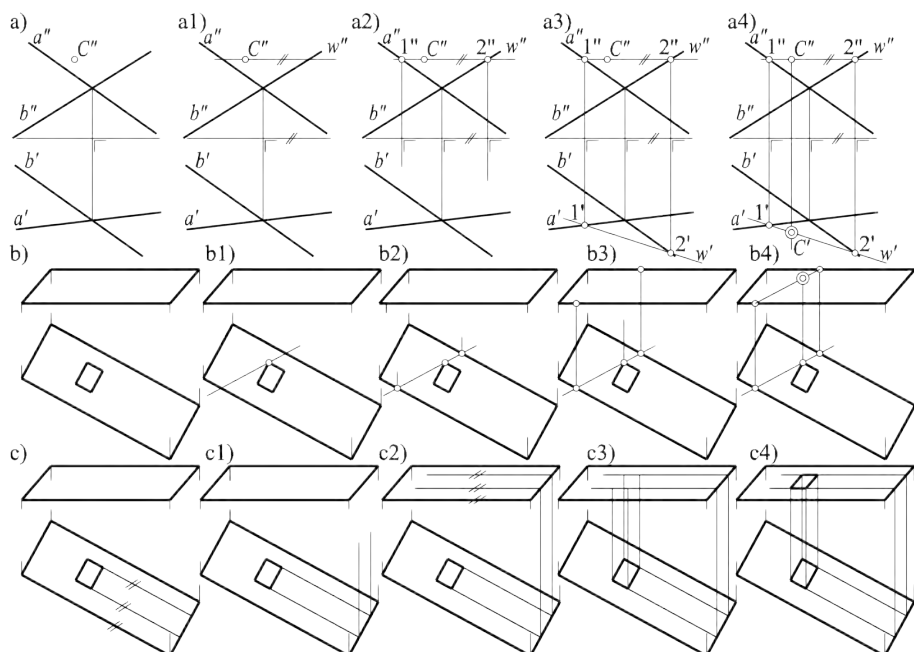


Rysunek 2.11: Płaszczyzna w rzutach Monge'a określona przez: a) trzy punkty; b) punkt i prostą; c) dwie proste równoległe; d) nie możemy stwierdzić, czy proste określają jednoznacznie płaszczyznę: jedną z dwu prostych jest prosta profilowa i nie jest zaznaczony ich wspólny punkt; e) dwie proste przecinające się; f) proste nie określają płaszczyzny, ponieważ są skośne (punkty przecięcia rzutów nie leżą na tej samej odnoszącej); g) ślady płaszczyzny w położeniu ogólnym; g1) płaszczyzna w położeniu ogólnym określona śladami; h) trzy punkty przedstawiające płaszczyznę poziomo rzutującą; i) płaszczyzna poziomo rzutująca określona śladami; j) dwie proste przedstawiające płaszczyznę poziomo rzutującą; k) dwie proste równoległe przedstawiające płaszczyznę pionowo rzutującą; l) płaszczyzna pionowo rzutująca określona za pomocą punktu i prostej; m) płaszczyzna pionowo rzutująca określona śladami. We wszystkich przypadkach (h–m) określenia płaszczyzny są redundantne, do jednoznacznego określenia płaszczyzny w przypadkach h–j wystarczy rzut poziomy (jedna linia prosta), podobnie jak w przypadkach k–m

Czasem wygodnie jest reprezentować płaszczyznę za pomocą dwu specjalnych prostych, tzw. *śladów*, czyli takich prostych, w których płaszczyzna przecina rzutnie (rys. 2.11g–g1). Czym charakteryzują się ślady płaszczyzny? Ślady płaszczyzny przecinają się na osi rzutów. Każde dwie proste przecinające się na osi  $x$ , z wyjątkiem przypadku, gdy jedna z prostych pokrywa się z osią a druga nie (dlaczego?), są śladami pewnej płaszczyzny. Jeśli proste (ślady) nie pokrywają się równocześnie z osią  $x$ , to płaszczyzna jest określona jednoznacznie. Szczególne znaczenie w konstrukcjach w rzutach Monge’a mają płaszczyzny *rzutujące*, czyli płaszczyzny prostopadłe do jednej z rzutni. Płaszczyznę prostopadłą do rzutni poziomej nazywamy *poziomo rzutującą* (rys. 2.11h–j), płaszczyznę prostopadłą do rzutni pionowej nazywamy *pionowo rzutującą* (rys. 2.11k–m). W przypadku płaszczyzn rzutujących rzutem płaszczyzny jest prosta. Jest to przypadek, w którym rzut płaszczyzny jednoznacznie ją wyznacza. Jest on równocześnie śladem i drugi ze śladów, jako odpowiednia prosta prostopadła do osi rzutów, jest wtedy jednoznacznie wyznaczony. W jakim przypadku śladem płaszczyzny jest prosta niewłaściwa? Wiemy już, jak odwzorować płaszczyznę za pomocą elementów jednoznacznie ją wyznaczających. Jak uzupełniać rzuty punktów, gdy dany jest jeden z jego rzutów? Otóż jeżeli rzutem płaszczyzny (na którąś rzutnię) jest płaszczyzna, to każdy punkt tej rzutni jest rzutem pewnego punktu płaszczyzny. Można więc dowolny punkt przyjąć jako rzut pewnego punktu płaszczyzny i skonstruować jego brakujący rzut. W przypadku, gdy płaszczyzna jest rzutująca, uzupełnienie brakującego punktu jest możliwe tylko w jedną stronę (mamy na myśli jednoznaczne uzupełnienie rzutów punktu). Konstrukcje te, fundamentalne w rzutach Monge’a i aksonometrii, zostaną omówione w kolejnym paragrafie.

**Przykład 2.1.** Dane są rzuty prostych  $a(a', a'')$ ,  $b(b', b'')$  przecinających się, określających płaszczyznę oraz rzut pionowy  $C''$  punktu  $C$  leżącego na tej płaszczyźnie (rys. 2.13). Wyznaczyć rzut poziomy punktu  $C$ .

*Rozwiązanie* zadania z przykładu 2.1. Przez punkt  $C''$  prowadzimy rzut pionowy  $w''$  prostej poziomej  $w$  (rys. 2.13a1); zapewniamy przynależność prostej  $w$  do płaszczyzny prostych  $a$  i  $b$  poprzez zagwarantowanie spełnienia warunku przecinania się prostej  $w$  z prostymi  $a$  i  $b$  (punkty 1 i 2 są punktami wspólnymi prostych  $a$  i  $w$  oraz  $b$  i  $w$  (rys. 2.13a2–a3)); znajdujemy brakujący rzut poziomy  $C'$  punktu  $C$  (rys. 2.13a4). Przyjęta w rozwiązaniu pozioma prosta  $w$  przynależności elementów może być prostą o dowolnym położeniu.



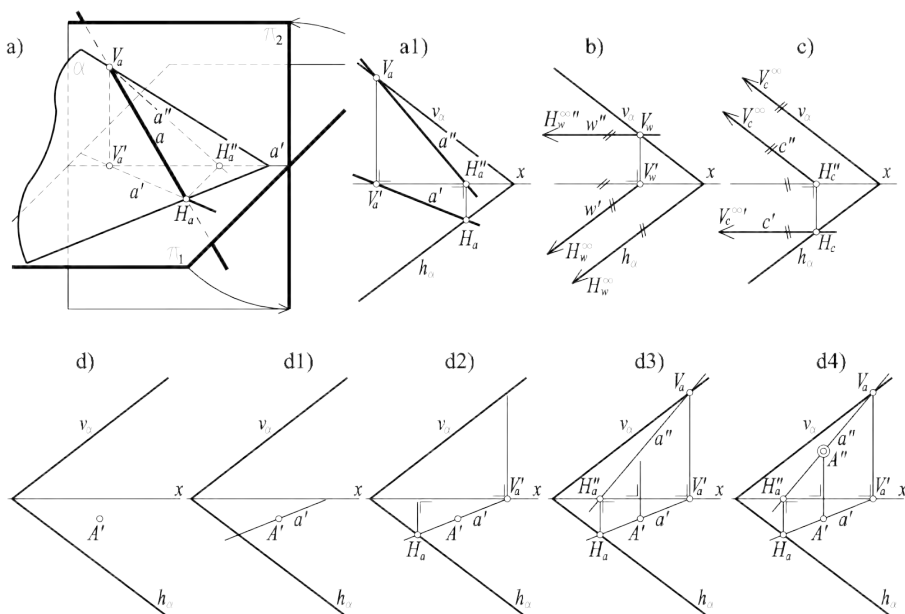
Rysunek 2.12: Uzupełnianie rzutów punktów na płaszczyźnie: a) płaszczyzna jest określona przez dwie proste  $a(a', a'')$  i  $b(b', b'')$  i dany jest rzut pionowy  $C''$  punktu  $C$  leżącego na tej płaszczyźnie; b) płaszczyzna określona jest za pomocą równoległoboku, znajdujemy rzut pionowy wybranego punktu za pomocą prostej w położeniu ogólnym; c) tu znajdujemy rzut pionowy „małego” prostokąta, korzystając z niezmiennika równoległości **PP3**, rozwiązanie w tym przypadku może być interpretowane jako konstrukcja uzupełnienia wyłazu na połaci dachowej

W przykładzie 2.2 przyjmujemy dowolną prostą, rozwiązanie problemu zostało zawarte w serii rysunków (rys. 2.12b1–b4).

**Przykład 2.2.** Dane są rzuty poziomy i pionowy prostokąta (np. połaci dachowej) oraz rzut poziomy mniejszego prostokąta (wyłazu dachowego). Wyznaczyć rzut pionowy mniejszego prostokąta (wyłazu dachowego).

*Rozwiązanie zadania z przykładu 2.2.* Na rysunkach 2.12b1–b4 przedstawiamy konstrukcję uzupełnienia rzutu pionowego jednego z wierzchołków małego prostokąta za pomocą dowolnej prostej (już niekoniecznie poziomej) na płaszczyźnie prostokąta. Zauważmy przy okazji, że rzutem poziomym prostokąta jest prostokąt. Zachowanie kąta prostego w rzucie jest konsekwencją tzw. *niezmiennika charakterystycznego rzutowania prostokątnego* (o którym szczegółowo powiemy w rozdziale 4), gdyż jedno z ramion tego kąta jest prostą równoległą do rzutni poziomej, czyli prostą

warstwową. W serii rysunków 2.12c–c4 przedstawiamy sposób uzupełniania rzutu pionowego prostokątnego wyłazu dachowego z użyciem prostych warstwowych. Rzuty dużego prostokąta potraktujemy bowiem jako rzuty połąci dachu budynku, której okap i kalenica są równoległymi prostymi (odcinkami) warstwowymi. Korzystamy tu z niezmienników rzutowania równoległego, szczególnie z niezmiennika równoległości (prostych, odcinków) **PP3**. Jest to równocześnie najbardziej oszczędny sposób konstrukcji uzupełniania rzutu pionowego „małego” prostokąta. Do znalezienia rzutu pionowego prostej wystarczy bowiem znać jeden punkt, wiedząc, że prosta ta jest równoległa do innej prostej.



Rysunek 2.13: Uzupełnianie rzutów punktów na płaszczyźnie danej śladami: d1) przez punkt  $A'$  rysujemy rzut poziomy  $a'$  prostej  $a$ ; d2) wyznaczamy ślad poziomy  $H_a$  oraz rzut poziomy  $V'_a$  śladu pionowego  $V_a$ ; d3) konstruujemy rzut pionowy  $H''_a$  śladu poziomego  $H_a$  oraz ślad pionowy  $V_a$  i konstruujemy rzut pionowy  $a''$  prostej  $a$ ; znajdujemy (poprzez odnoszącą) punkt  $A''$

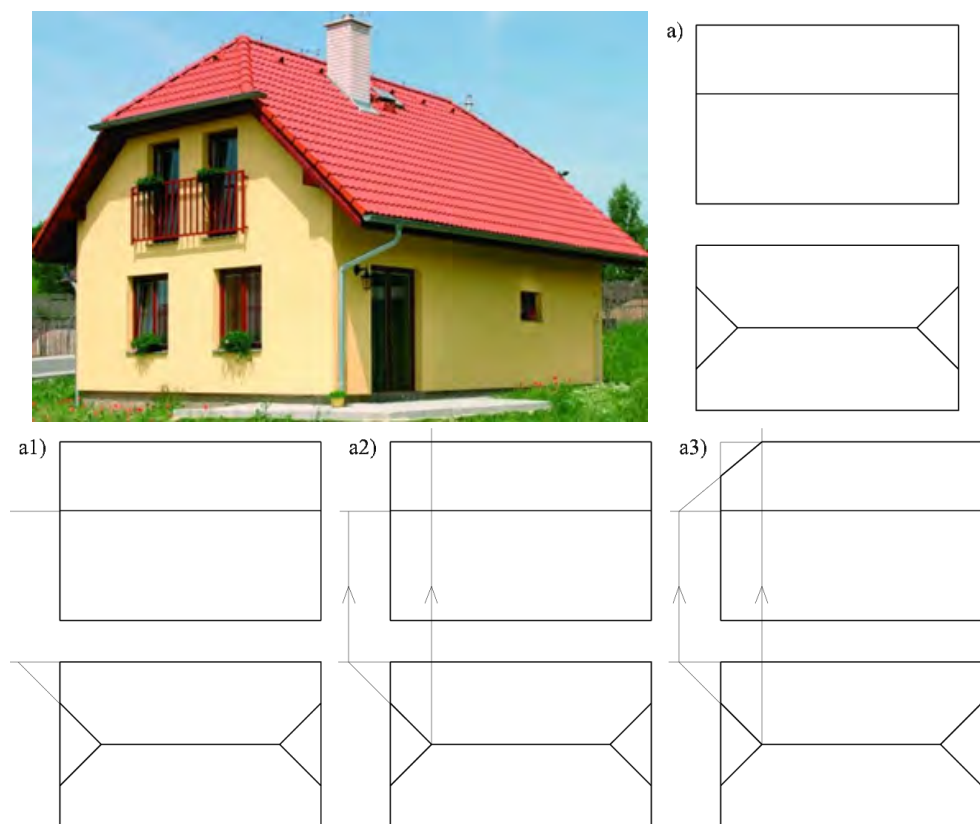
**Przykład 2.3.** Dana jest płaszczyzna  $\alpha$  określona śladami  $h_\alpha$ ,  $v_\alpha$  oraz rzut poziomy  $A'$  punktu  $A$  leżącego na tej płaszczyźnie (rys. 2.13d). Wyznaczyć rzut pionowy punktu  $A$ .

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 2.3. Przez punkt  $A'$  prowadzimy rzut poziomy  $a'$  prostej  $a$  (rys. 2.13d1); wyznaczamy ślad poziomy  $H_a$



oraz rzut poziomy  $V'_a$  śladu pionowego  $V_a$  (rys. 2.13d2); konstruujemy rzut pionowy  $H''_a$  śladu poziomego  $H_a$  oraz ślad pionowy  $V_a$  i konstruujemy rzut pionowy  $a''$  prostej  $a$  (rys. 2.13d3); wreszcie znajdujemy (poprzez odnoszącą) punkt  $A''$  (rys. 2.13d4). Zastosujemy poznane konstrukcje w realnym przykładzie.

**Przykład 2.4.** Dany jest rzut poziomy (plan) „domku” z odwzorowanymi naczółkami i rzut pionowy (elewacja) konturu (rys. 2.14a). Wyznaczyć rzut pionowy naczółków.



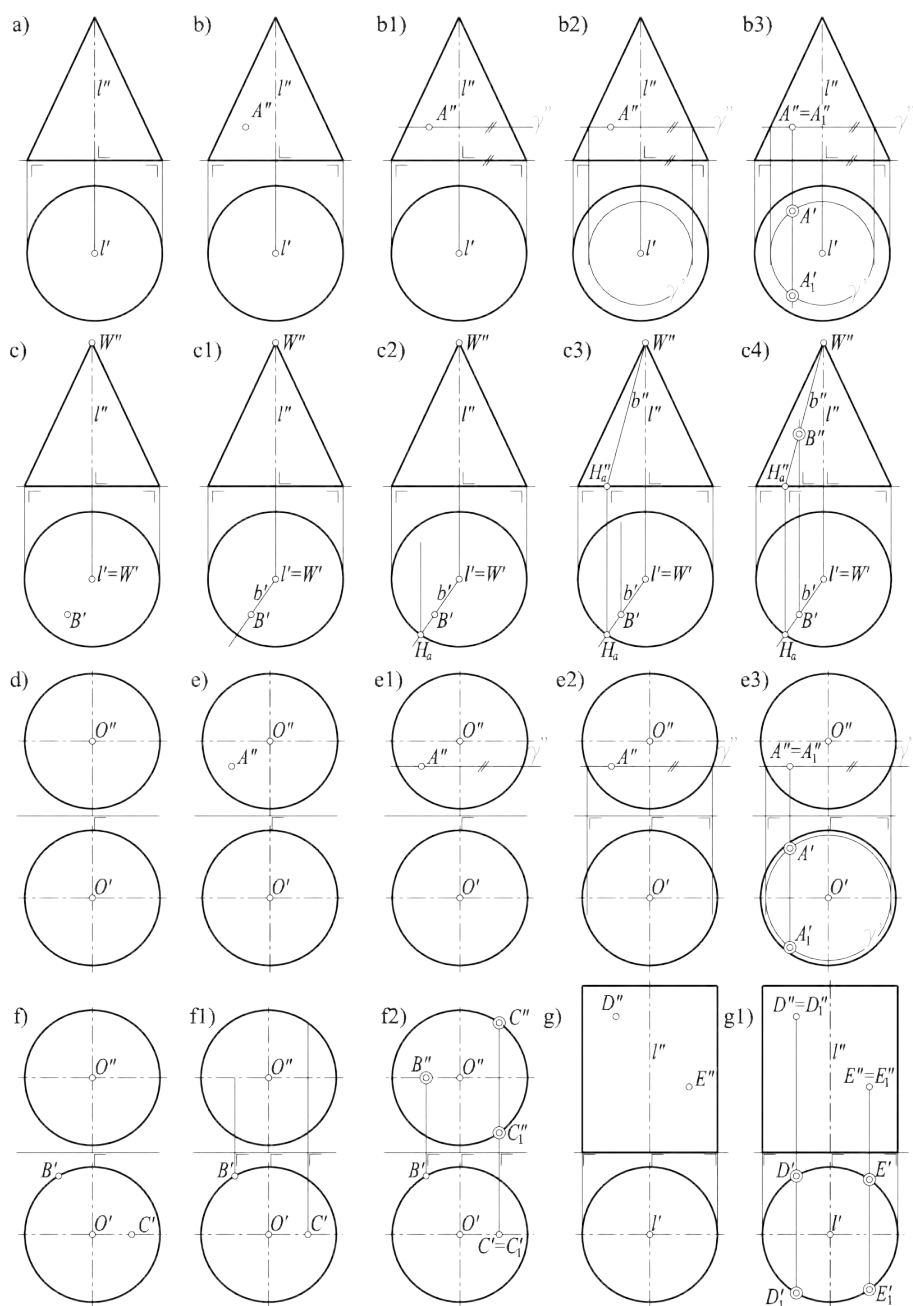
Rysunek 2.14: Uzupełnianie rzutu pionowego naczółków uproszczonego dachu „domku”: a1) linia naczółka przecina okap i (oczywiście) kalenicę, mamy więc rzuty poziome dwóch punktów tej prostej; a2) prowadzimy odnoszącą, po czym na okapie i kalenicy znajdujemy rzuty pionowe owych punktów; a3) punkty w rzucie pionowym wyznaczają rzut pionowy linii naczółka, fot. autor

## 2.7. Odwzorowanie stożka, walca i sfery



Rysunek 2.15: Obiekty techniczne: walec, stożek, źródło: [33] oraz sfera, źródło: [34]

Omówimy jeszcze rzuty prostokątne najprostszych powierzchni stopnia drugiego, tj. stożka obrotowego, walca obrotowego i sfery, znanych ze szkolnej matematyki. Powierzchnie te, oprócz płaszczyzny, najczęściej występują jako elementy kształtujące obiekty techniczne, w szczególności budowlane. W architekturze i budownictwie znajdują zastosowanie także inne, niezwykle interesujące, ale i bardziej złożone powierzchnie, które omówimy później. Wymienione wyżej powierzchnie w wyniku przekroju pewnymi (nie wszystkimi!) płaszczyznami dają prostą (odcinek) lub okrąg. Przekrój płaszczyzną daną płaszczyzną jest zawsze prostą. Dotychczasowe obiekty geometryczne (odcinek, trójkąt, wielokąt, prostopadłościan, ostrosłup) miały reprezentację szkieletową. W celu odwzorowania powierzchni stożka, walca i sfery przyjmujemy reprezentację *konturową*, tzn. taką, w której rzutem powierzchni jest brzeg rzutu tej powierzchni (figury rozumianej jako zbiór rzutów wszystkich punktów powierzchni). Rzutem każdej z omawianych tu powierzchni jest trójkąt, prostokąt, koło (w reprezentacji konturowej okrąg) (rys. 2.16). Każda z nich jest powierzchnią obrotową otrzymaną z obrotu prostej lub okręgu, leżących razem z osią obrotu w jednej płaszczyźnie. Stąd wiemy, że: przekroje osiowe (*południki*), czyli płaszczyznami poziomo rzutującymi są prostymi lub okręgami, a przekroje płaszczyznami poziomymi (*równoleżniki*) są okręgami. Południkami stożka są proste przecinające jego oś w punkcie właściwym, inaczej zwane *tworzącymi* stożka; południkami walca są proste równoległe do osi, także zwane *tworzącymi*. Uzupełnianie rzutów punktów leżących na tych powierzchniach polega na identyfikacji przynależności rzutów do prostej lub okręgu.



Rysunek 2.16: Rzuty najprostszych powierzchni stopnia drugiego: a) stożka obrotowego; d) sfery; g) walca obrotowego. Uzupełnianie rzutów punktów: b–b3) na stożku za pośrednictwem okręgu; c–c4) na stożku za pośrednictwem prostej; e–e3) punktu w położeniu ogólnym na sferze; f–f2) punktu na południku (punkt  $B$ ), na równiku (punkt  $C$ ); g–g1) dowolnego punktu na walcu. W przypadku walca jednoznaczne uzupełnienie jest możliwe tylko wtedy, gdy dany jest rzut pionowy. Nic dziwnego – walec w takim ustawieniu jak na rysunku jest *powierzchnią rzutującą* (tu: poziomo rzutującą)

Podobnie jak w przypadku płaszczyzny, identyfikacja punktów na powierzchniach określonych za pomocą konturów (stożek, walec, sfera) odbywa się poprzez krzywe płaskie leżące na tych powierzchniach. Są to proste i okręgi na stożku i walcu <sup>6</sup> oraz okręgi na sferze. Uzupełnienie rzutu, leżącego na konturze powierzchni, punktu polega na wyborze odpowiednio okręgu lub prostej. Aby szczegółowo poznać konstrukcje tego typu, rozwiążemy serię zadań.

**Przykład 2.5.** Dane są rzuty stożka o osi  $l(l', l'')$ , rzut pionowy  $A''$  punktu  $A$  (rys. 2.16b). Wyznaczyć rzut poziomy punktu  $A$ .

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 2.5. Przez punkt  $A''$  prowadzimy rzut pionowy  $\gamma''$  płaszczyzny  $\gamma$  równoległej do rzutni poziomej (rys. 2.16b1); połowa cięciwy trójkąta stanowi promień okręgu leżącego na stożku; konstruujemy rzut poziomy tego okręgu (rys. 2.16b2) i poprzez odnoszącą znajdujemy rzuty  $A'_1, A'_2$  dwóch punktów  $A_1, A_2$  leżących na powierzchni stożka, których rzuty pionowe pokrywają się, czyli  $A''_1 = A''_2$  (rys. 2.16b3).

**Przykład 2.6.** Dane są rzuty stożka o osi  $l(l', l'')$  i wierzchołku  $W(W', W'')$  oraz rzut poziomy  $B'$  punktu  $B$  (rys. 2.16c). Wyznaczyć rzut pionowy punktu  $B$ .

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 2.6. Przez punkt  $B'$  prowadzimy rzut poziomy  $b'$  tworzącej  $b$ , czyli prostej przechodzącej przez rzut  $W'$  wierzchołka  $W$  (rys. 2.16c1); znajdujemy ślad  $H_b$  prostej  $b$ ; rzut pionowy  $H''_b$  śladu  $H_b$  prostej  $b$  i rzut pionowy  $b''$  prostej  $b$  (rys. 2.16c3) i poprzez odnoszącą znajdujemy rzut  $B''$ , (rys. 2.16c4).

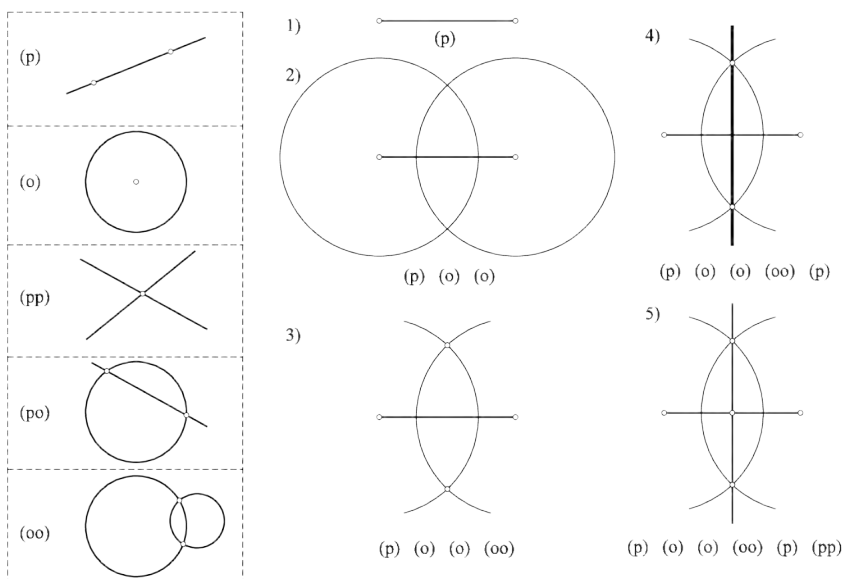
Sformułowania i rozwiązania podobnych zadań dla sfery i walca odczytamy na rysunkach 2.16d–g1.

## 2.8. Istota konstrukcji geometrycznej 2D. Konstrukcje klasyczne

Do czasów, kiedy zaczęto wykorzystywać komputer do wykonywania konstrukcji geometrycznych, jedynym procesem tworzenia rysunków był ten realizowany za pomocą cyrkla i linijki, oparty na metodzie konstrukcji klasycznych (p-o). Polega on na wykorzystaniu cyrkla (okrąg) i linijki

<sup>6</sup> Na powierzchni stożka leżą także inne krzywe płaskie: elipsy, parabole i hiperbole; na powierzchni walca, oprócz prostych i okręgów, leżą również elipsy.

(prosta) do wykonania każdej konstrukcji, w której realizowany jest ciąg konstrukcji elementarnych opisanych poniżej [3].



Rysunek 2.17: Konstrukcje elementarne prosta – okrąg (p-o). Przykłady konstrukcji symetralnej odcinka (1-4), środka odcinka (1-5)

Procesu tego nie da się zautomatyzować. Każdy powtarzający się element rysunku musi być narysowany takim samym sposobem (za pomocą tego samego algorytmu). Jedynym uproszczeniem, pomijając specjalistyczne przyrządy (np. dwie szpilki i sznurek do rysowania elipsy, siatki perspektywiczne, perspektografy), jest zastosowanie ekierki skracającej proces kreślenia prostej równoległej lub prostopadłej do danej prostej. Elementarne składniki (dzisiaj mówimy *entycje* od angielskiego słowa *entity* – wyodrębniona całość, rzecz realnie istniejąca) to *prosta* (odcinek), *okrąg* (łuk okręgu) i *punkt*. Każda więc konstrukcja wykonana metodą klasyczną składa się z ciągu konstrukcji utworzonego z elementów wziętych spośród pięciu konstrukcji elementarnych: (p), (o), (pp), (po), (oo) (rys. 2.17). Dla przykładu konstrukcja symetralnej odcinka wykonywana jest za pomocą algorytmu: (o), (o), (oo), (p), konstrukcja zaś środka odcinka wykonywana jest za pomocą ciągu konstrukcji elementarnych: (o), (o), (oo), (p), (pp) (rys. 2.17). Konstrukcję kreślenia prostej prostopadłej do danej prostej można zautomatyzować, wykorzystując ekierkę, tj. ciąg: (o), (o), (oo) można zastąpić jedną czynnością polegającą na odpowied-

nim przyłożeniu ekierki i linijki. Jaki ciąg czynności elementarnych zastępujemy, rysując prostą równoległą za pomocą ekierki? Za pomocą cyrkla i linijki nie można wykonać wielu konstrukcji geometrycznych takich, jak: *podwojenie sześcianu*<sup>7</sup>, *trysekcja kąta*<sup>8</sup>, *kwadratura koła*<sup>9</sup>, *rektyfikacja okręgu*<sup>10</sup>.

## 2.9. Zastosowania programu CAD w konstrukcji figur i brył

Rysowanie (konstruowanie) za pomocą narzędzi CAD (Computer Aided Design) będzie tematem oddzielnego wykładu. Jednak w celu oswajania się z metodami komputerowymi w zakresie grafiki inżynierskiej omówimy pewne wiadomości, które pozwolą wykonywać pierwsze konstrukcje za pomocą komputera. Przykłady konstrukcji CAD podane w tym wykładzie są konstrukcjami płaskimi (2D). Oznacza to, że otrzymany w ich wyniku wirtualny obiekt jest figurą płaską. Obecnie mamy dwie istotnie różne metody wykonywania konstrukcji geometrycznych (rysowania, kreślenia): *klasyczną* i drugą, nazwijmy *automatyczną*<sup>11</sup>. Automatyzacja konstruowania przejawia się m.in. poprzez możliwość<sup>12</sup>:

1) kreślenia za pomocą poleceń:

○ *rysowanie linii* LINE/LINIA (*wielolinii* PLINE/PLINIA)

Po wywołaniu polecenia LINE/LINIA wskazujemy początek linii, a następnie koniec<sup>13</sup>. W przypadku wielolinii określamy także grubość (Width/Szer). Możemy ją zmienić za pomocą polecenia PEDIT/EDPLIN

<sup>7</sup> *Podwojenie sześcianu*, to konstrukcja sześcianu o dwukrotnie większej objętości.

<sup>8</sup> *Trysekcja kąta* to podział danego kąta na trzy równe części.

<sup>9</sup> *Kwadratura koła* to konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego koła.

<sup>10</sup> *Rektyfikacja okręgu* to konstrukcja odcinka o długości równej długości danego okręgu.

<sup>11</sup> Chodzi tu o różnego rodzaju sposoby realizacji konstrukcji geometrycznych za pomocą programów komputerowych. Z oczywistych powodów posługiwać się będziemy określonym programem komputerowym, by uniknąć konieczności posługiwania się metajęzykiem czy metasytemem opisującym logikę edytora graficznego. Będzie to najbardziej popularny program – AutoCAD.

<sup>12</sup> Dokładny opis poleceń programu AutoCAD można znaleźć w dowolnym opracowaniu dotyczącym systemu (np. [28]) lub w specjalnej instrukcji.

<sup>13</sup> Początek i koniec rysowanego odcinka może być wskazany jako: koniec odcinka (ENDpoint/KONiec), środek odcinka (MIDpoint/SYMetria), przecięcie się dwóch obiektów ze zbioru obiektów {linia, wielolinia, łuk, okrąg} (INTersec/PRZecięcie), środek okręgu lub łuku (CENTer/CENtrum).

zmieniającego grubość linii (LINE/LINIA), która z założenia ma grubość zerową,

- o *rysowanie okręgu* CIRCLE/OKRĄG

Po wywołaniu polecenia wskazujemy środek okręgu i promień (liczbą lub przez podanie końca promienia) albo dwa końce średnicy bądź trzy punkty.

2) powielania obiektów poprzez:

- o *kopiowanie* (COPY/KOPIUJ) – geometrycznie *przesunięcie równoległe* z pozostawieniem pierwotnego obiektu,

- o *kopiowanie wraz z ustawieniem w tablicę prostokątną lub biegunową* (ARRAY/SZYK) – geometrycznie *przesunięcie równoległe* lub *złożenie przesunięcia równoległego i obrotu*,

- o *przesuwanie* (MOVE/PRZESUŃ) – geometrycznie *przesunięcie równoległe* z usunięciem pierwotnego obiektu,

- o *odbicie zwieczadlane* (MIRROR/LUSTRO) – geometrycznie *symetria osiowa* z pozostawieniem lub z usunięciem pierwotnego obiektu,

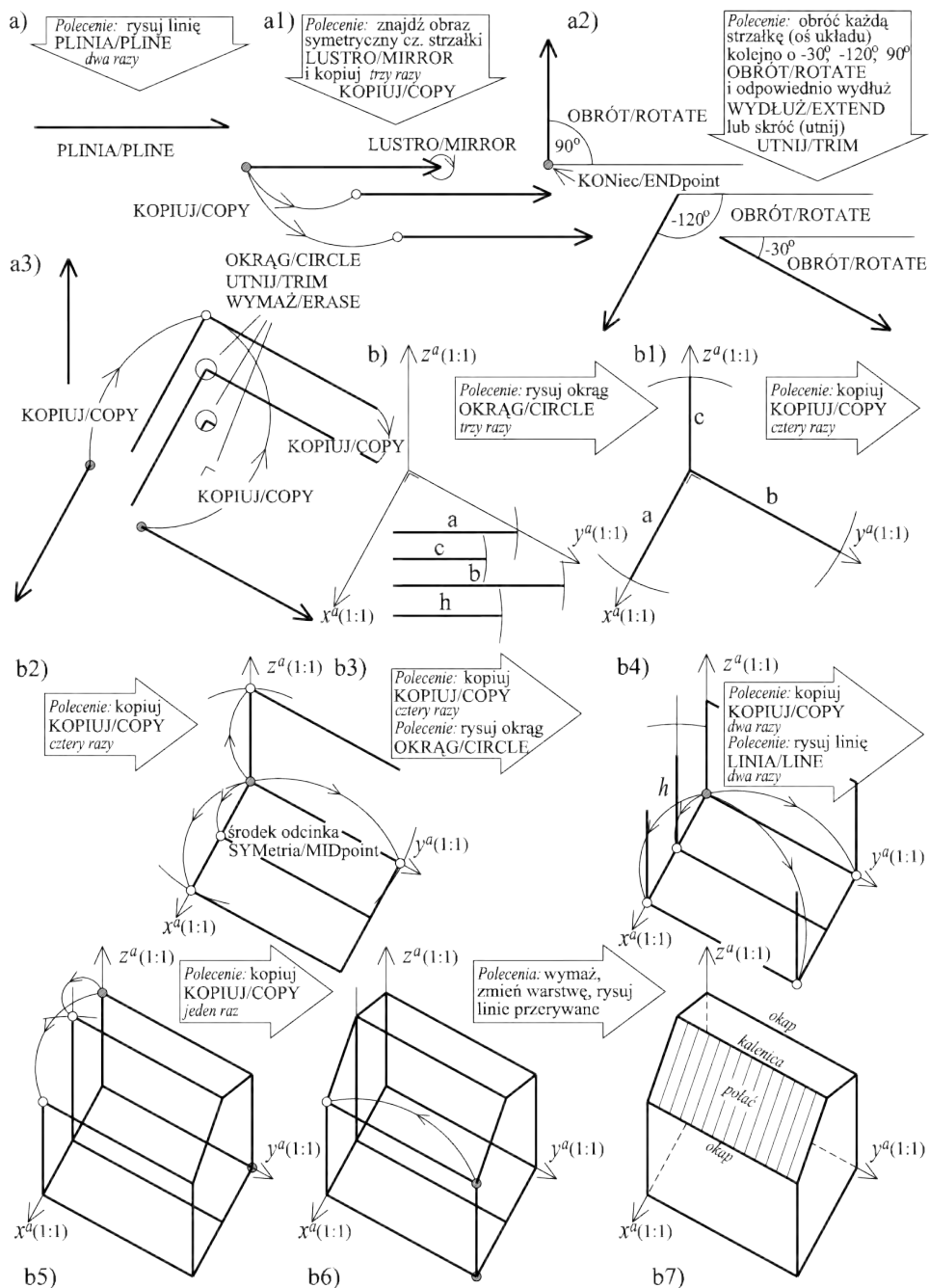
- o *obrót* (ROTATE/OBRÓT) – geometrycznie *obrót* z usunięciem pierwotnego obiektu,

3) modyfikacji obiektów poprzez:

- o *ucinanie* (TRIM/UTNIJ),

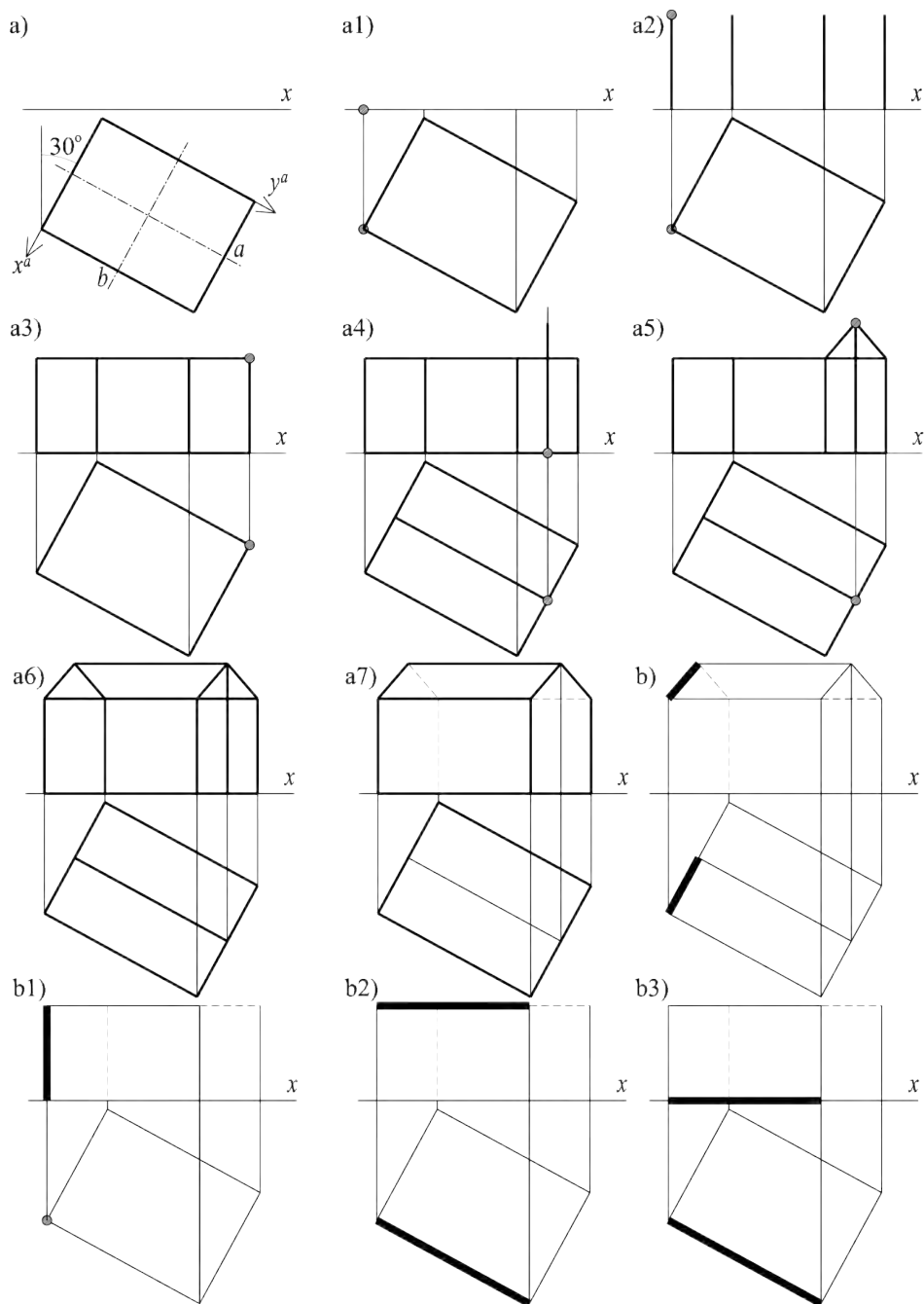
- o *wydłużanie* (EXTEND/WYDŁUŻ).

Zamieszczone na rysunkach 2.18, 2.19 opisy realizacji komputerowych mają na celu nie tyle dokładne przedstawienie procesu rysowania w programie komputerowym AutoCAD, ile zaprezentowanie ogólnej idei tworzenia rysunków w specjalistycznych programach graficznych. Szczegółowe, pełne przykłady rysowania za pomocą edytora graficznego znajdują się w specjalnych instrukcjach. Przy okazji dowiadujemy się jak niewielki udział w konstrukcji mają polecenia kreujące linie proste i łuki, a jak znaczący udział mają polecenia powielające (COPY/KOPIUJ, MOVE/PRZESUŃ, ROTATE/OBRÓT, MIRROR/LUSTRO) oraz polecenia modyfikujące (TRIM/UTNIJ, EXTEND/WYDŁUŻ). Można stwierdzić, że główną cechą edytora graficznego jest przetwarzanie istniejących elementów rysunku, a nie tworzenie nowych. Ta ostatnia cecha należy do bardzo ważnych, podstawowych zalet programów typu CAD.



Rysunek 2.18: Płaska konstrukcja szkieletu „domku” w izometrii wojskowej realizowana za pomocą edytora graficznego typu CAD i jej schematyczny, ideowy opis realizacji. W opisie pominięto niektóre elementy rysunku, na obecnym etapie mniej istotne, np. wstawianie tekstu





Rysunek 2.19: Konstrukcja szkieletu „domku” w rzutach prostokątnych realizowana za pomocą edytora graficznego typu CAD na podstawie rysunku 2.18: a) wymazujemy niepotrzebne linie, pozostawiając prostokąt, odnoszącą i dwa odcinki mające długości równe wysokości „domku” i wysokości jego ściany, tworzymy warstwę z typem linii CENTER2 i rysujemy linie symetrii; a1–a4) dalsze elementy rysujemy poprzez kopiowanie (KOPIUJ/COPY) i wydłużanie (WYDŁUŻ/EXTEND); a5) rysujemy odcinek za pomocą polecenia LINIA/LINE; a6) kontynuujemy kopiowanie; a7) zmieniamy warstwę na tę z typem linii DASHED i rysujemy dwie linie niewidoczne; b–b3) eksponujemy (ZMIENŹ/CHANGE) proste w rzutach Monge’a; w połączeniu ośmiornic (b)

## Rozdział 3

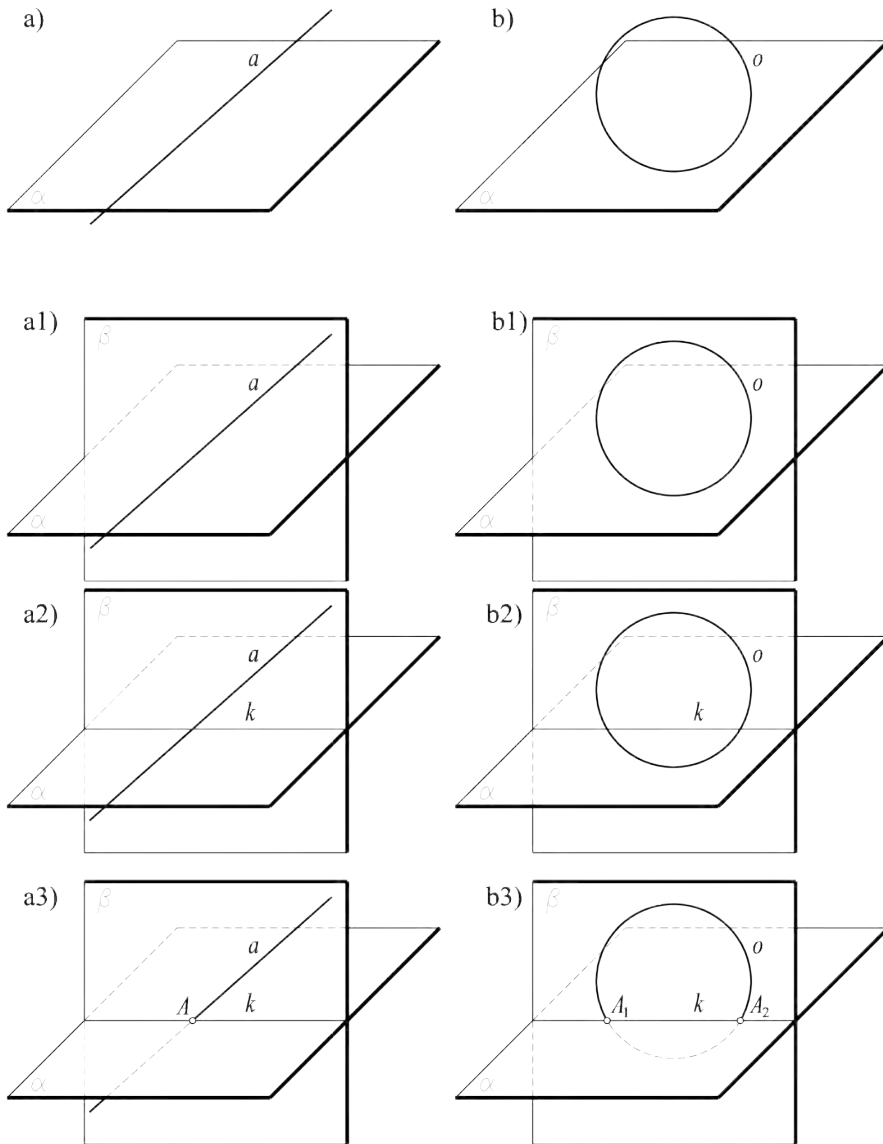
# Przenikanie brył

### 3.1. Elementy wspólne prostej (okręgu) i płaszczyzny

Wiele konstrukcji dotyczących przekrojów, przenikań brył, a więc tworzenia części wspólnych, różnic (także sum) obiektów geometrycznych (zbiorów), odbywa się poprzez wyznaczanie elementów wspólnych prostych (okręgów) z płaszczyznami (powierzchniami). Aby wyznaczyć punkty wspólne prostej  $a$  (rys. 3.1a) lub okręgu  $o$  z płaszczyzną  $\alpha$  postępujemy w sposób następujący: (1) przez prostą (okrąg) prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  (rys. 3.1a1, 3.1b1), (2) znajdujemy krawędź wspólną  $k$  płaszczyzn  $\alpha$ ,  $\beta$  (rys. 3.1a1, 3.1b1), (3) znajdujemy punkty przecięcia prostej (krawędzi)  $k$  z prostą  $a$  (okręgiem  $o$ ). W przypadku prostej wybór płaszczyzny jest dowolny. Ale wybieramy położenie najdogodniejsze. Najczęściej jest to płaszczyzna rzutująca. W przypadku okręgu płaszczyzna  $\beta$  jest jednoznacznie określona i w rzutach prostokątnych (Monge’a) dogodne jest położenie równoległe do rzutni, w dimetrii kawalerskiej – położenie równoległe do płaszczyzny  $Oyz$ , w izometrii wojskowej – położenie równoległe do płaszczyzny  $Oxy$ . Omówimy teraz znajdowanie punktów wspólnych prostej z płaszczyzną w obydwu rodzajach rzutów, w rzutach prostokątnych i w aksonometrii.

#### 3.1.1. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w położeniu rzutującym

**Przykład 3.1.** Znaleźć punkt wspólny prostej  $a$  z płaszczyzną pionowo rzutującą  $\alpha$  (rys. 3.2a).



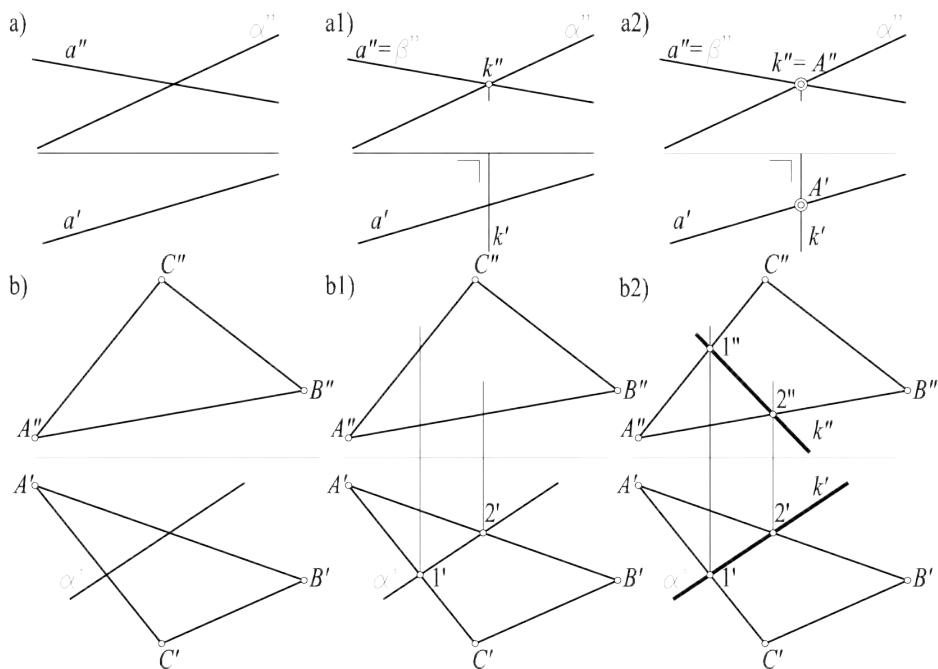
Rysunek 3.1: Algorytm znajdowania punktu (punktów) wspólnego (wspólnych) prostej (okręgu) z płaszczyzną. Dane są: a(b)) płaszczyzna  $\alpha$  oraz prosta (okrąg); a1(b1)) prowadzimy płaszczyznę  $\beta$  przez prostą (okrąg); a2(b2)) znajdujemy krawędź  $k$  płaszczyzny  $\beta$  z płaszczyzną  $\alpha$ ; a3(b3)) znajdujemy punkt wspólny  $A$  (punkty wspólne  $A_1, A_2$ ) prostej  $a$  (okręgu  $o$ ) z krawędzią  $k$

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 3.1. Przez prostą  $a(a', a'')$  prowadzimy płaszczyznę pionowo rzutującą  $\beta$  (rys. 3.2a1). Rzut pionowy  $\beta''$  płaszczyzny  $\beta$  pokrywa się z rzutem pionowym  $a''$  prostej  $a$ . Obie

płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  są prostopadłe do rzutni pionowej. Stąd ich krawędź wspólna  $k$  jest też prostopadła do rzutni pionowej. Jest więc prostą pionowo rzutującą. Mamy więc  $k' \perp x$ , a  $k''$  jest punktem (rys. 3.2a2). Proste  $k$  i  $a$ , poprzez przecięcie rzutów poziomych, dają szukany punkt przecięcia się prostej  $a$  z płaszczyzną  $\alpha$  (rys. 3.2a2).

**Przykład 3.2.** Znaleźć krawędź wspólną dwu płaszczyzn: płaszczyzny określonej przez trzy punkty  $(ABC)(A'B'C', A''B''C'')$  z płaszczyzną poziomo rzutującą  $\alpha(\alpha')$  (rys. 3.2b).

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 3.2. Krawędź wspólną płaszczyzn: płaszczyzny poziomo rzutującej  $\alpha$  i określonej przez trzy punkty  $A, B, C$  (rys. 3.2b) znajdujemy poprzez dwukrotne zastosowanie wcześniejszej konstrukcji. Kolejno znajdujemy punkty 1 i 2 (rys. 3.2b1–b2).

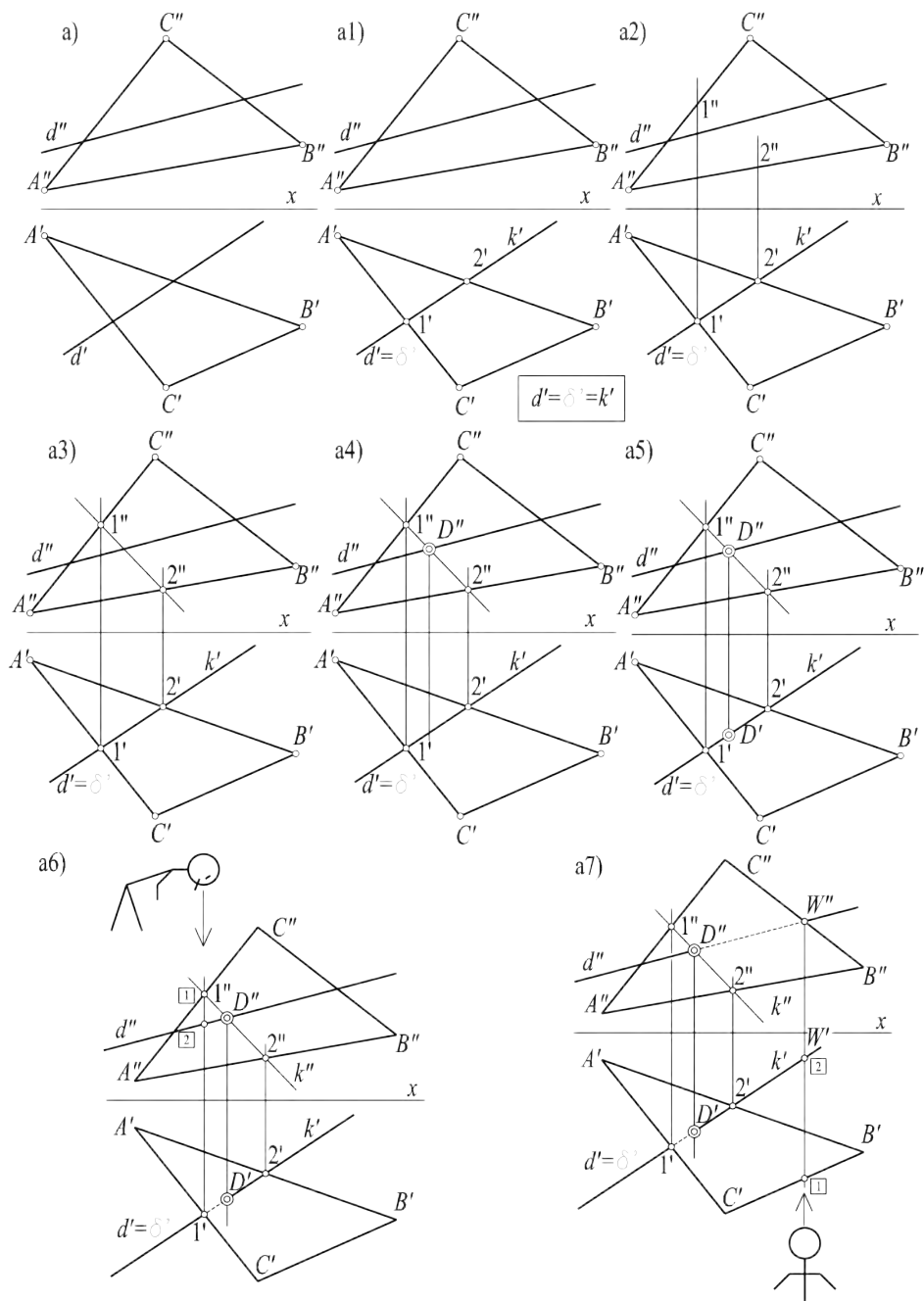


Rysunek 3.2: Wyznaczanie punktu wspólnego prostej  $a$  z płaszczyzną pionowo rzutującą  $\alpha$ : a1) przez prostą  $a$  prowadzimy płaszczyznę pionowo rzutującą  $\beta$  i znajdujemy krawędź  $k(k', k'')$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ . Konstrukcja krawędzi wspólnej płaszczyzn: b) poziomo rzutującej  $\alpha(\alpha')$  i trójkąta  $ABC(A'B'C', A''B''C'')$ , b1–b2) dwukrotne zastosowanie konstrukcji a1–a2

### 3.1.2. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w położeniu ogólnym

**Przykład 3.3.** Znaleźć punkt wspólny prostej  $d(d', d'')$  z płaszczyzną  $(ABC)(A'B'C', A''B''C'')$  określoną przez trzy punkty (rys. 3.3a).

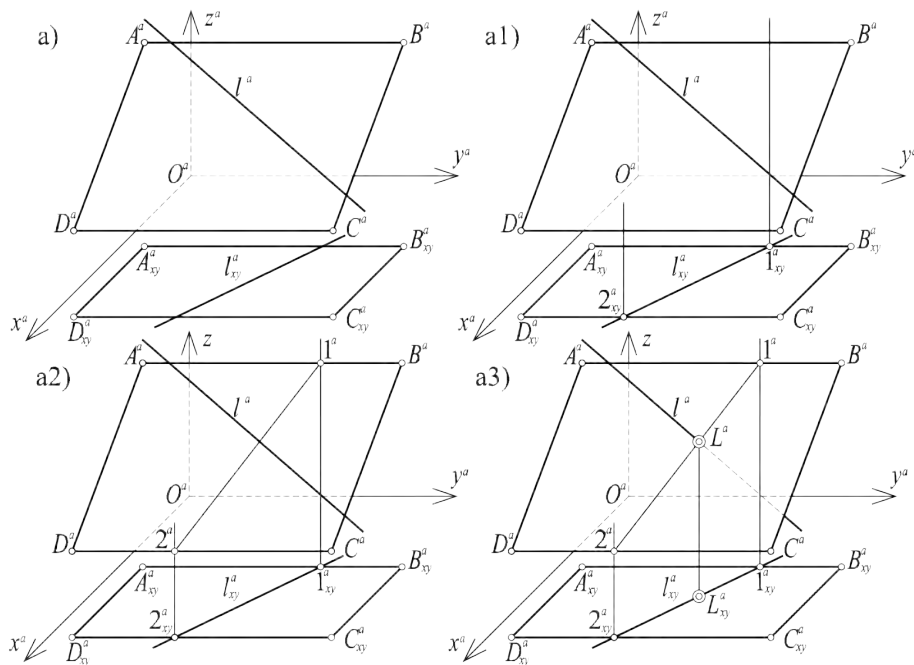
*Rozwiązanie* problemu z przykładu 3.3. W konstruowaniu punktu wspólnego prostej  $d(d', d'')$  z płaszczyzną trójkąta  $[ABC]([A'B'C'], [A''B''C''])$  korzystamy z rozwiązania z przykładu 3.2. Początkowa część rozwiązania przebiega analogicznie jak w przykładzie 3.2 (rys. 3.2b–b2). Seria rysunków 3.3a–a2 jest powtórzeniem serii rysunków 3.2b–b2, z tym że płaszczyzna  $\delta$  pojawia się dopiero na rysunku 3.3a1, a prosta  $d(d', d'')$  jest w serii rysunków 3.3a–a2, natomiast z oczywistych powodów nie ma jej w serii rysunków 3.2b–b2. Krawędź pomocniczej płaszczyzny poziomo rzutującej  $\delta$  zawierającej prostą  $d(d', d'')$  z płaszczyzną trójkąta  $[ABC]([A'B'C'], [A''B''C''])$  jest analogiczna jak na rysunku 3.2b–b2. Punkt  $D$ , będący rozwiązaniem zadania, znajdujemy jako punkt przecięcia się prostych  $k$  i  $d$  poprzez rzut pionowy. Rzut pionowy  $D''$  punktu  $D$  otrzymujemy jako punkt przecięcia się prostych  $k''$  i  $d''$  (rys. 3.3a4). Poprzez odnoszącą kompletujemy jego rzut pionowy (rys. 3.3a5). W celu podniesienia poziomu jakości rysunku i lepszej wizualizacji przestrzennej określamy widoczność elementów. Aby określić widoczność w rzucie poziomym, musimy stwierdzić, który z dwóch punktów nakrywających się w rzucie pionowym  $1''$  punktu 1 jest widoczny dla obserwatora patrzącego z góry („ludzik” na rysunku 3.3a6). Rzuty pionowe tych punktów na rysunku 3.3a6 są oznaczone cyframi 1 i 2 w kwadracikach. Widoczny jest ten punkt, który jest bliżej obserwatora (ma większą wysokość), „ludzik” widzi bowiem punkt 1, tzn. punkt 1 w kwadraciku, czyli punkt na trójkącie. Zatem prosta  $d$  jest w rzucie poziomym zasłonięta przez trójkąt na odcinku  $[1'D']$ . Punkt  $D$ , jako punkt przecięcia płaszczyzny trójkąta  $[ABC]$  prostą  $d$  jest „miejszem zmiany widoczności”. Podobnej analizy dokonujemy w odniesieniu do rzutu pionowego (rys. 3.3a7). Analizie poddajemy punkty trójkąta (punkt 1 w kwadraciku) oraz prostej (punkt 2 w kwadraciku), których rzutem pionowym jest punkt  $W''$ . Widoczny dla obserwatora jest punkt na trójkącie (ma większą głębokość). Prosta w rzucie pionowym jest zasłonięta przez trójkąt na odcinku  $[W''D'']$ .



Rysunek 3.3: Konstrukcja punktu wspólnej prostej  $d(d', d'')$  z płaszczyzną trójkąta  $[ABC]([A'B'C'], [A''B''C''])$ : a1–a3) pomocniczą płaszczyznę  $\delta$  i krawędź  $k(k', k'')$  znajdujemy analogicznie jak na rysunku 3.2b–b2); a4–a5) punkt  $D$ , będący rozwiązaniem zadania, znajdujemy poprzez rzut pionowy; a6) ustalanie widoczności obiektów w rzucie poziomym przez wybór takich punktów na prostej i płaszczyźnie, które mają ten sam rzut poziomy  $1'$ , wtedy widoczny jest ten punkt, który ma większą wysokość (punkt na trójkącie); a7) w rzucie pionowym widoczny jest ten punkt, który ma większą głębokość (również punkt na trójkącie)

### 3.1.3. Punkt wspólny prostej i płaszczyzny w aksonometrii

**Przykład 3.4.** Znaleźć punkt wspólny prostej  $l(l^a, l_{xy}^a)$  z płaszczyzną równoległoboku  $[ABCD]([A^a B^a C^a D^a], [A_{xy}^a B_{xy}^a C_{xy}^a D_{xy}^a])$  (rys. 3.4).



Rysunek 3.4: Konstrukcja punktu wspólnego prostej  $l(l^a, l_{xy}^a)$  i płaszczyzny czworokąta  $[ABCD]([A^a B^a C^a D^a], [A_{xy}^a B_{xy}^a C_{xy}^a D_{xy}^a])$  w aksonometrii. Płaszczyzna pomocnicza jest tak odwzorowana w aksonometrii, że zawiera proste  $l^a, l_{xy}^a$ . W celu znalezienia krawędzi płaszczyzny pomocniczej z płaszczyzną czworokąta, podobnie jak w przypadku rzutów Monge'a (rys. 3.3), znajdujemy najpierw: a1) rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego tej krawędzi; a2) krawędź  $(1^a 2^a, 1_{xy}^a 2_{xy}^a)$ . Warto zwrócić uwagę, że formalnie konstrukcja w aksonometrii nie różni się od tej w rzutach Monge'a

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 3.4. W celu wyznaczenia punktu wspólnego prostej z płaszczyzną w aksonometrii postępujemy według zasady postępowania omówionej na początku rozdziału. Na rysunku 3.4 mamy dane: płaszczyznę  $(ABCD)(A^a B^a C^a D^a, A_{xy}^a B_{xy}^a C_{xy}^a D_{xy}^a)$  oraz prostą  $l(l^a, l_{xy}^a)$ . Przez prostą  $l(l_\chi)$ , gdzie  $\chi \in \{xy, yz, xz\}$ , prowadzimy płaszczyznę  $(\alpha)$  prostopadłą do płaszczyzny  $\chi$ . Na rysunku 3.4 jest to płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny  $Oxy$ . Płaszczyzna ta przechodzi przez proste  $l^a, l_{xy}^a$ . Jest to więc płaszczyzna rzutująca względem płaszczyzny  $Oxy$ . Konstrukcja krawędzi płaszczyzn  $(ABCD)$

i  $\chi$ , w sensie algorytmu geometrycznego, przebiega analogicznie jak w rzutach prostokątnych (rys. 3.2b–b2). Przy czym zachodzi tu formalna zależność:

rzut aksonometryczny  $\leftrightarrow$  rzut pionowy (poziomy),

rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego  $\leftrightarrow$  rzut poziomy (pionowy).

Ponadto warto zauważyć inne analogie. I tak: odpowiednikiem płaszczyzny rzutującej w metodzie Monge’a jest płaszczyzna prostopadła do jednej z płaszczyzn układu osi aksonometrycznych:  $Oxy$ ,  $Oxz$ ,  $Oyz$ . W praktyce zwykle jest to płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny  $Oxy$ . W rzucie aksonometrycznym płaszczyznę taką reprezentuje prosta leżąca na płaszczyźnie  $Oxy$ .

Nie wolno jednak bezkrytycznie przenosić wzajemnie własności metody Monge’a i metody aksonometrycznej, gdyż może to prowadzić do poważnych błędów.

### 3.1.4. Przenikanie ostrosłupów i graniastosłupów

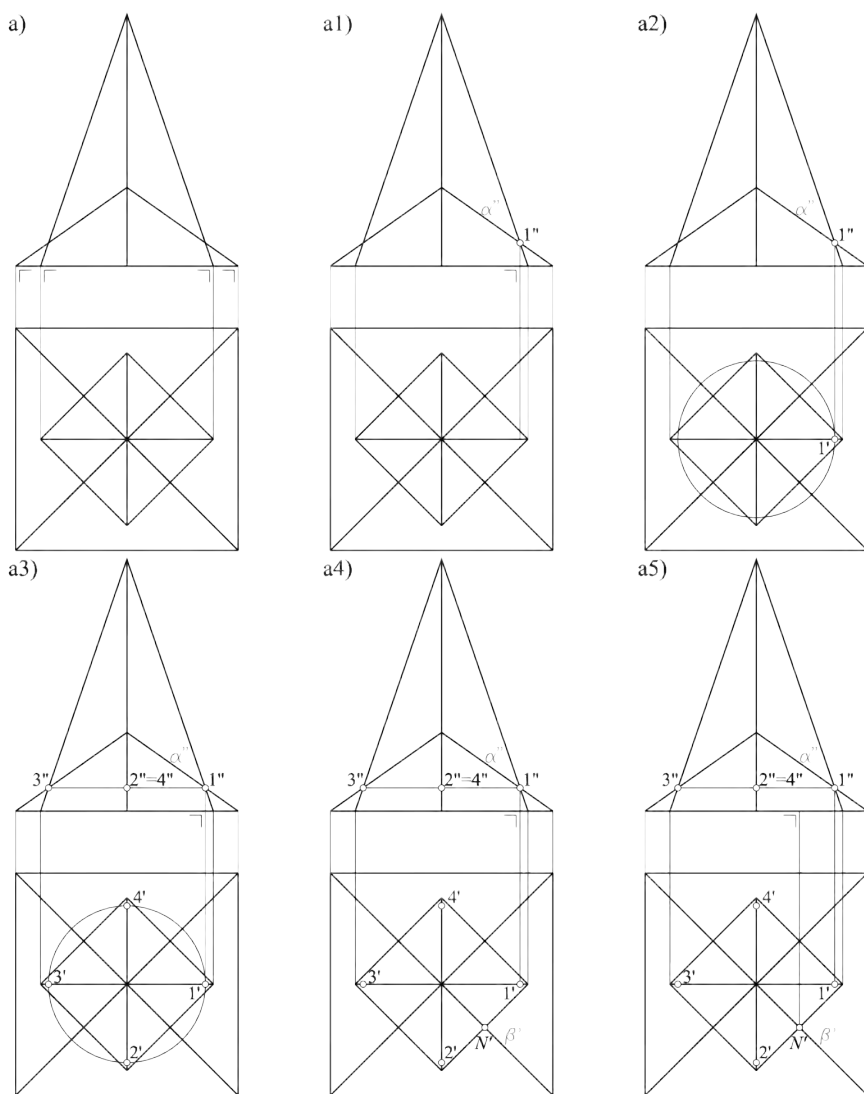
Powyższe konstrukcje wykorzystamy do wykreślenia przenikania ostrosłupów, które mogą być interpretowane jako dach i wieża. Linia przenikania jest wówczas połączeniem dachu z wieżą (rys. 3.5). Wielokąt przenikania (część wspólna) ma jako wierzchołki punkty przebicia ścian bocznych jednego ostrosłupa (graniastosłupa) krawędziami drugiego ostrosłupa.

**Przykład 3.5.** Wyznaczyć linię przenikania dwóch ostrosłupów czworokątnych prawidłowych (linię połączenia dachu z wieżą) (rys. 3.5a).

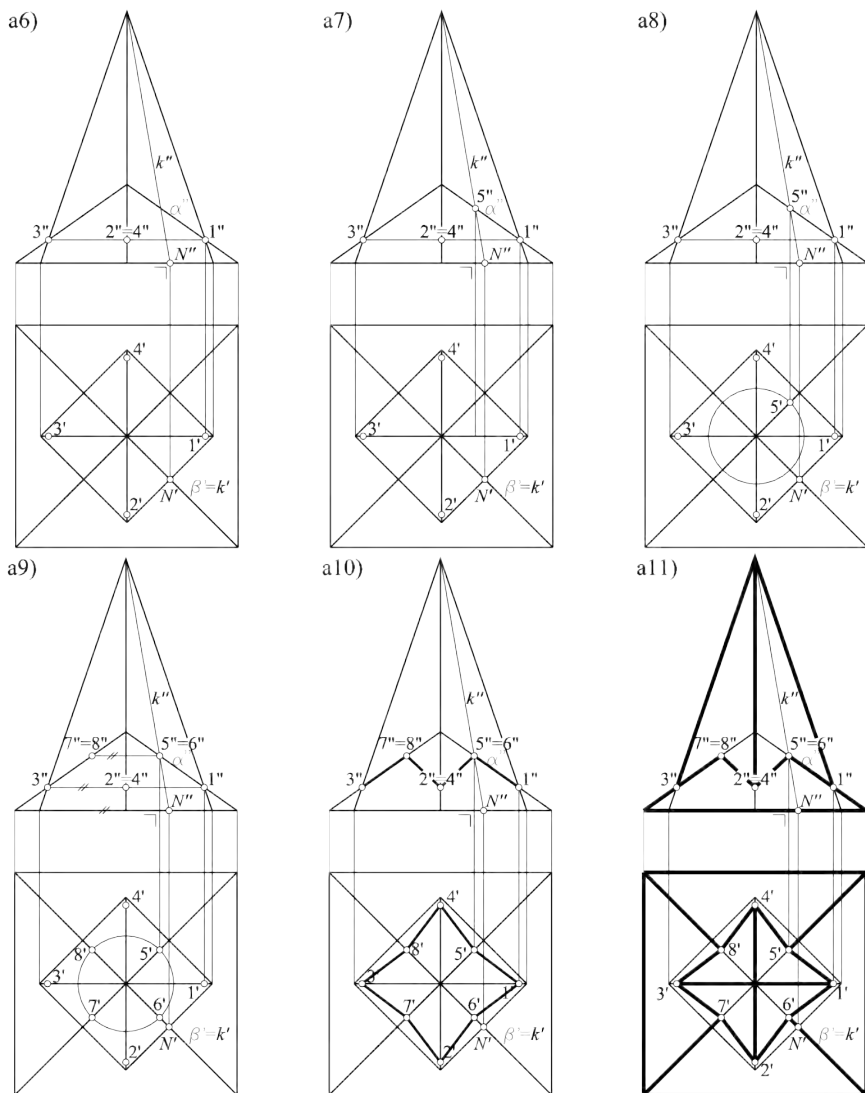
*Rozwiązanie* problemu z przykładu 3.5. Niech dane będą dwa ostrosłupy (rys. 3.5a). Z uwagi na symetrię brył zagadnienie sprowadza się do znalezienia rzutów dwóch jego wierzchołków (pozostałe otrzymujemy przez obrót dookoła wysokości ostrosłupów). Zauważmy, że dwie ściany „niższego” ostrosłupa o krawędziach prostopadłych do osi rzutów  $x$  są zawarte w płaszczyznach pionowo rzutujących. Łatwo znajdujemy więc rzut pionowy 1'' punktu 1 przebicia tej ściany krawędzią wyższego ostrosłupa (rys. 3.5a1) i poprzez odnoszącą rzut poziomy (rys. 3.5a2). Ze względu na symetrię pozostałe trzy punkty otrzymujemy przez obrót. Z racji prostopadłości osi obrotu do rzutni poziomej w rzucie poziomym jest to również obrót płaski. Wówczas otrzymujemy punkty 2', 3', 4'.



Równocześnie zauważamy, że w rzucie pionowym punkty  $2''$ ,  $3''$ ,  $4''$  leżą na tej samej wysokości co punkt  $1''$  i (naturalnie) na odpowiednich odnoszących (rys. 3.5a3).



Rysunek 3.5: Konstrukcja linii przenikania ostrosłupów („dachu” z „wieżą”): a1) płaszczyzna pionowo rzutująca  $\alpha(\alpha'')$  ściany „niższego” ostrosłupa wyznacza punkt  $1(1'')$ ; a2–a3) konstrukcja punktów 2, 3, 4 poprzez obrót jako konsekwencja symetrii brył; a4–a5) pomocnicza płaszczyzna rzutująca  $\beta(\beta')$  w celu wyznaczania punktu 5 wspólnego krawędzi „niższego” ostrosłupa ze ścianą „wyższego” (cdn.)



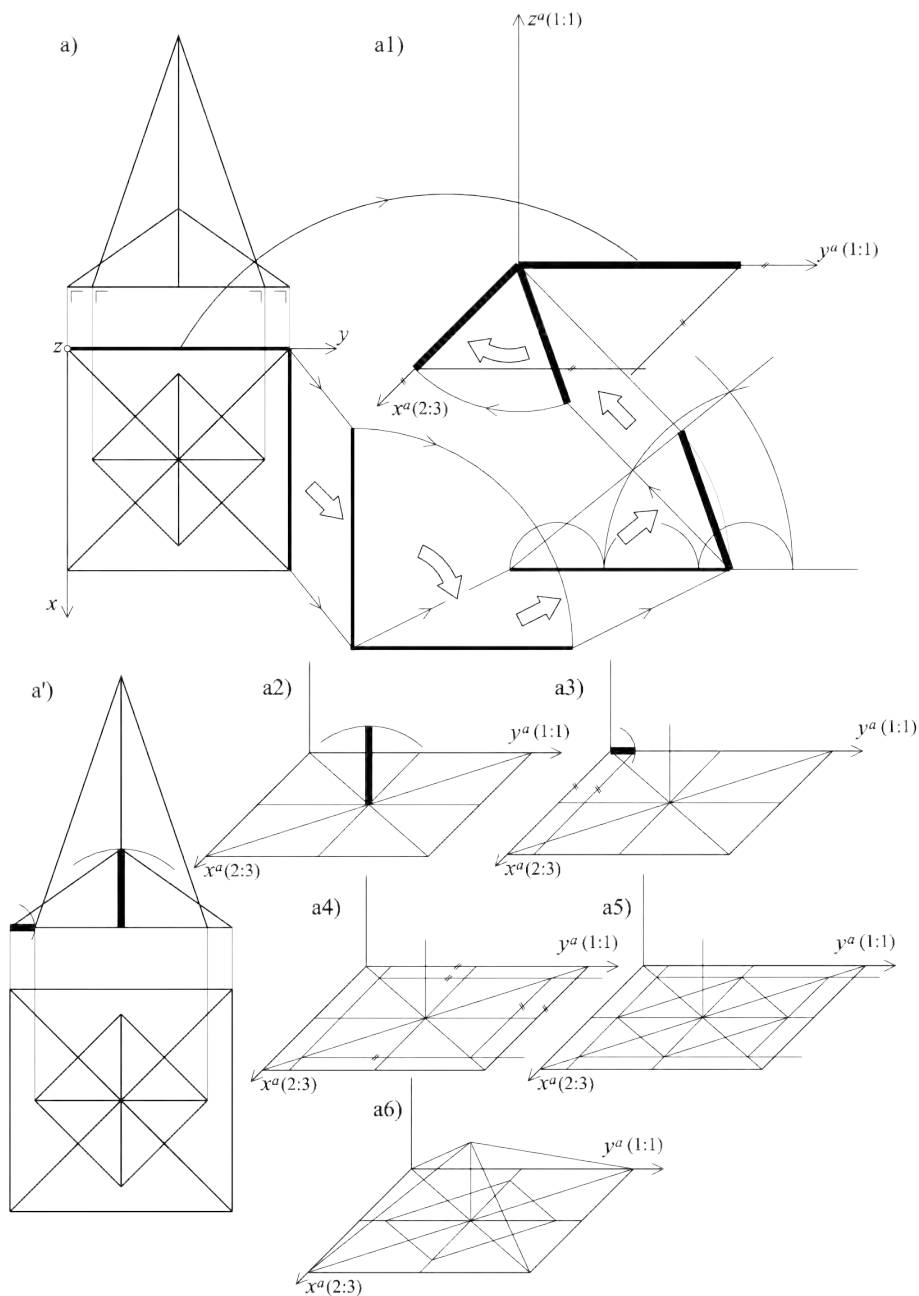
Rysunek 3.6: Konstrukcja linii przenikania ostrosłupów („dach” z „wieżą”): a6) krawędź  $k(k', k'')$  płaszczyzny pionowo rzutującej  $\beta(\beta'')$  ze ścianą „wyższego” ostrosłupa; a7) konstrukcja punktu 5(5', 5''); a8-a9) konstrukcja punktów 6, 7, 8 poprzez obrót jako konsekwencja symetrii brył; a10) konstrukcja łączenia odcinkami punktów linii przenikania; a11) wszystkie części krawędzi widocznych rysujemy linią grubą

W celu znalezienia punktu przebiecia ściany „wyższego” ostrosłupa krawędzią „niższego” przez tę krawędź prowadzimy płaszczyznę poziomo rzutującą  $\beta(\beta')$  (rys. 3.5a4). Krawędź płaszczyzny  $\beta$  ze ścianą „wyższego” ostrosłupa przechodzi przez wierzchołek tego ostrosłupa i przez punkt

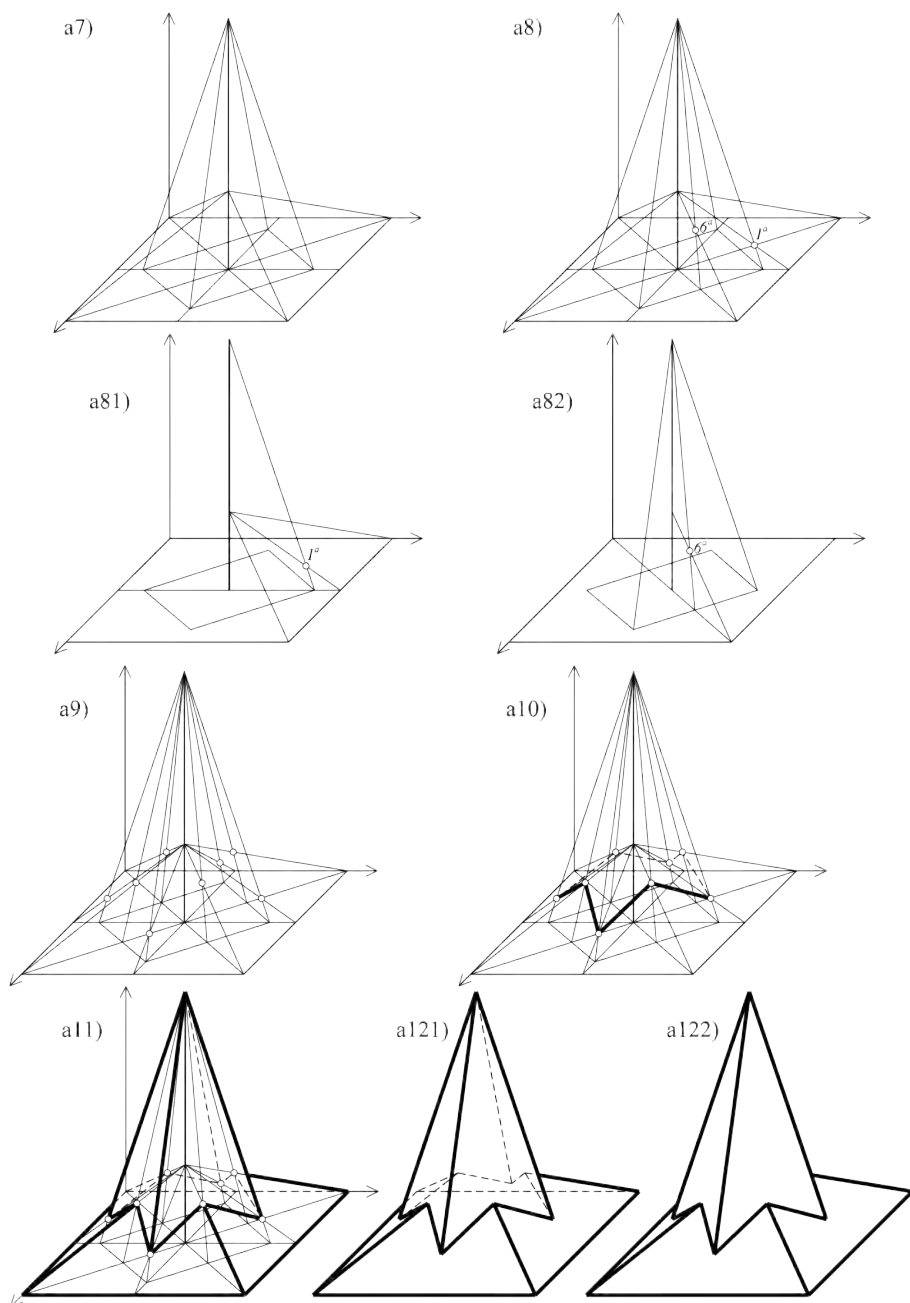
$N(N')$ , który jest punktem wspólnym płaszczyzny  $\beta$  i krawędzi podstawy „wyższego” ostrosłupa. Ponieważ punkt  $N$  leży na rzutni poziomej łatwo znajdujemy punkt  $N''$  (na osi rzutów  $x$ ) i rzut pionowy krawędzi  $k''$  (rys. 3.6a6). W przecięciu prostej  $k$  z krawędzią „niższego” ostrosłupa otrzymujemy punkt  $5''$ . Podobnie jak wyżej, z uwagi na symetrię, pozostałe trzy punkty ( $6'$ ,  $7'$ ,  $8'$ ) otrzymujemy przez obrót (rys. 3.6a8–a9) itd. Następnie łączymy punkty, zachowując zasadę: *łączymy punkty leżące na tej samej ścianie jednego i na tej samej ścianie drugiego ostrosłupa* (rys. 3.6a10). Widoczne części krawędzi dachu i wieży (rys. 3.6a11) rysujemy linią grubą.

**Przykład 3.6.** Wyznaczyć linię przenikania dwóch ostrosłupów czworokątnych prawidłowych (linię połączenia dachu z wieżą) (rys. 3.7) w aksonometrii kawalerskiej o skrócie 2:3 na osi  $O^ax^a$ .

*Rozwiązanie zagadnienia z przykładu 3.6.* Zakładamy, że krawędzie podstawy ostrosłupa leżą odpowiednio na osiach  $O^ax^a$ ,  $O^ay^a$ . Zatem wysokość ostrosłupa jest równoległa do osi  $O^az^a$ . Kształt bryły (figury) jest określony przez skróty na osiach. Stąd wszelkie odległości przy konstruowaniu założeń do zadania odnosimy tylko w trzech kierunkach. Aksonometrię ostrosłupów, wraz z linią przenikania rysujemy następująco. Mając wcześniej wykonany rysunek w rzutach prostokątnych (rys. 3.5a) przenosimy do układu aksonometrycznego obydwie ostrosłupy (rys. 3.7a–a1). Równoległą do osi  $O^ax^a$  krawędź podstawy (leżącą na osi  $O^ax^a$ ) konstruujemy poprzez trójkąt skróków dla przyjętego stosunku 2:3 (rys. 3.7a1). Zauważmy, że trójkąt skróków wykorzystujemy tylko raz (rys. 3.7a–a1). Drugą krawędź podstawy (leżącą na osi  $O^ay^a$ ) przenosimy bezpośrednio. Pozostałe elementy znajdujemy, przenosząc bezpośrednio odcinki (na rys. 3.7a', a2–a3) lub rysując na podstawie niezmiennika równoległości (rys. 3.7a2–a6). Punkty przebicia ścian „niższego” ostrosłupa krawędziami „wyższego” ostrosłupa znajdujemy pośrednio, wyznaczając krawędź ściany z pomocniczą płaszczyzną pionową określoną przez krawędź boczną i jej rzut (rys. 3.8a81–a82). Otrzymane punkty (wierzchołki linii przenikania) łączymy odcinkami, pamiętając o zasadzie przynależności odcinka równocześnie do ścian obu ostrosłupów. Widoczne części krawędzi rysujemy linią grubą, niewidoczne – przerywaną. Przenikanie może być wizualizowane z zaznaczeniem krawędzi niewidocznych (rys. 3.8a121). Ale też krawędzie niewidoczne, co jest bardziej naturalne, mogą być pominięte w wizualizacji (rys. 3.8a122).

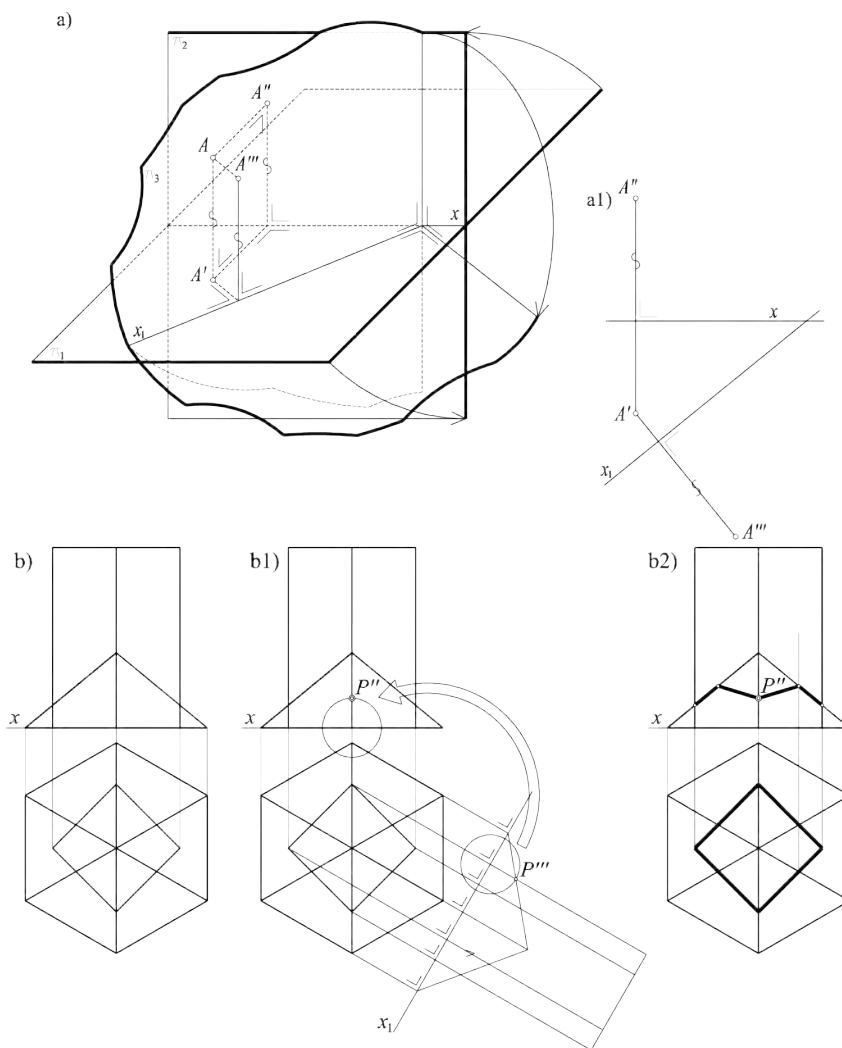


Rysunek 3.7: Konstrukcja ostrosłupów w aksonometrii (przeniesienie z rzutów Monge'a): a-a1) krawędź podstawy (leżąca na osi  $O^ax^a$ ) konstruujemy poprzez trójkąt skrótny, krawędź na osi  $O^ay^a$  przenosimy bezpośrednio; a2) przenosimy z rzutów Monge'a wysokość „niższego” ostrosłupa; a3) przenosimy współrzędną geometryczną wierzchołka podstawy „wyższego” ostrosłupa; a4) wyznaczamy współrzędne pozostałych wierzchołków podstawy „wyższego” ostrosłupa; a5) wyznaczamy wierzchołki podstawy „wyższego” ostrosłupa; a6) rysujemy krawędzie boczne niższego ostrosłupa (cdn.)



Rysunek 3.8: Konstrukcja linii przenikania ostrosłupów w aksonetrii (cd.): a7) przeniesienie wysokości „wyższego” ostrosłupa; a8) konstrukcja dwóch punktów przebiecia; a81) ściany „niższego” ostrosłupa krawędzią „wyższego” (pośrednio znajdujemy krawędź ściany z pomocniczą płaszczyzną pionową wyznaczoną przez krawędź boczną i jej rzut); a82) odwrotnie; a9) wyznaczamy pozostałe punkty; a10) otrzymane punkty (wierzchołki linii przenikania) łączymy odcinkami; a11) widoczne części krawędzi rysujemy linią grubą, niewidoczne – przerywaną; a12) wizualizacja przenikania z zaznaczeniem (lub nie) krawędzi niewidocznych

## 3.2. Transformacje rzutni lub obiektu



Rysunek 3.9: Trzecia rzutnia (rzut pomocniczy) w zastosowaniu do konstrukcji punktu leżącego na prostej profilowej: a) wprowadzenie trzeciej rzutni, pomocniczej do wykonywania pewnych konstrukcji; a1) znajdowanie trzeciego rzutu punktu w odwzorowaniu Monge'a; b) założenia do wyznaczenia linii przenikania graniastosłupa z ostrosłupem; b1) znajdowanie trzeciego rzutu układu brył tak, by płaszczyzna ścian ostrosłupa (z którą przecina się prosta profilowa) miała położenie rzutujące, realizacja Monge'a rzutu pomocniczego, następnie konstrukcja punktu przebiecia w trzecim rzucie (znalezienie wysokości punktu  $P$ ) i powrót (strzałka) do rzutu pionowego (rzut poziomy jest trywialny); b2) znalezienie rzutów pozostałych punktów linii przenikania graniastosłupa z ostrosłupem

W układzie dwu rzutni podstawowe obiekty punkt i odcinek są jednoznacznie odwzorowane. Inaczej jest z innymi obiektami, np. z prostą. Rzuty prostej profilowej nie odzwierciedlają jej jednoznacznie. Ponadto znajdujące się w płaszczyźnie profilowej nawet takie obiekty jak odcinki nie dają możliwości zweryfikowania ich wzajemnego położenia w układzie dwu rzutni. Na przykład nie można znaleźć bezpośrednio punktów wspólnych dwu prostych profilowych. Ponadto bywają sytuacje, w których w układzie rzutni  $\pi_1$  i  $\pi_2$  istotne w konstrukcji figury płaskie nie leżą w płaszczyznach rzutujących<sup>1</sup>. Problem ten wystąpi np. przy konstrukcji linii przenikania graniastosłupa z ostrosłupem (rys. 3.9a). Rozwiążemy go trzema metodami (rys. 3.9, 3.11, 3.12). Najpierw skorzystamy z trzeciej rzutni (tzw. transformacji). W układzie rzutni pionowej i bocznej prosta profilowa ma położenie czołowe. Wówczas można wprowadzić nową rzutnię  $\pi_3$  (rys. 3.9) tak, by była prostopadła do jednej z rzutni  $\pi_1$  i  $\pi_2$ . Prostopadłość jest istotna dlatego, że wtedy jeden z układów rzutni  $\pi_1, \pi_3$  lub  $\pi_2, \pi_3$  jest układem rzutni Monge’a. Rysunek 3.9a ilustruje wprowadzenie rzutni  $\pi_3$  takiej, że  $\pi_1 \perp \pi_2$ , a na rysunku 3.9a1 mamy realizację Monge’a rzutowania na trzecią rzutnię. Każdy punkt otrzymuje wtedy jeszcze jeden rzut. Nowy rzut punktu  $A$  oznaczać będziemy przez  $A'''$ . Krawędź nowego układu rzutni (nową oś rzutów)  $\pi_1, \pi_3$  oznaczamy przez  $x_1$ . Rzut poziomy i trzeci leżą na odnoszącej względem osi  $x_1$ . Zwróćmy uwagę na zależność między wysokościami punktu w rzucie pionowym i w trzecim rzucie – wysokości te są równe. Po omówieniu obrotu przedstawimy rozwiązanie tego samego zadania przy zastosowaniu obrotu względem prostej zawierającej oś symetrii ostrosłupa i graniastosłupa (rys. 3.11a, a1–a6). Z uwagi na liczbę linii konstrukcyjnych metoda z obrotem jest bardziej „ekonomiczna”.

### 3.2.1. Rzutnia boczna

W przypadku, gdy wprowadzona nowa rzutnia  $\pi_3$  jest prostopadła do rzutni  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , tzn.  $\pi_1 \perp \pi_2 \perp \pi_3$ , rzutnię  $\pi_3$  nazywamy *rzutnią boczną* (rys. 3.12b–c). Rzutnia boczna jest wykorzystywana do przedstawiania widoku obiektu z profilu (elewacja boczna) lub jako narzędzie pomocnicze do konstruowania punktów znajdujących się na prostych profilowych. Proste profilowe względem rzutni bocznej są prostymi, które mają charakter prostej: czołowej lub poziomej (warstwowej).

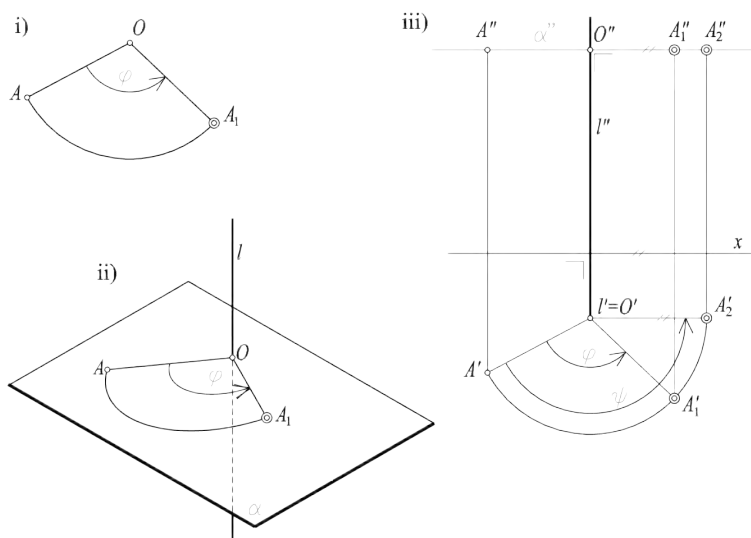
<sup>1</sup> Operacje przecinania płaszczyzny lub prostej z płaszczyzną rzutującą są znacznie uproszczone.

Rzutnia boczna jest trzecią z sześciu rzutni w rzutowaniu metodą europejską lub amerykańską.

### 3.2.2. Obrót figury

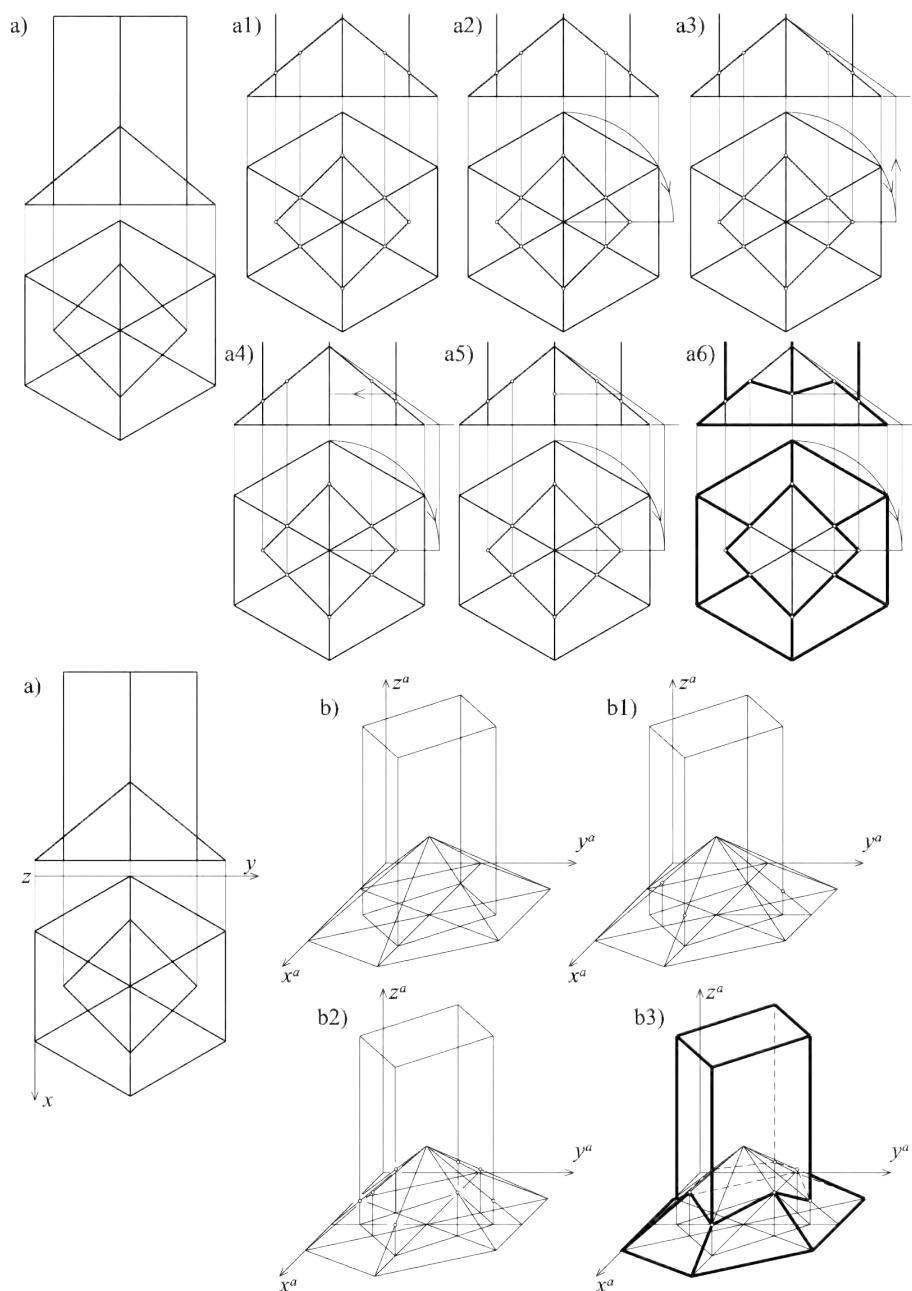
*Obrót* jest znanym przekształceniem określonym na płaszczyźnie przez *środek obrotu* oraz *kąt obrotu*. W sensie geometrycznym obrót, jako przekształcenie, jest zbiorem par punktów. Jednak w celu wsparcia naszej wyobraźni obrót punktu wygodnie jest traktować jako operację fizyczną (dynamiczną). W przestrzeni mówimy o obrocie dokoła prostej (*osi obrotu*), w którym każdy punkt „obraca się” w „swojej” płaszczyźnie, prostopadłej do osi obrotu, dokoła punktu przecięcia osi obrotu z tą płaszczyzną.

W rzutach Monge’a obrót najłatwiej opisuje się, gdy oś obrotu jest prostopadła do jednej z rzutni. Wówczas płaszczyzna obrotu jest równoległa do tej rzutni i prostopadła do drugiej rzutni. Obrót punktu w przestrzeni realizowany w płaszczyźnie obrotu tego punktu jest izometryczny (niezmiennik **PP5**) z operacją na rzutni (na rysunku 3.10 jest to rzutnia pozioma), w drugim rzucie – z uwagi na rzutujące położenie płaszczyzny obrotu (na rysunku 3.10 jest to płaszczyzna pionowo rzutująca) – łatwe jest „śledzenie” rzutu punktu w czasie obrotu, który w tym wypadku „porusza się” po prostej.

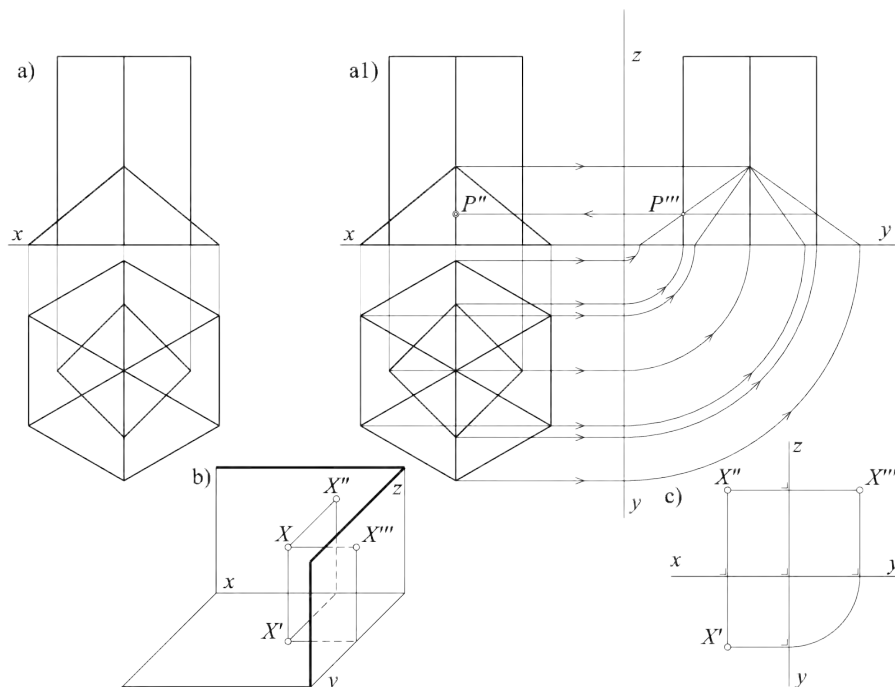


Rysunek 3.10: Ilustracja obrotu: i) na płaszczyźnie; ii) w przestrzeni – rysunek poglądowy; iii) w rzutach Monge’a





Rysunek 3.11: Konstrukcja punktów przenikania za pomocą obrotu krawędzi profilowej do położenia czołowego: a1) konstrukcja obróconego rzutu poziomego krawędzi; a2) obrót krawędzi profilowej do położenia czołowego; a3) wyznaczenie punktu przebiccia w położeniu obróconym; a4) powrót z obrotu (w rzucie pionowym). Linie odnoszące na ścianach graniastosłupa (krawędzie pomocniczych płaszczyzn przekroju ze ścianami graniastosłupa) są równoległe do osi  $Oz$  układu aksonometrycznego. Linie odnoszące na ścianach ostrosłupa (krawędzie płaszczyzn przekroju ze ścianami ostrosłupa) przechodzą przez jego wierzchołek; a5) wyznaczenie punktu na prostej profilowej w rzucie pionowym; a6) ostateczne wyznaczenie przenikania figur; b–b3) konstrukcja punktów przenikania w aksonometrii

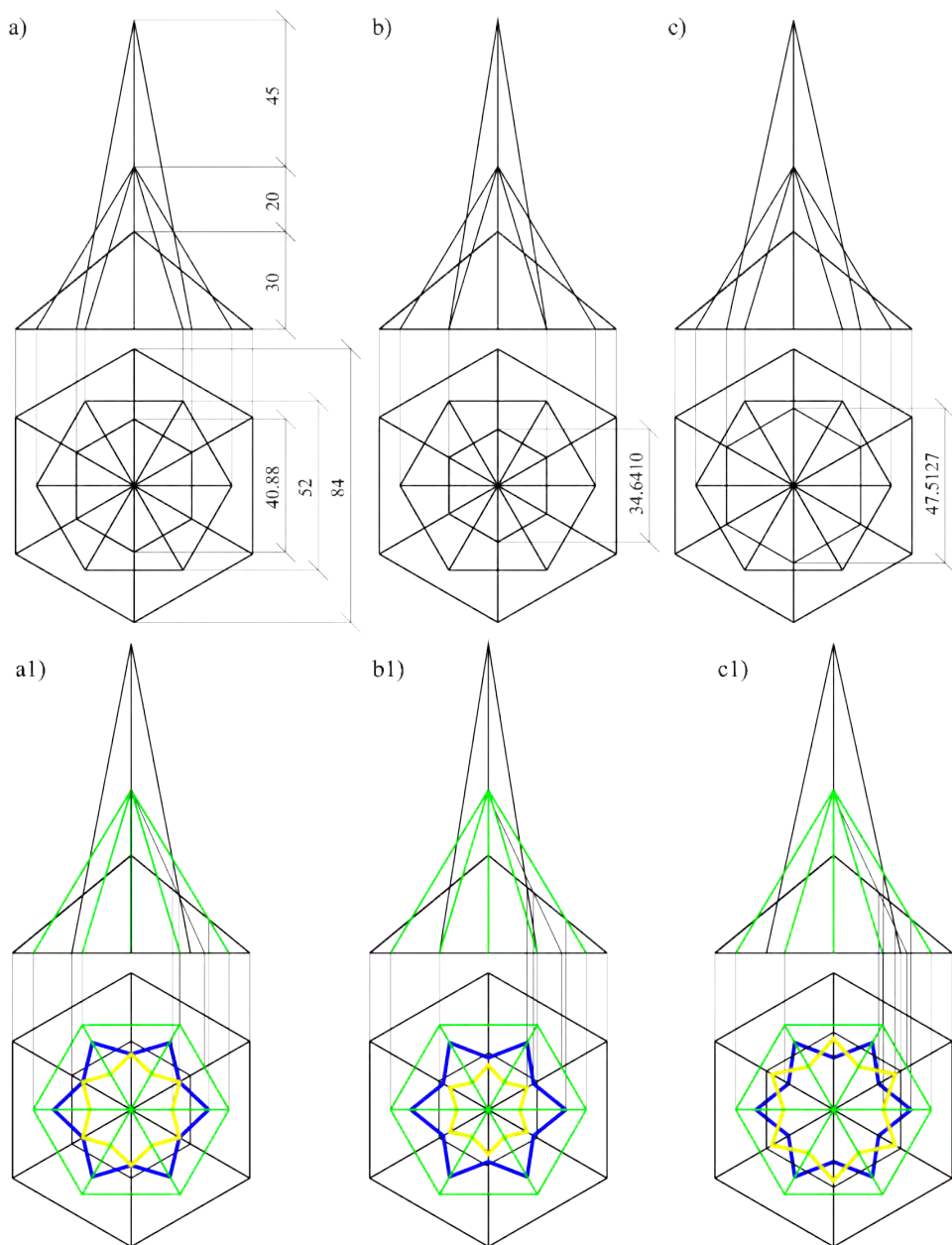


Rysunek 3.12: Rzutnia boczna wykorzystana do konstrukcji punktu leżącego na prostej profilowej: a1) strzałki wskazują kolejność konstruowania punktów; b) rysunek poglądowy rzutni bocznej; c) realizacja Monge'a rzutu bocznego

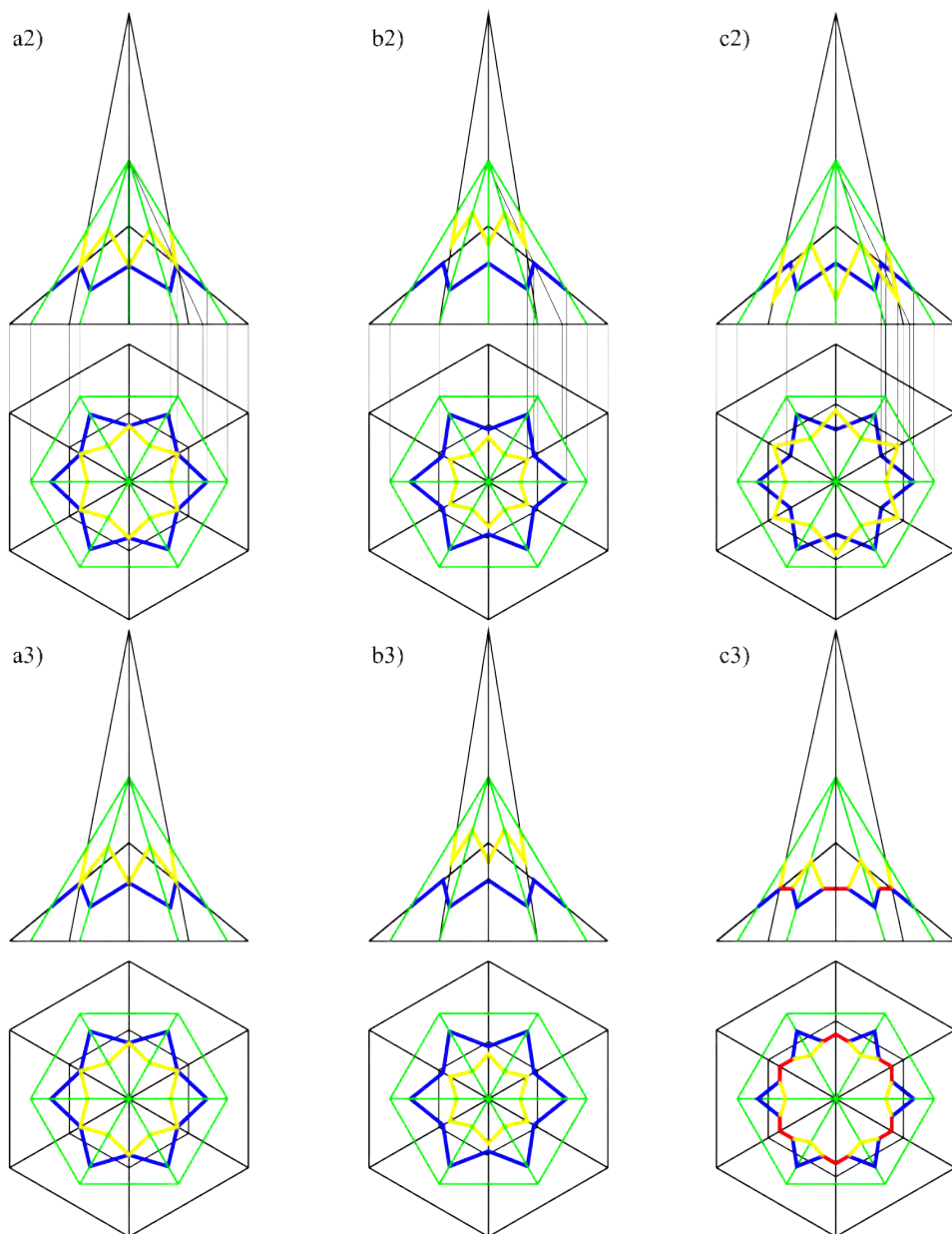
### 3.2.3. Przenikanie trzech ostrosłupów – wieże z przyporami

**Przykład 3.7.** Trzy ostrosłupy przy odpowiednim ustawieniu mogą tworzyć dach z wieżą z przyporami w trzech różnych wariantach w zależności od wymiarów poszczególnych brył. Założenia do trzech różnych wariantów mamy na rysunku 3.13a,b,c.

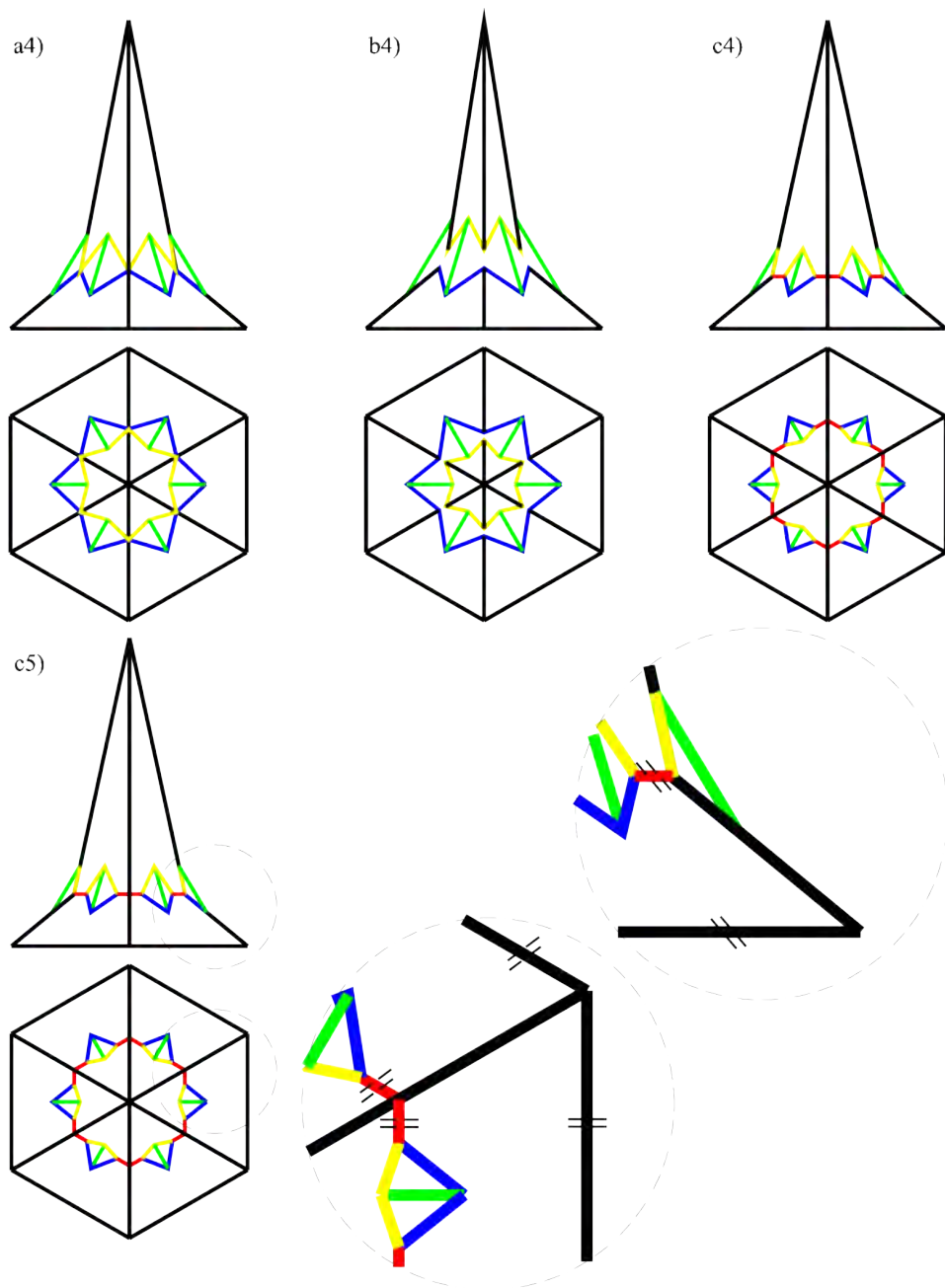
*Rozwiązanie* zagadnienia z przykładu 3.7 realizujemy etapami. Przyjmijmy dla ułatwienia skróconego opisu algorytmu konstrukcji, że te trzy ostrosłupy to wysoki, średni i niski. Najpierw znajdujemy linię przenikania dwóch ostrosłupów, np. niskiego i średniego, potem średniego i wysokiego (rzut poziomy linii przenikania – rys. 3.13a1,b1,c1, rzut pionowy linii przenikania – rys. 3.13a2,b2,c2) w opisany wcześniej sposób, z ewentualnym (jeśli jest to konieczne) zastosowaniem obrotu (rys. 3.10, 3.11), transformacji (rys. 3.9), widoku z profilu, czyli rzutni bocznej (rys. 3.12). Następnie sprawdzamy, który z trzech wariantów wzajemnego ustawienia ostrosłupów zachodzi.



Rysunek 3.13: Wyznaczanie linii przenikania dachu z wieżą z przyporami lub elementami przejściowymi pochodzącymi od trzeciego (środkowego) ostrosłupa – założenia. Brakujące wymiary na rysunkach b) i c) są takie same jak na rysunku a) (cdn.)



Rysunek 3.14: Wyznaczanie linii przenikania dachu z wieżą z przyporami lub elementami przejściowymi pochodzącymi od trzeciego (środkowego) ostrosłupa (cd.). Etapy wyznaczania rzutu pionowego (cdn.)



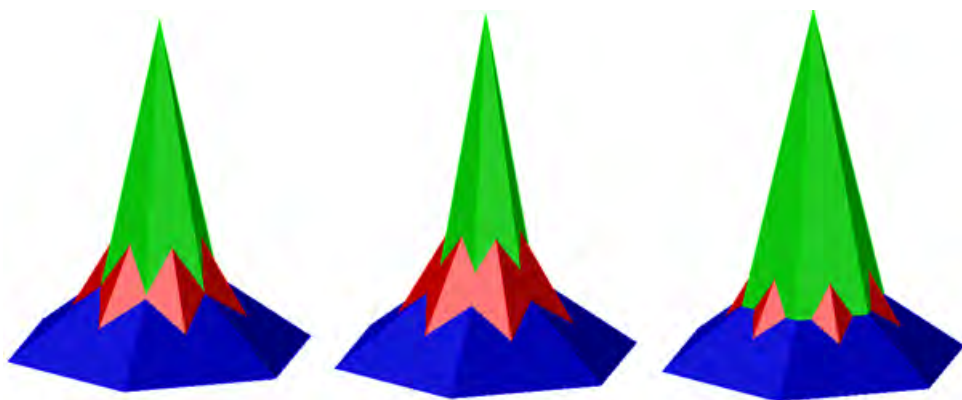
Rysunek 3.15: Wyznaczanie linii przenikania dachu z wieżą z przyporami lub elementami przejściowymi pochodzącymi od trzeciego (środkowego) ostrosłupa (cd.). Ostateczny kształt przenikania dachu z wieżą z przyporami

Linie przenikania niskiego ze średnim i średniego z wysokim:

- a) dotykają się wierzchołkami (rys. 3.13a1),
- b) są rozłączne (rys. 3.13b1),
- c) przecinają się (rys. 3.13c1).

Otrzymujemy wówczas trzy geometrycznie różne sytuacje (rys. 3.14a2,a3 i 3.15a4; 3.14b2,b3 i 3.15b4; 3.14c2,c3 i 3.15c4). Dodatkowego wyjaśnienia wymaga ostatni przypadek (rys. 3.14c2, c3), w którym ostrosłupy wysoki i niski łączą się wzdłuż krawędzi równoległych do wzajemnie równoległych krawędzi ich podstaw (rys. 3.15c5). Na rysunku 3.15a4,b4,c4 przedstawiono również widoki bez krawędzi niewidocznych wraz z usuniętymi niewidocznymi częściami ostrosłupów.

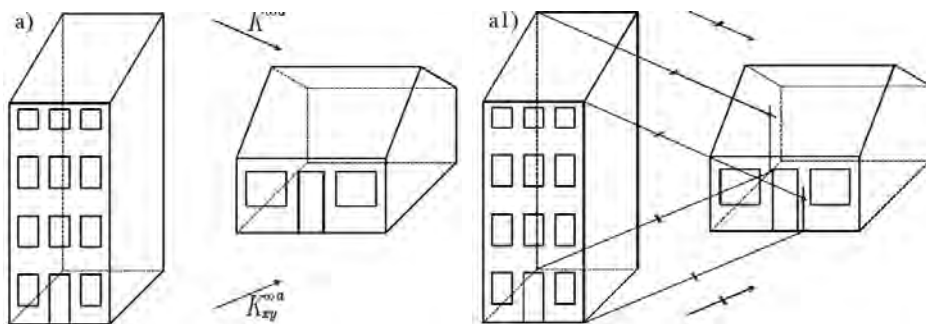
Wykonanie modeli realnych brył (np. papierowych) takich ostrosłupów wymaga zmierzenia rzeczywistych wielkości tych obiektów poprzez geometryczną konstrukcję odpowiednich ścian ostrosłupów. Uzyskuje się to za pomocą specjalnych konstrukcji zwanych *kładami*. Zostaną one opisane przy omawianiu geometrii dachów. Modele wirtualne, a także rzeczywiste, np. po wydrukowaniu na drukarce 3D, otrzymujemy w wyniku operacji na bryłach, np. poprzez modelowanie 3D w środowisku AutoCAD-a. Wynik rozwiązania zadania z przykładu 3.7 dotyczącego przenikających się trzech ostrosłupów jako model wirtualny w 3D – w trzech różnych wariantach – przedstawiamy na rysunku 3.16. Bryły te można traktować jako modele wież z przyporami.



Rysunek 3.16: Bryły uzyskane jako efekt operacji w geometrii brył w wyniku modelowania 3D w środowisku systemu AutoCAD 2024, za pomocą tzw. *operacji boolowskich*, czyli: *sumy*, *różnicy* oraz *iloczynu*

### 3.3. Cienie wzajemne w aksonometrii

**Przykład 3.8.** Wyznaczyć obszar cienia rzuconego na bryłę „domu”<sup>2</sup> („budynek z dachem dwuspadowym”) przez bryłę „budynku wysokiego” („wieżowca”) przy oświetleniu słonecznym (rys. 3.17a). Promień świetlny określony jest przez  $K^\infty(K^{\infty a}, K^{\infty a}_{xy})$  (rys. 3.13a,b,c).



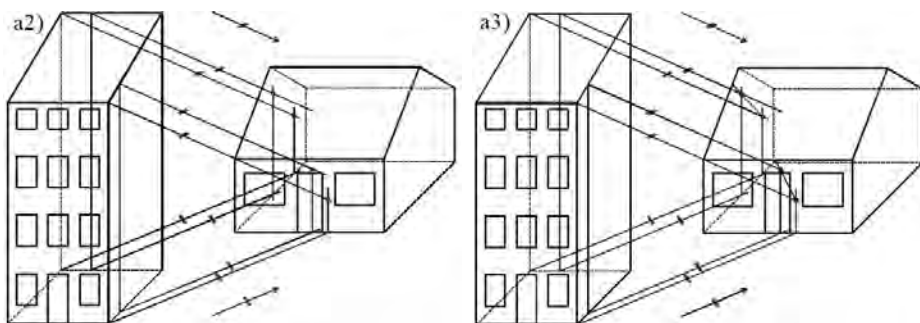
Rysunek 3.17: Cień wzajemny budynków przy oświetleniu słonecznym: a) usytuowanie kierunku światła słonecznego względem budynków; a1) promienie przechodzące przez dwa punkty tych krawędzi dachu „wieżowca”, których cienie ulegną załamaniu, i ich punkty przebiccia ścian budynku (cdn.)

*Rozwiązanie zagadnienia z przykładu 3.8.* W rzucie aksonometrycznym, każdy obiekt geometryczny reprezentowany jest przez swój rzut aksonometryczny oraz rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego na jedną z płaszczyzn układu współrzędnych. Zwykle jest to płaszczyzna  $Oxy$ . Jest to równocześnie płaszczyzna pozioma, *płaszczyzna podstawy* obiektu. Stąd również kierunek oświetlenia (światła słonecznego)  $K^\infty$  zadajemy poprzez dwa punkty niewłaściwe:  $K^{\infty a}$ ,  $K^{\infty a}_{xy}$ . Wtedy rzut aksonometryczny kierunku ( $K^{\infty a}$ ) mówi nam o nachyleniu kierunku oświetlenia  $K^\infty$  do płaszczyzny podstawy (tzw. *kąt wysokości*), natomiast rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego ( $K^{\infty a}_{xy}$ ) wskazuje na kąt kierunku oświetlenia z obranym kierunkiem na płaszczyźnie podstawy (tzw. *azymut*). *Kątem wysokości* nazywamy kąt, jaki tworzy kierunek oświetlenia z płaszczyzną podstawy (terenu). *Azymutem* nazywamy kąt, jaki tworzy

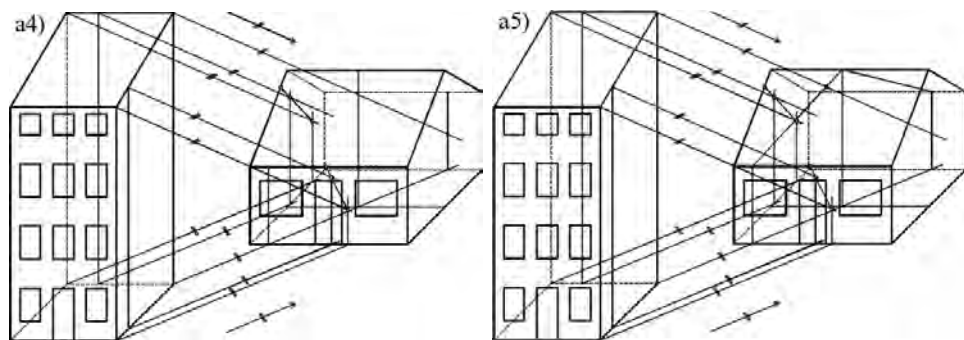
<sup>2</sup> Tu i w innych miejscach przykładowe figury (bryły) przypominają obiekty budowlane. Stąd zapisujemy je w cudzysłowie. Dla uproszczenia zapisu często cudzysłów będziemy pomijać, a bryły „dom”, „wieżowiec”, „wieża” nazywać wprost domem, wieżowcem, wieżą.

kierunek oświetlenia z przyjętym na płaszczyźnie podstawy kierunkiem (w praktyce kierunkiem północ-południe).

Konstrukcja cienia jednego obiektu (budynku) rzuconego na inny obiekt (np. budynek) jest wielokrotnym powtórzeniem konstrukcji punktu przebiecia płaszczyzny prostą. Cień rzucony przez dany obiekt na siebie lub na inny obiekt nazywać będziemy *cieniem wzajemnym*. Przedstawione przykłady ilustrują kolejno: cień wzajemny obiektu na inny obiekt (wysokiego budynku na dom) oraz cień rzucony na siebie (cień komina).

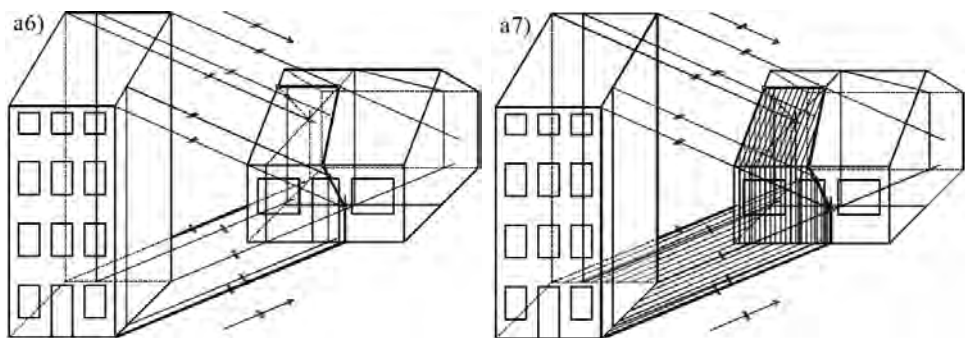


Rysunek 3.18: Cień wzajemny budynków przy oświetleniu słonecznym (cd.): a2) konstruujemy promień przechodzący przez punkty pośrednie na krawędziach dachu „wieżowca”, które wyznaczają: a3) pełny cień na ścianach domu rzucony przez części krawędzi dachu „wieżowca” (cdn.)



Rysunek 3.19: Cień wzajemny budynków przy oświetleniu słonecznym (cd.): a4) rysujemy promień przechodzący przez kolejny wierzchołek dachu. Konstruujemy przekrój pionowy domu płaszczyzną przechodzącą przez krawędź pionową „wieżowca”; a5) znajdujemy punkt wspólny promienia świetlnego z przekrojem domu płaszczyzną przechodzącą przez krawędź pionową „wieżowca” znajdującą się najbliżej domu (cdn.)





Rysunek 3.20: Cień wzajemny budynków przy oświetleniu słonecznym (cd.): a6) łączymy pozostałe punkty cienia rzuconego przez „wieżowiec” na dach domu; a7) kreślimy cień rzucony na płaszczyznę terenu oraz na ściany i dach domu

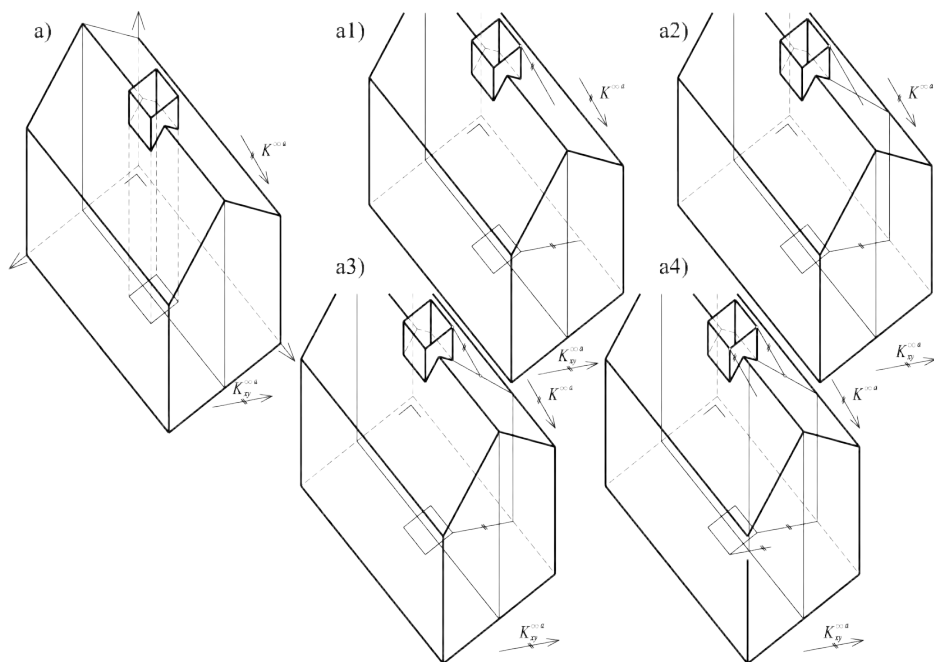
Konstrukcja cienia polega na poprowadzeniu prostych (promieni) przez punkty wierzchołkowe szkieletu bryły. Należy pamiętać o konieczności konstruowania dwu prostych: rzutu aksonometrycznego (prostej równoległej do kierunku  $K^{\infty a}$ ) i rzutu aksonometrycznego rzutu prostokątnego (prostej równoległej do kierunku  $K^{\infty a}_{xy}$ ). Następnie znajdujemy punkty przebicia otrzymanych prostych (promieni świetlnych) z płaszczyznami drugiej bryły, jeśli znajduje się ona w graniastosłupie (walcu) światła<sup>3</sup>. Graniastosłup taki zwykle określamy intuicyjnie. Algorytm znajdowania cienia w przypadku, gdy graniastosłup cienia jest figurą wypukłą, jest stosunkowo prosty<sup>4</sup>. Ważny jest bowiem brzeg tego graniastosłupa (jego ściany i krawędzie boczne). W przypadku bryły o reprezentacji szkieletowej graniastosłup taki wyznacza skończona, zwykle niewielka liczba wierzchołków. Wówczas (rys. 3.17a) cień wyznaczony będzie przez sześć krawędzi graniastosłupa pochodzących przez trzy górne wierzchołki „wieżowca” i trzy dolne. Przy czym dolne wierzchołki w konstrukcji nie odegrają tu większej roli<sup>5</sup>. Wystarczy zatem znaleźć punkty przebicia trzech promieni świetlnych (rys. 3.19a4). Najpierw konstruujemy dwa pierwsze (rys. 3.17a1). Te przecinają pionowe ściany bryły

<sup>3</sup> W przypadku oświetlenia punktowego jest to powierzchnia ostrosłupa lub stożka. Przy czym pojęcie ostrosłupa lub stożka (graniastosłupa lub walca) rozumiemy tu bardzo ogólnie. Jest to bowiem *powierzchnia stożkowa* lub *walcowa*, gdzie *krzywą kierującą* jest dowolna krzywa, np. wielolinia w AutoCAD-zie.

<sup>4</sup> W grafice komputerowej znane są algorytmy wyznaczania tzw. *powłoki wypukłej* zbioru punktów. A właśnie taką powłokę stanowi cień figury (bryły) wypukłej.

<sup>5</sup> Jest kwestią umowy, czy obszar podstawy bryły „wieżowca” wchodzi w skład cienia bryły, czy też nie.

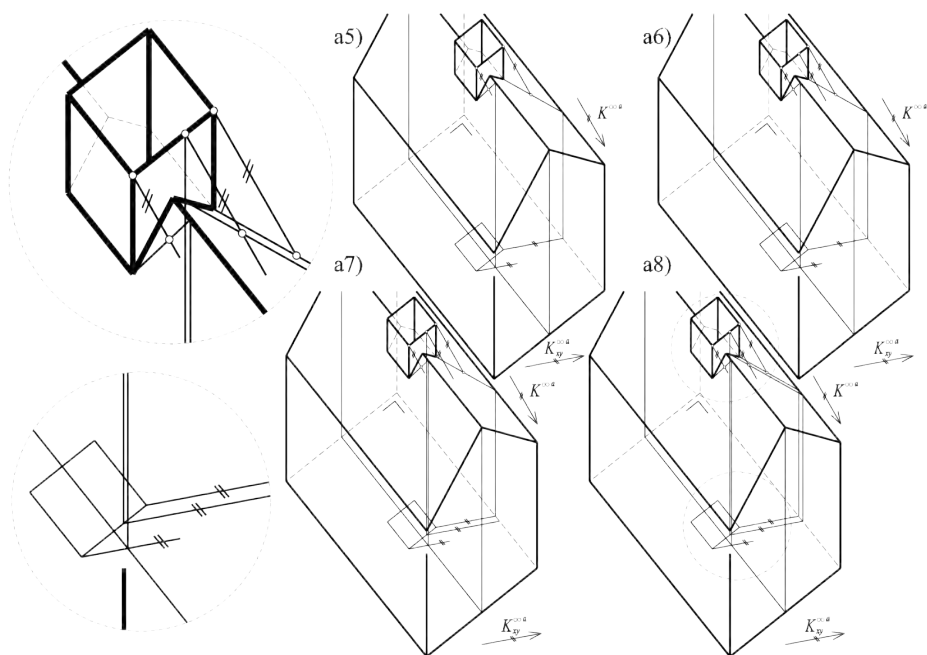
„domu”. W celu wyznaczenia ich konstruujemy linie pionowe wychodzące z punktów przecięcia rzutów aksonometrycznych prostokątnych rzutów promieni z krawędziami podstawy bryły „domu”. W podobny sposób znajdujemy cienie (na pionowych ścianach „domu”) dwóch dowolnie wybranych punktów pośrednich górnych krawędzi „wieżowca” (rys.3.18a2). Łącząc odpowiednie punkty (cienie), znajdujemy pełne krawędzie cienia na ścianach pionowych „domu”. Następnie znajdujemy punkt przebiecia promienia wychodzącego z kolejnego wierzchołka z dachem „domu”. W tym celu znajdujemy przekrój „domu” płaszczyzną pionową przechodzącą przez promień (rys. 3.19a4, 3.19a5). Punkt wspólny tego promienia z otrzymanym przekrojem stanowi cień wierzchołka „wieżowca” na „dachu domu” (rys. 3.19a5). Zauważmy, że jeden punkt cienia na dachu wystarczy do skonstruowania pełnego cienia wzajemnego (rys. 3.20a6), który następnie kreskujemy (rys. 3.20a7).



Rysunek 3.21: Cień „komina” na dachu: a) dana bryła budynku i kierunek oświetlenia  $K^{\infty}(K^{\infty a}, K_{xy}^{\infty a})$ ; a1) promień świetlny jednego z punktów (rzut aksonometryczny i rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego); a2) przekrój bryły domku płaszczyzną przechodzącą przez promień i prostopadłą do płaszczyzny  $Oxy$ , w tym krawędź z połączeń dachu; a3) punkt przebiecia połaci promieniem (cień pierwszego punktu); a4) rozpoczęta konstrukcja cienia drugiego punktu (cdn.)

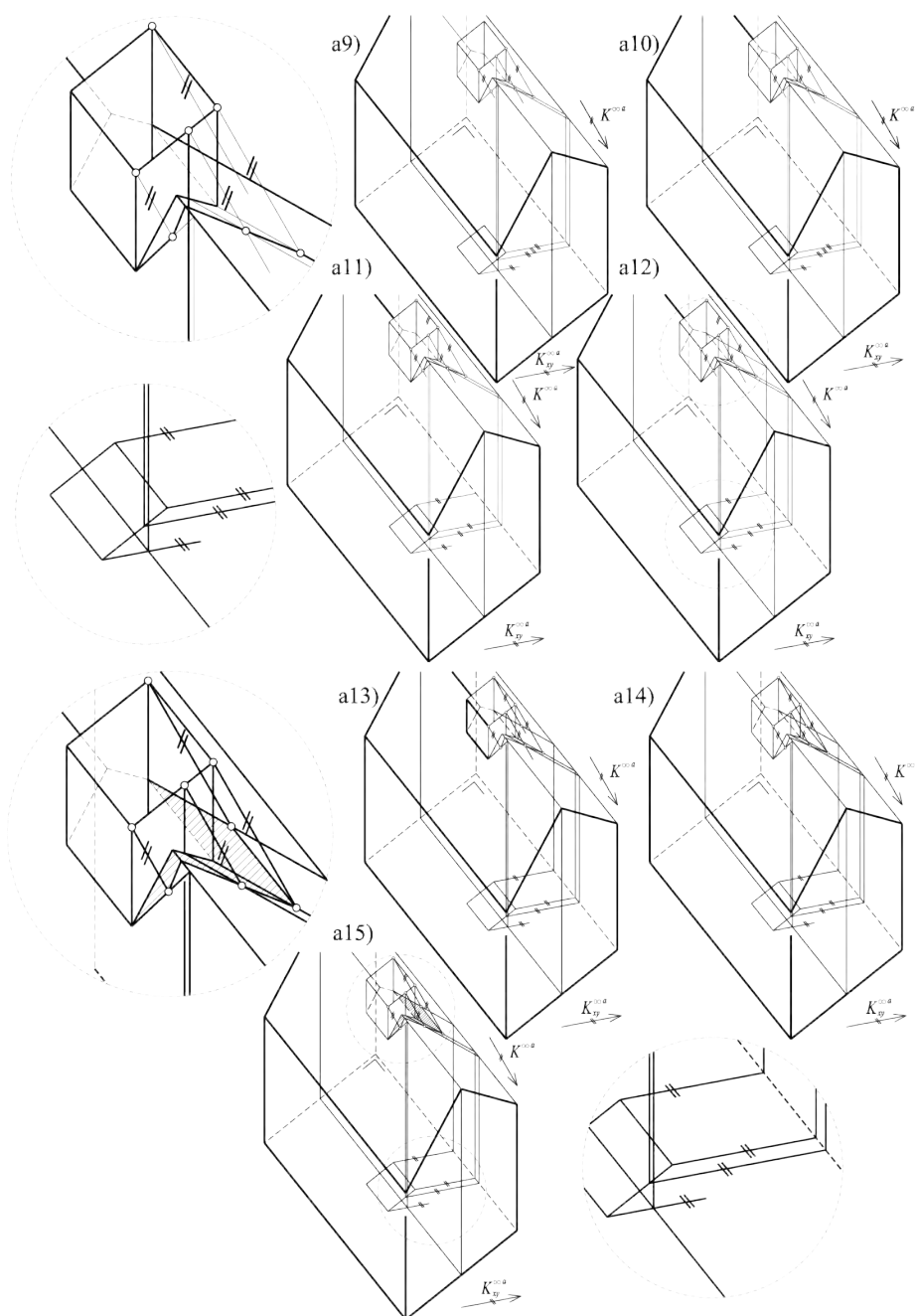
**Przykład 3.9.** Wyznaczyć cień „komina” rzucony na „dach domu”. Promień świetlny określony jest przez  $K^\infty(K^{\infty a}, K^{\infty a}_{xy})$  (rys. 3.21).

*Rozwiązanie* zagadnienia z przykładu 3.9. Konstrukcja cienia „komina” na „dachu” bryły domu jest, podobnie jak w przykładzie 3.8, wielokrotnym powtórzeniem konstrukcji punktu przebiecia płaszczyzny prostą (połaci dachowej promieniem świetlnym) w aksonometrii. Tu nie ma przecięć ze ścianami pionowymi i wszystkie punkty przebiecia dotyczą płaszczyzn w ogólnym położeniu. Konstrukcja każdego punktu wymaga znalezienia przekroju połaci dachowej (rys. 3.21a2) <sup>6</sup>. Prowadzimy promień przez wierzchołek komina, tj. dwie proste: rzut aksonometryczny promienia oraz na płaszczyźnie podstawy  $Oxy$  rzut aksonometryczny rzutu prostokątnego (rys. 3.21a1). Znajdujemy fragment przekroju „domu” płaszczyzną pionową przechodzącą przez poprowadzony promień (rys. 3.21a2) oraz punkt przebiecia połaci dachowej (rys. 3.21a3).

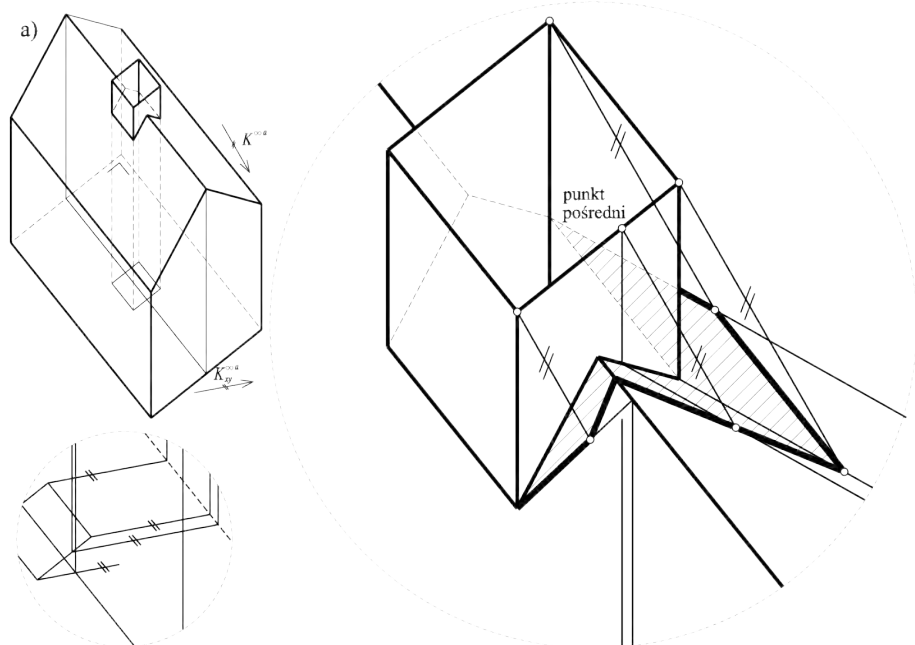


Rysunek 3.22: Cień „komina” na dachu (cd.): a5) cień punktu drugiego; a6–a8) cień punktu pośredniego (cdn.)

<sup>6</sup> W praktyce wystarczy znaleźć fragment przekroju płaszczyzną pionową przechodzącą przez punkt, którego cień konstruujemy, oraz przez kierunek oświetlenia.



Rysunek 3.23: Cień „komina” na dachu (cd.): a9–a10) cienie punktu pierwszego i pośredniego wyznaczają odcinek, który przedłużamy do kalenicy, otrzymując: a11) punkt załamania cienia: a12–a14) znajdowanie cienia czwartego punktu (cdn.)



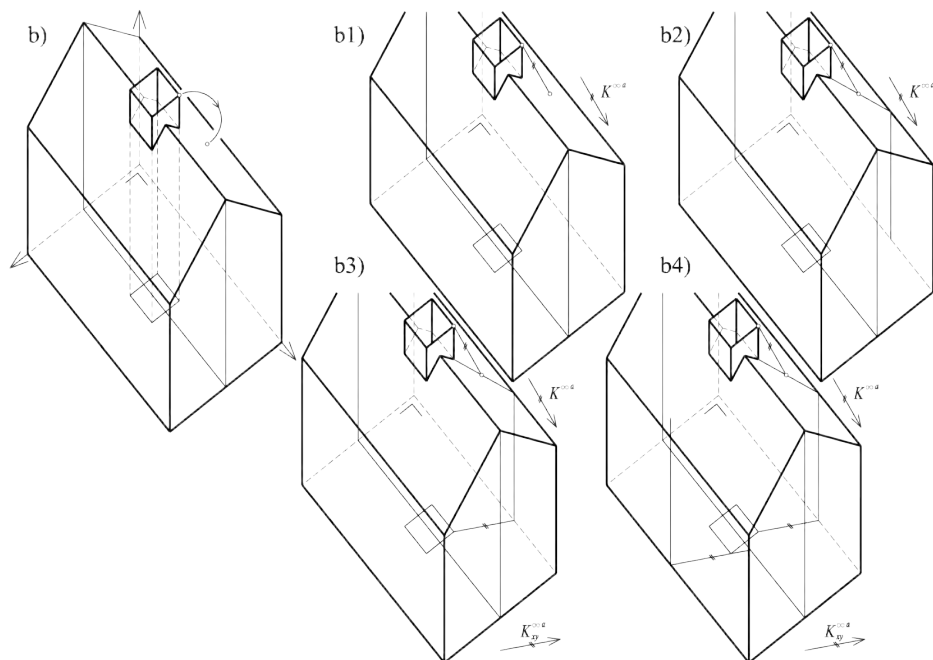
Rysunek 3.24: Cięż „komina” na dachu (cd.): istotne elementy w powiększeniu

W konstrukcji szczególną uwagę należy zwrócić na konieczność wyznaczenia cienia punktu pośredniego (rys. 3.22). Na odcinku w szkieletowej reprezentacji bryły wyznaczamy go zawsze wtedy, gdy cień odcinka ulega załamaniu (rys. 3.18a2–3.20a6, 3.22–3.23). Dochodzi do tego, gdy graniczą ze sobą dwie płaszczyzny i cień odcinka rozkłada się na nie. Wówczas do konstrukcji załamanej części odcinka potrzebne są trzy punkty (cienie punktów): dwa na jednej z płaszczyzn i jeden na drugiej płaszczyźnie. Cień wierzchołka i cień punktu pośredniego wyznaczają na danej płaszczyźnie prostoliniowy fragment załamanej części cienia odcinka (rys. 3.20, 3.23).

W przykładzie 3.9 kierunek oświetlenia ( $K^\infty$ ) był zadany za pomocą rzutu aksonometrycznego ( $K^{\infty a}$ ) i rzutu aksonometrycznego rzutu prostokątnego ( $K^{\infty a}_{xy}$ ). Zadanie to można sformułować inaczej, zadając wybrany na obiekcie punkt i jego (przykład 3.10).

**Przykład 3.10.** Promień świetlny określony jest przez punkt komina i jego cień na połaci dachowej (rys. 3.25). Wyznaczyć kierunek (punkt niewłaściwy) oświetlenia.

Rozwiązanie zagadnienia z przykładu 3.10 przedstawiamy na rysunku 3.25.



Rysunek 3.25: Cień „komina” na dachu budynku: znajdowanie kierunku oświetlenia, gdy znany jest cień wybranego punktu



## Rozdział 4

# Rozwiązywanie dachów

### 4.1. Obroty i kłady

Wykorzystywaliśmy już pojęcie obrotu przy znajdowaniu elementów wspólnych (rys. 3.10, 3.11). Obrót określonej prostej lub płaszczyzny miał w tamtym zastosowaniu „doprowadzić” prostą do położenia czołowego, płaszczyznę  $\alpha(l, A)$  do położenia równoległego do rzutni.

*Obrót* jest znanym przekształceniem określonym na płaszczyźnie przez *środek obrotu* oraz *kąt obrotu* lub w przestrzeni trójwymiarowej przez *oś obrotu* i *kąt obrotu*. W sensie geometrycznym obrót jako przekształcenie, jest zbiorem par punktów. Jednak w celu wsparcia naszej wyobraźni obrót punktu wygodnie jest traktować jako dynamiczną operację fizyczną. W przestrzeni, gdzie zwykle mówimy o obrocie dokoła prostej (*osi obrotu*), każdy punkt „obraca się” w „swojej” płaszczyźnie, prostopadłej do osi obrotu, dokoła punktu przecięcia osi obrotu z tą płaszczyzną.

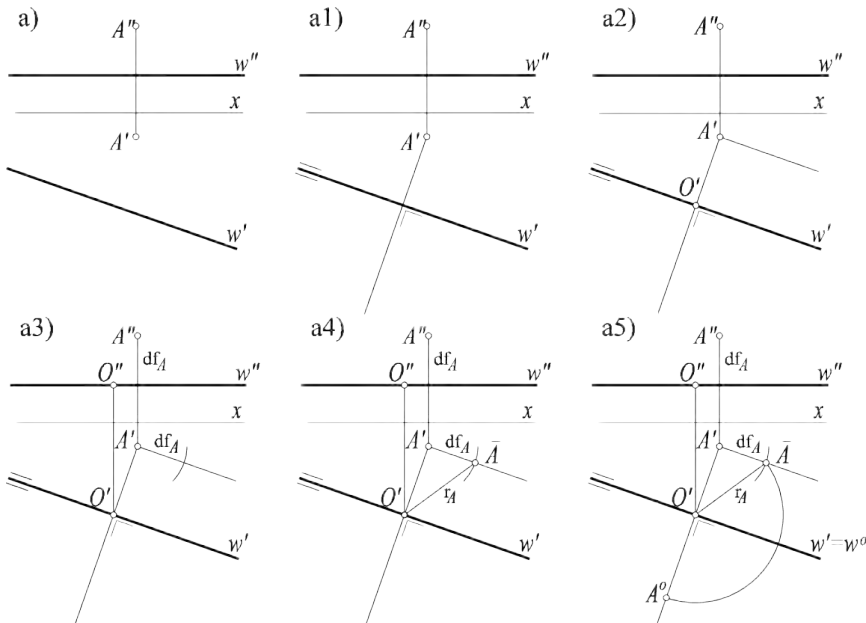
W rzutach Monge’a obrót najłatwiej opisuje się, gdy oś obrotu jest prostopadła lub równoległa do jednej z rzutni. Wówczas płaszczyzna obrotu jest równoległa do tej rzutni i prostopadła do drugiej rzutni lub jest prostopadła do drugiej rzutni. W pierwszym przypadku realizacja obrotu punktu w przestrzeni (w płaszczyźnie obrotu tego punktu) jest izometryczna (niezmiennik **PP5**) z operacją na rzutni (na rysunku 3.10 jest to rzutnia pozioma), w drugim – z uwagi na rzutujące położenie drugiej płaszczyzny (na rysunku 3.10 jest to płaszczyzna pionowo rzutująca) – łatwe jest „śledzenie” rzutu punktu w czasie obrotu, który „porusza się” po prostej.

Ponadto obrót punktu  $A$  dokoła prostej  $l$  możemy interpretować jako obrót płaszczyzny  $\alpha(A, l)$  dokoła prostej  $l$ . W rzucie tym (na rysunku 3.10 – pionowym) odczytamy rzeczywistą długość promienia obrotu punktu, gdy obracana płaszczyzna uzyska położenie równoległe do rzutni. Płaszczyzna  $\alpha_1(l, A_2)$  jest bowiem równoległa do rzutni pionowej i tym samym odcinek  $[OA_2]$  jest równoległy do rzutni pionowej. Wtedy odcinki  $[OA_2]$ ,





#### 4.1.1. Kład płaszczyzny określonej przez punkt i prostą warstwową



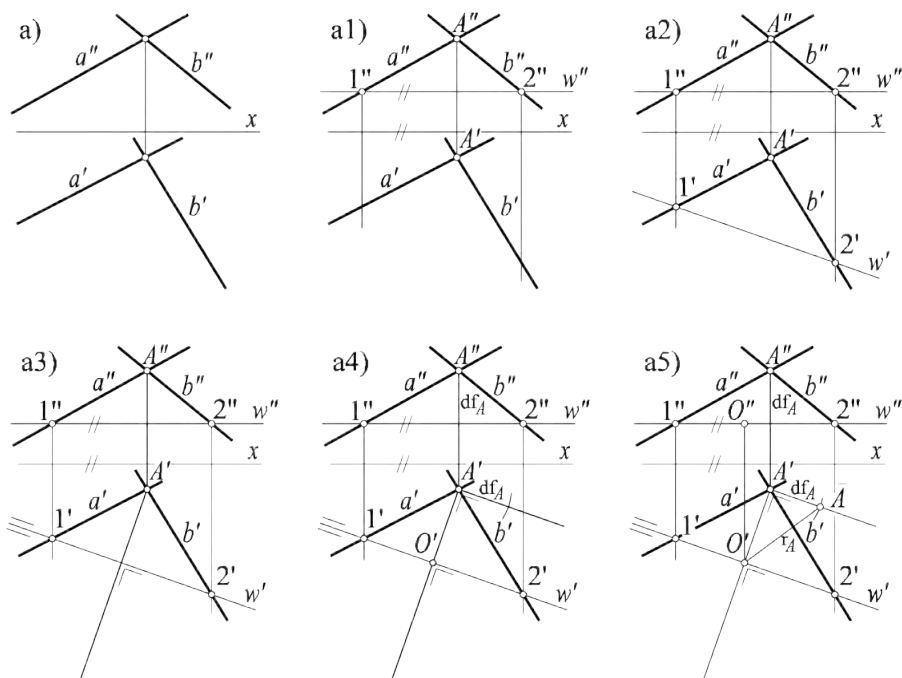
Rysunek 4.2: Kład w rzutach Monge'a płaszczyzny  $\alpha(A, w)$  określonej przez punkt  $A$  i prostą warstwową  $w$ . Z uwagi na wykorzystanie kładu różnicowego oś rzutów może być w tej konstrukcji pominięta: a–a4) kład różnicowy odcinka  $[OA]$  (por. rys. 2.6b–b3); a5) obrót punktu  $\bar{A}$  w płaszczyźnie poziomej (realizowany de facto na rzutni poziomej) do położenia  $A^0$

Wcześniejsze rozważania oraz ostatnie stwierdzenie wykorzystamy przy wyznaczaniu tzw. kładu płaszczyzny. *Kładem płaszczyzny* na wybraną rzutnię nazywać będziemy obrót płaszczyzny dookoła leżącej na niej prostej o taki kąt, że płaszczyzna uzyskuje położenie równoległe do rzutni poziomej lub pionowej. Praktyczny sens kładu jest taki, że jeden z rzutów prostokątnych obróconej płaszczyzny odzwierciedla jej związki miarowe, tj. odległości, kąty, kształty figur. Kład płaszczyzny wykonujemy na podstawie spostrzeżenia dotyczącego długości promienia obrotu. Rysunek 4.1 ilustruje – w ujęciu poglądowym – operację i konstrukcję kładu na rzutnię poziomą, tj. obrotu płaszczyzny dookoła jej dowolnej prostej poziomej (warstwowej)  $w$  do położenia równoległego do rzutni poziomej: punkt  $A^0$  – obraz obracanego punktu  $A$  musi znaleźć się na prostej prostopadłej do

prostej  $w'$  (**NCH**)<sup>1</sup> w odległości równej rzeczywistej długości odcinka (promienia obrotu)  $[OA]$  (**PP5**).

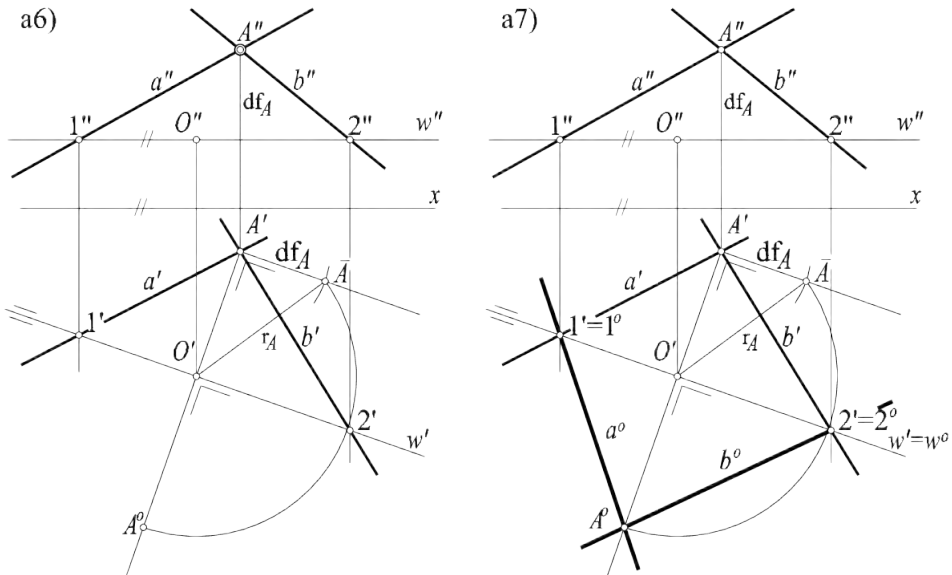
Natomiast na rysunku 4.2 mamy realizację konstrukcji w rzutach prostokątnych (Monge'a). Rzeczywistą długość odcinka  $[OA]$  znajdujemy poprzez kład różnicowy.

#### 4.1.2. Kład płaszczyzny określonej ogólnie



Rysunek 4.3: Kład w rzutach Monge'a płaszczyzny określonej przez dwie proste  $a(a', a'')$ ,  $b(b', b'')$ . Wybieramy najpierw: a1–a2) dowolną prostą warstwową tej płaszczyzny, zaczynając od rzutu pionowego, gdyż  $w'' \parallel x$ ; a3–a5) konstrukcję realizujemy analogicznie jak na rysunku 4.2 (cdn.)

<sup>1</sup> Akronim NCH oznacza *niezmiennik charakterystyczny rzutu prostokątnego*, tzn. następującą własność: jeżeli jedno ramie kąta prostego jest równoległe do rzutni, drugie zaś nie jest prostopadłe, to rzutem prostokątnym kąta prostego jest kąt prosty i odwrotnie: jeżeli obydwa ramiona kąta prostego są nierównoległe do rzutni, to rzutem prostokątnym tego kąta nie może być kąt prosty lub inaczej jeżeli rzutem prostokątnym pewnego kąta o ramionach nierównoległych do rzutni jest kąt prosty, to kąt ten nie jest prosty.



Rysunek 4.4: Kład płaszczyzny: a6) kład  $A^o$  punktu  $A$ ; a7) proste  $a^o$ ,  $b^o$  w kładzie (rzeczywiste położenie prostych, w tym rzeczywista wielkość kąta między nimi)

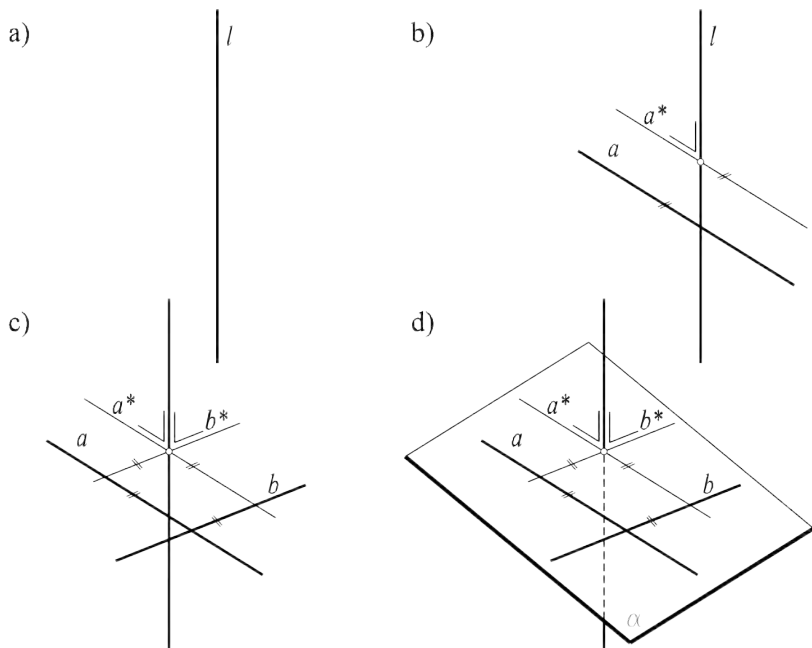
**Przykład 4.1.** Wyznaczyć kład płaszczyzny  $\alpha(a, b)$  określonej przez dwie proste  $a$  i  $b$  (rys. 4.3a).

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 4.1. Rysunki od 4.3a4 do 4.4a7 pokazują kolejne etapy konstrukcji kładu płaszczyzny. Wybieramy wcześniej dowolną prostą warstwową  $w$  w tej płaszczyźnie (rys. 4.3a–a2), następnie powtarzamy konstrukcję z rys. 4.2, by na koniec narysować proste  $(a, b)$  w kładzie  $(a^o, b^o)$  (rys. 4.4a7).

## 4.2. Prostopadłość w rzutach Monge'a

Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie. Warunkiem wystarczającym prostopadłości prostej do płaszczyzny jest prostopadłość tej prostej do dwu nierównoległych prostych owej płaszczyzny (rys. 4.5). Formalnie prostopadłość prostej  $l$  do płaszczyzny  $\alpha$  możemy zapisać w postaci

$$l \perp \alpha \iff \exists_{a, b \in \alpha} (a \nparallel b \wedge l \perp a \wedge l \perp b). \quad (4.1)$$



Rysunek 4.5: Charakterystyka prostej  $l$  prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$ : b) prosta  $l$  nie musi przecinać prostej  $a$  zawartej w płaszczyźnie  $\alpha$ , proste  $l$  i  $a$  mogą być skośne i prostopadłe; c) prosta  $l$  nie musi przecinać prostej  $b$  zawartej w płaszczyźnie  $\alpha$ , proste  $l$  i  $b$  mogą być skośne i prostopadłe; d) prosta  $l$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha(a, b)$

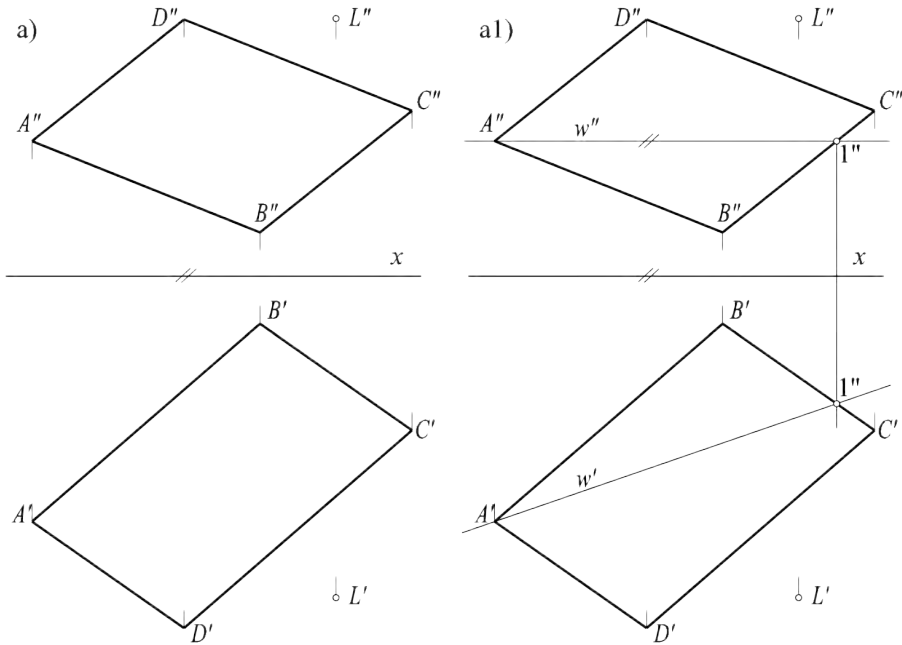
Aby scharakteryzować w rzutach Monge'a prostopadłość prostej do płaszczyzny, rozwiążemy następujący problem.

**Przykład 4.2.** Znaleźć rzuty prostej prostopadłej do płaszczyzny równoległoboku przechodzącej przez dany punkt (rys. 4.5).

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 4.2. Załóżmy, że dane są rzuty  $[A'B'C'D']$ ,  $[A''B''C''D'']$  równoległoboku  $[ABCD]$  oraz rzuty  $L'$ ,  $L''$  punktu  $L$ . Znajdziemy rzuty  $l'$ ,  $l''$  prostej  $l$  przechodzącej przez punkt  $L$  i prostopadłej do płaszczyzny równoległoboku. Z 4.1 wiemy, że *prosta jest prostopadła do płaszczyzny wtedy i tylko, gdy jest prostopadła do dwu prostych nierównoległych leżących na tej płaszczyźnie* (rys. 4.5). Zatem proste te możemy wybrać dowolnie i w związku z tym wybierzemy proste poziomą (warstwową)  $w$  (rys. 4.6a1) i czołową  $c$  (rys. 4.7a3). Wyboru takiego dokonujemy z uwagi na możliwość wykorzystania niezmiennika **NCH**, dzięki któremu prostopadłość szukanej prostej  $l$  do prostych  $w$  i  $c$  przenosi się na rzuty. Rzut poziomy  $l'$  prostej  $l$  jest prostopadły do rzutu poziomego  $w'$  prostej warstwowej  $w$  (rys. 4.7a2), rzut pionowy  $l''$

jest prostopadły do rzutu pionowego  $c''$  prostej czołowej  $c$  (rys. 4.8a4). Możemy to zapisać w postaci

$$l \perp \omega(w, c) \rightarrow l' \perp w' \wedge l'' \perp c''. \quad (4.2)$$

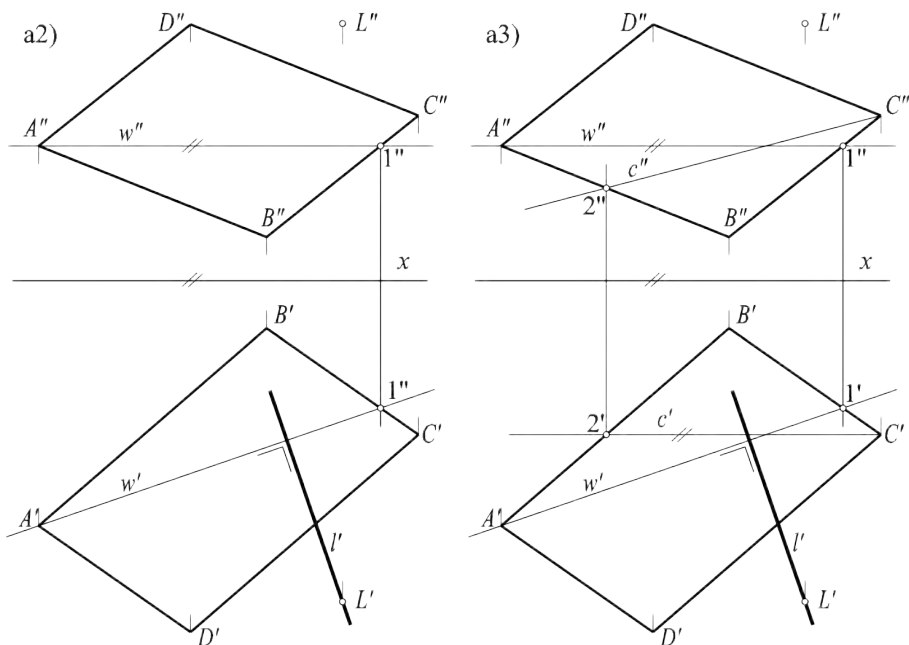


Rysunek 4.6: Konstrukcja prostej prostopadłej do płaszczyzny: a) dane są równoległoboki  $[ABCD]$  ( $[A'B'C'D']$ ,  $[A''B''C''D'']$ ) oraz punkt  $L(L', L'')$ ; a1) wybieramy dowolną prostą warstwową  $w(w''||x)$  płaszczyzny równoległoboku (cdn.)

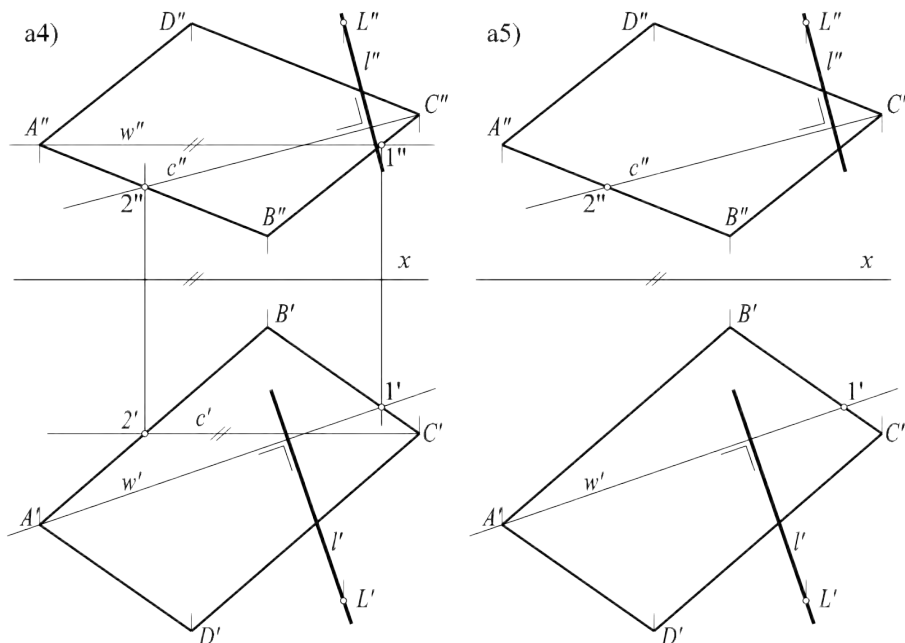
Jest to ciekawy wniosek, ale o wiele ważniejsza byłaby implikacja odwrotna, tzn. by na podstawie rzutów danej prostej stwierdzić, czy prosta ta jest prostopadła do płaszczyzny. Otóż implikacja odwrotna jest prawdziwa, jeśli wyłączymy przypadek, w którym prosta  $l$  nie jest prostopadła do osi  $x$  rzutów. W wyłączonym bowiem przypadku płaszczyzna jest równoległa do osi  $x$  i jej rodziny prostych warstwowych i czołowych się pokrywają. Tanie wyłączenie nie jest czymś nowym. Wszak pamiętamy, że w przypadku, gdy prosta jest prostopadła do osi rzutów, pojawiają się kłopoty z odwzorowaniem prostej (rys. 2.7h) czy też określeniem przynależności punktu do prostej (rys. 3.9b1, 3.11, 3.12). Zwykle w takich sytuacjach posługujemy się rzutem bocznym. Ale powróćmy do charakterystyki prostopadłości. Załóżmy, że spełniony jest warunek  $l' \perp w' \wedge l'' \perp c''$

dla pewnych prostych poziomej  $w$  i czołowej  $c$ , takich że  $w \nparallel c$ . Wyobraźmy sobie dwie płaszczyzny: poziomo rzutującą  $\alpha$  i pionowo rzutującą  $\beta$  przechodzące przez prostą  $l$ . Zachodzą wówczas równości:  $l' = \alpha'$  i  $l'' = \beta''$ . Prostopadłość prostej  $w'$  do prostej  $l' (= \alpha')$  implikuje, wobec równoległości prostych  $w'$  i  $w$  (prosta warstwowa jest bowiem równoległa do swojego rzutu poziomego, podobnie – prosta czołowa jest równoległa do swojego rzutu pionowego), prostopadłość prostej  $w$  do prostej  $l$  leżącej w płaszczyźnie  $\alpha$ . Podobnie rozumując w odniesieniu do prostej  $c$ , prostej  $l$  i płaszczyzny  $\beta$ , wnioskujemy, że prosta  $c$  jest prostopadła do prostej  $l$ . Zatem prosta  $l$  jest równocześnie prostopadła do prostych  $w$  i  $c$ , z założenia nierównoległych (rys. 4.8a5). Ostatecznie możemy zapisać równoważność (4.3):

$$l \perp x \rightarrow (l \perp \omega(w, c) \leftrightarrow l' \perp w' \wedge l'' \perp c''). \quad (4.3)$$



Rysunek 4.7: Konstrukcja prostej prostopadłej do płaszczyzny równoległoboku  $[ABCD]([A'B'C'D'], [A''B''C''D''])$ , przechodzącej przez punkt  $L(L', L'')$ : a2) konstruujemy rzut poziomy  $l'$  szukanej prostej  $l$ ; a3) wybieramy dowolną prostą czołową  $c(c' \parallel x)$  płaszczyzny równoległoboku (cdn.)



Rysunek 4.8: Konstrukcja prostej prostopadłej do płaszczyzny równoległoboku  $[ABCD]([A'B'C'D'], [A''B''C''D''])$ , przechodzącej przez punkt  $L(L', L'')$ : a4) konstruujemy rzut pionowy  $l''$  szukanej prostej  $l$ ; a5) prosta  $l \perp \gamma(ABCD)(l' \perp w'$  i  $l'' \perp c''$ )

### 4.3. Rozwiązywanie dachów

#### 4.3.1. Dachy na budynkach wolnostojących

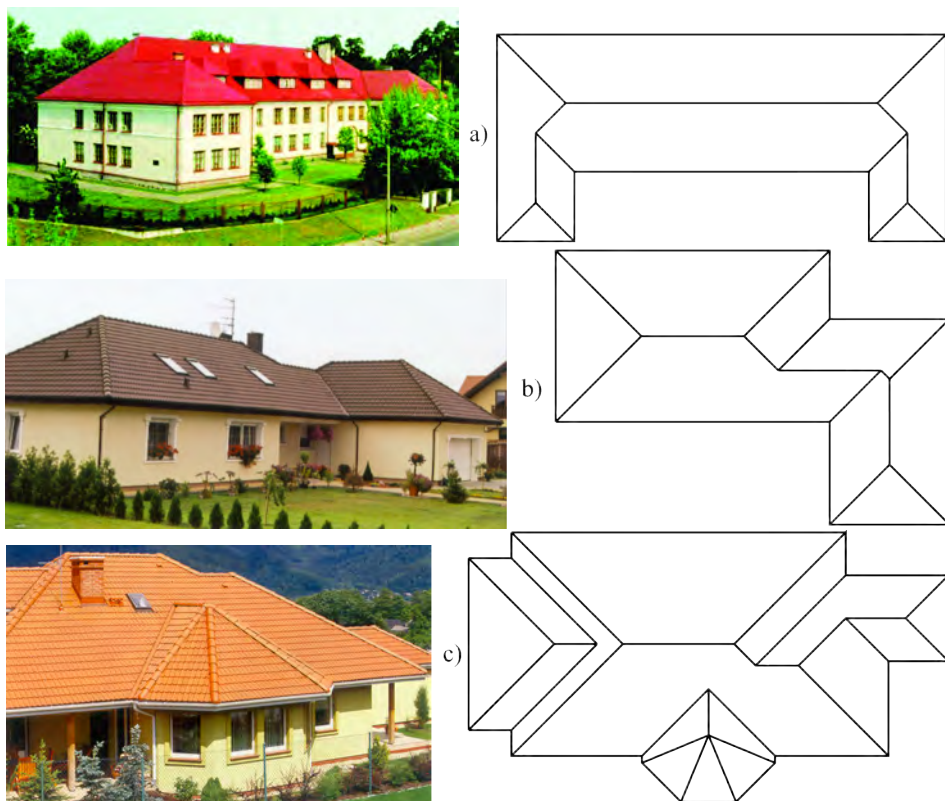
Na początku sformułujemy twierdzenie z zakresu rzutów prostokątnych dotyczące dwu płaszczyzn.

**Twierdzenie 4.1.** Jeżeli dwie płaszczyzny tworzą równe kąty z rzutnią, to rzut prostokątny krawędzi tych płaszczyzn jest osią symetrii śladów owych płaszczyzn.

Rozważać będziemy dachy utworzone z płaskich wielokątów zwanych *połaciami dachowymi* przy założeniu, że górne krawędzie ścian budynku tworzą płaski wielokąt, który nazywać będziemy *podstawą dachu*. *Rozwiązanie dachu* przy danej jego podstawie polega na wyznaczeniu połaci tworzących ten dach oraz kątów między nimi. Zgodnie z twierdzeniem 4.1



krawędzie zetknięcia się połaci zawierają się w osiach symetrii okapów, które najczęściej są dwusiecznymi kątów.



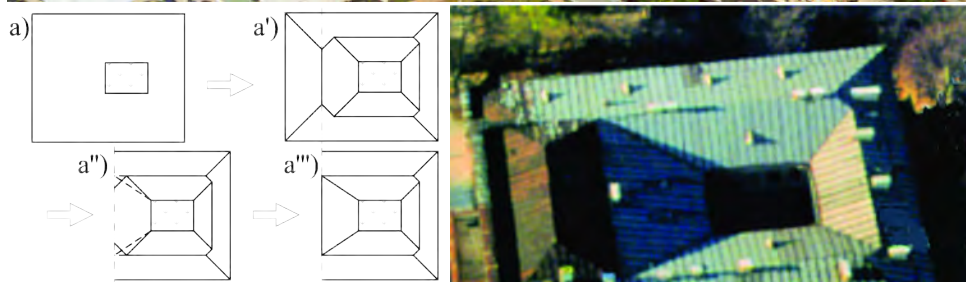
Rysunek 4.9: Dachy kształtują krajobraz: a) budynek liceum w Augustowie (zbudowany w 1922 roku) z dachem regularnym i rzut prostokątny szkieletu tego dachu; b) współczesny dom jednorodzinny z regularnym dachem i rzut prostokątny szkieletu tego dachu; c) współczesny dom jednorodzinny z nieregularnym dachem i rzut prostokątny szkieletu tego dachu [9]

Dachy na budynkach wolnostojących (rys. 4.9), tzn. nieprzylegających do innych, rozwiązywać będziemy przy dwu następujących założeniach:

- *przez każdy bok wielokąta przechodzi połąc dachowa,*
- *wszystkie połączenia określonego dachu tworzą jednakowe kąty z poziomem.*

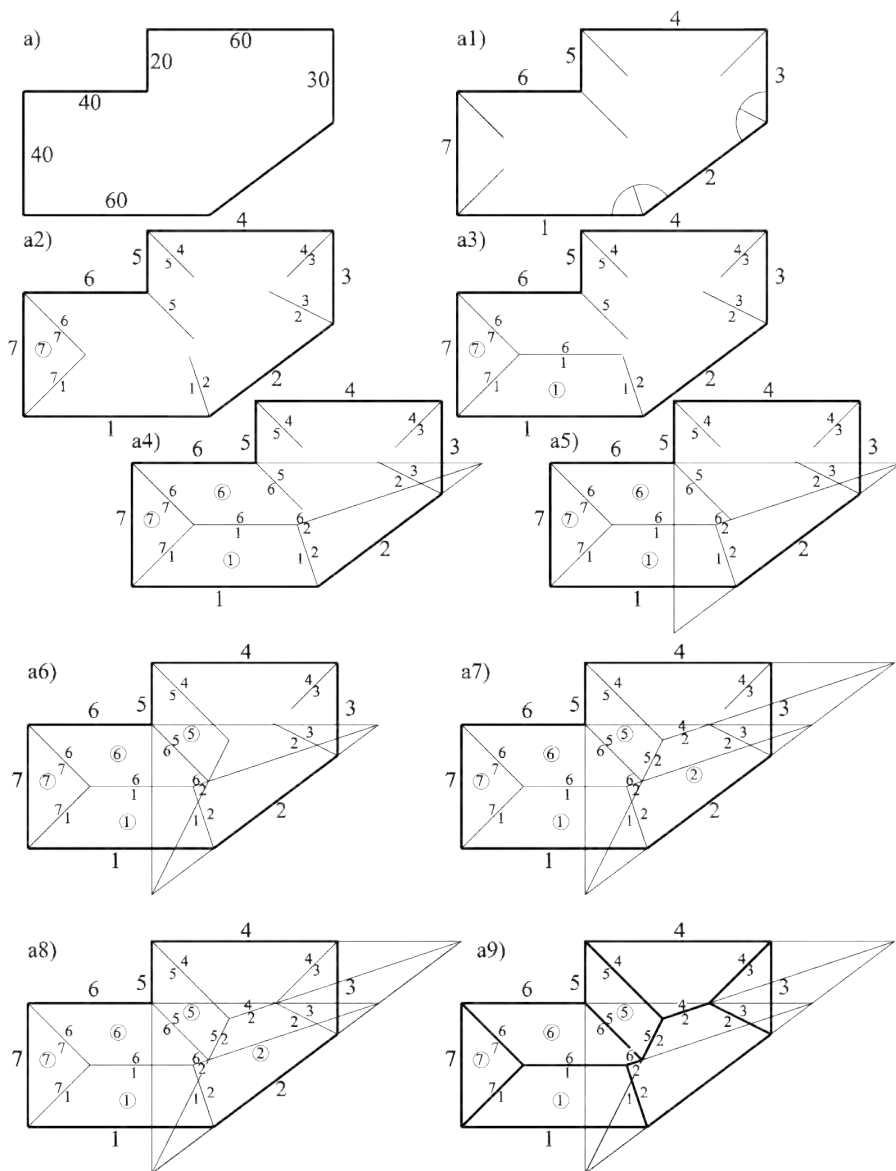
*Okapem* połaci dachowej nazywamy krawędź płaszczyzny tej połaci z podstawą dachu. *Kalenica* jest to wspólna (górna) krawędź połaci o okapach równoległych, *linia narożna* – to „wypukłe zetknięcie się” (krawędź) dwu połaci o nierównoległych okapach, *linia koszowa* – „wkłęsłe zetknięcie się” dwu połaci o nierównoległych okapach. Jeżeli linia narożna nie

dochodzi do wierzchołka wielokąta podstawy dachu, to nazywamy ją *linią narożną zgubną*. Kalenice i linie narożne zgubne tworzą *linię grzbietową* dachu.



Rysunek 4.10: Częściowo regularny dach budynku Wydziału Ekonomicznego Uniwersytetu w Białymstoku (fot. autor) i rzut prostokątny części szkieletu budynku z architektoniczną modyfikacją dachu regularnego w kierunku częściowo regularnego dachu ( $a \rightarrow a' \rightarrow a'' \rightarrow a'''$ ). U góry fragment miasta z budynkiem atrialnym Wydziału Ekonomicznego Uniwersytetu w Białymstoku oraz kościół pw. św. Wojciecha i atrialny zespół budynków Archidiecezjalnego Wyższego Seminarium Duchownego w Białymstoku [9]

**Przykład 4.3.** Rozwiązać dach o podstawie na rysunku 4.11a (wewnątrz długości boków w [mm]), o dowolnym kącie  $\psi$  nachylenia połąci.



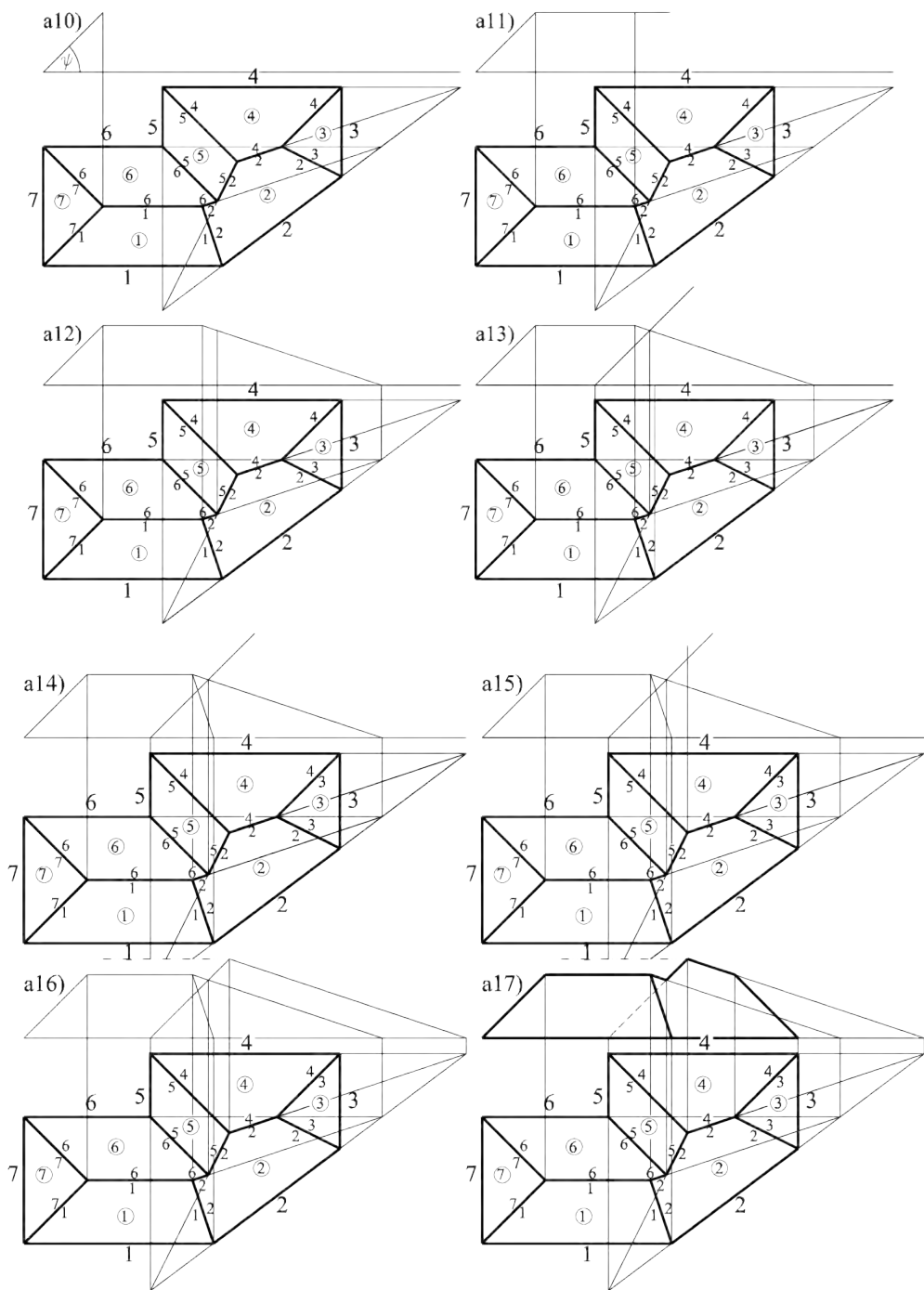
Rysunek 4.11: Aby rozwiązać dach: a) o podstawie wielokąta; a1) numerujemy okapy (połacie) i prowadzimy symetralne kątów; a2) oznaczamy je parami numerów połaci; rozwiązanie rozpoczynamy od połaci 7: dwusieczne (7,1) i (7,6) zamykają połąć 7; a3) z punktu (1,7,6) prowadzimy brakującą krawędź (6,1) jako symetralną okapów 6, 1 i zamykamy połąć 1 krawędzią (1,2); a4) z punktu (1,2,6) wychodzi brakująca krawędź (6,2) (przedłużamy wcześniej linie okapów 6, 2), która; a5) spotykając krawędź (6,5) zamyka połąć 6; a6) z punktu (2,6,5) prowadzimy krawędź (5,2) jako symetralną kąta między okapami 5, 2 (przedłużamy wcześniej linie okapów 5, 2) i zamykamy połąć 5 pierwszą napotkaną krawędzią (5,4); a7–a8) zamykamy połąć 2 pierwszą napotkaną krawędzią (2,3), w tym samym punkcie spotykamy krawędź (4,3) zamykamy połąć 3; a9) pogrubiamy otrzymane krawędzie szkieletu dachu (cdn.)

*Rozwiązanie dachu z przykładu 4.3.* Na początku zauważmy, że rozwiązanie, które zawsze rozpoczynamy od rzutu poziomego, nie zależy od kąta nachylenia połaci. Dach może być bardziej lub mniej stromy, ale rzut ma taki sam. Dla ułatwienia rozwiązania oznaczamy kolejne połacie, numerując okapy, czyli boki wielokąta podstawy. W dachu regularnym każda połać ma jeden okap, czyli bok wielokąta podstawy generuje jednoznacznie połać <sup>2</sup>. Okap (a więc i połać) oznaczamy jakimś identyfikatorem, najczęściej liczbą; krawędź oznaczamy parą znaków (liczb) opisujących połacie tworzące tę krawędź; wierzchołek zaś trójką znaków (liczb) go wyznaczających. Wierzchołek dachu może być częścią wspólną więcej niż trzech połaci. Wówczas mamy do czynienia z pojęciem *nieregularności* szkieletu dachu <sup>3</sup>. *Dach regularny* to taki, w którym w każdym wierzchołku „spotykają się” dokładnie trzy krawędzie i każda połać ma dokładnie jeden okap. W przeciwnym przypadku mówimy o dachu *nieregularnym*. Na rysunku 4.9c nieregularny dach ma trzy punkty nieregularności, dwa z nich są konsekwencją posiadania przez dwie połacie po dwa okapy, trzeci jest miejscem spotkania się więcej niż trzech krawędzi. Nieregularność dachu jest wprawdzie kategorią czysto geometryczną. Ale jest to własność grafu implikująca cechy estetyczne dachu <sup>4</sup>. Kształt geometryczny dachu zależeć będzie nie tylko od kształtu wielokąta podstawy, lecz także od proporcji poszczególnych boków wielokąta podstawy. Jeżeli chcemy mieć określony kształt dachu (lub inaczej: jeżeli nie chcemy, by kształt dachu był przypadkowy), powinniśmy przy projektowaniu budynku, na początku przy określaniu jego planu (obrysu) dokonać analizy kształtu dachu. Zasadę geometrycznego rozwiązania dachu, algorytm wykonania geometrycznego projektu (dachu jako pewnej powierzchni wielościennej) przedstawiamy na rysunkach od 4.11 do 4.14. Aby uzyskać pełne rozwiązanie dachu, musimy wyznaczyć wzajemne kąty nachylenia jego połaci. W tym celu posłużymy się przykładem innego rozwiązane go dachu (rys. 4.14).

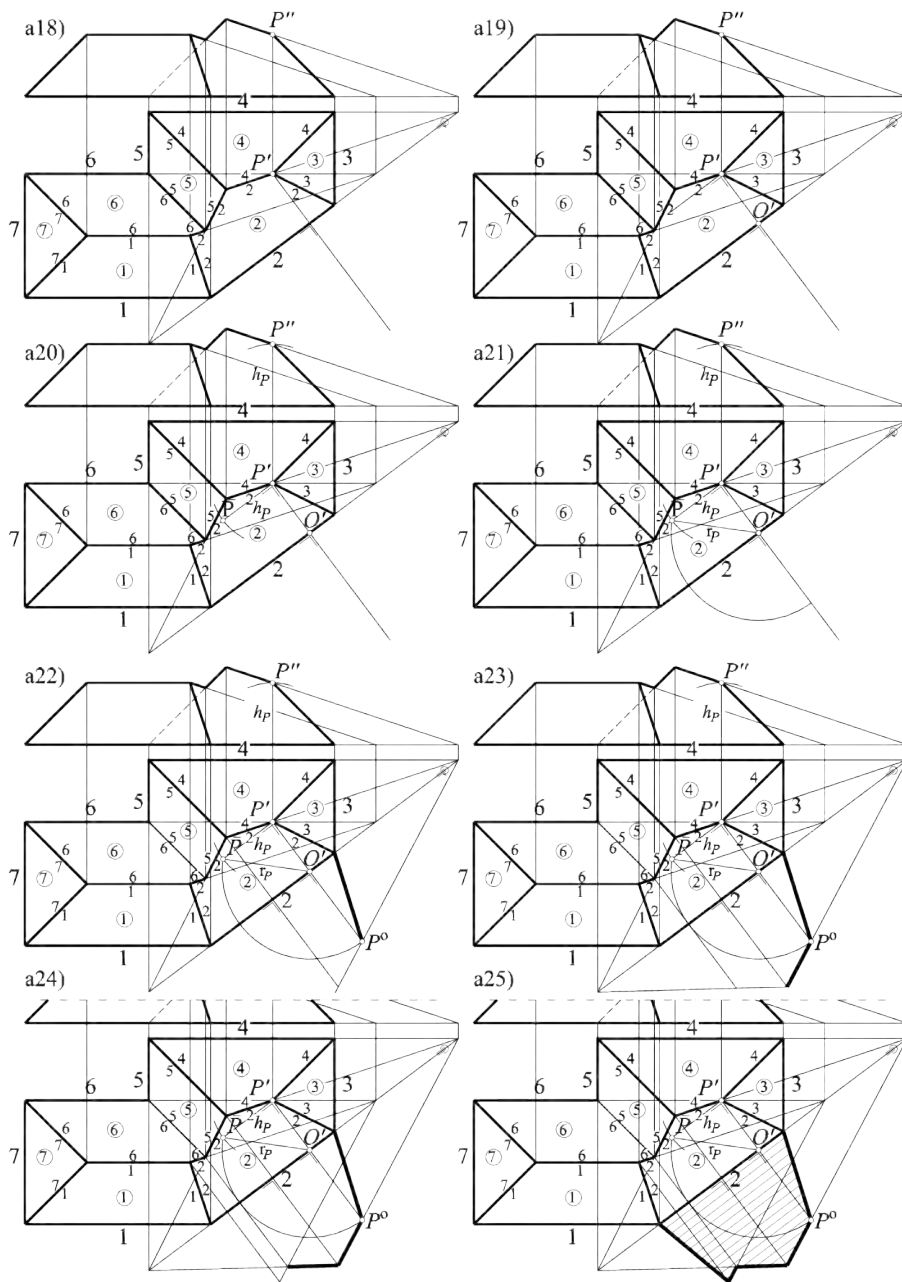
<sup>2</sup> W przypadku dachu nieregularnego tak być nie musi. W dachu przedstawionym na rysunku 4.9c dwie połacie zawierają po dwa boki wielokąta. Które to połacie?

<sup>3</sup> Regularność dachu związana jest z *regularnością grafu* dachu. Dla dachu regularnego można sformułować twierdzenie Eulera [9].

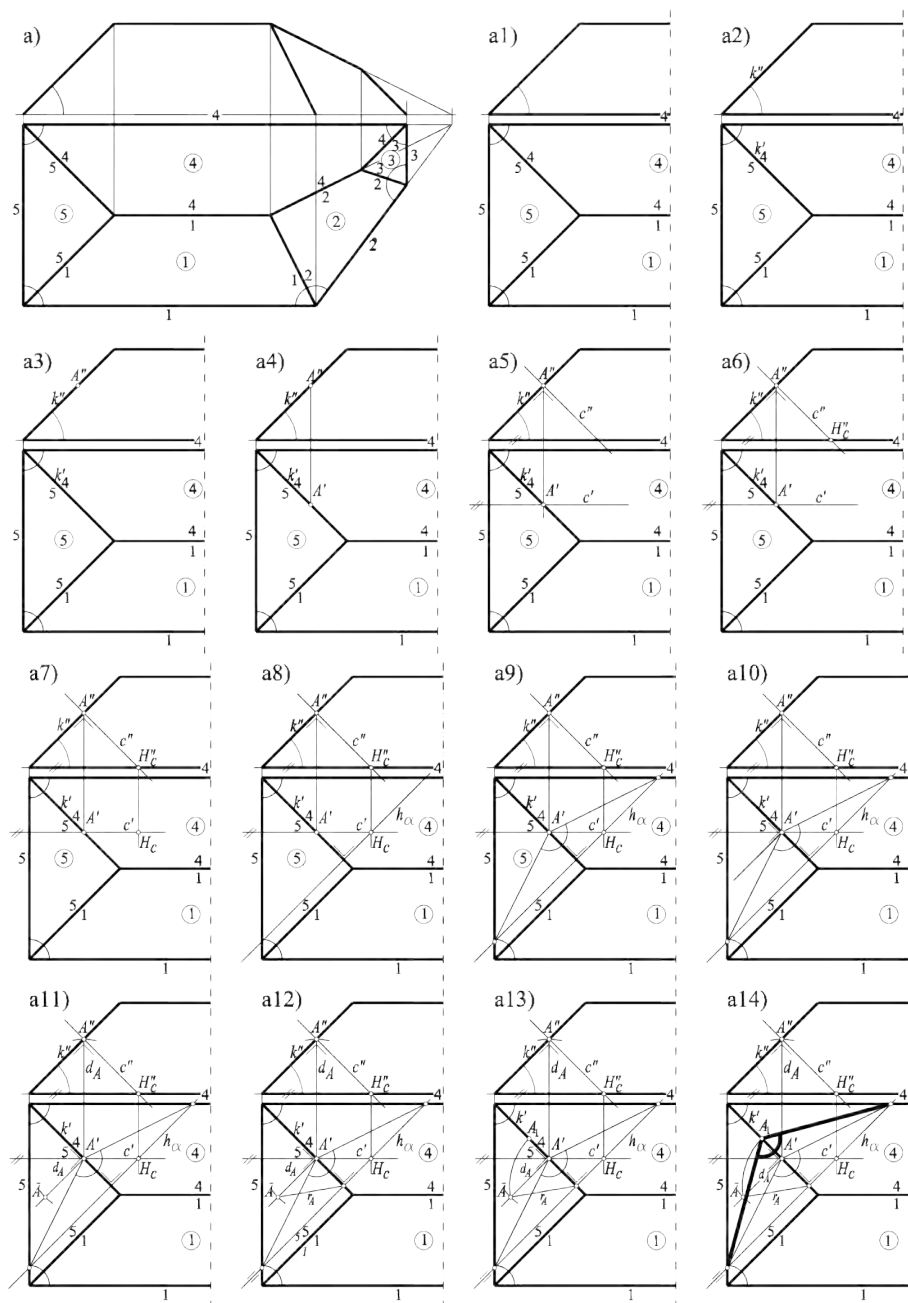
<sup>4</sup> Interesujące, że dach regularny oparty na podstawie wielokąta o bokach prostopadłych lub równoległych do danego kierunku, mający więcej niż cztery okapy, musi mieć krawędzie koszone i nieparzystą liczbę połaci [9]. Przedstawiony na rysunku 4.11a–a25 dach jest regularny, ale jego okapy nie spełniają warunku równoległości do kierunków osi układu prostokątnego, odpowiednio przyjętego na płaszczyźnie. Stąd nieparzysta liczba okapów.



Rysunek 4.12: Po ustaleniu kąta nachylenia połaci  $\psi$  dach jest jednoznacznie określony; a10) kąt ten określa się np. przez ustalenie rzutu pionowego połaci 7; a11) znajdujemy rzut pionowy krawędzi (6,1) (równoległy do rzutni poziomej); a12) rzut pionowy krawędzi (6,2) (ślad prostej (6,2) jest punktem przecięcia się okapów 6, 2); a13) rzut pionowy krawędzi (6,5); a14) rzut pionowy krawędzi (1,2); a15) połaci 5; a16) krawędzi (4,2); oraz a17) połaci 3 (cdn.)



Rysunek 4.13: Kład połąci 2: a18) wybieramy punkt  $P(P', P'')$  i oś obrotu (okap 2) i prowadzimy przez  $P'$  prostą prostopadłą do okapu 2; a19) przez punkt  $P'$  prostą prostopadłą do tej prostej, znajdujemy punkt  $O'$ ; a20) odmierzamy wysokość  $h_P$  punktu  $P$ , by znaleźć kład boczny  $\bar{P}$  punktu  $P$ , który; a21) łączymy z punktem  $O'$ , otrzymując kład promienia obrotu  $r_P$ ; a22–a25) otrzymujemy kład  $P^o$  punktu  $P$  i krawędzi (2,3); oraz a23) krawędzi (4,2); a24) krawędzi (2,5); a25) krawędzi (6,2) i (1,2)



Rysunek 4.14: Kąt między połączeniami 4 i 5 znajdujemy, konstruując płaski kąt przekroju płaszczyzną  $\alpha$  prostopadłą do krawędzi: a2)  $k(k', k'') = (4, 5)$ ; a3–a4) wybieramy na krawędzi dowolny punkt  $A(A', A'')$  ( $A \in \alpha$ ); a5) prostą czołową  $c(c', c'')$ ; a6) rzut pionowy śladu poziomego  $H_c''$ , następnie znajdujemy: a7) ślad poziomy  $H_c$ ; a8) ślad poziomy  $h_\alpha$  szukanej płaszczyzny  $\alpha$ ; a9) szukany kąt; a10–a14) kład tego kąta

Znajdujemy kąt (geometryczną miarę kąta) między połaciami 4 i 5 (rys. 4.14a). Jest to kąt dwuścienny. Przypomnijmy: *kątem dwuściennym* jest każda z dwu części przestrzeni, na jakie dzieli ją dwie półpłaszczyzny, nazywane ścianami kąta dwuściennego, mające wspólną krawędź nazywaną *krawędzią kąta dwuściennego*, wraz z punktami każdej półpłaszczyzny. *Kątem liniowym* kąta dwuściennego nazywamy kąt płaski będący częścią wspólną tego kąta dwuściennego oraz płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi. Skonstruujemy kąt liniowy kąta dwuściennego między połaciami 4 i 5. Przez wybrany punkt  $A(A', A'')$  (4.14a4) krawędzi (4,5) oznaczonej przez  $k(k', k'')$  znajdziemy najpierw płaszczyznę prostopadłą do krawędzi  $k$ . W tym celu konstruujemy dwie proste: jedna z nich to prosta czołowa  $c(c', c'') \perp k(k', k'')$  (rys. 4.14a5), wszak zachodzi  $c'' \perp k''$  i (4.2), druga z prostych to ślad poziomy  $h_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  zawierającej prostą  $c$  ( $H_c \in c \subset \alpha$ , rys. 4.14a6–a8). Z uwagi na  $k' \perp h_\alpha$  i (4.2) mamy  $k \perp h_\alpha$ . Proste  $c$  i  $h_\alpha$  przecinają się w punkcie  $H_c$ , zatem tworzą jednoznacznie płaszczyznę  $\alpha$ . Prosta  $k$  jest prostopadła do płaszczyzny  $\alpha$ , ponieważ nierównoległe proste  $c$  i  $h_\alpha$  z uwagi na (4.2) są prostopadłe do prostej  $k$ . By wyznaczyć kąt liniowy kąta połaci, dokonujemy przekroju połaci 4 i 5 płaszczyzną  $\alpha$ . Punkty wspólne obu połaci i płaszczyzny  $\alpha$  to punkt  $A$  i punkty, w których ślad  $h_\alpha$  przecina okapy 4 i 5 (rys. 4.14a9). Punkty te tworzą trójkąt równoramienny i kąt przy wierzchołku  $A'$  jest rzutem poziomym szukanego kąta między połaciami 4 i 5 (rys. 4.14a9). Aby wyznaczyć rzeczywistą wielkość kąta między połaciami 4 i 5, dokonujemy kładu płaszczyzny owego trójkąta (faktycznie płaszczyzny  $\alpha$ ). Faktycznie obracamy punkt  $A$  dokoła śladu  $h_\alpha$  do położenia równoległego do rzutni poziomej (rys. 4.14a10–a14); w tym przypadku obraca na rzutnię poziomą. Konstrukcja kładu jest powtórzeniem konstrukcji z rysunków 4.3 – 4.4, 4.13a18–a23.

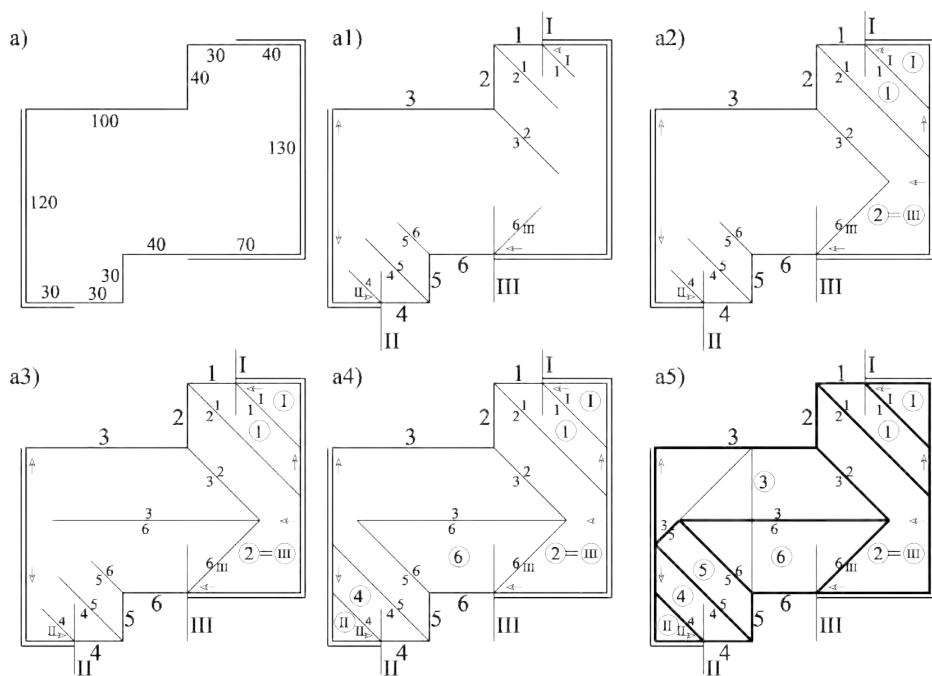
### 4.3.2. Dachy z sąsiadami

Inną nieco kategorię stanowią dachy z *ograniczeniami* lub z *sąsiadami*, czyli z przylegającymi sąsiednimi budynkami (rys. 4.15). Zakłada się, że pewne boki wielokąta podstawy dachu lub ich części nie mogą być okapami, czyli nie może spływać woda w kierunku prostopadłym do tych okapów. W rzeczywistości w praktyce oznacza to, że w kierunku danego odcinka (odcinków) boków wielokąta podstawy nie może spływać woda deszczowa. Na rysunku fragmenty podstawy dachu (projektowanego budynku), na których nie może spływać woda, zaznaczamy podwójną linią



(rys. 4.15a). Linia ta może oznaczać budynek sąsiedni. By odpowiednio odprowadzić wodę, wprowadzamy dodatkowe połacie (a więc i okapy), wcześniej zaznaczając kierunek odpływu wody. Musimy wiedzieć, że woda na danej płaszczyźnie spływa wzdłuż *linii spadu* tej płaszczyzny, które są prostymi prostopadłymi do *warstwicy* (prostych warstwowych) tej płaszczyzny. Jak pamiętamy, prostą warstwową płaszczyzny jest każda prosta równoległa do płaszczyzny poziomej. Każdy okap jest prostą warstwową połaci dachowej. Woda spływa więc prostopadłe do okapu. Zatem mając dany kierunek spływu wody, nowe okapy rysujemy prostopadłe do tego kierunku.

**Przykład 4.4.** Rozwiązać dach z budynkami sąsiednimi o podstawie na rysunku 4.15a (wewnątrz długości boków w [mm]), o dowolnym kącie  $\psi$  nachylenia połaci.



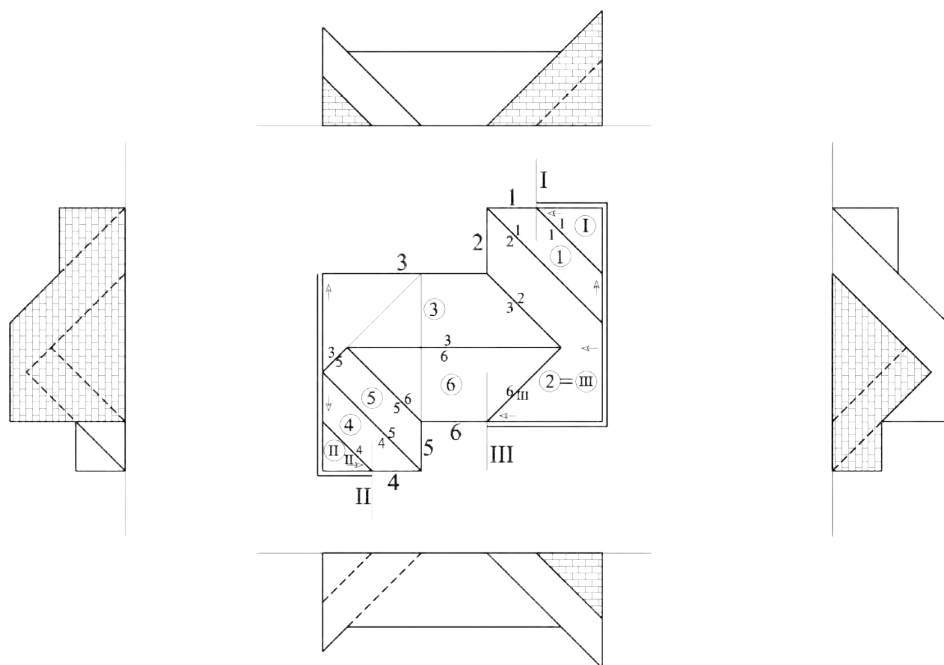
Rysunek 4.15: Dach: a) z sąsiedami (liczby oznaczają długości boków np. w [mm]) rozwiązujemy, przyjmując a1) dodatkowe połacie, a więc okapy I, II, III prostopadłe do kierunków odprowadzenia wody; konstruujemy dwusieczne wszystkich kątów; a2) zamykamy połacie I, 1, 2=III; a3) prowadzimy krawędź (3,6); a4) zamykamy połacie II, 4, 6; a5) krawędź (3,5) zamyka ostatnie połacie 5, 3

*Rozwiązanie dachu z przykładu 4.4.* Na początku ustalamy sposób odprowadzenia wody (strzałki równoległe do tych części boków wielokąta, w których jest ograniczenie) i oznaczamy liczbami okapy (rys. 4.15a1). Woda będzie odprowadzana tak jak wskazują strzałki. Wprowadzamy trzy dodatkowe okapy prostopadłe do kierunków odprowadzenia wody (rys. 4.15a1). W celu odróżnienia dodatkowych okapów od okapów budynku wolnostojącego oznaczamy je rzymskimi cyframi I, II, III (rys. 4.15a1). Prowadzimy dwusieczne wszystkich kątów, które są utworzone przez sąsiadujące okapy, w tym również okapy nowe (rys. 4.15a1). Idąc wzdłuż wielokąta podstawy dachu zgodnie ze wskazówkami zegara i rozpoczynając analizę od najwyżej położonej na rysunku strzałki, woda będzie odprowadzana kolejno prostopadłe do okapów: I, 1, 2, III, 4, II, 3. Zauważmy, że okap III jest przedłużeniem okapu 2. Połąć 2 jest więc identyczna z połącią III <sup>5</sup>. Zamykamy najpierw połąć I (rys. 4.15a2,  $I \mapsto \bigcirc$ , woda odpływa równoległe do jednego, i prostopadłe, od drugiego ograniczenia). Następnie zamykamy połąć 1 (rys. 4.15a2,  $1 \mapsto \bigcirc$ , woda odpływa równoległe do ograniczenia). Zamykamy połąć 2 (rys. 4.15a3,  $2 \mapsto \bigcirc$ , woda odpływa prostopadłe od ograniczenia, połąć  $2 \mapsto \bigcirc$  jest identyczna z połącią  $III \mapsto \bigcirc$ ). Zamykamy połąć 6 (rys. 4.15a4,  $6 \mapsto \bigcirc$ ). Potem zamykamy kolejno połącie: II (woda odpływa równoległe do jednego i prostopadłe od drugiego ograniczenia), 4  $\mapsto \bigcirc$  (woda odpływa równoległe do ograniczenia) (rys. 4.15a4), 5  $\mapsto \bigcirc$  (woda odpływa prostopadłe od ograniczenia), 3  $\mapsto \bigcirc$  (woda odpływa równoległe do ograniczenia) (rys. 4.15a5). Geometria dachów z ograniczeniami to nic innego jak geometria dachów na budynkach wolnostojących, w których dowolną powierzchnię wielościenną, jaką jest dach, poddajemy operacji różnicy (subtract). Dokładniej, operacja rozwiązania dachu polega na zaprojektowaniu budynku wolnostojącego tak, by po usunięciu (odcięciu) płaszczyznami pionowymi fragmentów powierzchni i zastąpieniu ich wielokątami leżącymi w tych płaszczyznach otrzymać żądany dach.

W sensie geometrii elementarnej geometria dachów to wyspecjalizowany dział powierzchni wielościennych mających interesujące własności praktyczne.

---

<sup>5</sup> Mamy więc sytuację, w której połąć ma dwa różne okapy. Takiego dachu nie da się już na pewno rozszerzyć do dachu regularnego budynku wolnostojącego. Przez rozszerzenie dachu rozumiemy będziemy takie uzupełnienie wielokąta podstawy, że dach staje się dachem budynku wolnostojącego i fragmentem tego dachu jest dany dach z ograniczeniem.



Rysunek 4.16: Pięć rzutów dachu z rysunku 4.15, m.in. z góry (plan, w środku), z przodu (elewacja główna, u góry)

#### 4.3.3. Dachy rozwiązywane za pomocą CAD

Przedstawimy tu propozycje geometrycznego projektowania (rozwiązywania geometrycznego) dachów z ograniczeniami, czyli z „sąsiadami”, oraz dachów atrialnych, czyli dachów budynków z podwórkami, w których można wykorzystać oprogramowanie CAD do automatycznego rozwiązywania lub wspomagania rozwiązywania. Dachy z ograniczeniami konstruuje się poprzez sprowadzenie ich (rozszerzenie wielokąta podstawy) do dachów zwykłych, tj. rozpiętych nad wielokątem jednospójnym. Następnie do zaprojektowanych wcześniej dachów zwykłych stosuje się działania boolowskie. Dachy z podwórkami projektuje się również na bazie skonstruowanych wcześniej dachów nad wielokątami jednospójnymi poprzez infinitesimalne wycięcia wielokąta wielospójnego. Coraz bardziej powszechne metody posługiwania się programami komputerowymi przy projektowaniu architektoniczno-budowlanym umożliwiają, czy też może lepiej powiedzieć wymuszają, zupełnie różne od tradycyjnego, podejście do geometrycznego rozwiązania dachu budynku graniczącego bezpośred-

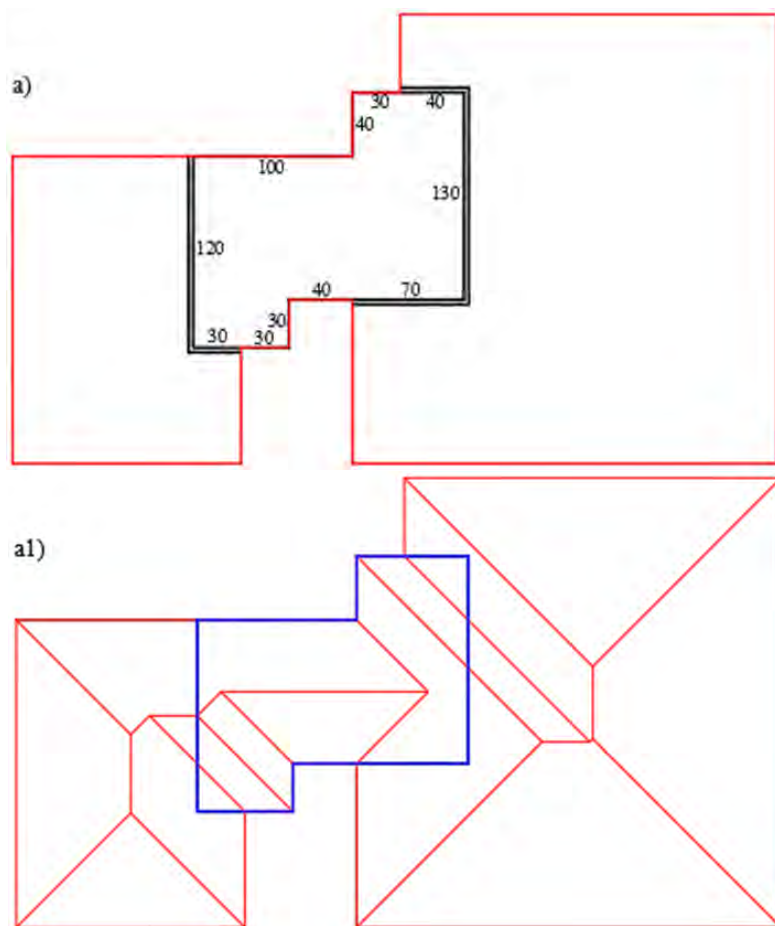
nio z innymi budynkami (tzw. dachu z „sąsiadami”)<sup>6</sup> lub mającego ograniczenie z innych powodów, np. estetycznych. Jak już powiedzieliśmy, tradycyjne rozwiązanie dachu z ograniczeniami (por. rys. 4.15a) wymaga wprowadzenia dodatkowych połaci, a więc okapów, by odprowadzić wodę od „sąsiada” (rys. 4.15a2) lub równoległe do krawędzi z „sąsiadem” (na rys. 4.15a1 kierunek ten wskazują strzałki), co wymaga od projektanta wykonania różnych, nierzadko skomplikowanych zabiegów. Często problem musimy traktować indywidualnie. Pomysł zaprzęgnięcia komputera do wykonania tej pracy, czy nawet użycia komputera do wspomagania realizacji postawionego zadania, wymaga ujednolicenia (uczynienia uniwersalnym) algorytmu postępowania, by móc skorzystać z istniejących programów lub napisać własne nakładki bądź autonomiczne aplikacje<sup>7</sup>. W proponowanej metodzie wprowadzenie dodatkowych połaci (okapów) uzyskuje się poprzez rozszerzenie w sposób naturalny (bez wprowadzania okapów pozornych) wielokąta podstawy dachu (czyli planu budynku) (rys. 4.17 – 4.19).

**Przykład 4.5.** Rozwiązać dach z budynkami sąsiednimi o podstawie na rysunku 4.15a (wewnątrz długości boków w [mm]), o dowolnym kącie  $\psi$  nachylenia połaci z użyciem odpowiednich funkcji oprogramowania AutoCAD.

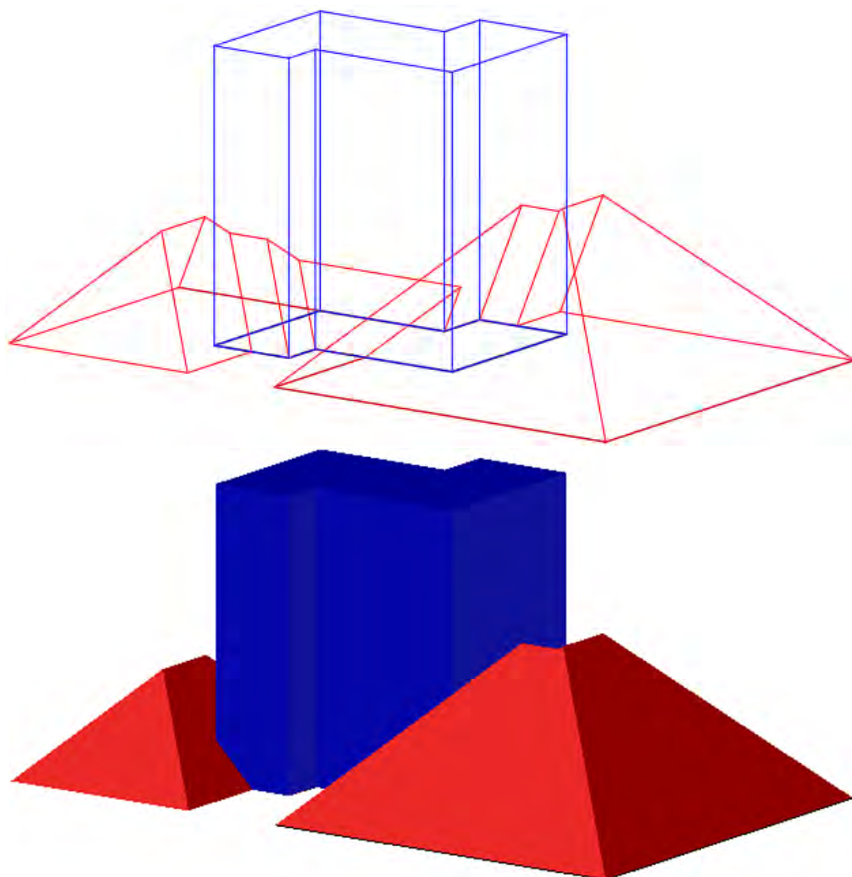
*Rozwiązanie* problemu z przykładu 4.5 sprowadza się do odpowiedniego zanurzenia dachu z ograniczeniami w zwykły dach (bez ograniczeń) nad wielokątem jednospójnym (rys. 4.17a). Rozwiązujemy zwykły (standardowy) dach poprzez funkcje modelowania 3D: EXTRUDE oraz TAPER FACES (rys. 4.17a1), przy czym kąt nachylenia połaci  $\psi$  definiowany jest w ramach działania funkcji TAPER FACES (podaje się  $90^\circ - \psi$ ). W poleceniu TAPER FACES podaje się kąt względem kierunku pionowego. Jeśli więc ściany po pochyleniu będą tworzyć kąt  $90^\circ - \psi$  z kierunkiem pionowym, to z płaszczyzną poziomą (podstawy dach) będą tworzyć kąt  $\psi$ . Następnie wycinamy pierwotny fragment dachu, wcześniej budujemy garniastosłup o podstawie pierwotnego wielokąta (rys. 4.18) poprzez wykonanie odpowiedniej operacji boolowskiej: iloczyn (intersect). W efekcie otrzymujemy dach na rysunku 4.19.

<sup>6</sup> Przy projektowaniu dachów należy brać pod uwagę ściany przyległych budynków. Połacie powinny być tak zaprojektowane, żeby woda nie spływała na mur sąsiadujący.

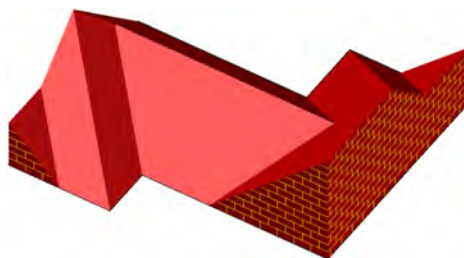
<sup>7</sup> Wśród istniejących procedur graficznych realizujących ścięty dach dla wielokąta (wielokąt wytłoczony) warto wymienić polecenie EXTRUDE.



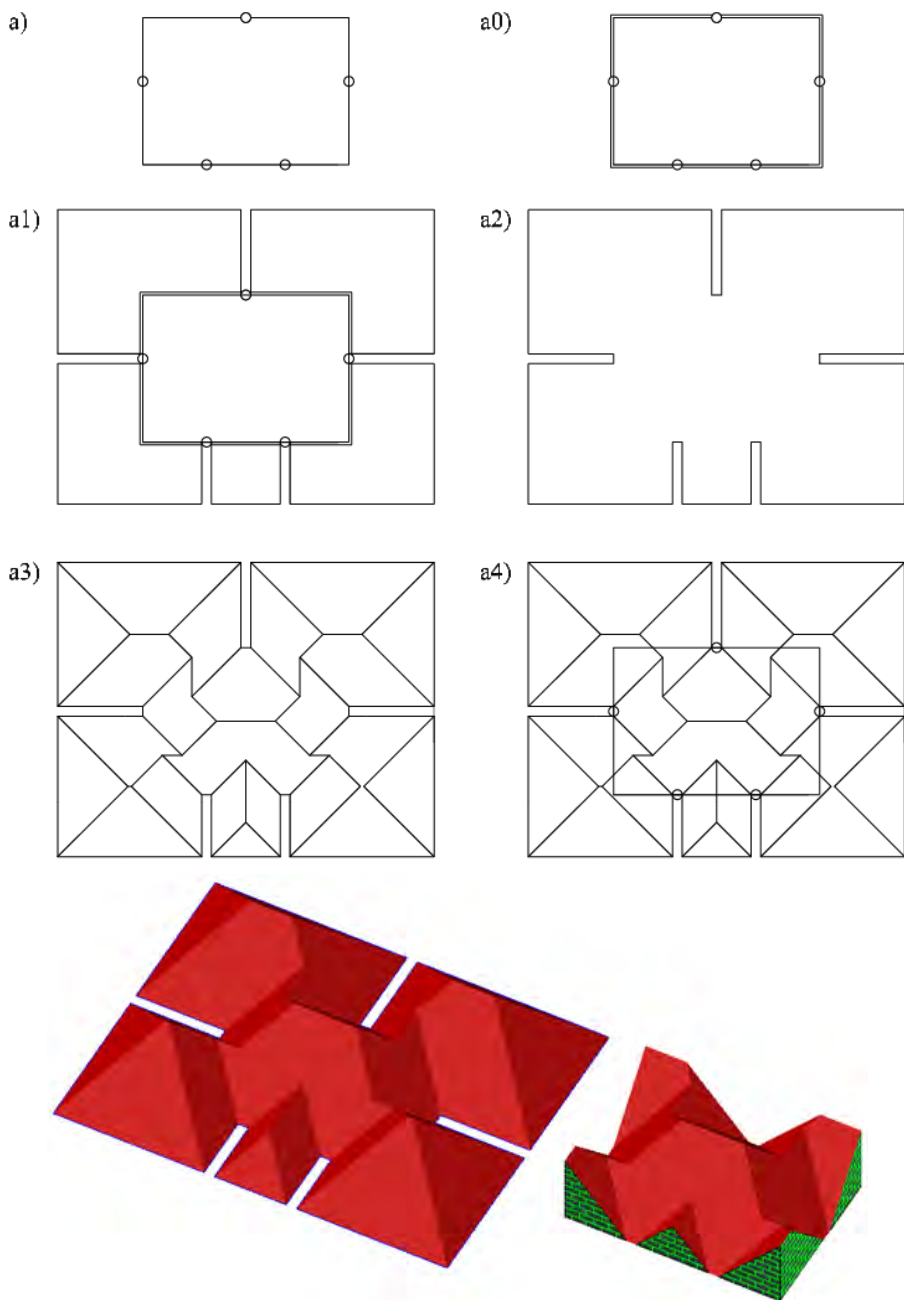
Rysunek 4.17: Rozwiązanie dachu z ograniczeniami za pomocą programu AutoCAD: a) okapy dodatkowe określone na rysunku 4.15a1 traktujemy tu jako okapy dachu rozszerzonego i budujemy rozszerzony wielokąt podstawy; a1) rozwiązujemy dach, posługując się poleceniami 3D AutoCAD-a: EXTRUDE, TAPER FACES, uwzględniając w ostatnim poleceniu kąt  $\psi$  poprzez podanie wartości  $90^\circ - \psi$ . Ściany (jako połacie) pochylamy bowiem, względem kierunku pionowego, właśnie o kąt  $90^\circ - \psi$ . Wtedy owe połacie tworzą z płaszczyzną poziomą kąt  $\psi$ . Warto zwrócić uwagę na kierunki odpływu wody, prostopadłe do okapów dachu rozszerzonego, i porównać z kierunkami przyjętymi w tradycyjnym rozwiązaniu dachu (rys. 4.15) (cdn.)



Rysunek 4.18: Konstrukcja pomocniczego graniastoslupa o podstawie wyjściowego wielokąta podstawy dachu z ograniczeniami – polecenie 3D AutoCAD-a: EXTRUDE. Na rysunku przedstawiono zestaw brył w wizualizacji szkieletowej (2D Wireframe) (u góry) oraz w wizualizacji realnej (Realistic) (u dołu) (cdn.)



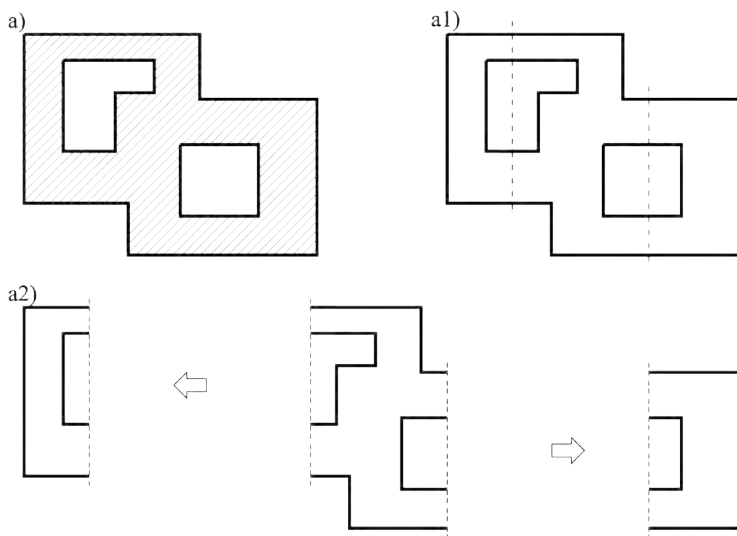
Rysunek 4.19: Efekt rozwiązania problemu z przykładu 4.6 z wykorzystaniem oprogramowania AutoCAD. W odniesieniu do rysunku 4.16 widoczne są w aksonometrii elewacja główna oraz boczna widziana z prawej strony



Rysunek 4.20: Rozwiązanie dachu pogrążonego: a) wielokąt podstawy z pięcioma punktami spustowymi; a1) oznaczenie podwójną linią budynków pośrednich; a2) ustalenie odcinków nieskończenie małych w punktach spustowych i konstrukcja wielokąta rozszerzonego; a3) rozwiązanie dachu standardowego (polecenia EXTRUDE, TAPER FACES); a4) konstrukcja graniastósłupa (prostokątostłupa) pomocniczego w celu wykonania operacji boolowskiej (widok z góry). U dołu rysunku realistyczna wizualizacja dachu rozszerzonego oraz efekt modelowania 3D – dach pogrążony

**Przykład 4.6.** Rozwiązać dach z pełnym ograniczeniem o podstawie na rysunku 4.20a (wewnątrz długości boków w [mm]), o dowolnym kącie  $\psi$  nachylenia połaci z użyciem odpowiednich funkcji oprogramowania AutoCAD.

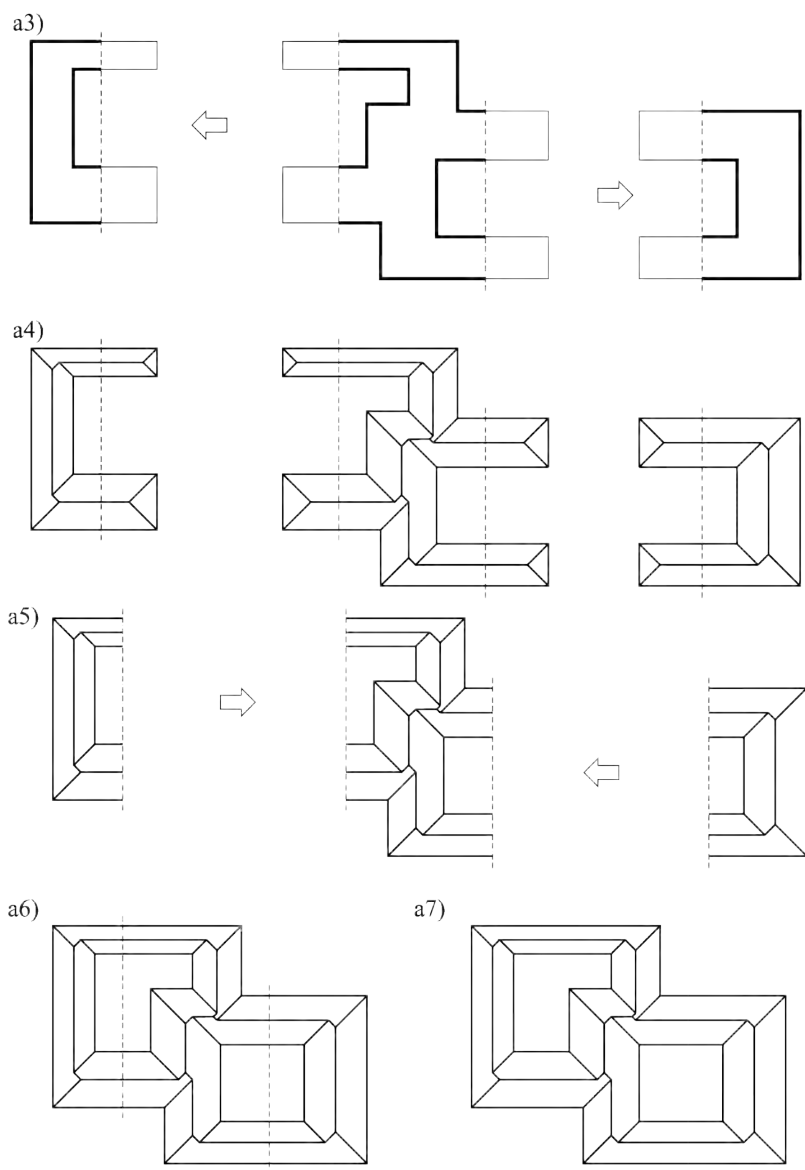
*Rozwiązanie* problemu z przykładu 4.6. W przypadku, gdy założymy pełne ograniczenie (sąsiad na wszystkich bokach wielokąta podstawy) dachu prowadzące do tzw. *dachu pogrążonego*, musimy przyjąć na wielokącie *punkty spustowe*, jako że woda musi być gdzieś odprowadzona. Wówczas przy rozszerzaniu wielokąta podstawy do wielokąta jednospójnego możemy przyjąć, że punktowi spustowemu odpowiada *infinitesimalny* (bardzo mały) odcinek (rys. 4.20a). Zauważmy, że jest to pewnego rodzaju trik. W sensie geometrycznym bowiem punkt spustowy jest punktem, natomiast okazuje się, że istota kształtu dachu może być konsekwencją przyjęcia w tym punkcie bardzo krótkiego odcinka i wyprowadzenia z jego końców odcinków prostopadłych (rys. 4.20a1).



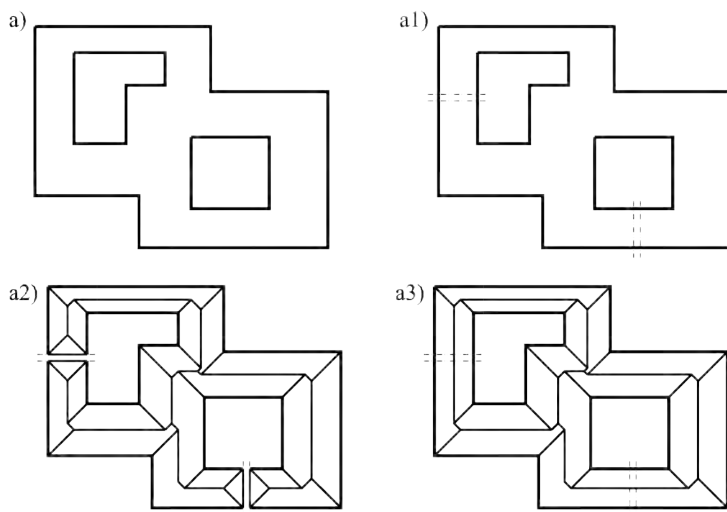
Rysunek 4.21: Dach atrialny, czyli dach z (dwoma) podwórkami. Konstrukcję szkieletu dachu sprowadzamy do jego rozwiązania nad wielokątami jednospójnymi (bez „dziur”) poprzez a1) podział wielokąta podstawy; a2) na trzy podwielokąty (cdn.)

**Przykład 4.7.** Rozwiązać dach atrialny (z dwoma podwórkami) o podstawie na rysunku 4.21a o dowolnym kącie  $\psi$  nachylenia połaci z użyciem odpowiednich funkcji oprogramowania AutoCAD.





Rysunek 4.22: Dach atrialny, czyli dach z (dwoma) podwórkami. Konstrukcję jego szkieletu sprowadzono do rozwiązania dachu nad wielokątami jednospójnymi (bez „dziur”) poprzez: a3) podział wielokąta podstawy na trzy podwielokąty i rozszerzenie poprzez wyciągnięcie odpowiednich fragmentów (operacja boolowska sumowania); a4) i rozwiązanie każdego zwykłego dachu; a5) obcięcie (operacja boolowska różnicy lub iloczynu ze stosownie dobranymi prostopadłościanami); a6) połączenie (operacja sumy) otrzymanych części dachu

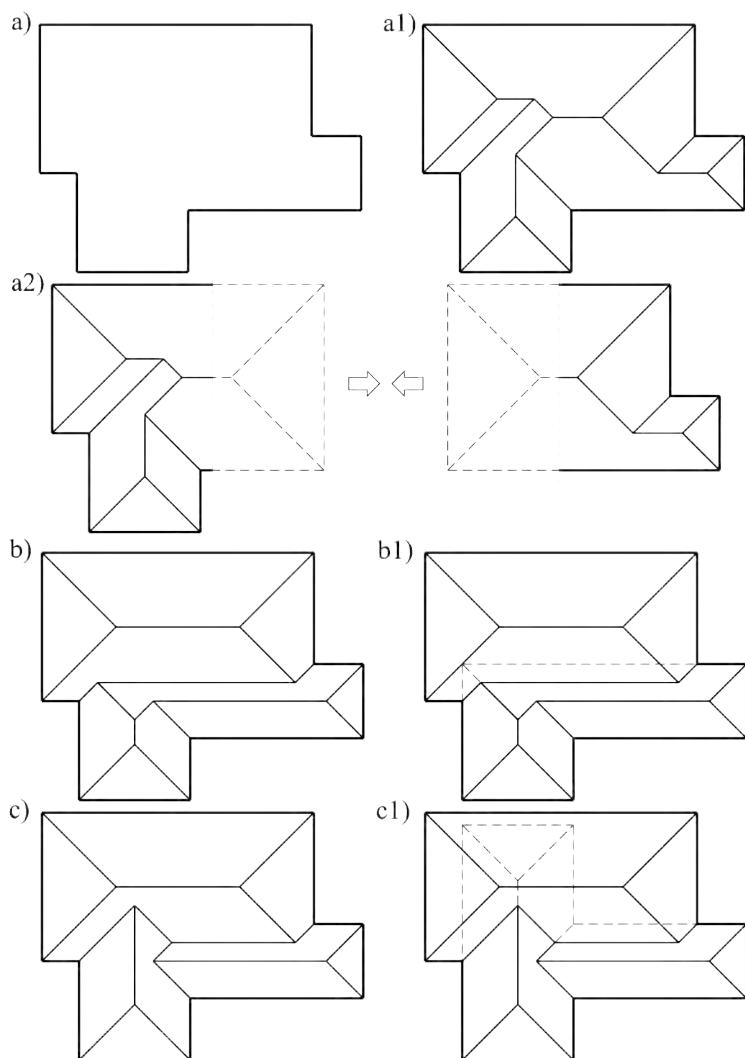


Rysunek 4.23: Dach atrialny, czyli dach z (dwoma) podwórkami – inny sposób rozwiązania problemu. Konstrukcję szkieletu dachu sprowadzono do jego rozwiązania nad wielokątem jednospójnym (bez „dziury”): a1) poprzez przekształcenie wielokąta wielospójnego na jednospójny – usunięcie części wielokąta (operacja boolowska różnicy lub iloczynu ze stosownie dobranymi prostopadłościanami); a2) rozwiązanie zwykłego dachu nad wielokątem jednospójnym; a3) wstawienie „brakujących” części dachu (połączenie – operacja sumy)

#### 4.3.4. Poprawność rozwiązania dachu

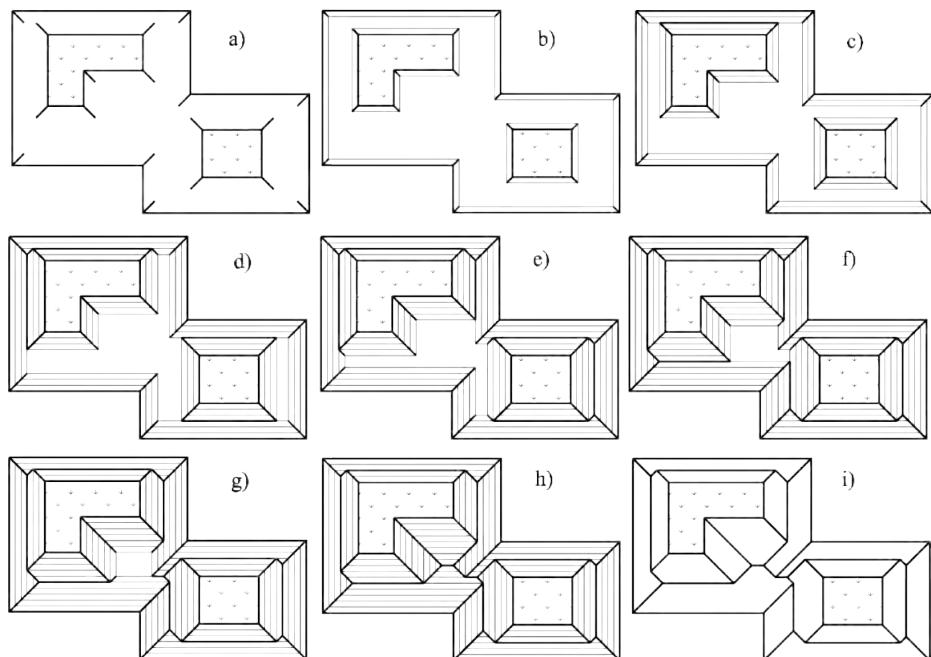
Może się zdarzyć, że rozwiązanie dachu, poprawne geometrycznie, jest nie do przyjęcia pod względem konstrukcyjno-technologicznym. Wada polega na takim jego ukształtowaniu, że pojawia się w nim krawędź koszowa wklęsła o małym nachyleniu lub (co jest już zupełnie niedopuszczalne) równoległa do płaszczyzny podstawy dachu (rys. 4.24b, 4.24c). Pozioma wklęsła (koszowa) kalenica lub krawędź z małym nachyleniem dyskwalifikują rozwiązanie dachu z inżynierskiego punktu widzenia. Na rysunku 4.24 mamy trzy różne rozwiązania dachu o danej podstawie (rys. 4.24a). Pierwsze, poprawne rozwiązanie, jest następstwem zastosowania metody topograficznej, która polega na dokonywaniu poziomego przekroju dachu i przy określaniu (znajdowaniu) kolejnego nowego wierzchołka badaniu, czy zmienił się kształt topologiczny przekroju (rys. 4.25),

tzn. czy wielokąt przekroju ma tę samą liczbę otworów, boków, kątów wklęsłych, kątów wypukłych<sup>8</sup>.



Rysunek 4.24: Trzy różne rozwiązania dachu: a) nad ośmiokątem; a1) rozwiązanie poprawne pod względem technologicznym; b) rozwiązanie wadliwe technologicznie jako efekt operacji boolowskiej dwu poprawnie rozwiązanych dachów (b1); c) inne wadliwe technologicznie rozwiązanie jako efekt operacji boolowskiej dwu poprawnie rozwiązanych dachów (c1)

<sup>8</sup> Topograficzna metoda rozwiązania dachu jest ilustracją algorytmu komputerowego rozwiązania dachu, a dokładniej skonstruowania tzw. *szkieletu prostego* dla danego wielokąta.

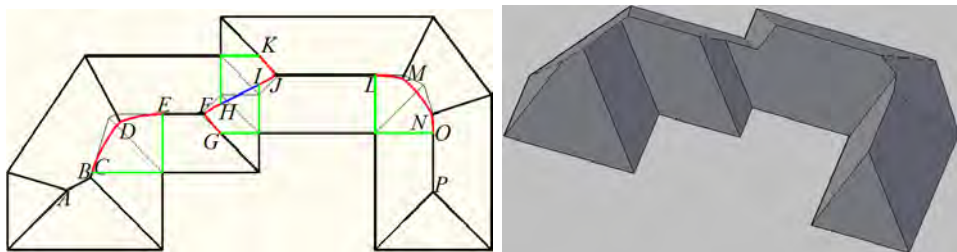


Rysunek 4.25: Ilustracja metody topograficznej geometrycznego algorytmu rozwiązania dachu określonego przez wielokąt: a) trzypójny (dwa podwórka); a1) konstruujemy linię offsetową i sprawdzamy, czy otrzymany wielokąt ma ten sam kształt co poprzedni, tę samą liczbę otworów, boków, kątów wypukłych i wklęsłych (wielokąty (a) i (a1) są równoważne w sensie kształtu), a2) konstruujemy kolejną linię offsetową i wielokąty (a1) i (a2) nie są równoważne (zamknęła się linia grzbietowa dachu); a3) konstruujemy kolejną linię offsetową itd. Zauważmy, że tylko dwa pierwsze wielokąty mają ten sam kształt, żadna pozostała para kolejnych linii offsetowych już nie ma tej własności – przy każdej nowej linii offsetowej powstaje jakaś linia grzbietowa

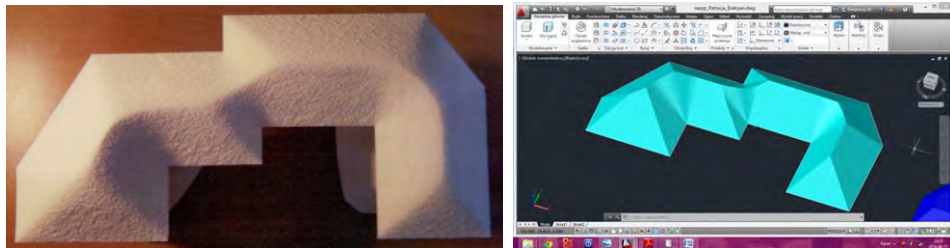
#### 4.3.5. Oś środkowa i szkielet prosty wielokąta

W 1995 roku Aichholzer i in. [1] wprowadzili pojęcie *prostego szkieletu* (ang. *straight skeleton*) dla wielokąta, który jest szkieletem dachu zbudowanego dla tego wielokąta. Odtąd dach stał się obiektem obecnym w *geometrii obliczeniowej*, dla którego sformułowano algorytmy, zaimplementowano procedury w programach typu CAD. Oprócz prostego szkieletu od 1967 roku funkcjonuje tzw. *oś środkowa* (ang. *medial axis*) wprowadzona przez Bluma [2]. Jest ona rodzajem osi symetrii wielokąta, czy ogólniej dowolnego obszaru. Obydwa te obiekty są zilustrowane na rysunkach 4.26 – 4.28, 4.29.

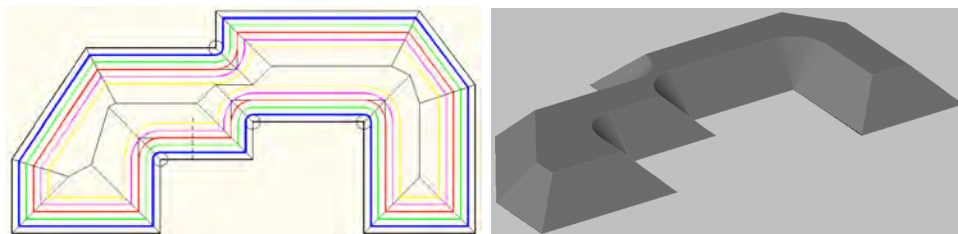
Pojawienie się w naszych rozważaniach pojęcia nasypu jest interesujące z punktu widzenia możliwości przeprowadzenia poniekąd prostego eksperymentu przebiegającego w następujący sposób: (1) z tektury (lub innego odpowiednio sztywnego materiału) wycinamy wielokąt podstawy nasypu; (2) ustawiamy go na podparciu poziomym, tak by nie wystawało ono poza podstawę; (3) sypiemy miłąki materiał aż do uformowania się nasypu (to jest do chwili, gdy sypany materiał nie będzie się na nim zatrzymywał, lecz będzie spadał). Efektem będzie nasyp (rys. 4.27), 4.29), którego model geometryczny można wykonać np. w programie AutoCAD (por. [20], [14], [17], [18]). Dokładniejsze informacje na temat zastosowania prostych szkieletów i osi środkowych znajdziemy: przy wyznaczaniu linii środkowej rzeki lub jeziora (z wyspą) oraz przy wyznaczaniu linii rozdziału urobku w robotach ziemnych (por. [9], [23]), przy projektowaniu geometrycznego kształtu nasypu (por. [17]), a także przy przewidywaniu kształtu linii zarysowań płyty obciążonej statycznie (por. [18]).



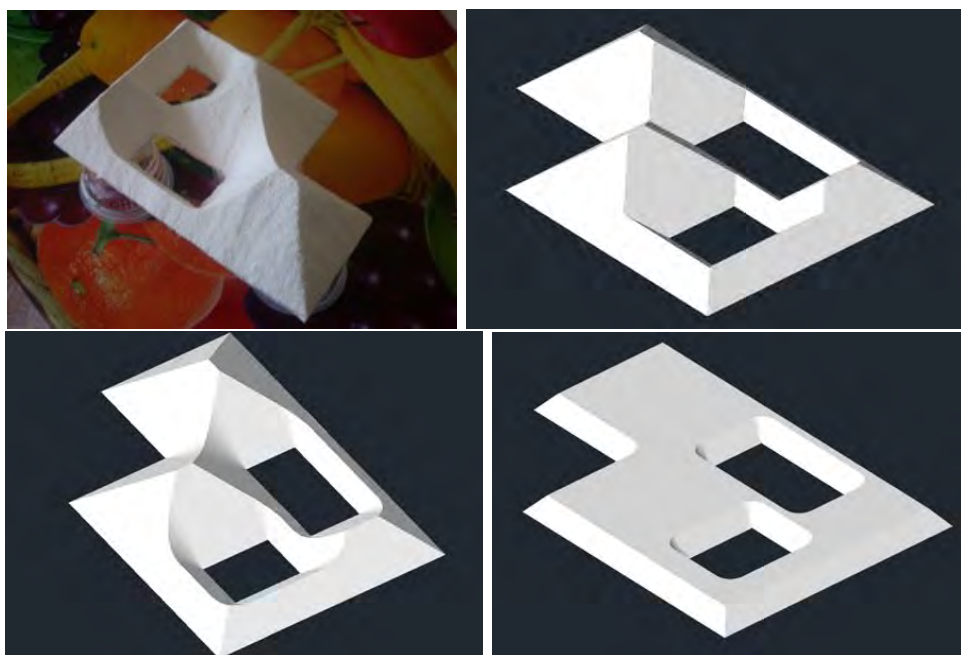
Rysunek 4.26: Prosty szkielet (dach cienka linia i pogrubiona tam, gdzie pokrywa się z osią środkową) i oś środkowa (linia grzbietowa) rzutu modelu dachu i nasypu zbudowanego nad wielokątem: odcinki:  $AB$ ,  $BC$ ,  $EF$ ,  $JL$ ,  $OP$ ; łuki paraboliczne:  $CD$ ,  $DE$ ,  $FH$ ,  $IJ$ ,  $LM$ ,  $MN$ ,  $NO$  ( $FG$ ,  $JK$  – fragmenty krawędzi narożnych jako łuki paraboli); odcinek w rzucie poziomym (łuk hiperboliczny w 3D)  $HI$ , źródło: [20]



Rysunek 4.27: Model rzeczywisty nasypu z rysunku 4.26 jako wynik eksperymentu oraz model geometryczny uzyskany w AutoCAD-zie, źródło: [20], [14]



Rysunek 4.28: Konstrukcja geometrycznego modelu nasypu w środowisku AutoCAD: warstwy – za pomocą polecenia OFFSET ze stałą Offsetgaptype=1, by za pomocą polecenia SOFT zbudować geometryczny model nasypu, źródło: [20]



Rysunek 4.29: Model rzeczywisty naturalnego nasypu nad wielokątem z dwoma otworami jako wynik eksperymentu; model geometryczny: dachu nad tym wielokątem; pełnego nasypu; nasypu (ściętego), źródło: [14]

Prosty szkielet i oś środkowa na płaszczyźnie (2D) oraz szkielet dachu i nasyp w przestrzeni trójwymiarowej (3D) są niezwykle interesującymi z punktu widzenia zastosowań obiektami geometrycznymi. Warto dodać, że oś środkowa dla wielokąta stanowi jego defragmentację na obszary, które są komórkami tzw. *diagramu Voronoi* [9], [17], [18].



## Rozdział 5

# O krzywych i powierzchniach

### 5.1. Analityczny opis krzywych i powierzchni

Dotychczas zajmowaliśmy się głównie odwzorowaniem prostej i płaszczyzny oraz obiektami, które dają się złożyć z figur płaskich, mających łamaną jako brzeg. Opisywaliśmy je także analitycznie. Rozważaliśmy również znane ze szkoły powierzchnie: stożek, walec i sferę. Obecnie zajmujemy się *krzywymi i powierzchniami* w ogólniejszym sensie. Analitycznie krzywą zapisuje się za pomocą *układu równań parametrycznych*:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad (5.1)$$

gdzie parametr  $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ , a funkcje  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  są ciągłe we wspólnym przedziale określoności. Podobnie powierzchnie opisuje się za pomocą układu funkcji ciągłych, tym razem dwu zmiennych (parametrów):

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \quad (5.2)$$

o parametrach  $u \in \langle u_1, u_2 \rangle, v \in \langle v_1, v_2 \rangle$ . Ogólny opis powierzchni jest przedmiotem dyscypliny matematycznej zwanej *topologią*, bardziej szczegółowy, ale i zawężony opis należy do *geometrii różniczkowej*. W geometrii i grafice inżynierskiej mówi się o krzywych i powierzchniach, które mają zastosowanie w technice, w szczególności w budownictwie i architekturze.

### 5.2. Niektóre sposoby tworzenia powierzchni

Powierzchnie często otrzymuje się przez tzw. *zakreślanie przestrzeni*, czyli przez przemieszczanie krzywej wzdłuż pewnej *trajektorii*<sup>1</sup>.

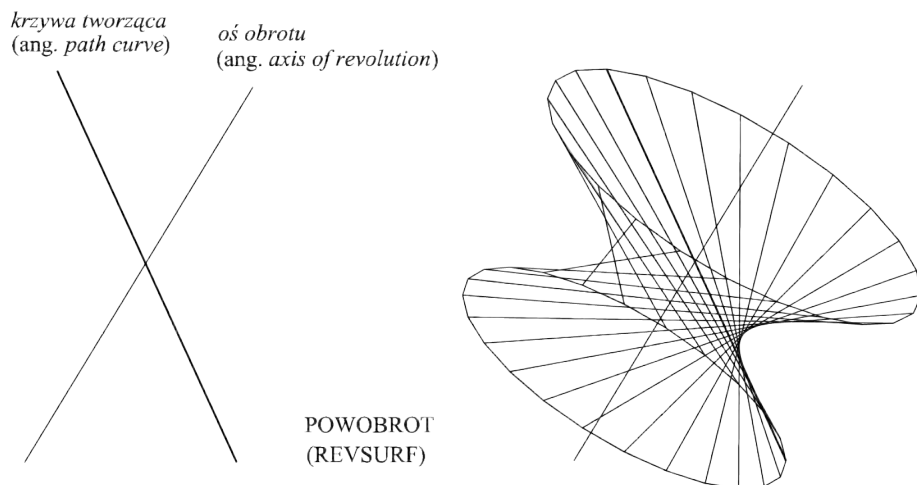
---

<sup>1</sup> Krzywa opisująca ruch punktu w kinematyce.

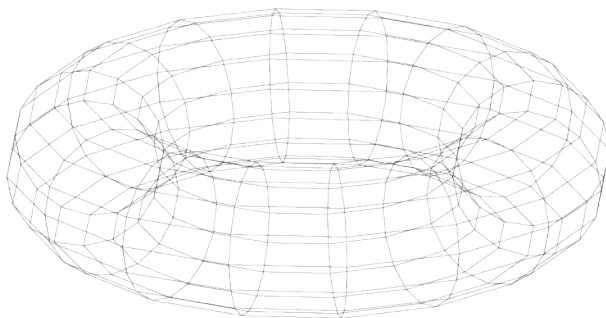


### 5.2.1. Zakreślanie przez obrót. Powierzchnie obrotowe

Załóżmy, że dane są *oś obrotu* (ang. *axis of revolution*) oraz *krzywa definiująca* (ang. *path curve*). Na rysunku 5.1 jako krzywą definiującą przyjęto prostą skośną do osi obrotu i otrzymano powierzchnię zwaną *hiperbolidą jednopowłokową* (obrotową).



Rysunek 5.1: Sposób tworzenia hiperboloidy obrotowej poprzez obrót prostej dookoła innej prostej skośnej. Hiperboloida otrzymana poprzez obrót prostej – *krzywej definiującej* (ang. *path curve*) dookoła prostej – *osi obrotu* (ang. *axis of revolution*)



Rysunek 5.2: Powierzchnia torusa (powierzchni pierścieniowej) zrealizowana w programie AutoCAD

Jeśli osią obrotu krzywej opisanej równaniami (5.1) jest oś Oz układu współrzędnych, to równania opisujące powierzchnię obrotową mają postać:

$$x = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \cos u, y = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} \sin u, z = z(t), \quad (5.3)$$

gdzie  $t \in \langle t_1, t_2 \rangle, u \in \langle u_1, u_2 \rangle$ . Każdy punkt (o współrzędnych  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ) krzywej definiującej obraca się po okręgu zwanym *równoleżnikiem*. Powierzchnię tę można utworzyć za pomocą programu AutoCAD, używając funkcji REVSURF (ang. *surface of revolution*) przy wartości parametrów SURFTAB1 =  $n_1$  ( $n_1$  – liczba powoleń (*południków*) krzywej definiującej w przypadku krzywej płaskiej leżącej w płaszczyźnie osi obrotu), SURFTAB2 =  $n_2$  ( $n_2$  – liczba okręgów (*równoleżników*) zakreślonych przez wybrane punkty obrotu).

Gdy krzywą definiującą jest prosta, to w zależności od jej położenia względem osi obrotu otrzymujemy:

- *powierzchnię stożka (obrotowego)*, jeśli prosta definiująca przecina oś obrotu (powierzchnia znana z geometrii szkolnej),
- *powierzchnię walca (obrotowego)*, jeśli prosta definiująca jest równoległa do osi obrotu (powierzchnia znana z geometrii szkolnej),
- *powierzchnię hiperboloidy (obrotowej)*, jeśli prosta definiująca jest skośna względem osi obrotu (rys. 5.1, 5.6).

Gdy krzywą definiującą jest okrąg, to w zależności od jej położenia względem osi obrotu otrzymujemy:

- *sferę*, jeśli środek okręgu leży na osi obrotu (powierzchnia znana z geometrii szkolnej),
- *powierzchnię pierścieniową (torus)*<sup>2</sup>, jeśli środek okręgu nie leży na osi

---

<sup>2</sup> Jeśli w pewnym układzie współrzędnych okrąg o równaniach

$$x = b + a \cos \vartheta, z = a \sin \vartheta, \vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle, 0 < a < b \quad (5.4)$$

obraca się dokoła osi Oz, to powstaje powierzchnia zwana *torusem*, której równania parametryczne są postaci

$$x = b \cos \varphi + a \cos \vartheta \cos \varphi, y = b \sin \varphi + a \cos \vartheta \sin \varphi, z = a \sin \varphi, \quad (5.5)$$

gdzie  $\vartheta \in \langle 0, 2\pi \rangle, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle, 0 < a < b$ . Jest to powierzchnia stopnia 4, gdyż daje się ona, po eliminacji parametrów, przedstawić równaniem

$$(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2)^2 = 4b^2(a^2 - z^2) \quad (5.6)$$

i istnieją proste przecinające tę powierzchnię w czterech punktach.

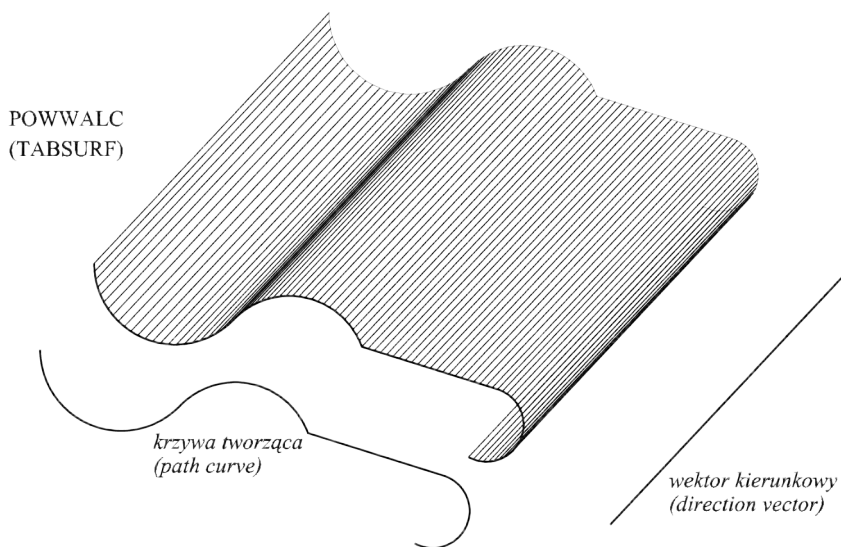
obrotu (w zasadzie przyjmuje się, że okrąg leży w płaszczyźnie osi obrotu i odległość środka okręgu jest większa od jego promienia <sup>3</sup>) (rys. 5.2).

### 5.2.2. Zakreślanie przez przesunięcie. Powierzchnie walcowe

Dane są *krzywa definiująca* (ang. *path curve*, *defining curve*) oraz *wektor kierunkowy* (ang. *direction vector*) (rys. 5.3). Powierzchnia walcowa jest zbiorem prostych (w AutoCAD-zie jest to zbiór odcinków) przecinających krzywą definiującą, równoległych do wektora kierunkowego. Równania takiej powierzchni, przy założeniu, że liczby  $a, b, c$  są współrzednymi wektora przesunięcia, a krzywa definiująca ma równania (5.1) mają postać:

$$x = x(t) + au, y = y(t) + bu, z = z(t) + cu, \quad (5.7)$$

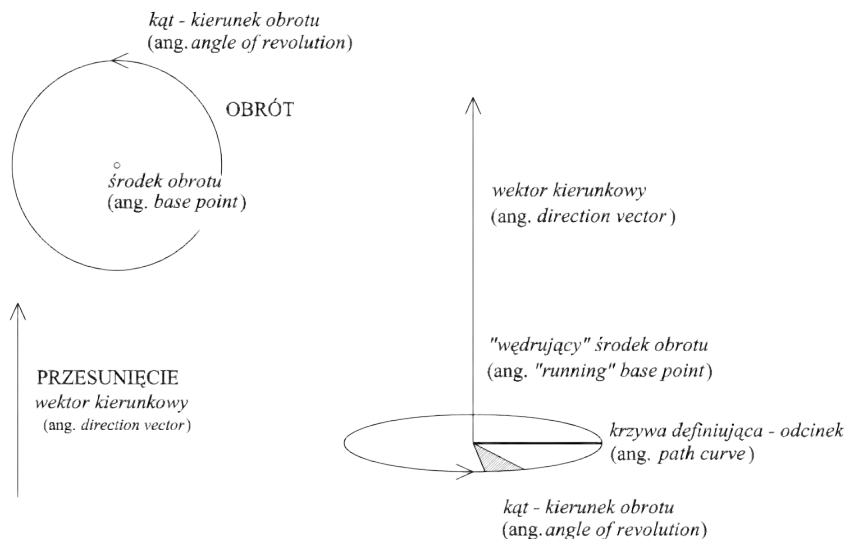
gdzie  $t \in \langle t_1, t_2 \rangle, u \in \langle u_1, u_2 \rangle$ . Przedział  $\langle u_1, u_2 \rangle$  w praktycznych zastosowaniach, np. w komputerowej grafice inżynierskiej, jest ograniczony, natomiast formalnie, jest zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych.



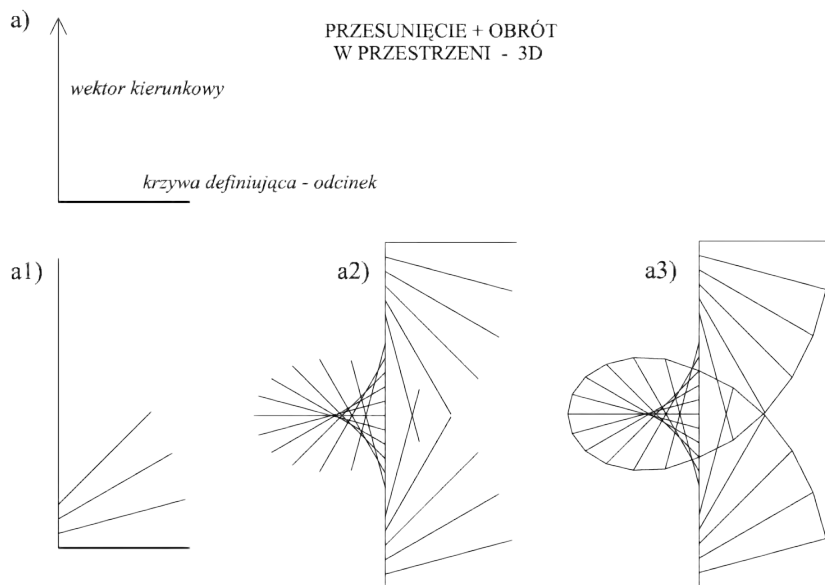
Rysunek 5.3: Powierzchnia walcowa otrzymana przez przesunięcie *krzywej tworzącej* (ang. *path curve*) wzdłuż *odcinka – wektora kierunkowego* (ang. *direction vector*)

<sup>3</sup> W praktyce projektowania architektonicznego korzysta się również z powierzchni pierścieniowych, w których warunek odległości środka okręgu od osi obrotu nie jest spełniony, np. przy projektowaniu kopuł (por. rys. 5.56, 5.44).

### 5.2.3. Zakreślanie przez ruch śrubowy. Powierzchnie śrubowe



Rysunek 5.4: Ruch w przestrzeni powstały przez złożenie dwóch ruchów: obrotowego i postępowego (jest to superpozycja dwu przekształceń: obrotu i przesunięcia)



Rysunek 5.5: Kształtowanie powierzchni śrubowej (tzw. *helikoidy*) poprzez złożenie obrotu z przesunięciem

Dane są *krzywa definiująca* (ang. *path curve, defining curve*), *wektor kierunkowy* (ang. *direction vector*) oraz *kąt obrotu* (ang. *angle of revolution*). Na rysunku 5.5 krzywą definiującą jest odcinek. Powierzchnia otrzymana za pomocą ruchu śrubowego odcinka (prostej) nazywa się *powierzchnią śrubową* lub *helikoidą*. Krzywą, którą wyznacza koniec odcinka, nazywamy *linią śrubową* (rys. 5.4, 5.5). Przy założeniu, że odcinek ma długość  $a$ , skok linii śrubowej ma zaś długość  $b$ , równania linii śrubowej w odpowiednio przyjętym układzie mają postać:

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{b}{2\pi}t, t \in < 0, 2\pi >, \quad (5.8)$$

i helikoidy:

$$x = (a \cos t)u, y = (a \sin t)u, z = \frac{b}{2\pi}t, t \in < 0, 2\pi >, u \in < 0, 1 >. \quad (5.9)$$

W przypadku opisującym helikoidę powstałą przez obrót prostej w opisie parametrycznym parametr  $u$  przebiega cały zbiór liczb rzeczywistych. Przez eliminację parametrów otrzymujemy równanie powierzchni śrubowej w postaci jawnej:  $y = x \operatorname{tg} \frac{2\pi z}{b}$ .

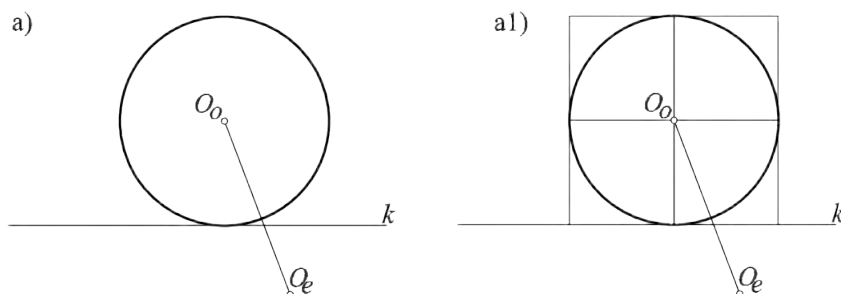


Rysunek 5.6: Wieża ciśnień w Ciechanowie jako element Parku Nauki TORUS – hiperboloida jako konstrukcja nośna, zbiornik w kształcie torusa, fot. B. Koźniewski; „Kaszubskie oko” – trzy powierzchnie: walec jako konstrukcja nośna, schody jako helikoida oraz hiperboloida obrotowa jako struktura stężająca, fot. W. Reglińska

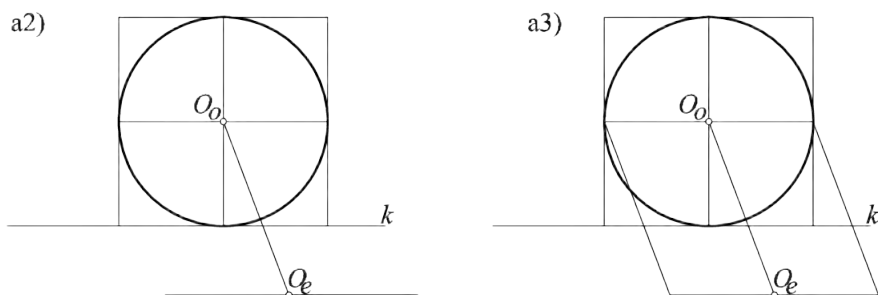
### 5.2.4. Elipsa jako obraz okręgu w powinowactwie

Spośród różnych definicji elipsy na uwagę zasługuje taka, według której elipsa jest obrazem okręgu w powinowactwie. Przyjrzyjmy się tej sytuacji w następującym przykładzie.

**Przykład 5.1.** Skonstruować elipsę jako obraz okręgu w powinowactwie określonym przez oś  $k$  i parę odpowiadających sobie punktów  $(O_o, O_e)$  (rys. 5.7a).



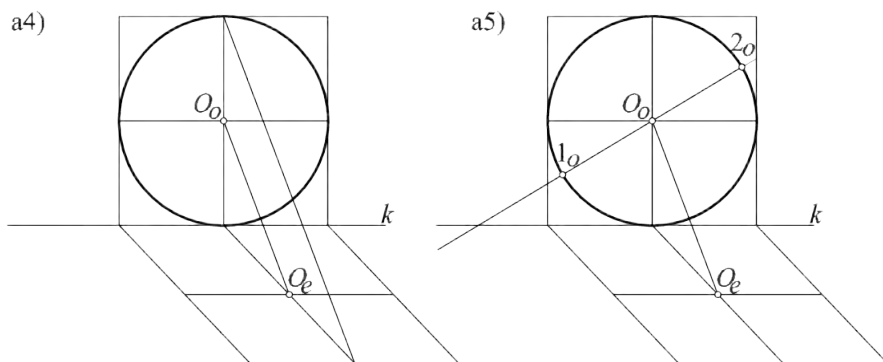
Rysunek 5.7: Założenia do przykładu 5.1. Dany jest okrąg o środku  $O_o$  a) powinowactwo określone jest przez przyjęcie dowolnie osi  $k$  (styczność nie jest konieczna) i punktu  $O_e$  jako obrazu punktu  $O_o$ ; b) wybieramy dwie średnice prostopadłe okręgu (dla wygody konstruujemy kwadrat opisany na okręgu – położenie równoległe do osi  $k$ , jednej ze średnic jest przyjazne, ale niekonieczne) (cdn.)



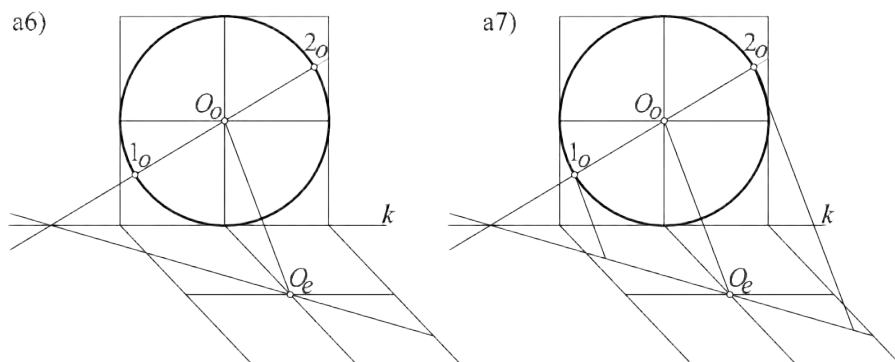
Rysunek 5.8: W określonym już powinowactwie konstruujemy obraz średnicy okręgu równoległej do osi  $k$  (cdn.)

*Rozwiązanie* przykładu 5.1 opisujemy na rysunkach 5.7 – 5.11. Obrazują one konstrukcję punktu elipsy jako obrazu dowolnie wybranego punktu na okręgu w stosownie dobranym powinowactwie. Powinowactwo

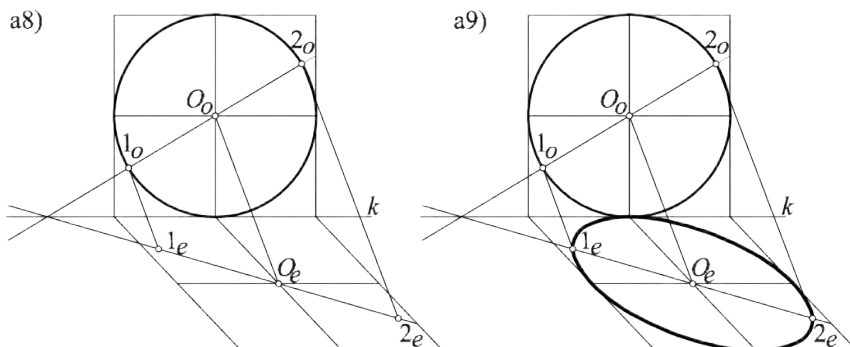
to może być zadane jakkolwiek. Jednak odpowiedni wybór czyni całą konstrukcję bardziej elegancką i, jak się wydaje, zdecydowanie bardziej przyjazną wykonawcy. Konstrukcję taką można powtarzać dowolną liczbę razy, czyli konstruować krzywą, jak mówimy, punkt po punkcie. Wielokrotne stosowanie takiej metody byłoby jednak dość uciążliwe nawet przy założeniu, że byłoby realizowane na komputerze. W praktyce przyjmuje się inny, o wiele prostszy algorytm konstrukcji wynikający z własności okręgu i powinowactwa jako odwzorowania geometrycznego. Jest to tzw. *konstrukcja siatkowa* (rys. 5.12).



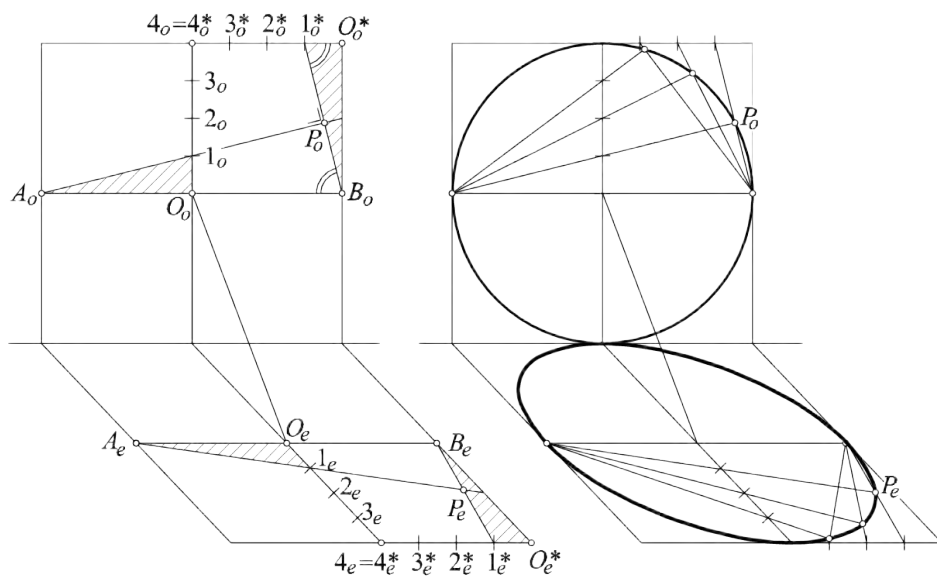
Rysunek 5.9: Konstruujemy: a4) obraz drugiej średnicy okręgu i otrzymujemy tzw. *średnice sprzężone* elipsy; a5) wybieramy na okręgu dowolny punkt  $1_o$  i prowadzimy przez ten punkt i przez środek okręgu (a więc przez punkt, którego obraz w powinowactwie znamy) prostą. Znajdujemy przy okazji drugi punkt  $2_o$  na okręgu (cdn.)



Rysunek 5.10: Znajdujemy: a6) obraz prostej oraz a7) obrazy  $1_e$ ,  $2_e$  punktów  $1_o$ ,  $2_o$  (cdn.)

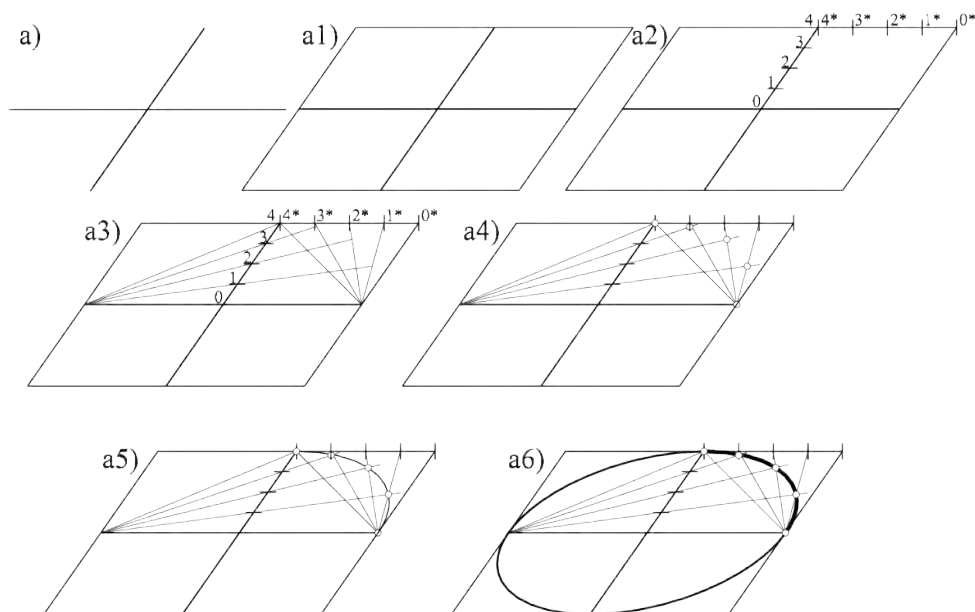


Rysunek 5.11: Wybierając dowolną liczbę punktów na okręgu, otrzymujemy dowolną liczbę punktów elipsy jako obrazu okręgu w przyjętym powinowactwie



Rysunek 5.12: Algorytm *konstrukcji siatkowej* elipsy jako konsekwencja własności powinowactwa okręgu i elipsy. W celu uporządkowania systemu znajdowania obrazu okręgu odcinki  $[O_o 4_o]$ ,  $[O_o^* 4_o^*]$  dzielimy na dowolną liczbę równych części odpowiednio punktami  $1_o, 2_o, 3_o; 1_o^*, 2_o^*, 3_o^*$ . Zauważmy, że trójkąty  $[A_o O_o 1_o]$ ,  $[B_o^* O_o^* 1_o^*]$  są przystające, a kąty  $\angle(A_o O_o 1_o)$ ,  $\angle(B_o^* O_o^* 1_o^*)$  są równe. Zatem trójkąty  $[A_o O_o 1_o]$ ,  $[A_o B_o P_o]$  są podobne, a więc kąt  $\angle(A_o P_o B_o)$  jest prosty i wobec tego punkt  $P_o$  leży na okręgu. Obraz  $P_e$  punktu  $P_o$  leży zatem na elipsie. Ponieważ powinowactwo zachowuje stosunek podziału odcinka, punkt  $P_e$  możemy otrzymać, dzieląc odcinki  $[O_e 4_e]$ ,  $[O_e^* 4_e^*]$  na taką samą liczbę równych części punktami  $1_e, 2_e, 3_e; 1_e^*, 2_e^*, 3_e^*$  i prowadząc odpowiednie proste. Jak widać, do konstrukcji wystarczy średnice sprzężone, a liczba punktów podziału decyduje o dokładności aproksymacji krzywej łamaną





Rysunek 5.13: Ilustracja konstrukcji siatkowej elipsy (szczegółowo podana dla ćwiartki elipsy): a) danej za pomocą średnic sprzężonych (dwóch odcinków mających wspólny środek i niezawierających się w jednej prostej); a1) konstruujemy równoległobok opisany na tej parze odcinków; a2) dzielimy wskazane odcinki na tę samą liczbę  $n$  równych części  $i$ ; a3–a4) rysujemy promienie i znajdujemy ich punkty przecięcia; a5–a6); a6) konstruujemy interpolacyjnie ćwiartkę elipsy (dawniej wykonywano to krzywikiem). Dzieliąc lewą część górnego boku równoległoboku na tę samą liczbę części i kontynuując rysowanie promieni, znajdziemy kolejną ćwiartkę elipsy, a przechodząc na dolną część równoległoboku i kontynuując zasadę, narysujemy całą elipsę

Warto dodać, że odcinki w konstrukcji siatkowej nie muszą być dzielone na równe części. Można dokonać innego podziału na tę samą liczbę części, ale musi być zachowana proporcja. Oczywiście wygodniej i prościej jest dzielić je na odcinki równej długości. Rzecz ciekawa, że konstrukcja ta może być wykorzystana w implementacji komputerowej. Została ona zrealizowana, gdyż standardowe aplikacje programu AutoCAD zawierają funkcje rysujące elipsę tylko na podstawie jej osi, nie mają natomiast poleceń realizujących konstrukcje elipsy z wykorzystaniem średnic sprzężonych oraz funkcji rysujących hiperbolę i parabolę <sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Procedury rysujące elipsę, parabolę i hiperbolę zrealizowano w języku AutoLISP (Kozłowski E., *Nakładki na AutoCAD-a STOŻKOWE I WIEŁOŚCIANY wspomagające realizację rysunków technicznych i nauczanie geometrii wykreślnej*, Białystok 1994).

### 5.2.5. Opisy algebraiczne elipsy

Omawiając własności, warto przypomnieć analityczny opis tej krzywej. W stosownie dobranym układzie współrzędnych równanie elipsy ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.10)$$

gdzie liczby  $a$ ,  $b$  oznaczają długości półosi elipsy (rys. 5.14a). Jeśli ponadto przez  $c$  oznaczmy odległość ogniska od środka elipsy, to prawdziwa jest zależność:

$$b^2 + c^2 = a^2, \quad (5.11)$$

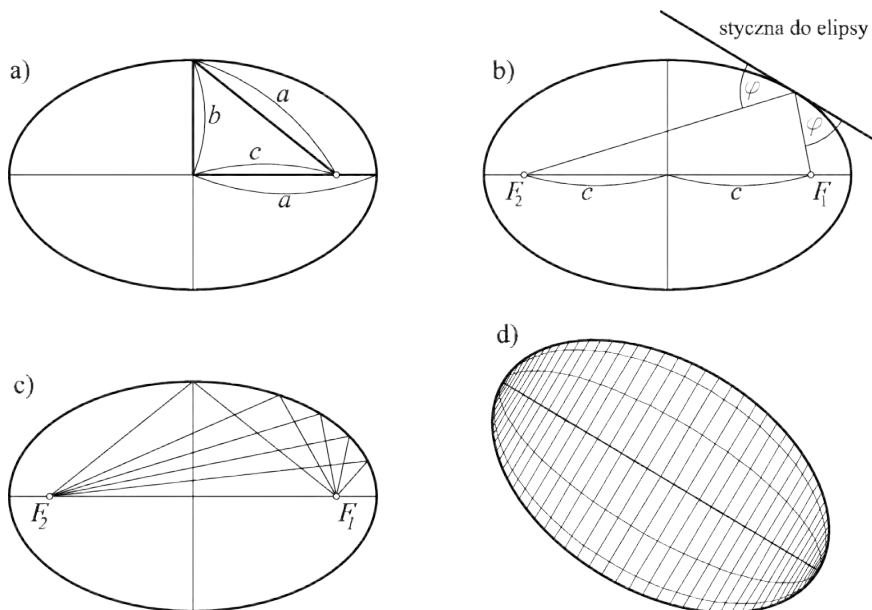
która może być wykorzystana do konstrukcyjnego wyznaczania ogniska. Ponadto dla dowolnego punktu danej elipsy suma promieni  $r_1$ ,  $r_2$  jest stała i równa  $2a$  ( $r_1 + r_2 = 2a$ ). Własność ta może być wykorzystana do konstrukcji elipsy, może też być jej definicją. Do konstrukcji wystarczy wtedy sznurek i dwie szpilki. Elipsa ma interesujące własności skupiające promienie, np. dźwiękowe (rys. 5.14b), o ile źródło dźwięku znajduje się w ognisku. Elipsa jest krzywą stopnia drugiego i pewne jej cechy zostały wykorzystane przy projektowaniu wnętrza o specjalnych właściwościach akustycznych<sup>5</sup>. Inną postacią analityczną elipsy jest jej opis parametryczny:

$$x = a \cos t, y = b \sin t, t \in [0, 2\pi]. \quad (5.12)$$

Taki opis ułatwia obliczanie pola powierzchni obszaru ograniczonego elipsą, które wynosi  $ab\pi$ .

---

<sup>5</sup> Przykładem takich rozwiązań projektowych może być sala w zamku Lubomirskich herbu Śreniawa w Wiśniczu Starym k. Bochni, która ma własności akustyczne będące konsekwencją elipsoidalnego kształtu sklepienia. Zwiedzający może być świadkiem następującego zjawiska. Wystarczy cicho mówić w jednym rogu sali, a osoba stojąca w drugim końcu będzie to wyraźnie słyszała. Obserwując rysunek 5.14, nie trudno zauważyć, że punkty o takiej właściwości znajdują się w ogniskach elipsoidy, której fragmentem jest sklepienie sali (rys. 5.14c–d). Dźwięk wydawany w punkcie  $F_1$  poprzez skupienie promieni w punkcie  $F_2$  ulega wzmocnieniu.



Rysunek 5.14: Elipsa jako krzywa z dwoma ogniskami  $F_1, F_2$ : a) związki geometryczne między długościami półosi i odległością ogniska od środka (tw. Pitagorasa); b) promienie elipsy z danego punktu tworzą jednakowe kąty ze styczną w tym punkcie – kąt padania promienia świetlnego lub dźwiękowego jest równy kątowi odbicia; c)–d) akustyczna własność elipsy i elipsoidy – ogniska jako źródło i punkt wzmocnienia dźwięku

### 5.2.6. Mimośrodowa własność elipsy

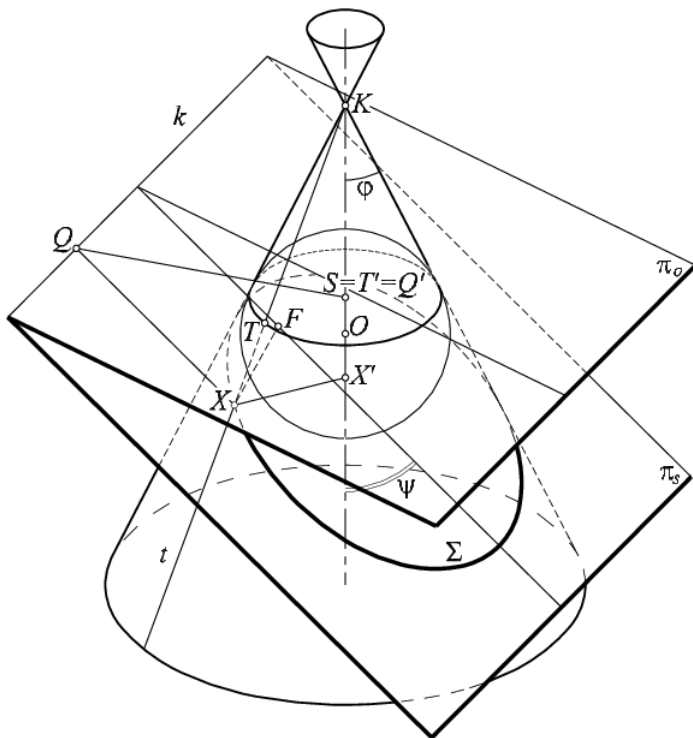
Najogólniejszą definicją elipsy, obejmującą również parabolę i hiperbolę, jest definicja *stożkowej*. Niech dane będą punkt  $F$  i prosta  $k$  nieinncydujące ze sobą. *Stożkową o ognisku  $F$  i kierownicy  $k$*  nazywamy zbiór punktów  $X$  spełniających warunek:

$$\frac{d(X, F)}{d(X, k)} = e, \quad (5.13)$$

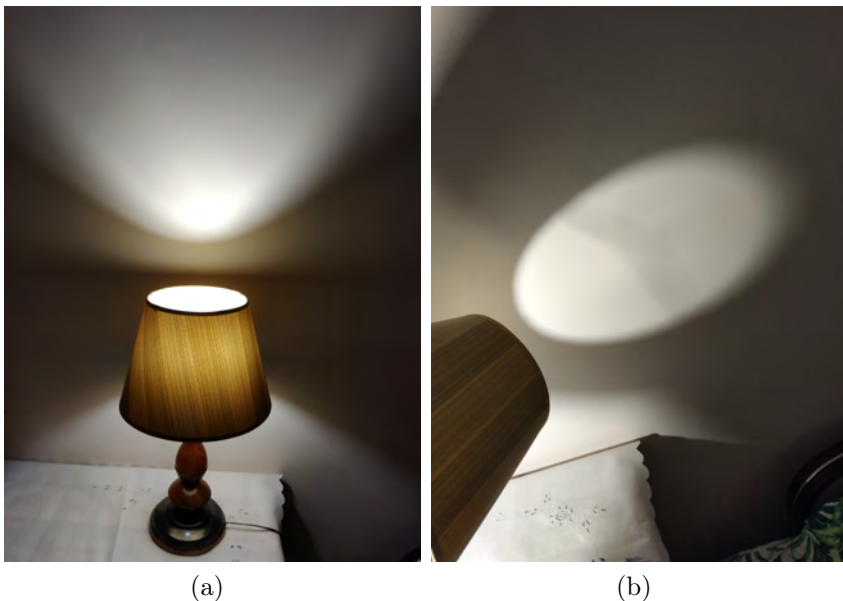
gdzie  $d(X, F)$  oznacza odległość punktu  $X$  od ogniska  $F$ ,  $d(X, k)$  oznacza odległość punktu  $X$  od kierownicy  $k$ ,  $e$  zaś jest pewną liczbą dodatnią zwaną *mimośrodem* stożkowej. Wówczas dla  $e < 1$  mamy *elipsę*, dla  $e = 1$  – *parabolę* i dla  $e > 1$  – *hiperbolę*. Ostatnia definicja ma ścisły związek z przekrojami stożka.

### 5.2.7. Przekroje stożka obrotowego

Niech dany będzie stożek obrotowy o kącie rozwarcia  $2\varphi$  oraz płaszczyzna  $\pi_s$  nachylona do osi stożka pod kątem  $\psi$ , przecinająca powierzchnię stożka w krzywej  $\Sigma$ , którą nazwiemy *krzywą stożkową*. Rozważmy sferę wpisaną w powierzchnię stożka, styczną do płaszczyzny  $\pi_s$  w punkcie  $F$ , który nazwiemy *ogniskiem*. Oznaczmy przez  $\Omega$  okrąg styczności sfery do powierzchni stożka, a przez  $\pi_o$  – płaszczyznę tego okręgu. Przez  $k$  oznaczmy prostą wspólną dwu płaszczyzn  $\pi_o$ ,  $\pi_s$  ( $k = \pi_o \cap \pi_s$ ). Prosta tę nazywać będziemy *kierownicą* (rys. 5.15). Możemy sformułować twierdzenie (Dandolina):



Rysunek 5.15: Ilustracja twierdzenia Dandolina:  $\pi_s$  – płaszczyzna przekroju (styczna do sfery wpisanej w powierzchnię stożka w punkcie  $F$  – ognisku stożkowej przekroju  $\Sigma$ ) powierzchni stożka (o kącie rozwarcia  $2\varphi$ ) nachylona do osi stożka pod kątem  $\psi$ ;  $\pi_o$  – płaszczyzna okręgu styczności sfery i stożka;  $k (= \pi_o \cap \pi_s)$  – kierownica stożkowej przekroju



Rysunek 5.16: Ilustracja rzeczywista twierdzenia o przekrojach stożka obrotowego (stożek świetlny o wierzchołku w emitującej części żarówki, kierownicy w postaci brzegu abażuru; płaszczyzną przekroju jest ściana pokoju): a) cień przekroju w kształcie dwu hiperbol – dolny i górny brzeg abażuru; b) cień w kształcie elipsy pochodzący od górnego brzegu abażuru, fot. M. Koźniewski

**Twierdzenie 5.1.** Jeśli krzywa stożkowa jest przekrojem stożka obrotowego, to stosunek odległości dowolnego punktu tej stożkowej od ogniska do odległości tego punktu od kierownicy jest stały.

*Dowód.* Niech  $X$  będzie dowolnym punktem stożkowej  $\Sigma$ . Oznaczmy przez  $d(X, F)$  odległość punktu  $X$  od ogniska  $F$ , a przez  $d(X, k)$  odległość punktu  $X$  od kierownicy  $k$ . Oznaczmy przez  $t$  tworzącą stożka, przechodzącą przez punkt  $X$ , przez  $T$  – jej punkt przecięcia z okręgiem stycznej  $\Omega$  oraz przez  $Q$  rzut prostokątny punktu  $X$  na kierownicę  $k$ . Mamy równości:

$$d(X, k) = d(X, Q), d(X, F) = d(X, T). \quad (5.14)$$

Pierwsza równość wynika z przyjętych oznaczeń, druga wyraża równość odcinków  $[XF]$ ,  $[XT]$  o wspólnym końcu  $X$ , stycznych do sfery w punktach  $F$ ,  $T$ . Odcinki  $[XT]$ ,  $[XQ]$  mają wspólny rzut prostokątny – odcinek  $[X'S]$  – na oś stożka, gdzie punkt  $S$  jest wspólnym rzutem

punktów  $T$  i  $Q$ , leżących w płaszczyźnie  $\pi_o$  prostopadłej do osi stożka. Mamy więc dwie równości:

$$d(X', S) = d(X, T) \cos \varphi, d(X', S) = d(X, Q) \cos \psi. \quad (5.15)$$

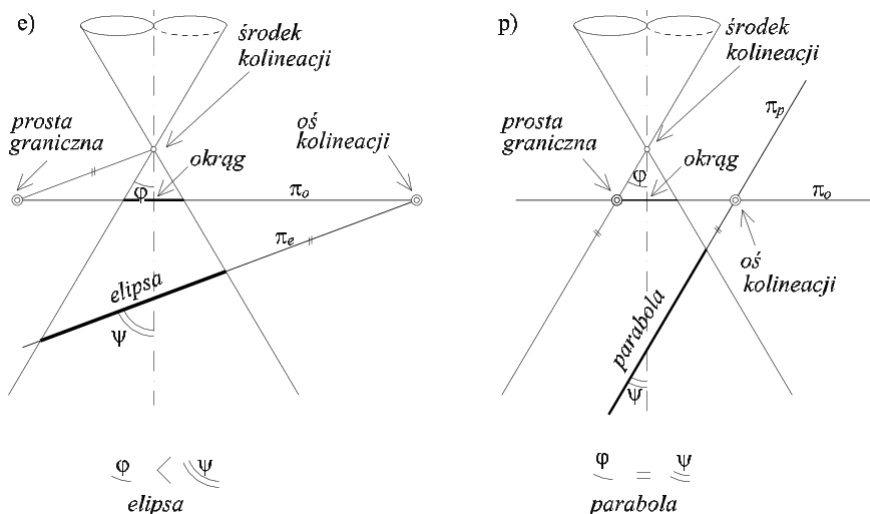
Korzystając z (5.14), (5.15), otrzymujemy

$$\frac{d(X, F)}{d(X, k)} = \frac{d(X, T)}{d(X, Q)} = \frac{d(X', S)}{\cos \varphi} : \frac{d(X', S)}{\cos \psi} = \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} = e. \quad (5.16)$$

Otrzymana wartość  $e$ , stała dla danego stożka obrotowego (kąta  $\varphi$ ) i przyjętego położenia płaszczyzny (kąta  $\psi$ ), nazywana jest *mimośrodem stożkowej*.

Wartość mimośrodu charakteryzuje typ stożkowej:

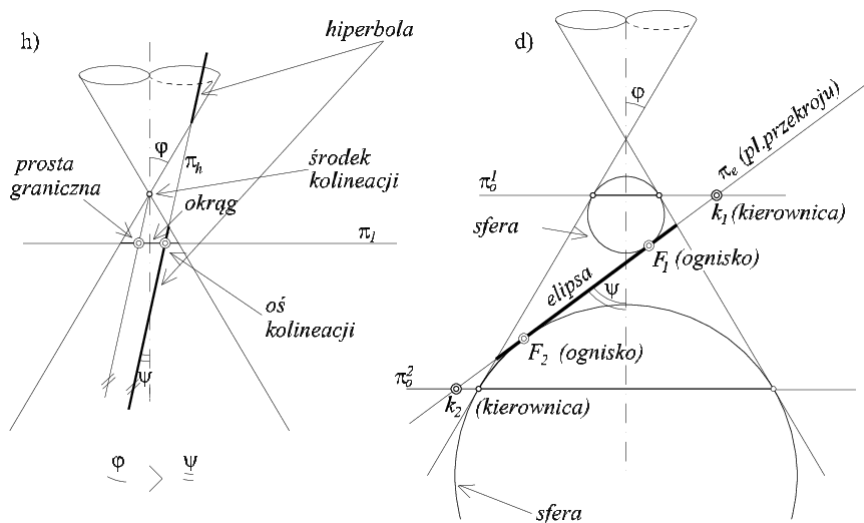
- (e) Dla *elipsy* mamy  $\varphi < \psi$ , więc  $\cos \varphi > \cos \psi$ , czyli  $e < 1$ .
- (p) Dla *paraboli* mamy  $\varphi = \psi$ , więc  $\cos \varphi = \cos \psi$ , czyli  $e = 1$ .
- (h) Dla *hiperboli* mamy  $\varphi > \psi$ , więc  $\cos \varphi < \cos \psi$ , czyli  $e > 1$ .



Rysunek 5.17: Ilustracja (w profilu) wariantów przekroju powierzchni stożkowej w ujęciu kolineacyjnym: e) w elipsie (prosta graniczna nie przecina okręgu styczności); p) w paraboli (prosta graniczna ma jeden punkt z okręgiem styczności)

Twierdzenie Dandolina pozwala wprowadzić definicję stożkowej na podstawie pojęć odległości, ogniska, kierownicy i mimośrodu. Tak uczyniono w poprzednim paragrafie. Definicja ta łączy w elegancki sposób

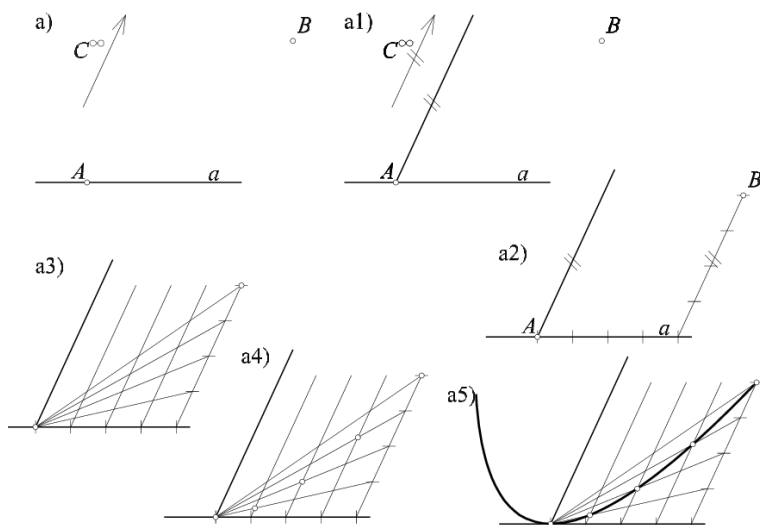
znane z geometrii szkolnej krzywe: elipsę, parabolę i hiperbolę z powierzchnią stożka obrotowego. Nie jest jednak zbyt wygodną do rysowania stożkowych z wykorzystaniem konstrukcji p-o, czyli za pomocą cyrkla i linijki. Twierdzenie zachodzi także dla walca obrotowego. Wówczas przekrojem jest elipsa lub okrąg.



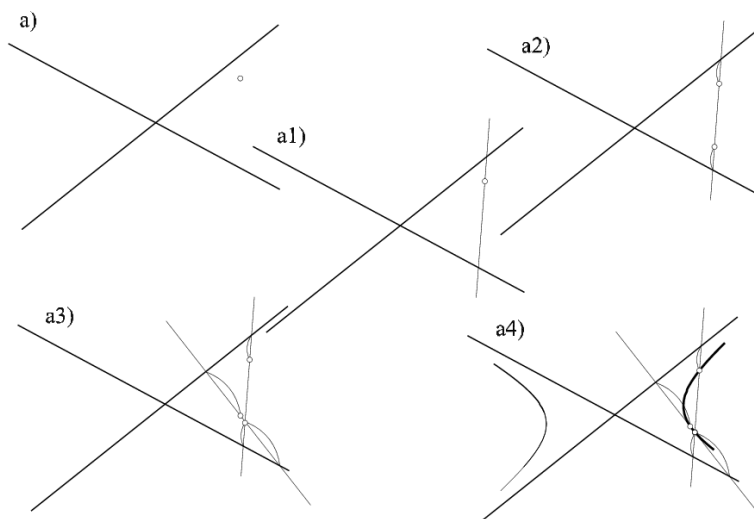
Rysunek 5.18: Twierdzenie Dandelina: h) ilustracja (w profilu) wariantów przekroju powierzchni stożkowej w ujęciu kolineacyjnym w hiperboli (prosta graniczna przecina okrąg styczności w dwóch punktach); o) ilustracja (w profilu) twierdzenia Dandelina

Korzystając z twierdzenia Pascala, którego przytaczać tu nie będziemy, można zaproponować konstrukcję siatkową paraboli; podobnie jak uczyniliśmy to w odniesieniu do elipsy. Konstrukcja ta możliwa jest przy założeniu, że parabola jest określona przez cztery następujące elementy: punkt  $A$ , prostą  $a$  styczną w punkcie  $A$ , punkt niewłaściwy  $C^\infty$  (kierunek osi symetrii paraboli) oraz punkt  $B$  (rys. 5.19a). Przez punkty  $B$  i  $C^\infty$  prowadzimy prostą (o kierunku osi paraboli) (rys. 5.19a2). Odcinek wyznaczony przez punkt  $A$  i tę prostą na stycznej  $a$  dzielimy na dowolną, ale ustaloną liczbę równych odcinków (rys. 5.19a2) i podobnie postępujemy z odcinkiem wyznaczonym przez punkt  $B$  i styczną  $a$  na prostej przechodzącej przez punkt  $B$ . Punkty podziału na prostej  $a$  łączymy z punktem  $C^\infty$ , a punkty podziału na prostej przechodzącej przez punkt  $B$  łączymy z punktem  $A$ . Dalej postępujemy podobnie jak w przy-

padku elipsy (rys. 5.19a3–a5). Parabola i hiperbola zostały narysowane za pomocą specjalnie napisanych w języku AutoLISP funkcji.

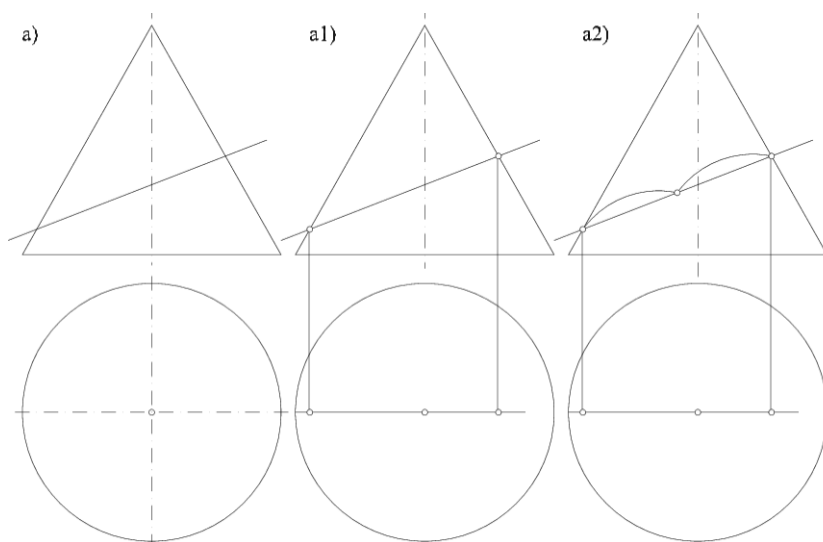


Rysunek 5.19: Konstrukcja siatkowa paraboli: a) dane są punkt właściwy  $A$ , styczna  $a$  w tym punkcie, punkt niewłaściwy  $C^\infty$  oraz punkt właściwy  $B$



Rysunek 5.20: Konstrukcja dyskretnego uzupełniania hiperboli: a) dane są dwie asymptoty i punkt właściwy; a1) przez punkt prowadzimy dowolną prostą; a2) na prostej tej, wykorzystując własności równości odcinków na prostej między punktami hiperboli i asymptotami, wyznaczamy drugi punkt; a3–a4) konstrukcję powtarzamy

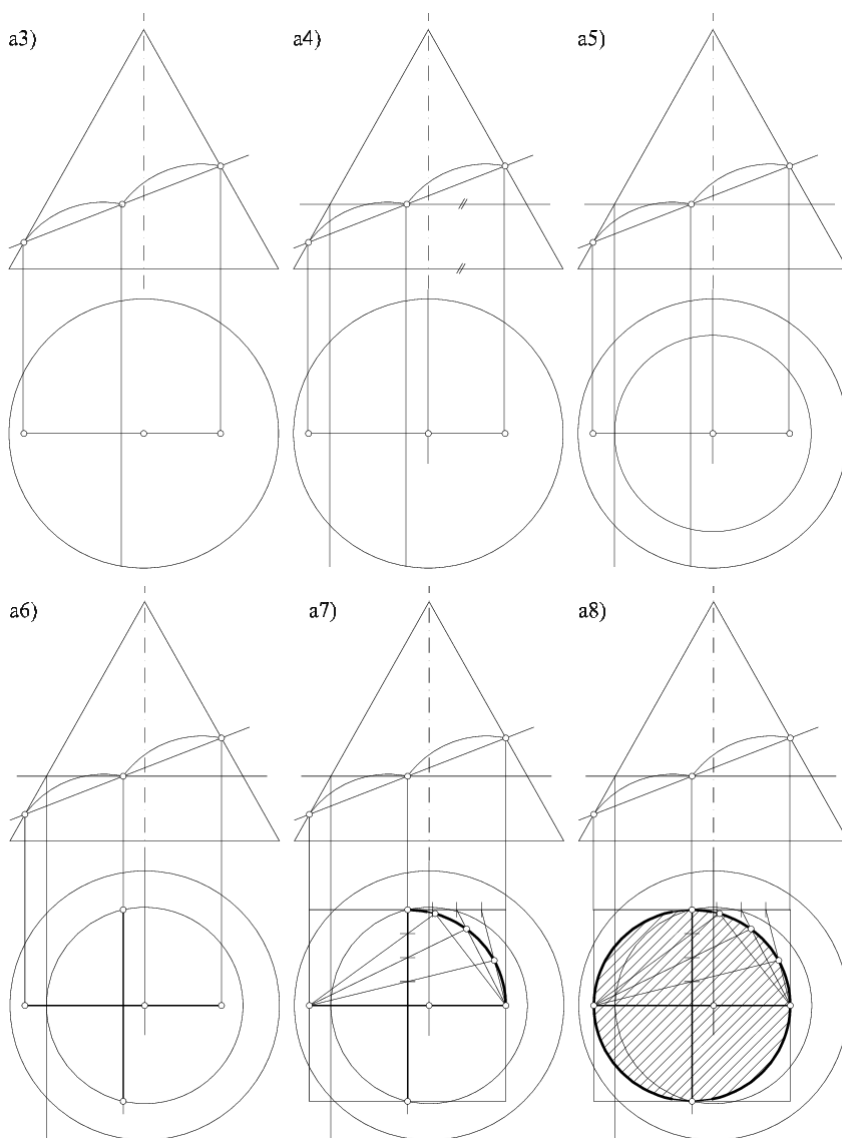




Rysunek 5.21: Konstrukcja przekroju stożka obrotowego w elipsie: a) rzuty stożka i płaszczyzny pionowo rzutującej; a1) konstrukcja rzutu poziomego jednej z osi elipsy; a2) wyznaczenie środka elipsy w celu skonstruowania drugiej osi (cdn.)

**Przykład 5.2.** Wyznaczyć przekrój powierzchni stożka obrotowego płaszczyzną, jeśli obiekty te są odwzorowane w rzutach prostokątnych (rys. 5.21a). W konstrukcji wykorzystać metodę siatkową.

*Rozwiązanie* zadania z przykładu 5.2. Niech dane będą rzuty Monge’a fragmentu stożka obrotowego i płaszczyzny w położeniu pionowo rzutującym (rys. 5.21a). Odwzorowany układ obiektów geometrycznych ma płaszczyznę symetrii równoległą do rzutni pionowej. Z twierdzenia Dandolina i z założeń rysunku wynika, że przekrojem stożka jest elipsa. Konstruujemy rzut poziomy osi elipsy równoległej do rzutni pionowej, leżącej we wspomnianej płaszczyźnie symetrii (rys. 5.21a1). Aby skonstruować drugą oś w rzucie pionowym, wyznaczamy środek elipsy i prowadzimy odnoszącą (rys. 5.21a2), która pokrywa się z prostą zawierającą oś elipsy w tym rzucie (rys. 5.22a3). W celu wyznaczenia końców drugiej osi, dokonujemy pomocniczego przekroju stożka płaszczyzną równoległą do rzutni poziomej, przechodzącą przez środek konstruowanej elipsy (rys. 5.22a4). Znajdujemy okrąg przekroju w rzucie poziomym, którego średnica jest równa (przystająca do) cięciwie konturu rzutu pionowego stożka (trójkąta równoramiennego) wyznaczonej przez rzut pionowy płaszczyzny pomocniczej (rys. 5.22a5) i dwa punkty przecięcia odnoszącej z tym okręgiem (rys. 5.22a6).

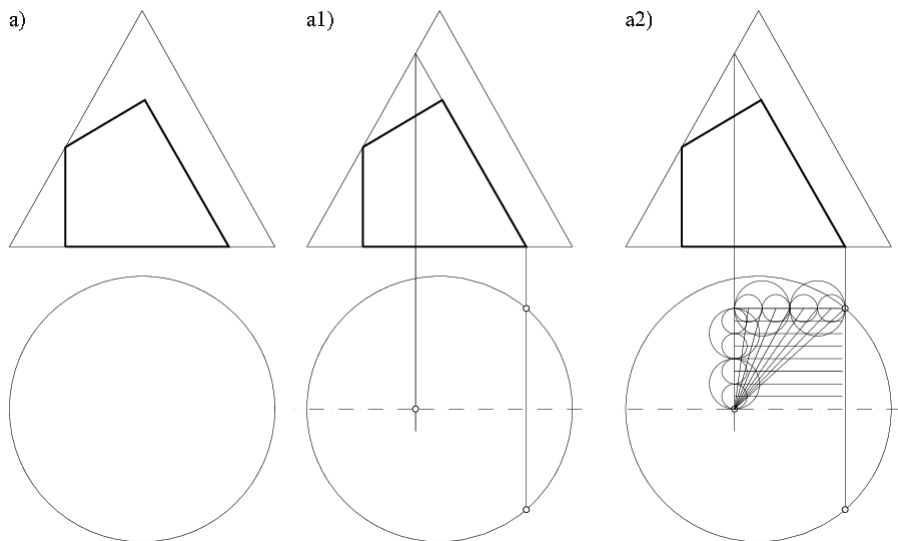


Rysunek 5.22: Konstrukcja przekroju stożka obrotowego w elipsie (cd.): a3)–a4) wyznaczanie drugiej osi za pomocą przekroju stożka w okręgu płaszczyzną prostopadłą do osi (równoległą do rzutni poziomej); a5) płaszczyzna przecina powierzchnię stożkową w okręgu, którego średnica jest równa cięciwie konturu (trójkąta równoramiennego) rzutu pionowego stożka, rzut poziomy tego okręgu jest okręgiem współśrodkowym z konturem rzutu poziomego; a6) końce drugiej osi elipsy przekroju leżą na okręgu przekroju poprzecznego powierzchni stożkowej, w rzucie poziomym znaleziono je w przecięciu odnoszącej środka pierwszej osi z rzutem okręgu; a7) mając osie elipsy (a więc średnice sprzężone), elipsę skonstruowano metodą siatkową; a8) elipsa została narysowana za pomocą standardowego polecenia AutoCAD-a

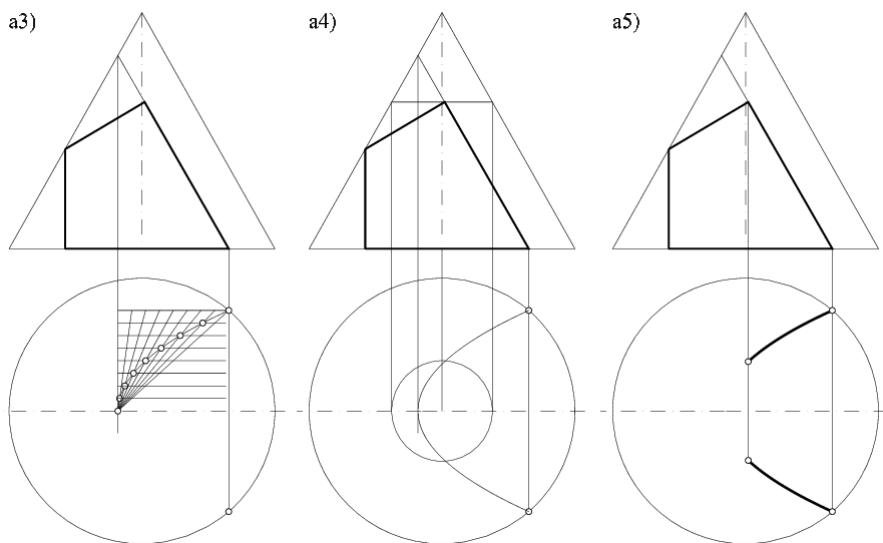
Otrzymane osie elipsy (są to także średnice sprzężone elipsy) pozwalają skonstruować ją metodą siatkową (rys. 5.22a7).

**Przykład 5.3.** Wyznaczyć dwa rzuty bryły będącej fragmentem stożka obrotowego (rys. 5.23a) wyciętej płaszczyznami, jeśli obiekty te są odwzorowane w rzutach prostokątnych. Przyjmujemy, że jeden bok wielokąta, który jest rzutem pionowym bryły, jest równoległy do tworzącej konturowej stożka, drugi leży na rzutni poziomej, trzeci jest prostopadły do rzutni poziomej, czwarty jest w położeniu ogólnym.

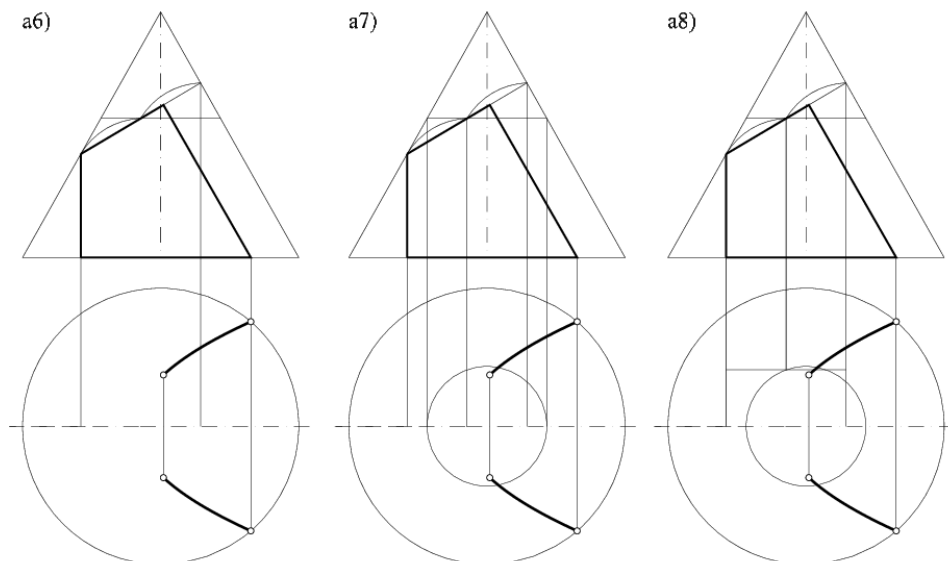
*Rozwiązanie* zadania z przykładu 5.3. Na początku powinniśmy ocenić, jakie kąty tworzą płaszczyzny z osią stożka. Wszystkie płaszczyzny są pionowo rzutujące. Stąd zadanie polega tylko na wyznaczeniu rzutu poziomego. Oceniamy, że jedna z płaszczyzn jest równoległa do tworzącej konturowej, czyli tworzy z osią kąt równy kątowi rozwarcia stożka. Zatem część stożka zawarta w tej płaszczyźnie jest fragmentem paraboli (rys. 5.23–5.27), druga część jest fragmentem koła, trzecia – hiperboli, czwarta zaś elipsy. Zauważmy, że rzut poziomy fragmentu hiperboli jest odcinkiem, okręgu jest okręgiem.



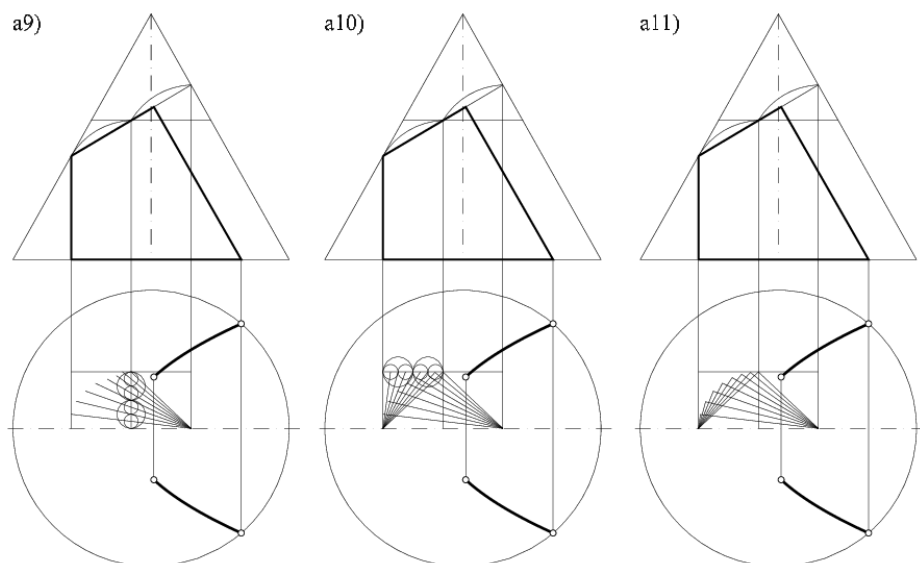
Rysunek 5.23: Konstrukcja rzutów prostokątnych bryły wyciętej płaszczyznami ze stożka: a) rzut pionowy wyciętej bryły; a1) rozwiązanie rozpoczęto od konstrukcji rzutu pionowego i elementów rzutu poziomego przekroju parabolicznego (znaleziono rzuty wierzchołka paraboli, kierunku jej osi i dwa jej punkty); a2) zastosowano metodę siatkową konstrukcji paraboli (cdn.)



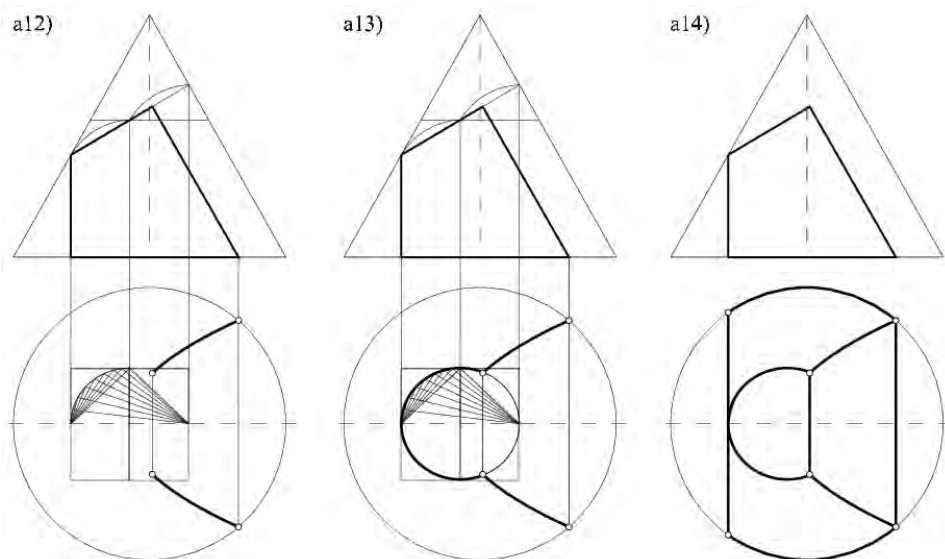
Rysunek 5.24: Konstrukcja rzutów prostokątnych bryły wyciętej ze stożka (cd.): a3–a5) posługując się pomocniczym przekrojem w okręgu, płaszczyzną przechodzącą przez końce fragmentu paraboli (określone w rzucie pionowym) wyznaczono w rzucie poziomym końce krzywoliniowego parabolicznego brzegu bryły (cdn.)



Rysunek 5.25: Konstrukcja rzutów prostokątnych bryły wyciętej ze stożka (cd.): a6–a8) konstrukcja eliptycznego brzegu bryły (por. rys. 5.22) (cdn.)

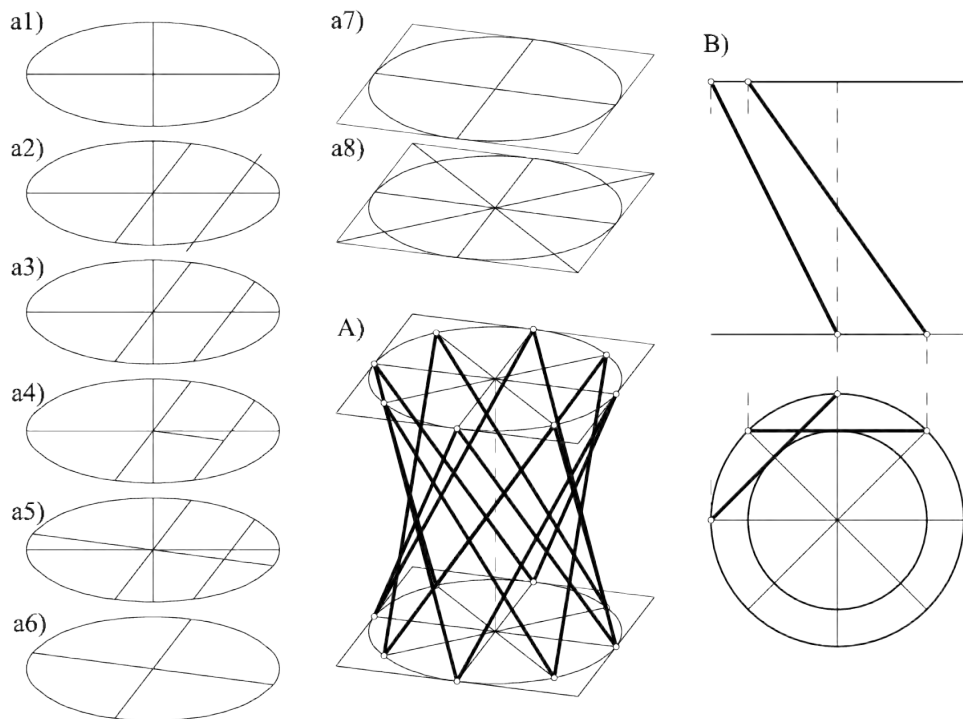


Rysunek 5.26: Konstrukcja rzutów prostokątnych bryły wyciętej ze stożka (cd.): a9–a11) zastosowanie metody siatkowej konstrukcji elipsy (rys. 5.22) (cdn.)



Rysunek 5.27: Konstrukcja rzutów prostokątnych bryły wyciętej ze stożka (cd.): a12–a14) zastosowanie metody siatkowej, konstrukcja fragmentu elipsoidalnej części brzości bryły. Punkty wspólne elipsy i paraboli jako punkty leżące na okręgu przekroju stożka

## 5.2.8. Hiperboloida obrotowa i schody kręcone



Rysunek 5.28: Konstrukcja rzutu aksonometrycznego hiperboloidy obrotowej w AutoCAD-zie metodą 2D. Zakładamy, że: a1) elipsa jest krzywą ciągłą o danych osiach (dwóch średnicach sprzężonych prostopadłych). Rysujemy: a2) dowolną średnicę i prostą do niej równoległą za pomocą polecenia; a3) obcinamy odcinki brzegiem elipsy; a4) łączymy odcinkiem środki odcinków; a5) wydłużamy do brzegu elipsy; a6) usuwamy linie pierwotne i pomocnicze; a7) konstruujemy równoległobok; a8) i przekątne wyznaczające punkty regularnego podziału elipsy na osiem części, odpowiadającego podziałowi okręgu równoleżnika na osiem równych części; A) kopiujemy elipsę pionowo i łączymy odpowiednie punkty (górne punkty odpowiadające dolnym przesuwamy o 2). Przesunięcie to może być dowolne, ważne jest jednak, by zapewnić skośność tworzącej i osi paraboloidy. W tym wypadku nie może to być więc przesunięcie o 4, gdyż wtedy odległość tworzącej od osi byłaby równa zero (oś i tworząca przecinałyby się) i otrzymalibyśmy tworzące stożka. Otrzymana rodzina tworzących to rodzina prostych wzajemnie skośnych. Ale na hiperboloidzie obrotowej leży jeszcze inna rodzina tworzących. Jeżeli będziemy łączyć punkty, „przesuwając” górne w prawo o 2, to otrzymamy podobną rodzinę tworzących wzajemnie skośnych. Warto dodać, że proste z tych obu rodzin przecinają się; B) *hiperboloida w rzutach prostokątnych* (Monge’a) rozwiązanie klasyczne p–o. Tworzące kształtujemy, rysując w rzucie poziomym proste styczne do okręgu szyjnego i znajdując punkty wspólne tych prostych (ślady) z okręgiem – rzutem poziomym okręgów równoleżnikowych

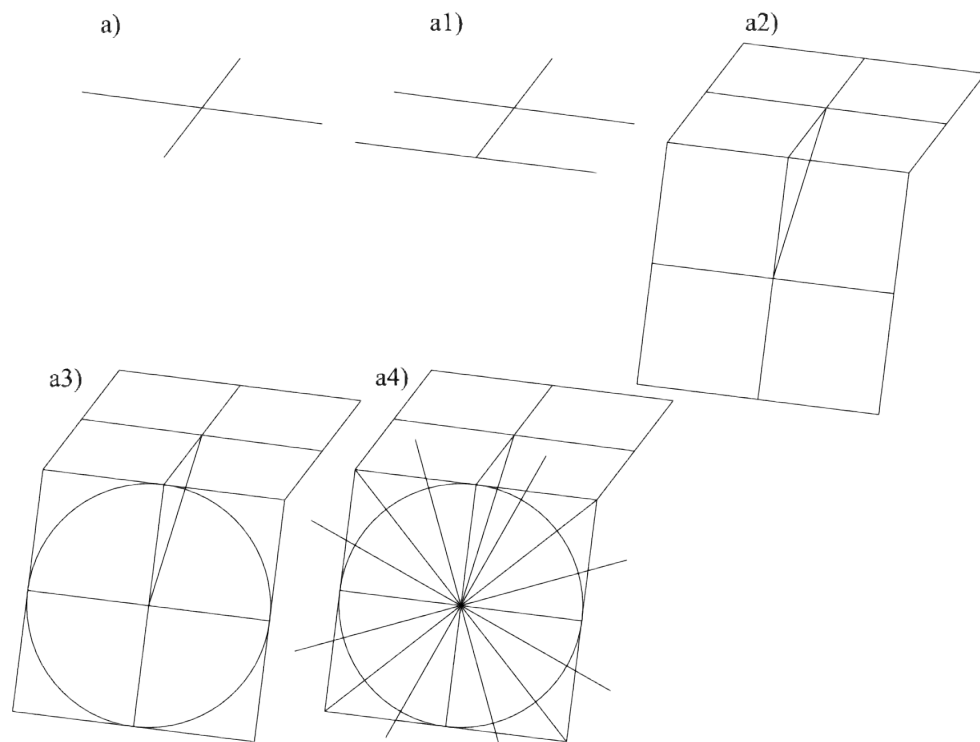
**Przykład 5.4.** A) Skonstruować w programie AutoCAD, w trybie 2D, dowolną aksonometrię hiperboloidy obrotowej jednopowłokowej o ośmiu tworzących ( $8 \times 2$ ), której równoleżnikiem jest narysowana wcześniej elipsa o danych osiach (rys. 5.28). B) Narysować (tradycyjnie p-o) w rzutach prostokątnych (Monge'a) i w dimetrii kawalerskiej (3:4) o szesnastu tworzących ( $16 \times 2$ )<sup>6</sup> tworzących hiperboloidy (rys. 5.30). Zakładamy, że dane są okrąg szyjny oraz dwa dowolnie przyjęte, symetryczne względem płaszczyzny okręgu szyjnego, okręgi równoleżnikowe (rys. 5.28B). C) W programie AutoCAD, w trybie 3D, narysować hiperboloide jednopowłokową.

*Rozwiązanie przykładu 5.4A.* Narysowanie hiperboloidy obrotowej *środkami klasycznymi* p-o, a dokładniej wybranej liczby jej tworzących, w aksonometrii wymaga użycia powinowactwa osiowego. I to niezależnie, czy wykonujemy ją na komputerze w trybie 2D, czy cyrklem i linijką. Dopiero realizacja konstrukcji 3D odbywa się za pomocą przekształceń w przestrzeni (REVOLUTION, w AutoCAD-zie jest to polecenie REVSURF). Konstrukcję 2D przedstawia rysunek 5.28. Przy założeniu, że kreślimy tylko 8 tworzących, nie musimy korzystać z powinowactwa (rys. 5.7 – 5.11), gdyż w tym przypadku podział elipsy jest zrealizowany przez przekątne równoległoboku. W przypadku innej, większej liczby tworzących wykorzystujemy powinowactwo (rys. 5.7 – 5.11). Rysunek 5.28 jest ćwiczeniem w rysowaniu za pomocą edytora graficznego (AutoCAD).

*Rozwiązanie przykładu 5.4B.* Opis rozwiązania przeprowadzimy, komentując sekwencję rysunków 5.29 – 5.30. Zakładamy, że dana jest elipsa o dwóch średnicach sprzężonych (rys. 5.29a), przy czym średnice te muszą być zadane zgodnie z zasadami dimetrii kawalerskiej (3:4), to znaczy przyjmujemy układ osi aksonometrii i dwa połowiące się pod kątem  $45^\circ$  odcinki – jeden wzdłuż osi  $Oy$ , drugi skrócony w stosunku 3:4 wzdłuż osi  $Ox$  (na rys. 5.29a średnice sprzężone przyjęto w dowolnej aksonometrii). Sekwencja konstrukcyjnych jest następująca (rys. 5.29a1): w celu odwzorowania elipsy na okrąg konstruujemy oś powinowactwa równoległą do jednej ze średnic przechodzącą przez koniec drugiej (to ostatnie założenie nie jest konieczne, ale wygodne).

---

<sup>6</sup> Liczba  $16 \times 2$  oznacza, że mamy narysować dwie rodziny tworzących hiperboloidy (rys. 5.28A).

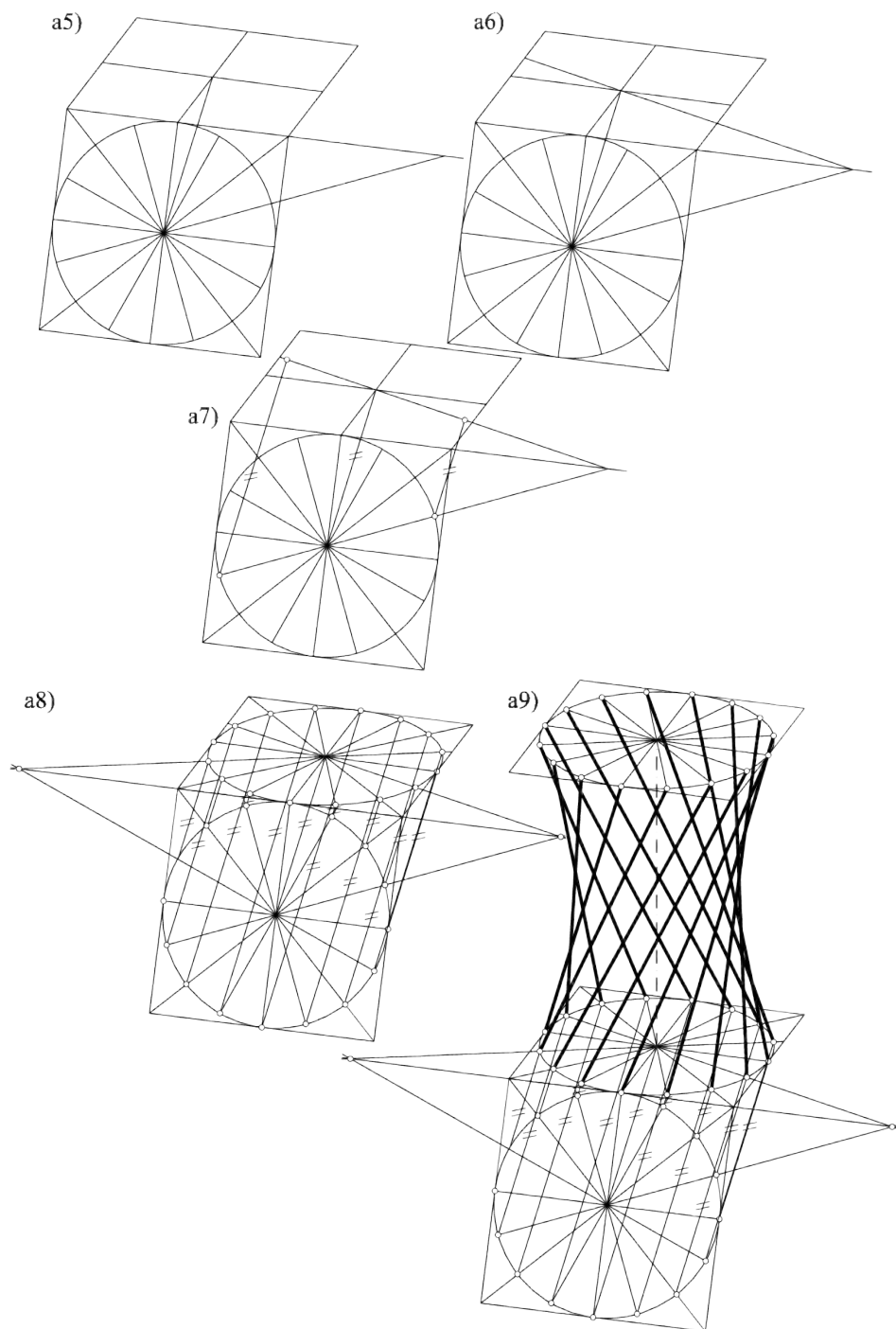


Rysunek 5.29: Wykorzystanie powinowactwa z okręgiem do konstrukcji elipsy wraz z punktami równomiernego podziału: a) elipsa dana za pomocą średnic sprzężonych; a1) wybór osi powinowactwa; a2)–a4) konstrukcja okręgu – obrazu elipsy wraz z punktami podziału okręgu (cdn.)

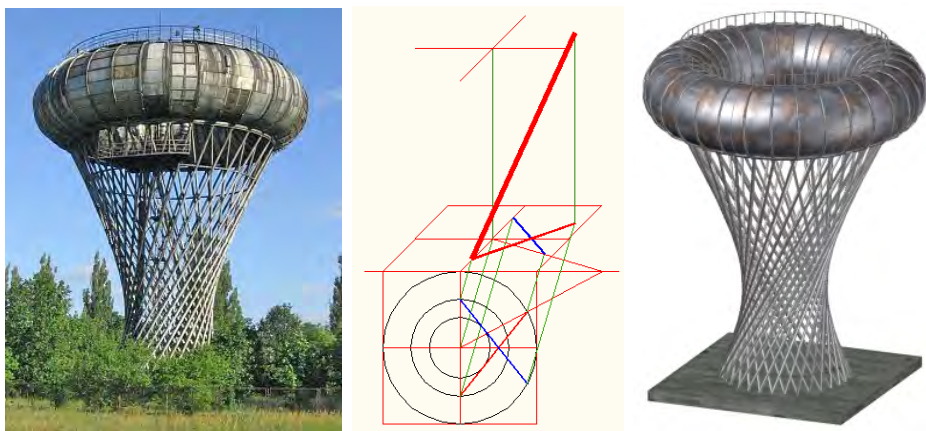
Ciąg dalszy konstrukcji jest następujący:

- (rys. 5.29a2) konstruujemy równoległobok i odpowiadający mu kwadrat definiujący powinowactwo;
- (rys. 5.29a3) rysujemy okrąg;
- a następnie
- (rys. 5.29a4) dzielimy go na  $n$  ( $n = 16$ ) równych części;
- (rys. 5.30a5) przekształcamy przez powinowactwo otrzymane punkty, rysując przez dwa z tych punktów prostą w układzie okręgu;
- (rys. 5.30a6) znajdujemy obraz tej prostej;
- (rys. 5.30a7) znajdujemy obrazy dwóch punktów leżących na tej prostej;
- (rys. 5.30a8) przekształcamy przez powinowactwo otrzymane pozostałe punkty równomiernego podziału okręgu, w wyniku czego otrzymujemy punkty podziału elipsy ( $n = 16$  punktów);





Rysunek 5.30: Zasada znajdowania punktów (równomiernego podziału elipsy) i prostych – obrazów w powinowactwie; tworzące hiperboloidy jednopowłokowej obrotowej



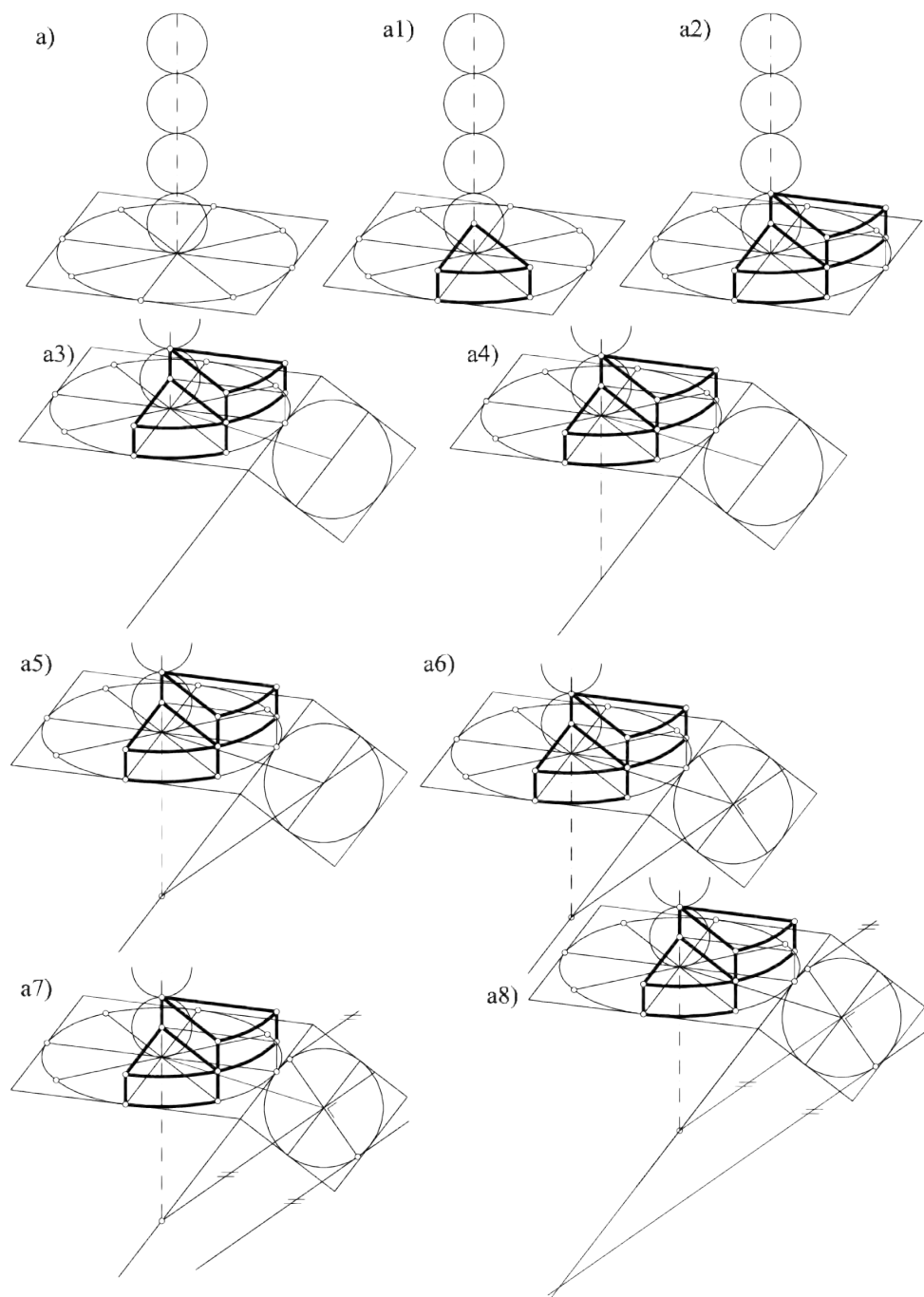
Rysunek 5.31: Wieża ciśnieniowa w Ciechanowie przed renowacją (proj. J.M. Bogusławski, 1972; wymiary: średnica okręgu podstawy 11,25 m; średnica okręgu zwężenia ok. 7 m; średnica górnego okręgu 17,70 m; wysokość 22 m; inne dane w [19]), fot. B. Koźniewski; pierwsze kroki konstrukcji wieży w 2D; model wirtualny wieży wykonany przez autora w programie AutoCAD

kontynuując

o (rys. 5.30a9) rysujemy drugą, przesuniętą równolegle elipsę i łączymy punkty dolnej elipsy z punktami górnej elipsy, przyjmując przesunięcie o  $t(t = 4)$  punktów. Należy dodać, że ustawienie prostej tworzącej względem osi obrotu jest zupełnie dowolne. Na rysunku 5.30a9 narysowano tylko jedną rodzinę prostych, by był on możliwie jak najbardziej czytelny. Otrzymana powierzchnia może pełnić w praktyce inżynierskiej interesujące funkcje konstrukcyjne. Ma zastosowanie m.in. przy budowie silosów, chłodni kominowych, wież widokowych itp. [19].

**Przykład 5.5.** Na podstawie podziału stożkowej z przykładu 5.2A narysować (tradycyjnie p-o, czyli cyrklem i linijką) w rzutach prostokątnych i w dimetrii kawalerskiej (3:4) schody kręcone o ośmiu stopniach na jeden pełny obrót (rys. 5.32a).

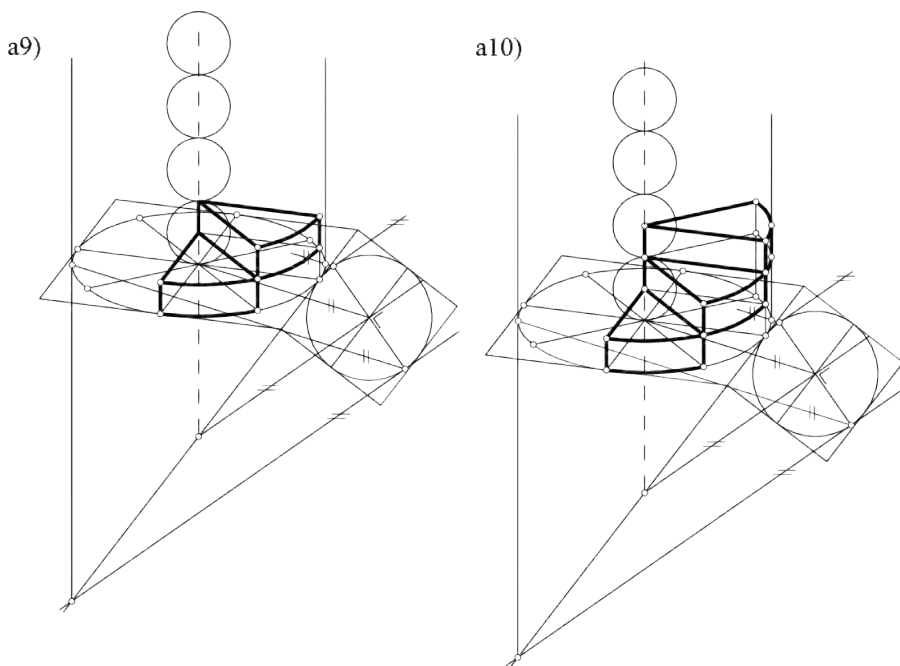
*Rozwiązanie zagadnienia z przykładu 5.5.* Rysujemy trzy stopnie. Konstrukcja schodów polega na „podnoszeniu” na odpowiednią wysokość części elipsy, w tym przypadku podnosimy jedną ósmą część elipsy (rys. 5.32a1 – 5.32a2). Najpierw wyznaczamy osiem poziomów schodków, odmierzając na pionowym rysunku osiem jednakowych odcinków (na rys. 5.32a są zaznaczone cztery okręgi, wysokość schodka jest równa promieniowi małego okręgu).



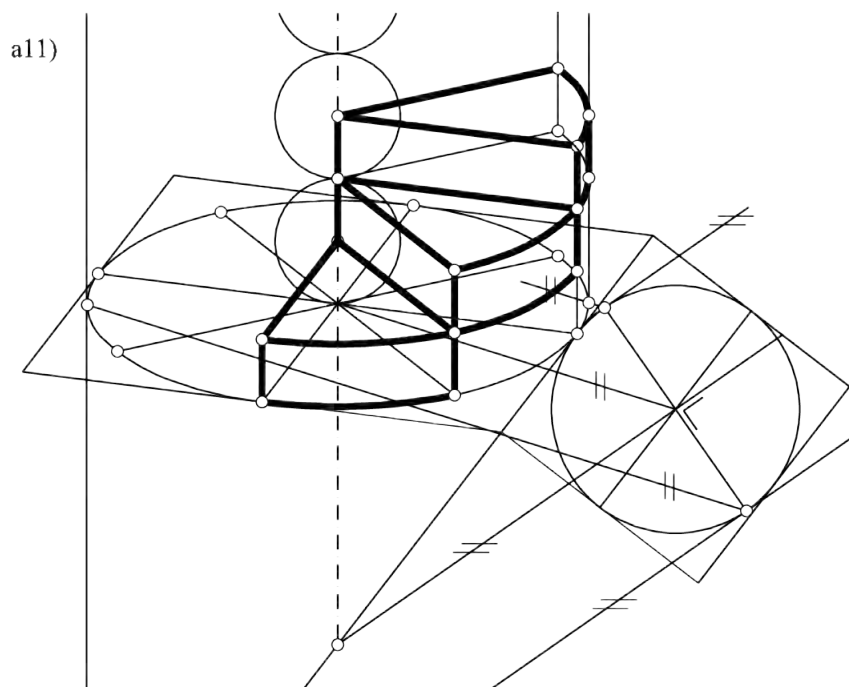
Rysunek 5.32: Konstrukcja schodów kręconych, określenie powinowactwa (cdn.)

Jest jednak pewien szczegółowy problem, mianowicie wyznaczenie stycznych pionowych do elipsy i odpowiednich punktów styczności. Do tego celu wykorzystamy powinowactwo osiowe (rys. 5.32a3). Oś schodów przekształcamy do układu okręgu (rys. 5.32a3 – 5.32a4) i rysujemy proste styczne do okręgu, równoległe do przekształconej prostej (rys. 5.32a7 – rys. 5.32a8), równocześnie znajdujemy punkty styczności. Następnie „wracamy” z prostymi stycznymi do układu elipsy (rys. 5.33a9 – 5.33a10). Znajdujemy równocześnie punkty styczności prostych pionowych do elipsy w podstawie schodów, które odpowiednio „podnosimy”. Na rys. 5.33a10 „podniesiono” dwa punkty styczności. Rysunek 5.34a11 w powiększeniu pokazuje szczegóły konstrukcji.

Przedstawiony algorytm konstrukcji schodów kręconych to klasyczna konstrukcja za pomocą cyrkla i linijki, chociaż w niniejszym opracowaniu przedstawiona została techniką komputerową 2D. Stąd zamiast rysować elipsę krzywką, autor posłużył się funkcją rysującą elipsę w programie AutoCAD. Cyrkiem i linijką wykonywalibyśmy tę konstrukcję analogicznie, ale z użyciem krzywika. Interesujący jest również fakt pokazania istoty konstrukcji w innej logice niż klasyczna metoda.

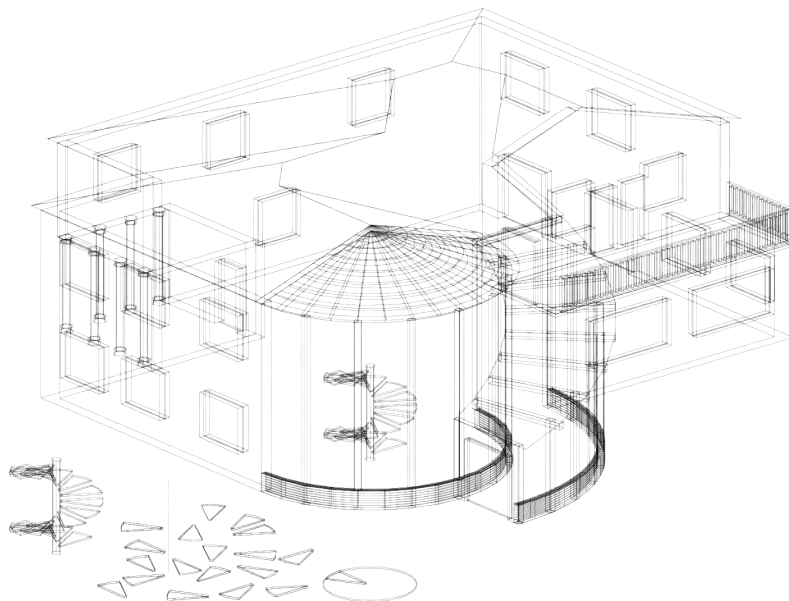


Rysunek 5.33: Konstrukcja konturowych pionowych stycznych do elips kształtujących schody kręcone (cdn.)



Rysunek 5.34: Fragment schodów kręconych w aksonometrii (powiększenie fragmentu rysunku 5.33a10)

### 5.2.9. Konstrukcja schodów kręconych za pomocą geometrii brył



Rysunek 5.35: Propozycja ukształtowania części dachu za pomocą powierzchni śrubowej. Umieszczone wewnątrz domu schody kręcone zrealizowane za pomocą poleceń geometrii brył w AutoCAD-zie (BOX, CYLINDER) i operacji boolowskich (UNION, SUBTRACT, INTERSECT). Fragment realizacji studenckiego projektu *Dom z kwia-ciarnią* z przedmiotu *architektura i urbanistyka* na kierunku budownictwo Politechniki Białostockiej w roku 2004 za pomocą programu AutoCAD

Schody kręcone można zrealizować za pomocą poleceń geometrii brył. W ten sposób konstruujemy walec (CYLINDER) o wysokości stopnia schodów i dowolną kostkę (BOX). Następnie wykorzystując operacje boolowskie (UNION, SUBTRACT, INTERSECT), kształtujemy odpowiedni schodek, który z kolei kopiujemy w liczbie równej liczbie stopni, i każdy  $i$ -ty schodek obracamy odpowiednio o kąt  $\frac{2\pi i}{n}$ , dla  $i = 1, 2, \dots, n$  i przesuwamy w odpowiedni punkt osi schodów. Poleceniem CYLINDER konstruujemy walec o wymienionej wyżej osi stanowiący nośny słup schodów kręconych i łączymy poleceniem UNION. Konstrukcja tych obiektów naturalnie nie wymaga posługiwania się powinowactwem. Obiekt jest bowiem konstruowany w przestrzeni wirtualnej, a efekt wizualizacji w aksonometrii jest realizowany przez polecenie VPOINT.

W podsumowaniu warto podkreślić, że tworzenie obiektów trójwymiarowych w programach typu CAD odbywa się drogą konstruowania ich operacjami boolowskimi, wykonywanymi na zbiorze obiektów elementarnych, do których należą: prostopadłościan, ostrosłup, walec, stożek sfera, itd. Każdy obiekt geometryczny można oglądać z różnych stron poprzez funkcję wizualizującą w rzucie równoległym (aksonometria) lub poprzez funkcję wizualizującą w rzucie środkowym (perspektywa).

### 5.2.10. Konstrukcja schodów kręconych realizowana poza programem AutoCAD

Skomplikowany obiekt geometryczny, jakim są schody kręcone, można narysować za pomocą specjalnego programu komputerowego, np. w języku Pascal, przygotowującego kod wejściowy dla AutoCAD-a [15]. Program w Pascalu umożliwiający parametryczne ukształtowanie schodów przygotowuje odpowiedni plik w trybie DXF, który jest natępnie importowany (DXFIN) do AutoCAD-a. Punkt ciężkości rozwiązania problemu został przeniesiony tym razem do środowiska kompilatora języka Pascal (rys. 5.36). Schemat postępowania jest następujący:

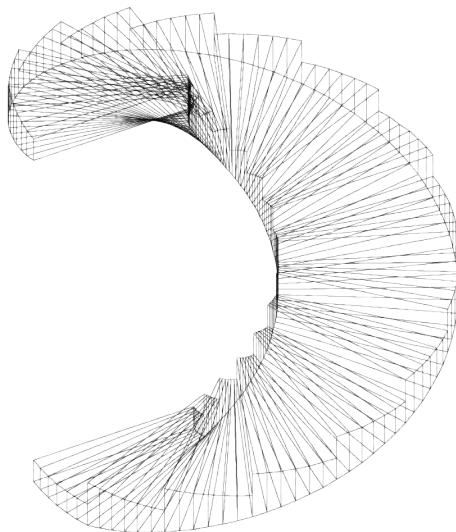
*napisanie programu w języku Pascal i jego kompilacja:*

algorytm  $\rightarrow^{\text{edytorASCII}}$  schody.pas  $\rightarrow^{\text{TPC}}$  schody.exe

*uruchomienie programu w Windows i importowanie do AutoCAD-a:*

$\rightarrow^{\text{schody.exe}}$  schody.dxf  $\rightarrow^{\text{AutoCAD(DXFIN)}}$  schody.dwg

Prezentowany program umożliwia narysowanie schodów o określonych parametrach, takich jak: liczba schodków, wysokość schodka, wielkość promienia zewnętrznego, wielkość promienia wewnętrznego, liczba elementów składowych schodka (prymitywów atomowych budowy bryły, liczby skoków linii śrubowej indukowanej przez schody kręcone). Zbudowany „poza AutoCAD-em” obiekt geometryczny jest prymitywem AutoCAD-a. Konstrukcja pliku schody.dxf została wykonana tak, by był to pełny obiekt wirtualny, który można cieniować, chować jego krawędzie niewidoczne itp.



Rysunek 5.36: Schody skonstruowane za pomocą programu w języku Pascal i importowane do AutoCAD-a jako plik o rozszerzeniu DXF [15]

### 5.3. Krzywe i powierzchnie w budownictwie

Wnętrza, korytarze, tunele, wiadukty, wejścia są od góry ograniczone płaskim sufitem lub sklepieniem wspierającym się na ścianach bądź kolumnach. Sklepienia są utworzone z fragmentów powierzchni. Zwykle są to: sfera, elipsoida, walec obrotowy i nieobrotowy, stożek obrotowy i nieobrotowy, torus, konoidy, cylindroidy, konusoidy. Niektóre z nich są powierzchniami stopnia drugiego.

#### 5.3.1. Powierzchnie stopnia drugiego

Powierzchnią stopnia drugiego nazywamy każdą powierzchnię, którą we współrzędnych jednorodnych można przedstawić w postaci:

$$\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_i x_j = 0, \quad (5.17)$$

gdzie  $a_{ij} = a_{ji}$ . Geometrycznie fakt, że powierzchnia jest stopnia drugiego wyraża się tym, że prosta ma z powierzchnią dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub nie ma ich wcale. Powierzchnia stożka obrotowego, sfera czy omawiana wcześniej hiperboloida obrotowa jednopowłokowa są powierzchniami stopnia drugiego. Natomiast powierzchnia torusa jest powierzchnią stopnia czwartego.



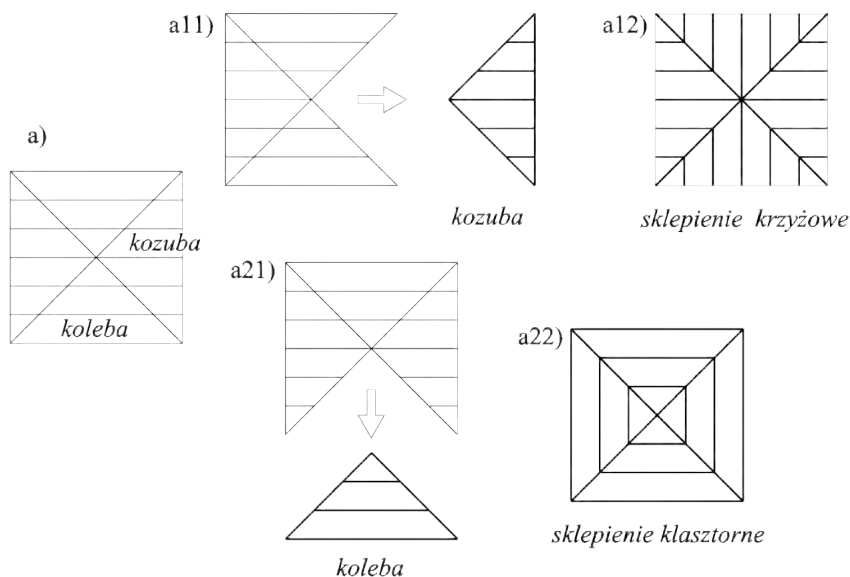
Część wspólna powierzchni stopnia drugiego jest krzywą stopnia czwartego, na ogół przestrzenną. W zastosowaniach technicznych interesujący jest przypadek, w którym linia przenikania rozpada się na dwie stożkowe, czyli dwie krzywe płaskie stopnia drugiego, których równania we współrzędnych jednorodnych podobne są do równań (5.17), ale o indeksach zmieniających się od 1 do 3.

### 5.3.2. Twierdzenia o rozpadzie linii przenikania powierzchni stopnia drugiego

W zastosowaniu inżynierskim powierzchni stopnia drugiego ważne są dwa twierdzenia o rozpadzie linii przenikania.

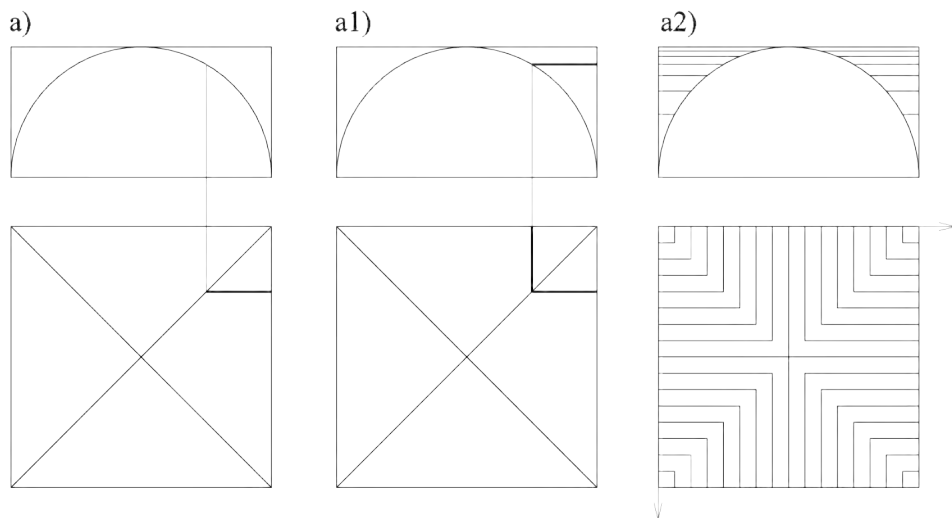
**Twierdzenie 5.2.** Jeżeli linia przenikania dwu powierzchni stopnia drugiego rozpada się na dwie części, z których jedna jest stożkową, to druga jest też stożkową.

**Twierdzenie 5.3.** Linia przenikania dwu powierzchni stopnia drugiego opisanych na wspólnej sferze rozpada się na dwie stożkowe.



Rysunek 5.37: Elementy bazowe sklepień krzyżowego i klasztornego: a) fragmenty walca obrotowego; a11) kozuba (rzut poziomy); a12) rzut poziomy sklepienia krzyżowego; a21) koleba (rzut poziomy); a22) rzut poziomy sklepienia klasztornego

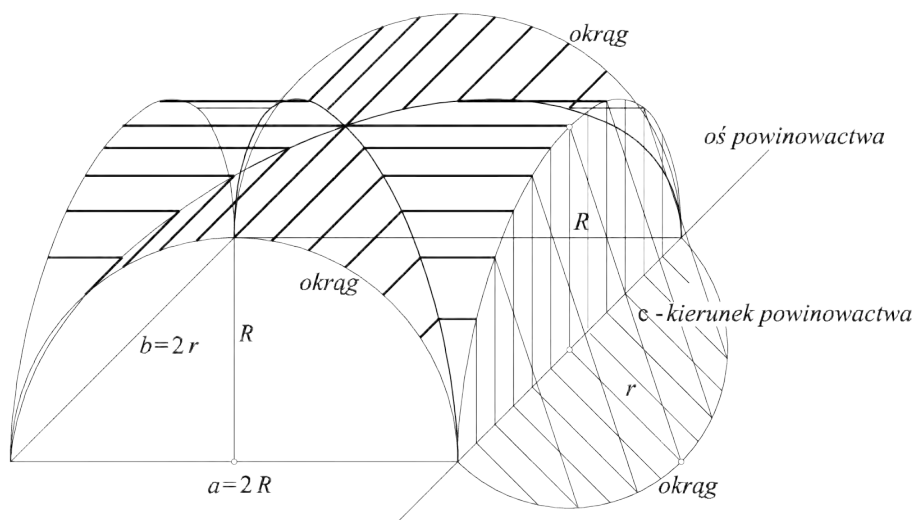
Weźmy pod uwagę dwie powierzchnie walców obrotowych o jednakowych promieniach, o osiach prostopadłych i przecinających się. Istnieje sfera, na której walce te są opisane. Ich linia przenikania rozpada się na dwie stożkowe, czyli na dwie elipsy (spośród krzywych płaskich na powierzchni walca leżą tylko elipsy i okręgi). Rozważmy część obu powierzchni, której rzutem prostokątnym jest kwadrat (rys. 5.37a). Wyróżnimy części powierzchni, których rzutami są trójkąty równoramienne. Trójkąt równoramienny, w którym tworzące są prostopadłe do podstawy, jest rzutem części powierzchni zwanej *kozubą* (rys. 5.37a11), trójkąt równoramienny, w którym tworzące są równoległe do podstawy, jest rzutem części powierzchni walca zwanej *kolebą* (rys. 5.37a21). Figura złożona z czterech przylegających do siebie (wzdłuż łuków elips – tzw. *linii żebrowych*) kozub zwana jest *sklepieniem krzyżowym* (rys. 5.37a12), a figura złożona z czterech podobnie przylegających do siebie koleb nazywa się *sklepieniem klasztornym* (rys. 5.37a22).



Rysunek 5.38: Konstrukcja rzutów prostokątnych sklepienia krzyżowego: a) przyjmujemy rzut poziomy tworzącej kozuby; a1) konstruujemy jej rzut pionowy; a2) rzuty prostokątne sklepienia krzyżowego odwzorowanego przez wybrane tworzące

Sklepienia krzyżowe mogą mieć podniesiony zwornik (klucz). W praktyce są murowane na przesuwanej krawężnicy (geometrycznie: jest to część półokręgu). *Krawężnica* jest szablonem wykonanym zazwyczaj z desek i tworzy żądany profil sklepienia. Aby ukształtować sklepienie, krawężnicę przesuwamy równoległe do ustalonej płaszczyzny pionowej wzdłuż prostej

(rys. 5.40a–a3) lub łuku okręgu (rys. 5.40b–b3). Każdy punkt przesuwającego okręgu określa łuk równoległy do łuku krzywej prowadzącej.



Rysunek 5.39: Aksonometria sklepienia krzyżowego. Wybrane tworzące przechodzą przez punkty elipsy i są konstruowane z wykorzystaniem powinowactwa osiowego

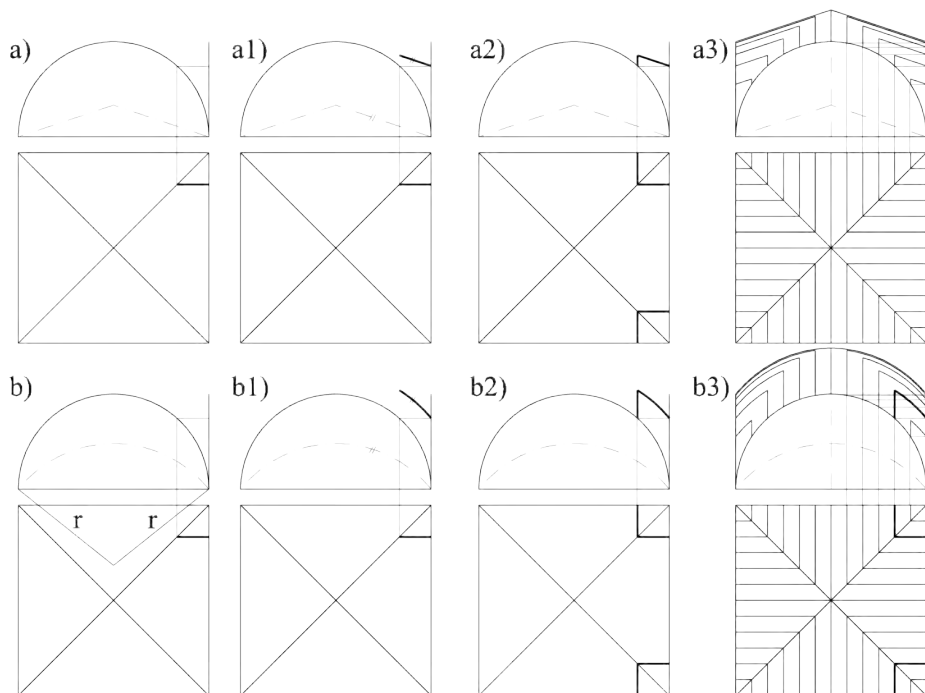
### Przykład 5.6. Wykonać:

- A) rzut pionowy sklepienia krzyżowego, mając dany rzut poziomy;
- B) dimetrię kawalerską (o dowolnym skrócie) sklepienia krzyżowego.

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 5.6A. Przyjmujemy w rzucie poziomym kwadrat, w rzucie pionowym półokrąg jako rzut połowy walca o osi prostopadłej do rzutni pionowej oraz prostokąt jako rzut pionowy połowy walca o osi równoległej do rzutni pionowej (rys. 5.38a). Konstruujemy tworzące takie, że ich rzuty poziome generują „krzyże” rozmieszczone offsetowo, czyli w jednakowej odległości, rzuty pionowe już tej własności nie mają. Łatwo zauważyć, że można rozwiązywać to zagadnienie odwrotnie, przyjmując arbitralnie jednakowo rozmieszczone rzuty pionowe tworzących. Zachęcamy Czytelnika do wykonania takiej właśnie konstrukcji.

*Rozwiązanie* problemu z przykładu 5.6B. Przyjmujemy równoległobok o bokach  $a$ ,  $b$  i o kącie  $45^\circ$  (rys. 5.39). Konstruujemy dwa półokręgi o promieniu  $R$ , gdzie  $a = 2R$ . Dlaczego okręgi, a nie elipsy? Jest to konsekwencją wyboru dimetrii kawalerskiej. Wysokość klucza sklepienia jest również  $R$ . Punkty elipsy (dwu elips przystających), która jest rzu-

tem okręgu pochodzącego od drugiego walca, konstruujemy, korzystając z powinowactwa z okręgiem pomocniczym o promieniu  $r$ .

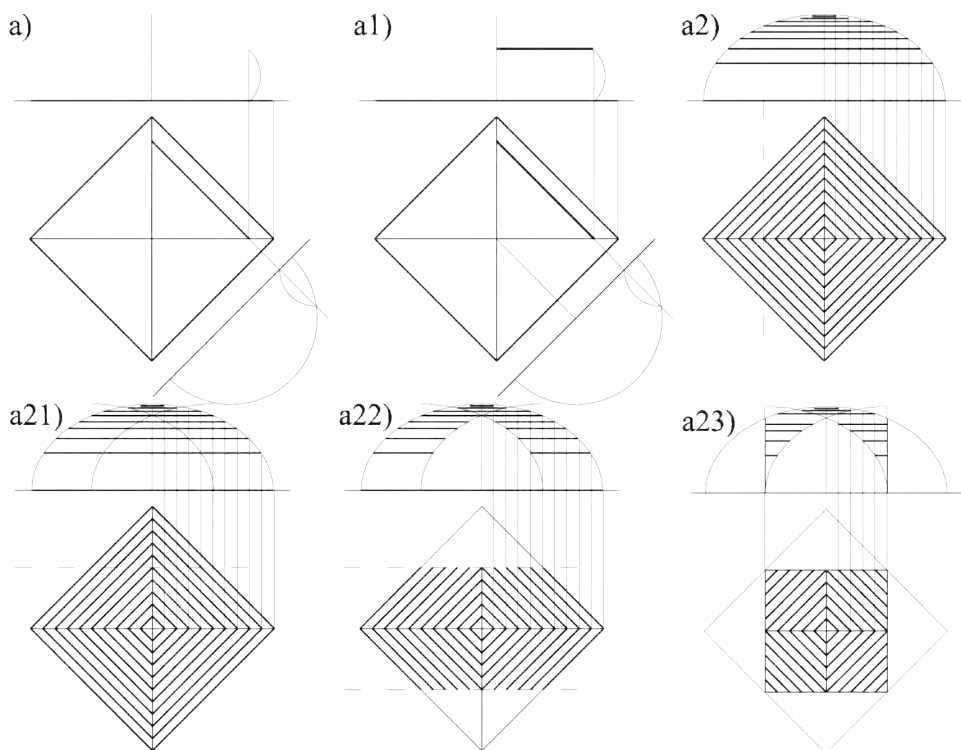


Rysunek 5.40: Przykłady konstrukcji sklepień kolebkowych (krzyżowych) z podniesionym kluczem, powstałych: a) na bazie walca nieobrotowego, którego kierownicą jest półokrąg, a tworzące są nachylone pod stałym kątem do płaszczyzny okręgu; b) o osiach łukowych o profilu kołowym: półokrąg przesuwany jest wzdłuż łuku innego okręgu, b1–b3) każdy punkt przesuwanego okręgu zakreśla łuk równoległy do łuku krzywej prowadzącej

Konstrukcję sklepienia z podniesionym kluczem przedstawiamy na rysunku 5.40 i to w dwóch wariantach. W pierwszym przypadku tworzące są odcinkami będącymi tworzącymi półwalca, którego krzywą definiującą jest półokrąg nieprostokątny do tworzących (rys. 5.40a1–a3). W drugim przypadku tworzące sklepienia są łukami okręgów (rys. 5.40b1–b3). Sklepienia krzyżowe rozpinać możemy nad dowolnym wielokątem foremny. Na rysunku 5.45 mamy sklepienia z podniesionym lub obniżonym kluczem. Sklepienia te zostały wykonane za pomocą odpowiedniego programu napisanego w języku AutoLISP. AutoCAD ma bowiem wbudowany interpreter języka LISP, który pozwala na „doprogramowywanie” tego systemu. Jak powiedzieliśmy wcześniej, funkcja rysująca parabolę

została napisana przez autora w języku AutoLISP i wielokrotnie wykorzystana m.in. do rysowania diagramów Voronoi dla wielokątów [9], [20], [18].

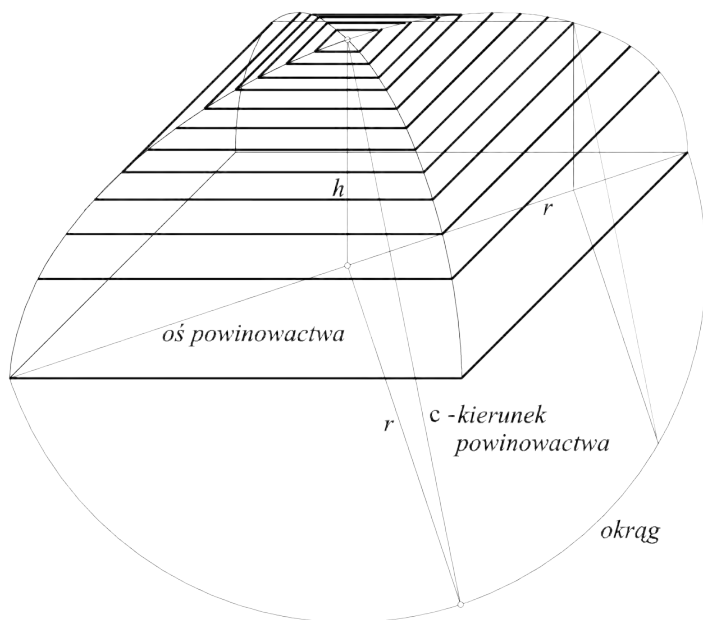
Sklepienie klasztorne w architekturze występuje najczęściej w postaci otwartej. Konstrukcja geometryczna takiego obiektu polega na odcięciu wszystkich czterech naroży sklepienia klasztornego, co przedstawiono na rysunku 5.41. Najpierw konstruujemy sklepienie klasztorne nad kwadratem o przekątnej prostopadłej do rzutni pionowej (rys. 5.41a). Koleby wtedy nie są ani prostopadłe, ani równoległe do rzutni pionowej. W tym celu wprowadzamy rzutnię pomocniczą, prostopadłą do dwóch boków kwadratu, na którą jeden z walców zawierających dwie koleby rzutuje się na półokrąg. Stąd łatwo konstruować pierwszą tworzącą (rys. 5.41a1) i kolejną (rys. 5.41a2).



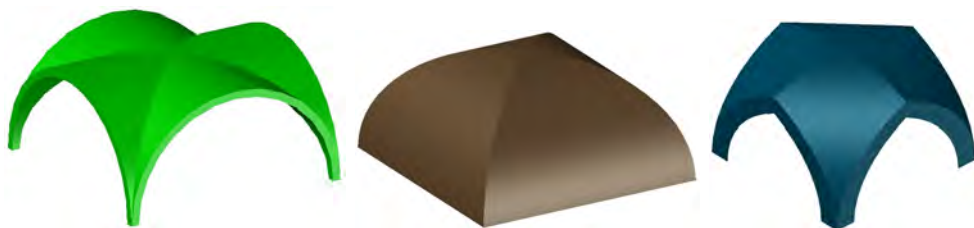
Rysunek 5.41: Konstrukcja sklepienia klasztornego: a–a2) wybrane tworzące (konstrukcja dyskretna) skonstruowano przy użyciu transformacji układu rzutni; a21) konstrukcja sklepienia klasztornego otwartego poprzez „odcięcie” płaszczyznami pionowymi – linie przekroju są elipsami równoległymi do elips – linii żebrowych

**Przykład 5.7.** Wykonać dimetrię kawalerską (o dowolnym skrócie) sklepienia klasztornego.

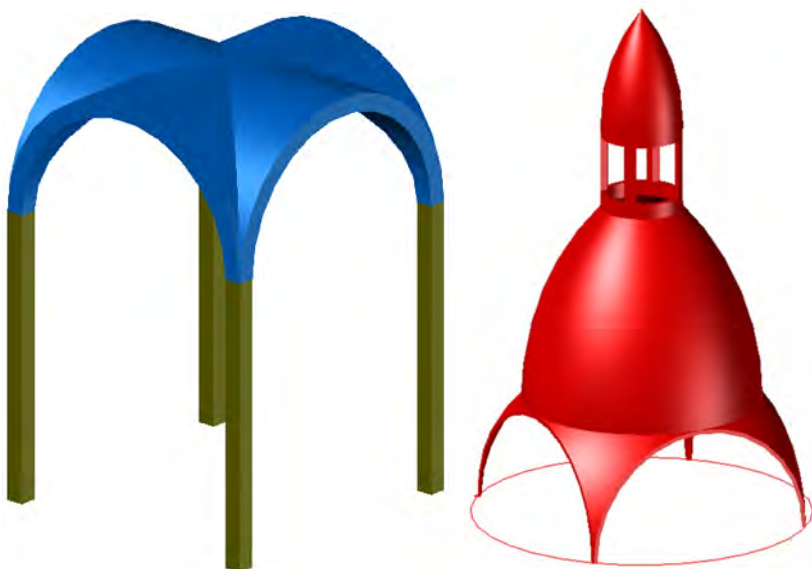
*Rozwiązanie* problemu z przykładu 5.7. Przyjmujemy równoległobok o przekątnej  $2r$  i o kącie  $45^\circ$  (rys. 5.42). Przyjmujemy wysokość  $h$  równą połowie długości boku kwadratu podstawy. Przekątna stanowi oś powinowactwa, za którego pośrednictwem konstruujemy poszczególne tworzące. Przechodzą one przez punkty elipsy, która jest obrazem okręgu o średnicy będącej przekątną wyjściowego równoległoboku (rys. 5.42).



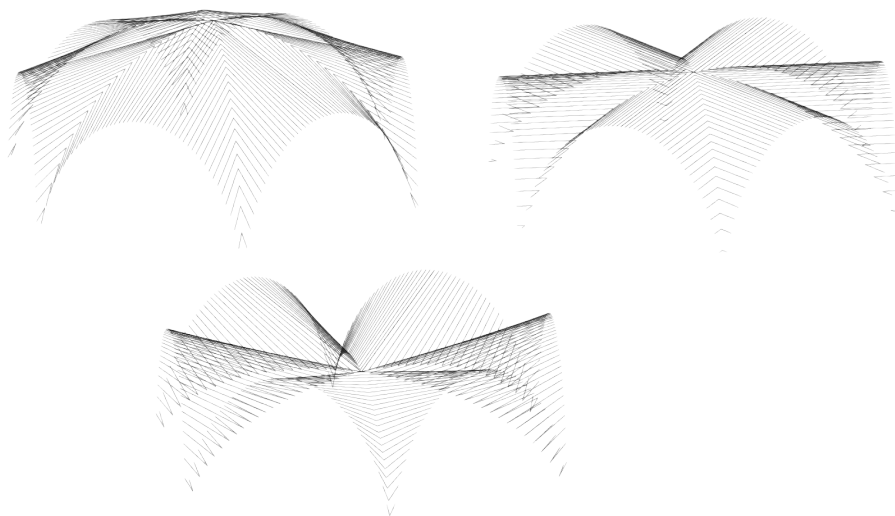
Rysunek 5.42: Konstrukcja wybranych tworzących sklepienia klasztornego przy pomocy powinowactwa osiowego



Rysunek 5.43: Modele wirtualne 3D wykonane w programie AutoCAD (od lewej): sklepienie krzyżowe, sklepienie klasztorne, sklepienie klasztorne otwarte



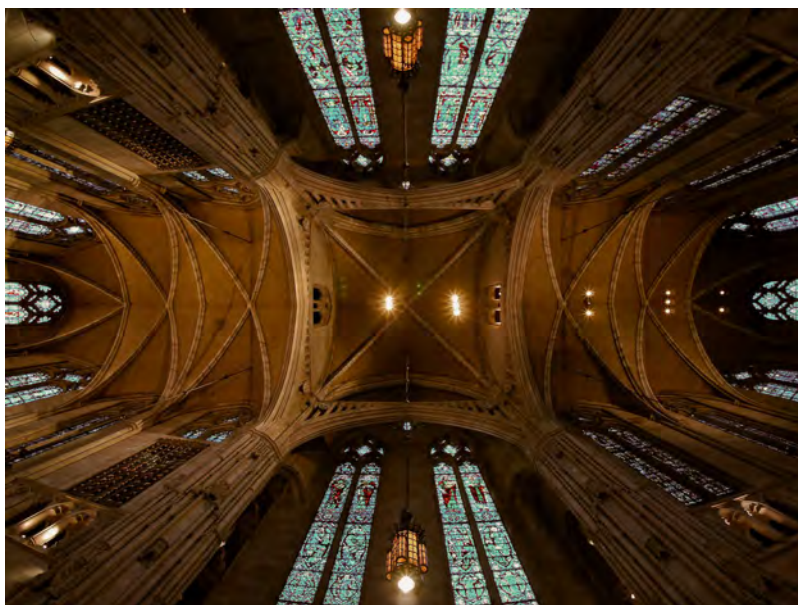
Rysunek 5.44: Modele wirtualne 3D wykonane w programie AutoCAD (od lewej): sklepienie krzyżowe na kolumnach, kopuła na żagielkach z latarnią



Rysunek 5.45: Sklepienia krzyżowe rozpięte nad sześciokątem: z podniesionym kluczem (lewy górny róg); z obniżonym kluczem (na dole) wykonane w AutoCAD-zie za pomocą funkcji specjalnie napisanych w języku AutoLISP. Krzywymi prowadzącymi są odcinki



Rysunek 5.46: Sklepienie krzyżowe w kościele Zmartwychwstania Pańskiego w Białymstoku, fot. M. Koźniewski



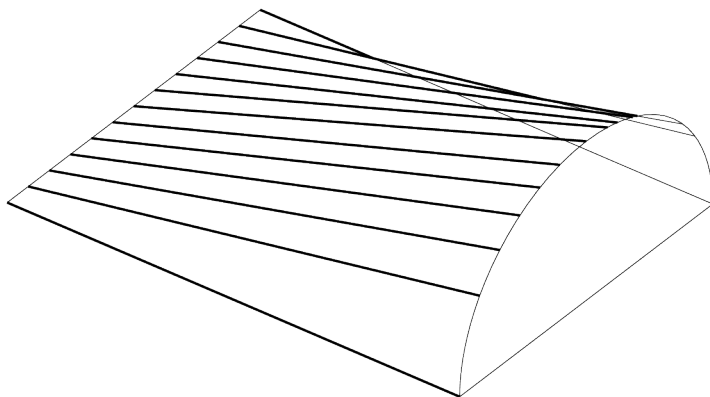
Rysunek 5.47: Sklepienie krzyżowe w Heinz Memorial Chapel, Pittsburgh, USA, fot. M. Koźniewski



## 5.4. O powierzchniach prostokreślnych

Wiele z omawianych wcześniej powierzchni to powierzchnie prostokreślne. Jeżeli przez każdy punkt powierzchni  $\Omega$  przechodzi prosta  $t$ , której wszystkie punkty należą do tej powierzchni, to taką powierzchnię nazywamy *prostokreślną*, a prostą  $t$  nazywamy *tworzącą* powierzchni  $\Omega$ . Każdą powierzchnię prostokreślną można utworzyć przez ruch prostej (w przestrzeni) przecinającej trzy krzywe  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ . Przy założeniu, że przez krzywą można rozumieć także punkt dla  $c_1 = c_2 = W$ , otrzymujemy powierzchnię stożkową – gdy punkt  $W$  jest właściwy i powierzchnię walcową – gdy punkt  $W$  jest niewłaściwy. Powierzchnie te nie muszą być ani powierzchniami stożka (obrotowego), ani walca, ponieważ krzywa  $c_3$  jest zupełnie dowolna). Dodajmy, że co innego oznaczają określenia „powierzchnia walcowa” i używana kilkakrotnie wcześniej „powierzchnia walca”. To samo dotyczy „powierzchni stożkowej”.

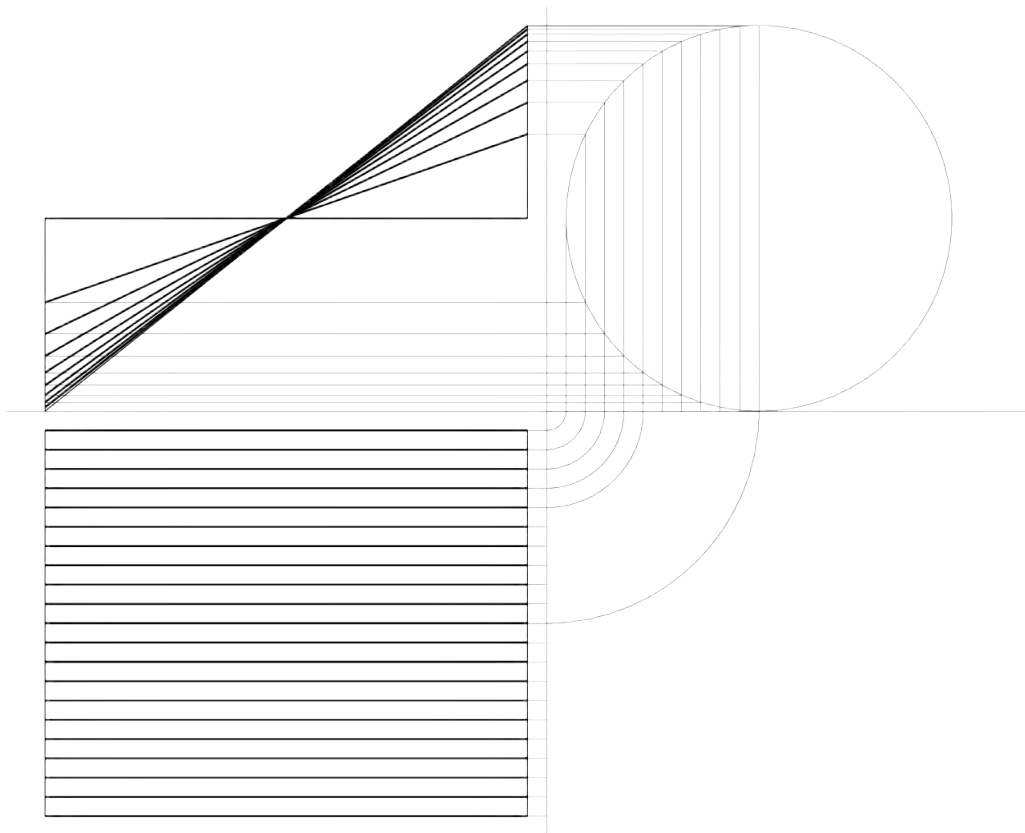
Ogólnie zbiór powierzchni prostokreślnych jest bardzo szeroki i dlatego pełny jego opis pomijamy. Przytoczymy jedynie kilka ważnych typów powierzchni mających zastosowania techniczne, zwłaszcza jako przekrycia budowlane.



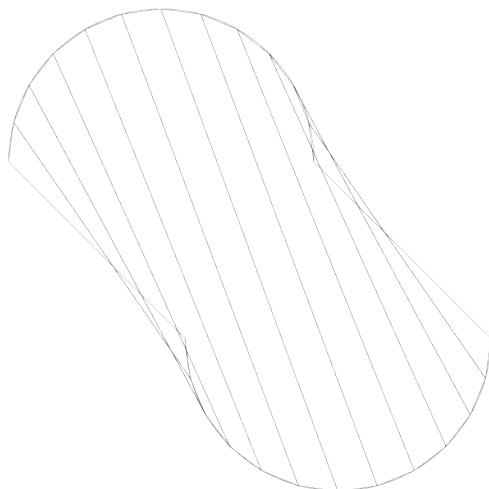
Rysunek 5.48: Aksonometria konoidy rozpiętej na półokręgu, odcinku i prostej niewłaściwej. Konoide tę w AutoCAD-zie zrealizowano za pomocą dwukonoidy używanej w poleceniu RULESURF (por. rys. 5.50)

W przypadku, gdy  $c_1$  jest prostą właściwą,  $c_2$  – prostą niewłaściwą,  $c_3$  – dowolną krzywą, otrzymujemy powierzchnię zwaną *konoidą*. Rysunek 5.48 przedstawia konoide, w której krzywą jest półokrąg. Gdy  $c_1$  jest prostą właściwą,  $c_2$  – prostą niewłaściwą,  $c_3$  – jest prostą wła-

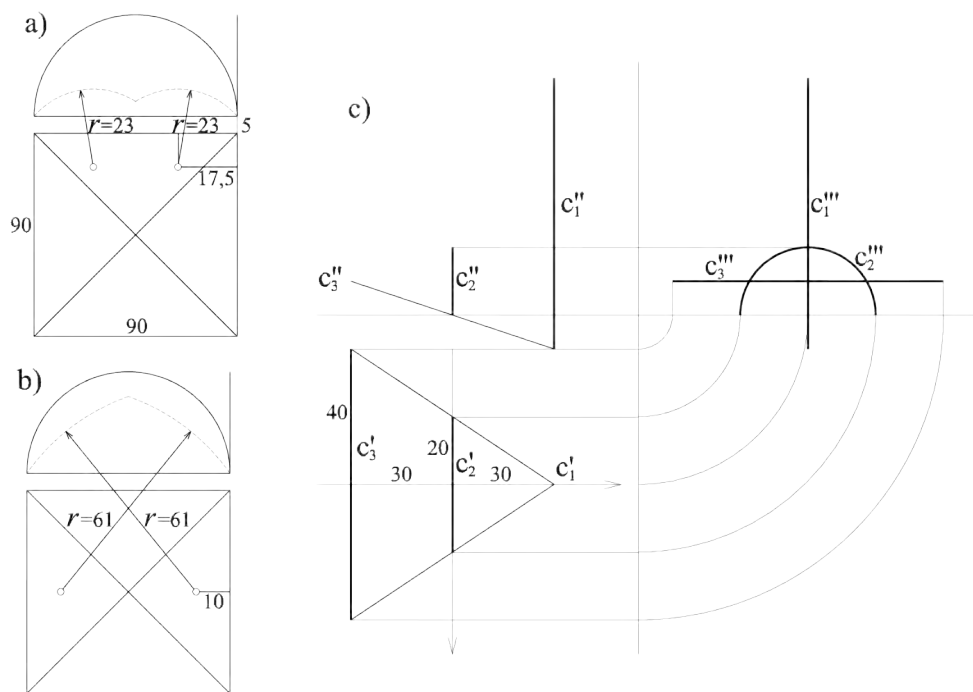
ściwą, otrzymujemy powierzchnię zwaną *powierzchnią siodłową* lub *paraboloidą hiperboliczną* (rys. 5.57 – 5.59, 5.60). Gdy jedna z krzywych, np.  $c_1$  jest prostą właściwą, otrzymujemy powierzchnię zwaną *konusoidą*, a gdy jedna z krzywych jest prostą niewłaściwą, otrzymujemy *cylindroidę*. Rysunki 5.53, 5.54 przedstawiają cylindroidy, w których krzywymi są półokręgi. W pierwszym przypadku jest to *sklepienie skośne*, w drugim *sklepienie marsylijskie*. Wreszcie, gdy wszystkie krzywe są prostymi właściwymi skośnymi, otrzymujemy *hiperboloideę jednopowłokową*. Jest to powierzchnia stopnia drugiego o szczególnych parametrach, którą również można otrzymać w wyniku obrotu prostej dokoła innej prostej, gdy obie są skośne (rys. 5.1).



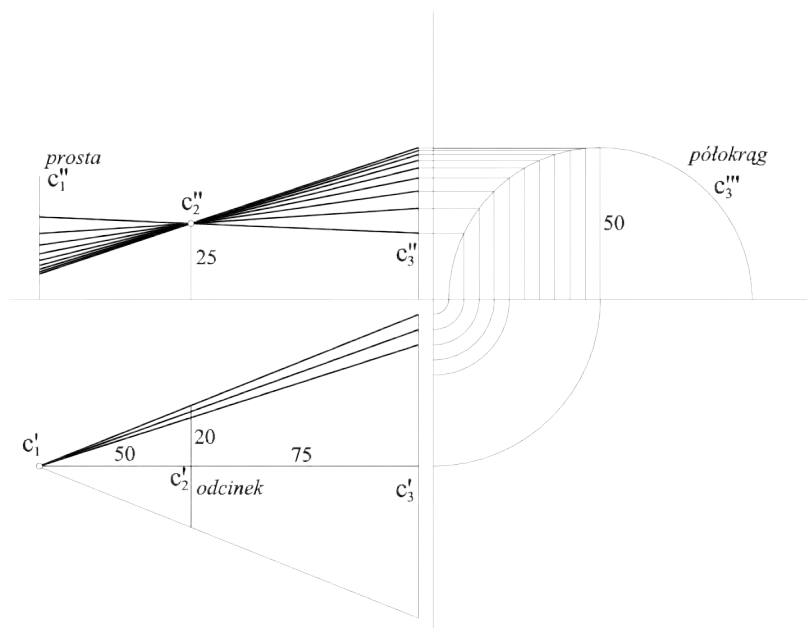
Rysunek 5.49: Rzuty prostokątne dwukonoidy zrealizowane (w 2D w AutoCAD-zie) za pośrednictwem rzutu trzeciego



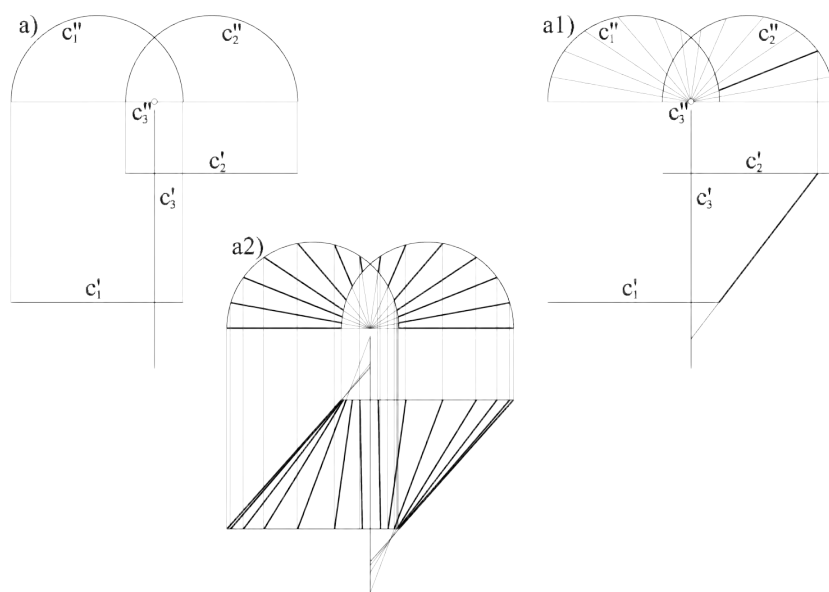
Rysunek 5.50: Dwukonoida zrealizowana automatycznie (3D) w AutoCAD-zie za pomocą polecenia RULESURF



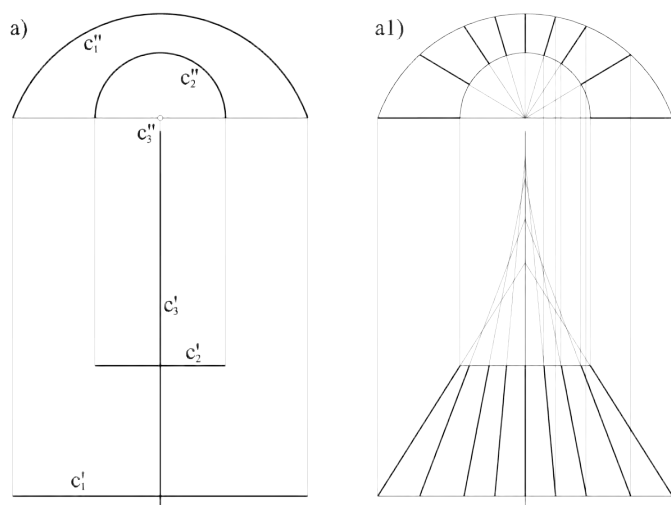
Rysunek 5.51: Założenia do sklepień łupinowych: a) z obniżonym kluczem; b) z podniesionym kluczem; c) założenie do modelu przekrycia konusoidalnego (krzywe: odcinek  $c_1$ , półokrąg  $c_2$ , prosta  $c_3$ )



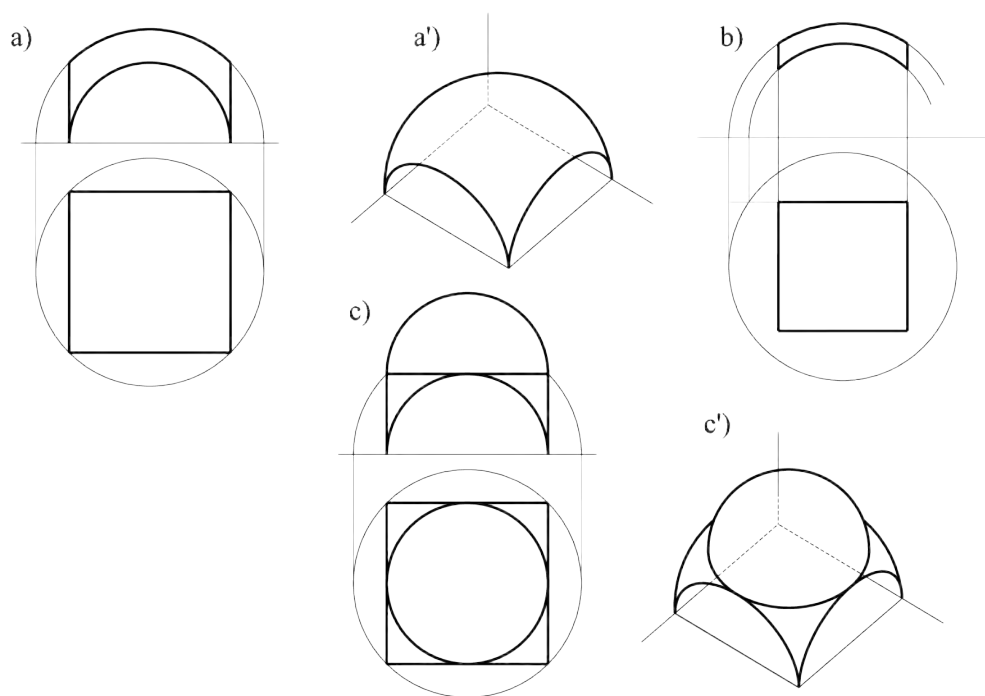
Rysunek 5.52: Założenie i rozpoczęte rozwiązanie modelu przekrycia konusoidalnego (krzywe: prosta  $c_1$ , odcinek  $c_2$ , półokrąg  $c_3$ )



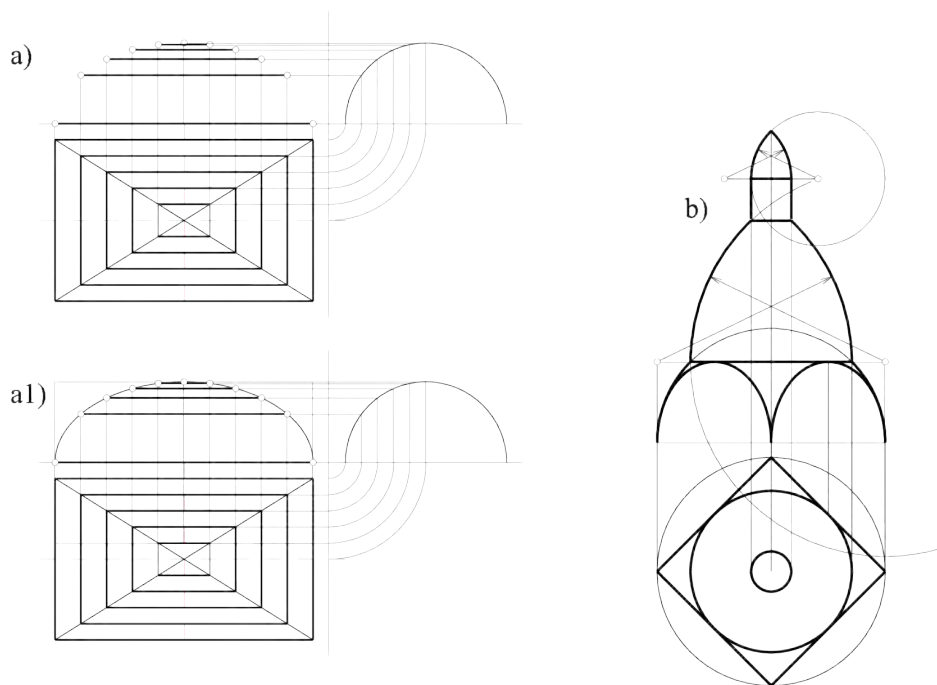
Rysunek 5.53: Dwa rzuty sklepienia skośnego (krzywe: półokrąg  $c_1$ , półokrąg  $c_2$ , prosta  $c_3$ )



Rysunek 5.54: Dwa rzuty sklepienia marsylijskiego (krzywe: łuk okręgu  $c_1$ , półokrąg  $c_2$ , prosta  $c_3$ )



Rysunek 5.55: Realizacja sklepień na bazie sfery: a) sklepienie czeskie; a') aksonometria prostokątna sklepienia czeskiego; b) sklepienie żaglowe; c) bania na żagielkach; c') aksonometria prostokątna bani na żagielkach

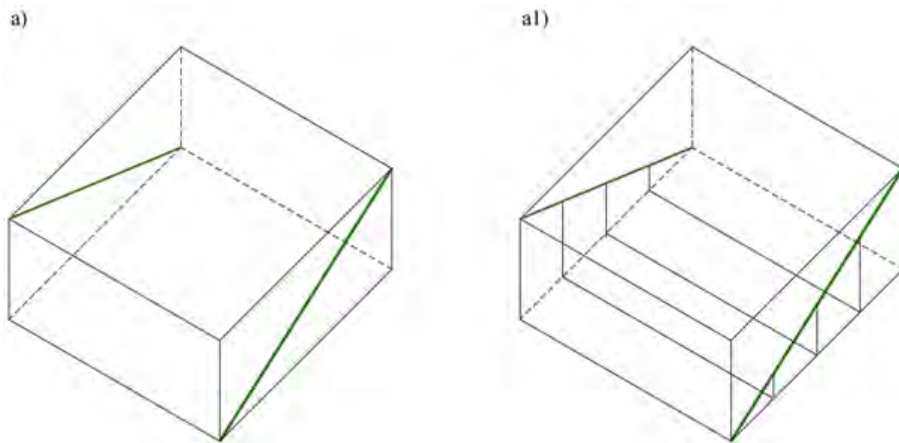


Rysunek 5.56: a–a1) Sklepienie krzyżowe rozpięte nad prostokątem zrealizowane za pomocą transformacji do trzeciego rzutu. Jeden z walców – prostopadły do rzutni pionowej – jest eliptyczny. Zauważmy, że gdyby trzeci rzut był styczny do osi układu rzutni, to między trzecim rzutem (okrąg) i rzutem pionowym (elipsa) mielibyśmy zależność powinowactwa liniowego. Jest to równocześnie dowód na to, że rzut pionowy sklepienia jest elipsą. Ponadto otrzymujemy (nieoczekiwany) sposób konstrukcji elipsy. Jaki związek mają wymiary prostokąta w rzucie poziomym z wielkością osi elipsy? Jest to, jak widać, konstrukcja uniwersalna – zachęcamy Czytelnika do sformułowania „nowej” metody konstrukcji elipsy; b) kopuła na żagielkach zrealizowana na bazie powierzchni pierścieniowej niebędącej klasycznym torusem, zamknięta cylindryczną latarnią (świetlikiem) zwieńczoną kopułą z powierzchni pierścieniowej

Na rysunku 5.55a przedstawiono rzuty prostokątne sklepienia czeskiego. Powstaje ono z półsfery (koło jako rzut poziomy, półkole jako rzut pionowy) poprzez odcięcie płaszczyznami czterech części. Płaszczyzny te przecinają półsferę w czterech półokręgach. Stąd w rzucie pionowym mamy półokrąg o średnicy równej bokowi kwadratu. Na rysunku 5.55a' mamy aksonometrię prostokątną. Dlaczego sklepienie czeskie przedstawiamy w aksonometrii prostokątnej? Otóż aksonometria prostokątna jako odwzorowanie jest rzutem prostokątnym. Zatem rzutem sfery jest sfera (stąd łatwo ją narysować jako rzut w 2D). Półokręgi na rysunku 5.55a' są elipsami. Odcięcie sklepienia czeskiego płaszczyzną styczną do czterech

półokręgów daje obiekt („żagielki”) ograniczony z boku czterema półokręgami i okręgiem od góry. Jeżeli na tym obiekcie, czyli na żagielkach, położymy półsferę, to otrzymamy – tzw. *banie na żagielkach* (rys. 5.55c–c’). Sklepienie czeskie jest szczególnym przypadkiem *sklepienia żaglowego* – fragmentu sfery rozpiętego nad kwadratowym wnętrzem, w którym przekątna kwadratu jest mniejsza od średnicy sfery lub jej równa (rys. 5.55b). Na żagielkach może spoczywać także kopuła ukształtowana przez powierzchnię pierścieniową, powstałą w wyniku obrotu łuku okręgu dokoła prostej nieprzechodzącej przez środek tego okręgu (rys. 5.56, 5.44). Kupuła taka może być zamknięta *światlikiem* w kształcie walca zwieńczonego kolejną kopułą. Sklepienie czeskie (potraktowane ogólniej) możemy utworzyć z półelipsoidy obrotowej, rozpinając je nad prostokątem wpisanym w elipsę podstawy („równikową”) tej półelipsoidy. Linia nasadowa sklepienia składa się wówczas z czterech *łęków* o jednakowo wzniesionych zwornikach; dwa łęki są półokręgami (równoleżnikami elipsoidy), a dwa półelipsami (przecięciami płaszczyznami równoległymi do płaszczyzny symetrii elipsoidy, zawierającymi boki prostokąta). Dlaczego zworniki tych łęków są jednakowo wzniesione?

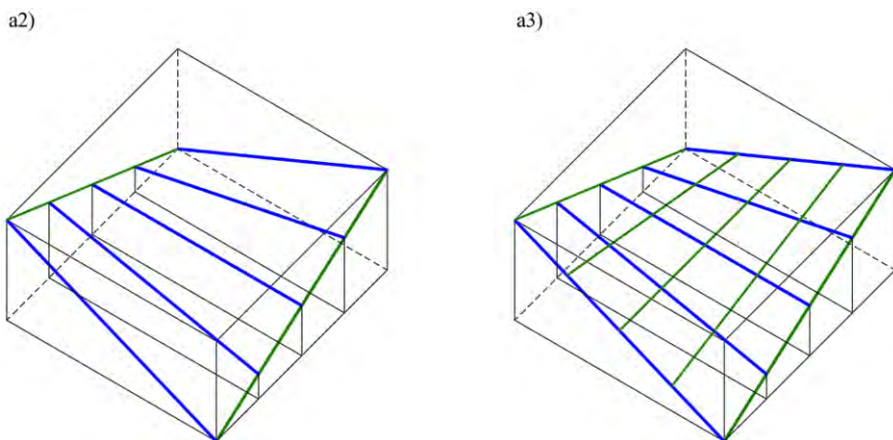
## 5.5. Powierzchnia siodłowa



Rysunek 5.57: Konstrukcja powierzchni siodłowej na bazie prostopadłościanu: a) bierzemy trzy krzywe: dwie skośne przekątne równoległych ścian bocznych oraz prostą niewłaściwą trzeciej ściany; a1) konstruujemy punkty na prostych skośnych tak, by proste łączące odpowiednie punkty były równoległe do trzeciej ściany (np. dzielimy przekątne na równe części, na rysunku podzielono je na cztery części) (cdn.)

Zbiór prostych przecinających dwie proste skośne i równoległych do danej płaszczyzny tworzy tzw. *powierzchnię siodłową*. Jak pamiętamy, zbiór wszystkich kierunków równoległych do danej płaszczyzny jest prostą niewłaściwą. Stąd możemy powiedzieć, że powierzchnia siodłowa jest zbiorem prostych przecinających trzy proste: dwie proste skośne właściwe i jedną prostą niewłaściwą. Struktury powierzchni siodłowych jako przekrycia spotykamy wśród wielu rozwiązań architektonicznych. Są to: spektakularny budynek zwany domem Catalana, zaprojektowany i zbudowany w 1954 roku w Raleigh, w stanie Karolina Północna, w USA, przez argentyńskiego architekta Eduarda Catalana [38], przekrycie dworca Warszawa Ochota (rys. 5.60, [41]), przekrycie nad wejściem do Urzędu Wojewódzkiego w Kielcach [39], przekrycie kościoła św. Alojzego w Jackson, w stanie Missisipi, w USA [40], przekrycie kościoła św. Karola w Spokane, w stanie Waszyngton, w USA [31], konstrukcje z bambusu autorstwa Lucasa Schlütera [42].

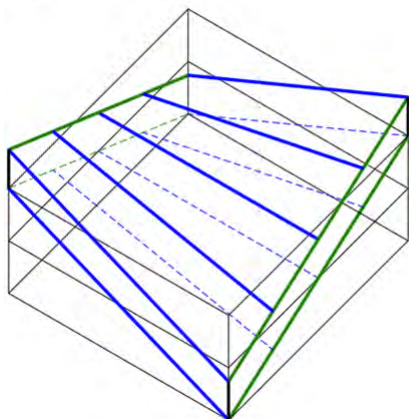
Warto zauważyć, że w literaturze mówi się o ogólniej określonych powierzchniach Catalana. Jeżeli bowiem prosta porusza się w przestrzeni po dwu krzywych, będąc równoległa do wybranej płaszczyzny, to zakresloną przez nią powierzchnię nazywamy *powierzchnią Catalana* [29]. Powierzchnia siodłowa (rys. 5.59) oraz konoida (rys. 5.48) są klasycznymi przykładami powierzchni Catalana. Konstrukcję powierzchni siodłowej przedstawiamy na rysunkach 5.57–5.59.



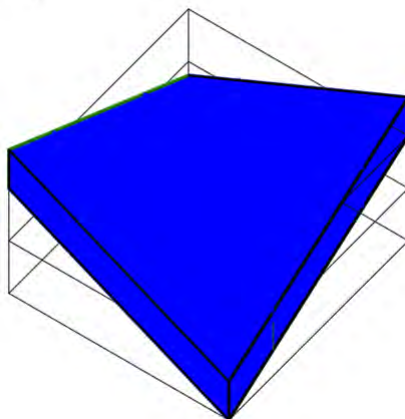
Rysunek 5.58: Konstrukcja powierzchni siodłowej na bazie prostopadłościanu (cd.): a2) odpowiadające punkty łączymy ze sobą; a3) okazuje się, że dwie z otrzymanych prostych to przekątne pozostałych ścian, które generują drugą rodzinę prostych (na rysunku oznaczonych kolorem zielonym) (cdn.)



a4)



a5)



Rysunek 5.59: Konstrukcja powierzchni siodłowej na bazie prostopadłościanu (cd.):  
a4) nadanie grubości powierzchni siodłowej; a5) wizualizacja powierzchni

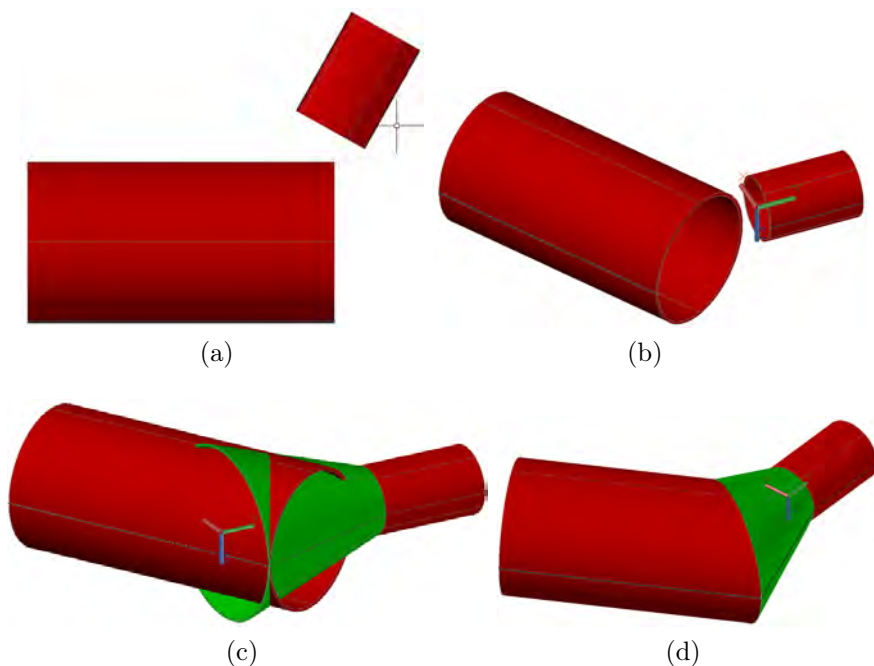


Rysunek 5.60: Dworzec Warszawa Ochota, projekt: Arseniusz Romanowicz, Piotr Szymaniak, realizacja 1960–1962, fot. M. Czechowicz, źródło: [41]

## 5.6. O powierzchniach prostokreślnych rozwijalnych

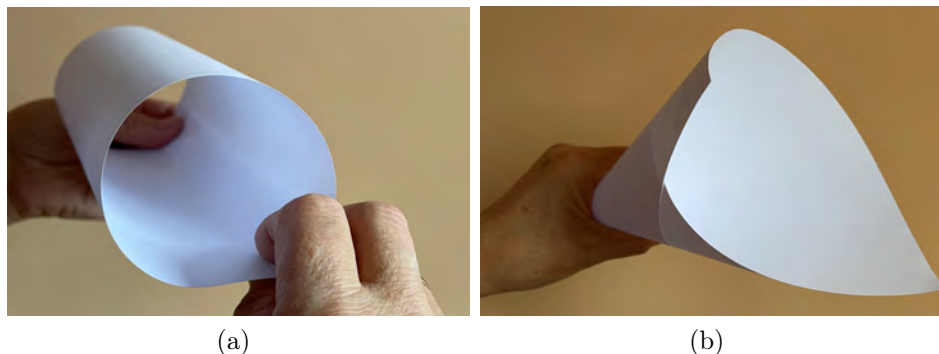
Powierznię, która może być przekształcona na płaszczyznę w taki sposób, że każda krzywa na tej powierzchni zostanie przekształcona na krzywą na płaszczyźnie z zachowaniem długości (odległości punktów mierzone po powierzchni nie zmieniają się), nazywamy *powierzchnią rozwijalną*. Jej przykładami wśród powierzchni stopnia drugiego są powierzch-

nie stożkowa i walcowa. Mówiąc obrazowo, zginając kartkę papieru, możemy otrzymać każdą z tych powierzchni. Zauważmy przy tym, że walec to stożek o wierzchołku w nieskończoności (będącym punktem niewłaściwym). W klasyfikacji rzutowej jest to jeden typ powierzchni rozwijalnej. Żadna inna powierzchnia stopnia drugiego już nie jest powierzchnią rozwijalną. Także powierzchnie prostokreślnie, takie jak: powierzchnia siodłowa (zob. [19]), hiperboloida jednopowłokowa (rys. 5.1, 5.6, 5.31), powierzchnia śrubowa (5.4), konoida (rys. 5.48), konusoida (rys. 5.52), sklepienie marsylijskie (rys. 5.54), sklepienie skośne (rys. 5.53), nie są powierzchniami rozwijalnymi, podobnie jak sfera i torus.



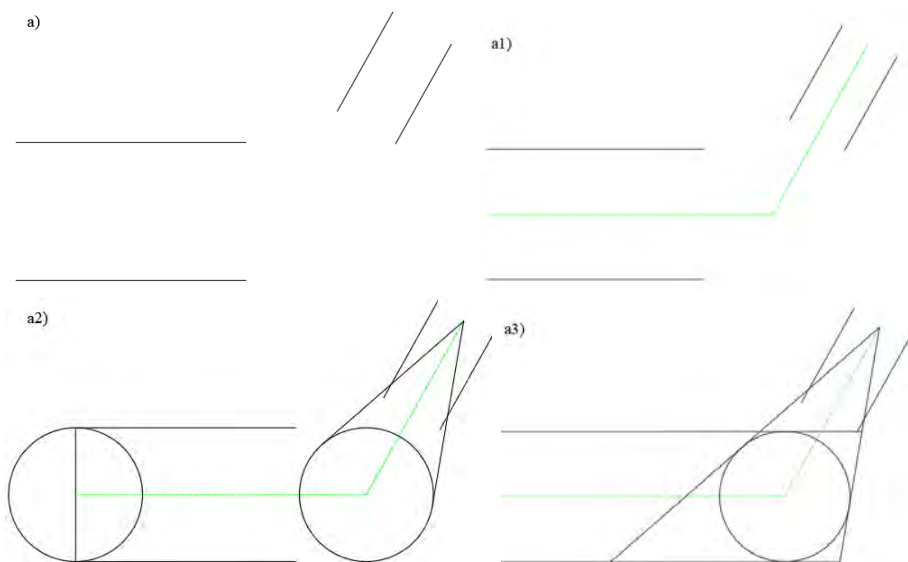
Rysunek 5.61: Wizualizacja połączenia rur cylindrycznych o różnej średnicy i przecinających się osiach: (a) widok z góry (rzut poziomy) rur o osiach równoległych do rzutni poziomej; (b) widok aksonometryczny rur; (c) powierzchnia stożka opisanego na kuli wpisanej w walec o większej średnicy, o wierzchołku na osi walca o mniejszej średnicy; (d) ostateczny kształt połączenia

Jak można połączyć dwie różne rury stożkowym łącznikiem? Omówimy następujący przykład, w którym skorzystamy z twierdzenia 5.3.

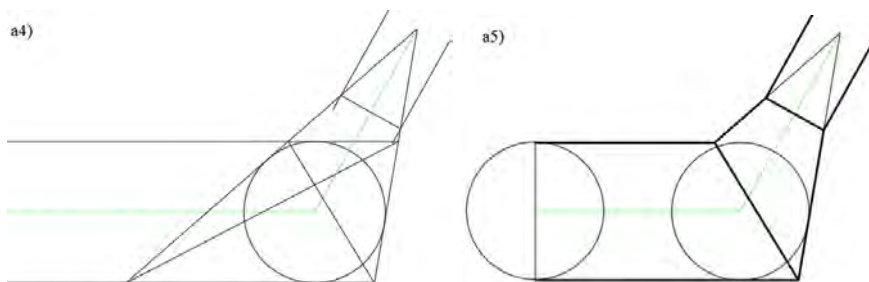


Rysunek 5.62: Po zgięciu kartki papieru: (a) walec (na fotografii, oczywiście, w widoku perspektywicznym); (b) stożek, fot. M. Koźniewski

**Przykład 5.8.** Połączyć konstrukcyjnie, za pomocą powierzchni stożka, dwie rury o różnych średnicach i przecinających się osiach (rys. 5.63a). Dokonać rozwinięcia powierzchni połączeń.

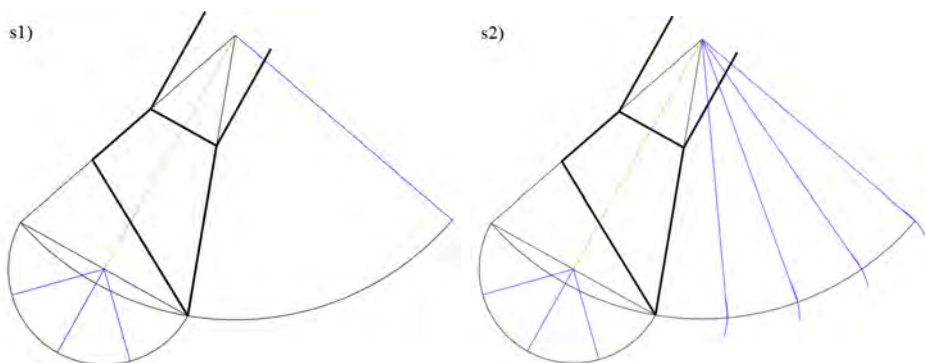


Rysunek 5.63: Dane są: a) rzuty dwóch walców o przecinających się osiach, równoległych do rzutni poziomej; a1) konstruujemy osie walców; a2) okrąg o środku w punkcie przecięcia się osi i promieniu równym promieniowi walca o większej średnicy, następnie ze stosownie wybranego punktu na osi walca o mniejszym przekroju konstruujemy dwie styczne do okręgu; a3) przedłużamy je, by tworzyły trapez (cdn.)

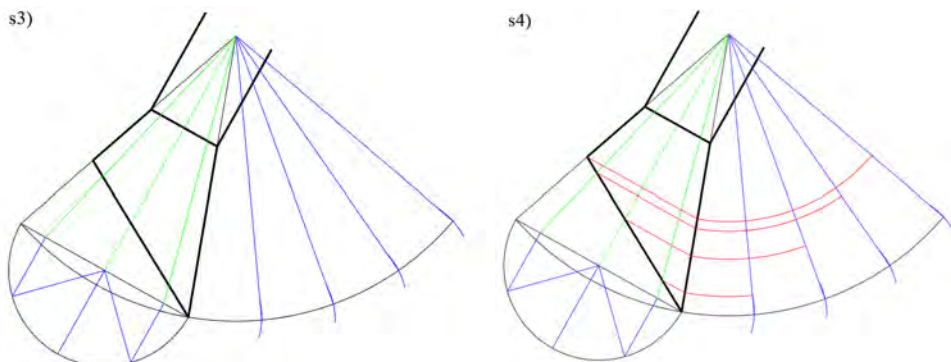


Rysunek 5.64: Konstruujemy: a4) przekątne trapezu, które zgodnie z twierdzeniem 5.3 są rzutami dwu elips. Linia przenikania powierzchni stożka z walcem o mniejszej średnicy jest okrąg, którego rzutem jest odcinek; a5) wybieramy krótszą przekątną, czyli elipsę o krótszej osi, jako linię spoinową walca (o większej średnicy) ze stożkiem oraz okrąg jako linię spoinową walca (o mniejszej średnicy) ze stożkiem (cdn.)

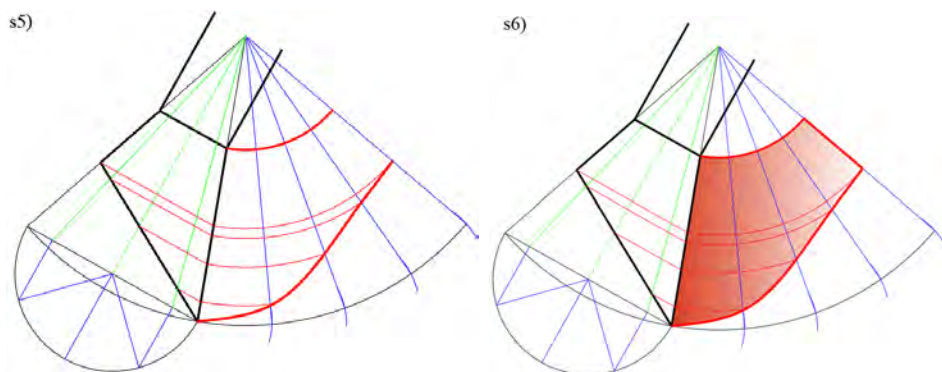
*Rozwiązanie zagadnienia z przykładu 5.8 w zakresie rzutu poziomego* wykonujemy na rysunkach 5.63, 5.64. Rysujemy równoległe do tworzących konturowych osie walców, okrąg o środku w punkcie przecięcia się osi i promieniu równym promieniowi większego walca i na końcu styczne do tego okręgu poprowadzone z dowolnego punktu osi walca o mniejszym promieniu. Następnie znajdziemy rozwinięcie części dwu powierzchni. Trzecia część jest prostokątem i nie wymaga specjalnej konstrukcji. Rozwinięcie powierzchni stożka zawiera się w wycinku koła o promieniu równym tworzącej stożka (rys. 5.65), walca zaś w prostokącie (rys. (5.69)w3). Przybliżoną konstrukcję rozwinięć realizujemy na rysunkach 5.65–5.71.



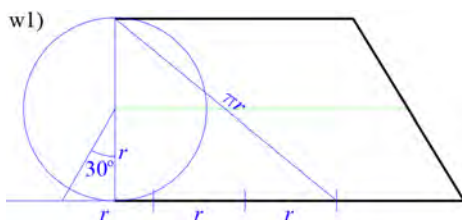
Rysunek 5.65: Konstruujemy: s1) wycinek koła o promieniu równym tworzącej konturowej, dzielimy okrąg podstawy na pewną liczbę części (tu: na cztery części); s2) w sposób przybliżony odmierzamy części łuku podstawy na łuku wycinka, zwiększenie liczby podłuków zwiększa dokładność rozwinięcia powierzchni (cdn.)



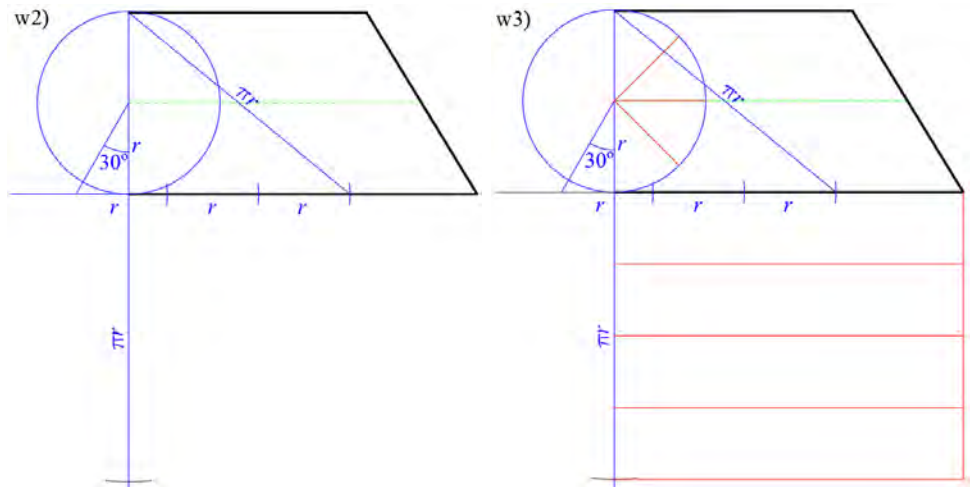
Rysunek 5.66: Znajdujemy: s3) rzut poziomy wybranych tworzących (przy ich liczbie dla ułatwienia można je ponumerować); s4) obracamy tworzące dookoła osi, tak by zajęły położenie konturowe (dokonujemy kładu), i rysując odpowiednie łuki okręgów, odmierzamy na odpowiednich tworzących wycinka (cdn.)



Rysunek 5.67: Otrzymane punkty: s5) łączymy krzywą (w konstrukcji p-o możemy posłużyć się krzywką, w środowisku AutoCAD-a możemy skorzystać z konstrukcji krzywej splajn). Druga krzywa jest łukiem okręgu; s6) kreskujemy odpowiedni obszar

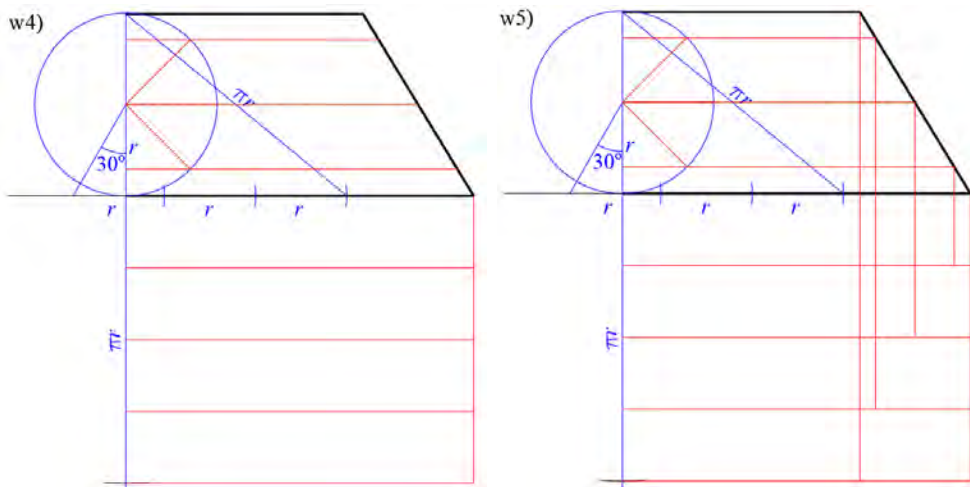


Rysunek 5.68: Rektyfikacja okręgu wg Kochańskiego (cdn.)



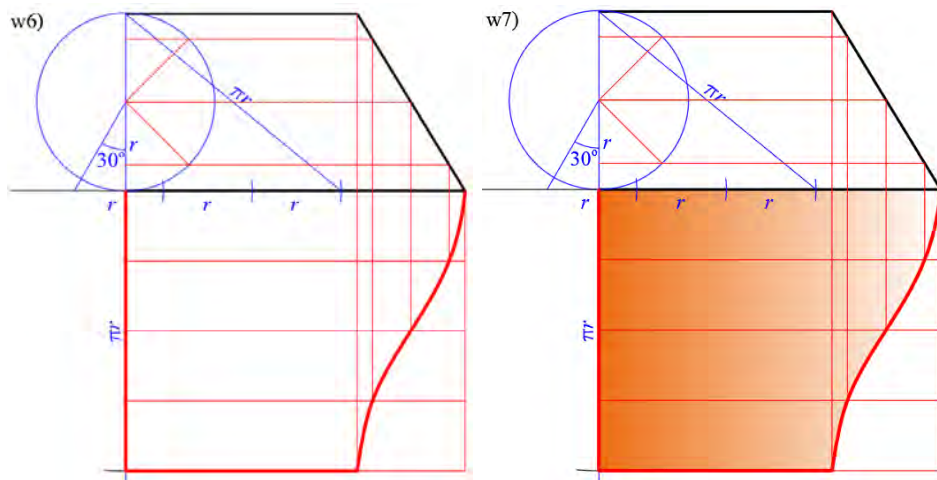
Rysunek 5.69: Rozwinięcie powierzchni walcowej: w2) odmierzamy długość połowy okręgu na linii pionowej; w3) dzielimy łuk okręgu i rysujemy tworzące walca (cdn.)

Rozwinięcie walca wymaga rektyfikacji okręgu (wyprostowania). Konstrukcja ta też musi być przybliżona. Stosujemy wtedy jedną z popularnych metod, tzw. *konstrukcję Kochańskiego*, opisaną na rysunku 5.68.



Rysunek 5.70: Rozwinięcie powierzchni walcowej (cd): w4) rysujemy tworzące walca odpowiadające podziałowi; w5) odmierzamy części tworzących na tworzących (cdn.)





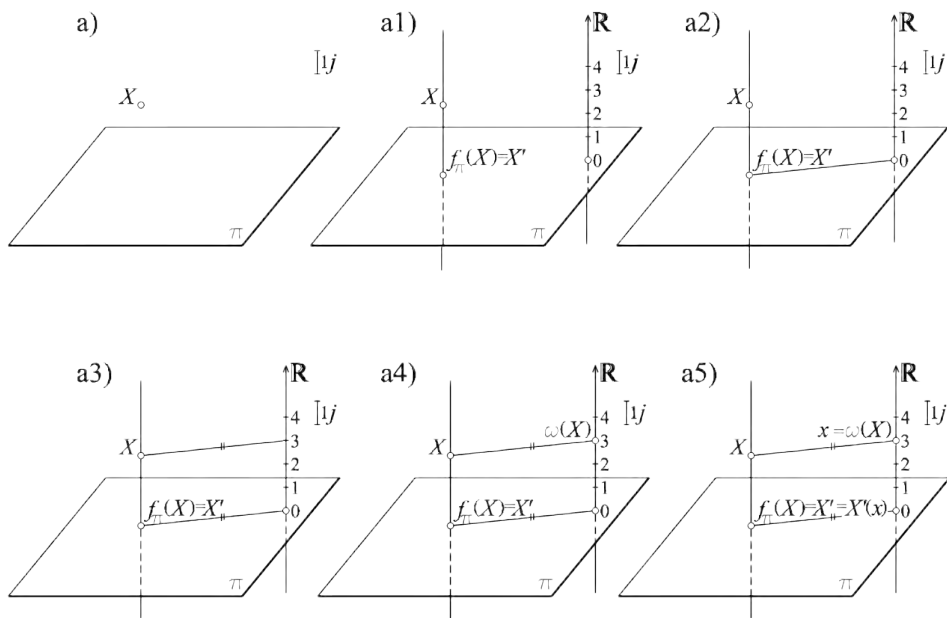
Rysunek 5.71: Rozwinięcie powierzchni walcowej (cd): w6) otrzymane punkty łączymy krzywą; w7) kreskujemy obszar

Rysujemy styczną do okręgu podstawy stożka, przy promieniu prostopadłym do stycznej odmierzamy kąt  $30^\circ$ . Drugie ramię wyznacza na stycznej punkt, od którego odmierzamy trzy promienie okręgu i otrzymany punkt łączymy z drugim punktem średnicy (rys. 5.68). Łuk okręgu podstawy walca dzielimy na pewną liczbę części. W sposób przybliżony odmierzamy części łuku podstawy na odcinku pionowym; zwiększenie liczby podłuków zwiększa dokładność rozwinięcia powierzchni. Dalsza część konstrukcji przebiega podobnie jak w przypadku stożka, z tą różnicą, że tworzące walca mają rzeczywistą długość (rys. 5.68–5.71).

## Rozdział 6

# Rzut cechowany

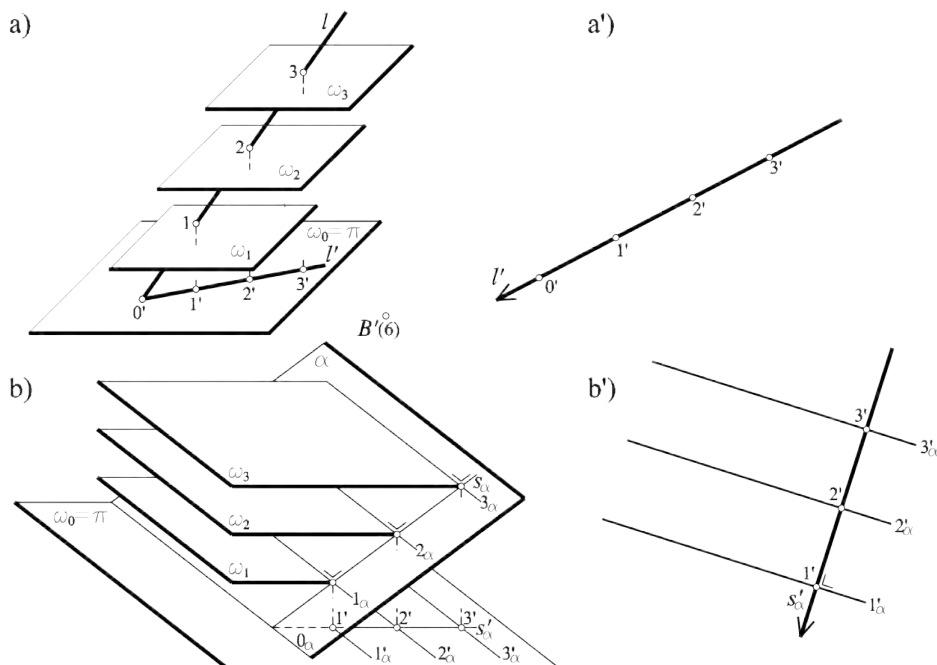
### 6.1. Definicja rzutu cechowanego



Rysunek 6.1: Definicja rzutu cechowanego: a) aparat rzutujący rzutu cechowanego: płaszczyzna  $\pi$  – rzutnia, jednostka miary ( $1j$ ); a1) aparat rzutujący rzutu cechowanego po wyborze kierunku i punktu zerowego (oczywiście na rzutni), czyli osi liczbowej; rzut prostokątny  $f_\pi(X) = X'$  punktu  $X$  na płaszczyznę  $\pi$ ; a2–a4) rzut prostokątny  $\omega(X) = x$  punktu  $X$  na oś liczbową  $\mathbb{R}$  (na rysunku:  $x = 3$ , zatem rzutem punktu  $X$  jest punkt wraz z cechą  $X'(3)$ )

Rzut cechowany znajduje zastosowanie w odwzorowaniu powierzchni topograficznych. Metoda ta jest połączeniem geometrycznego rzutu prostokątnego i analitycznego odwzorowania prostej na zbiór liczb rzeczywistych  $\mathbb{R}$ .



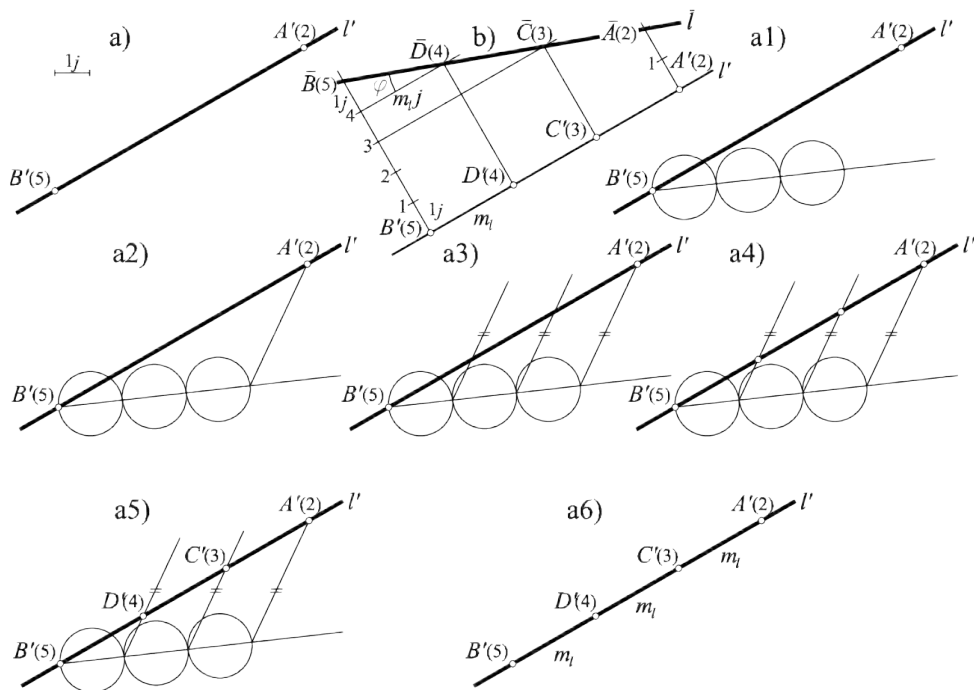


Rysunek 6.2: Ilustracja poglądowa aparatu rzutującego rzutu cechowanego: a) ilustracja poglądowa rzutu cechowanego prostej; a') rzut cechowany prostej; b) ilustracja poglądowa odwzorowania płaszczyzny w rzucie cechowanym; b') odwzorowanie płaszczyzny w rzucie cechowanym. Cyfry (liczby) oznaczające punkty mają dwójaki sens – oznaczają identyfikator punktu i cechę

Jest to bowiem odwzorowanie  $f : \mathbb{E}^3 \mapsto \pi \times \mathbb{R}$ , gdzie  $f = (f_\pi, \omega)$ , przy czym  $f_\pi$  jest rzutem prostokątnym przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{E}^3$  na płaszczyznę  $\pi$ ,  $\omega$  zaś jest odwzorowaniem przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{E}^3$  na dowolnie wybraną prostą  $\mathbb{R}$  (dokładniej oś liczbową) prostopadłą do rzutni  $\pi$ . Mamy  $f(X) = (f_\pi(X), \omega(X))$ . Oznaczając  $f_\pi(X) = X'$ ,  $\omega(X) = x$ , otrzymujemy zapis  $f(X) = (X', x)$ , który jeszcze skracamy do  $X'(x)$ . Punkt  $X'$  jest rzutem prostokątnym punktu  $X$  na płaszczyznę  $\pi$ , liczbę  $x$  nazywamy *cechą* punktu  $X$ . Symbol  $X'(x)$  oznaczać będzie *rzut cechowany* punktu  $X$  na płaszczyznę  $\pi$  (rys. 6.1). Odwzorowanie to jest wzajemnie jednoznaczne. Rzeczywiście wystarczy popatrzeć na zapis wzajemnie jednoznacznych odwzorowań:  $g : \mathbb{E}^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $h : \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $h_1 : \mathbb{R}^2 \longleftrightarrow \pi$ . Rzut cechowany, jako że jego składową jest rzut prostokątny, ma wszystkie niezmienniki rzutu prostokątnego.

## 6.2. Rzut cechowany prostej

Na rysunku 6.1 przedstawiono aparat rzutujący rzutu cechowanego i podano definicję tego rzutu oraz pokazano, jak znaleźć rzut cechowany punktu. Na rysunku 6.2a zaprezentowano ilustrację poglądową rzutu cechowanego prostej i odwzorowania płaszczyzny w rzucie cechowanym. Na odwzorowanej, w rzucie cechowanym, prostej (rys. 6.2a') zaznaczono rzuty kilku punktów.



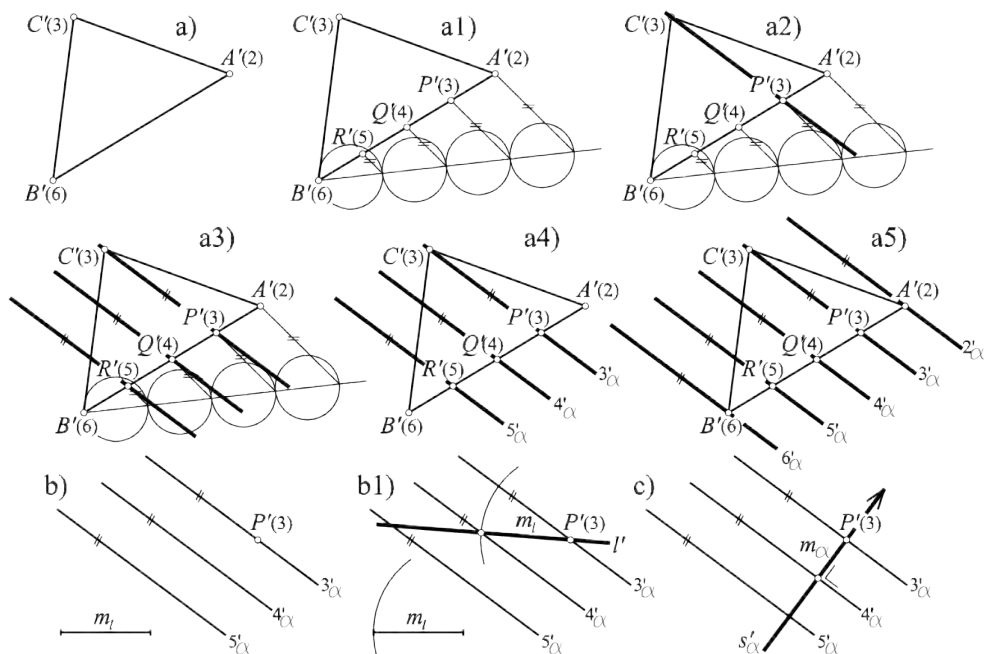
Rysunek 6.3: Zestopniowanie prostej i równoczesne wyznaczenie modułu prostej: b) ilustracja stopniowania prostej poprzez kład boczny prostej (obróć prostą  $l$  dookoła jej rzutu  $l'$  o kąt  $90^\circ$ , warto porównać z kładem trapezowym odcinka w rzutach Monge'a), w kładzie widoczny kąt nachylenia prostej do rzutni i nachylenie:  $n_l = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{m_l}$ ; a1)–a2) podział odcinka  $AB$  na trzy równe części poprzez wybranie dowolnej półprostej o początku  $B$  i odmierzenia na niej trzech równych odcinków (ilustrują to okręgi o równych promieniach); a3)–a5) realizacja podziału za pomocą twierdzenia Talesa; a6) zestopniowana prosta, moduł prostej to długość jednego z odcinków  $\{[AC], [CD], [DB]\}$  ( $AC = CD = DB$ ) zmierzona jednostką

Prosta jednak jest jednoznacznie odwzorowana, gdy dane są rzuty jej dwóch różnych punktów (rys. 6.3a). W odniesieniu do prostej wprowadza się niezwykle pożyteczne pojęcie modułu.

Modułem  $m_l$  prostej  $l$  nazywamy długość (zmierzoną daną jednostką) odcinka będącego rzutem takiego odcinka prostej  $l$ , którego końce mają cechy różniące się o 1.

Stopniowanie prostej polega na wyznaczaniu rzutów punktów tej prostej o kolejnych cechach całkowitych (rys. 6.3a1–a4). Wykonujemy je w celu znalezienia modułu prostej lub realizacji innych konstrukcji, np. konstrukcji poprowadzenia płaszczyzny przez prostą.

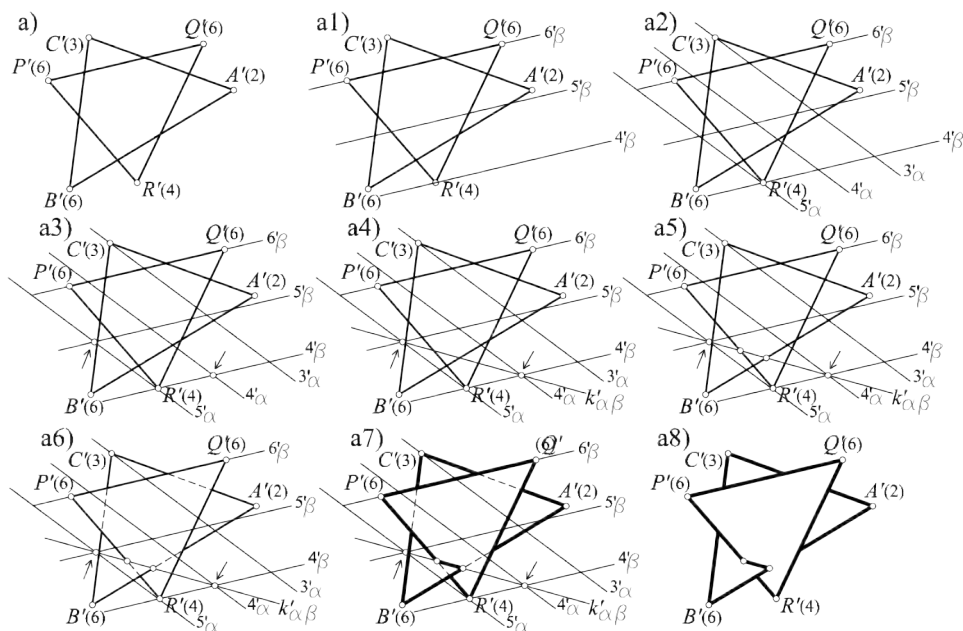
Nachyleniem  $n_l$  prostej  $l$  nazywamy tangens kąta, jaki tworzy prosta  $l$  z rzutnią  $\pi$ . Moduł prostej jest odwrotnością nachylenia, tzn.  $m_l = \frac{1}{n_l}$ . Rzeczywiście  $n_l = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1_j}{m_{1j}} = \frac{1}{m_l}$  (rys. 6.3b).



Rysunek 6.4: Wyznaczanie warstwic płaszczyzny i równocześnie wyznaczanie modułu płaszczyzny: a1) zestopniowanie prostej ( $AB$ ); a2) wyznaczenie warstwic  $3'_\alpha$  – łączymy prostą punkty o tych samych cechach; a3–a5) przez punkty o cechach całkowitych prowadzimy kolejne warstwicę – proste równoległe; b–b1) wyznaczanie prostej  $l$  o danym module  $m_l$ , leżącej na płaszczyźnie  $\alpha$ ; c) wyznaczanie modułu  $m_\alpha$  i równocześnie prostej spadu  $s'_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ ; strzałka oznacza kierunek „spadu” płaszczyzny, czyli kierunek zmniejszania się cech punktów płaszczyzny, przy odwzorowaniu płaszczyzny za pomocą warstwic często umieszcza się prostą spadu (ze strzałką)

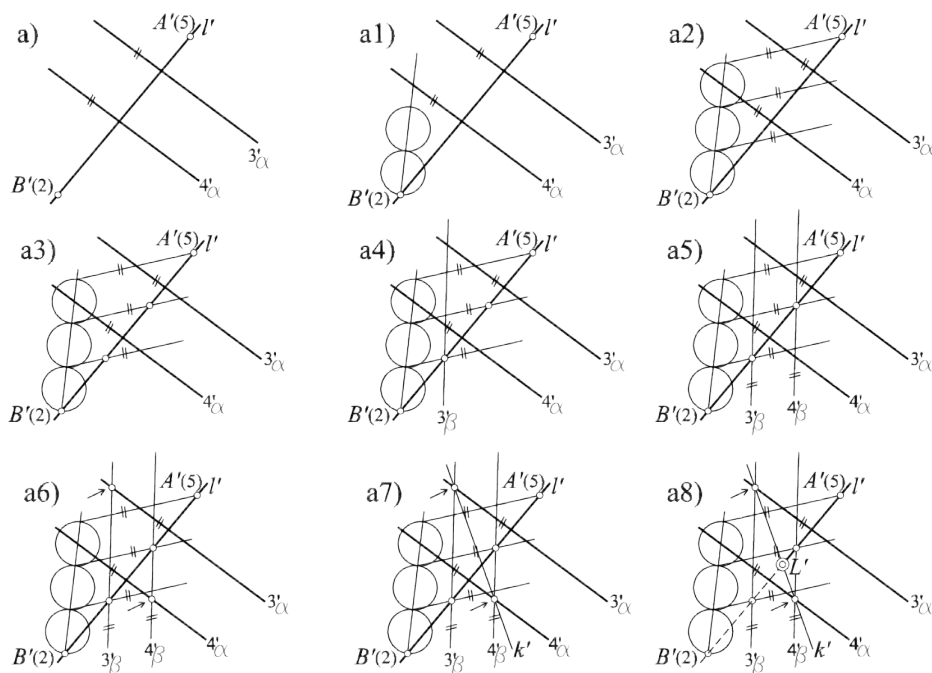
## 6.3. Odwzorowanie płaszczyzny

Podobnie jak w przypadku innych rzutów, płaszczyznę odwzorujemy za pomocą elementów ją wyznaczających. Proste poziome (równoległe do rzutni) odwzorowywanej płaszczyzny nazywać będziemy *poziomymi* lub *warstwowymi* (na rys. 6.2 proste  $1_\alpha, 2_\alpha, \dots$ ), ich rzuty *poziomicami* albo *warstwicami* (na rys. 6.2 proste  $1'_\alpha, 2'_\alpha, \dots$ ). Proste te są przekrojami płaszczyzn równoległych do rzutni  $\pi$  (rys. 6.2b). Każdą prostą przecinającą prostopadłe warstwowe płaszczyzny  $\alpha$  nazywać będziemy *prostą spad*u płaszczyzny  $\alpha$ . Niech  $s_\alpha$  oznacza prostą spad u płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 6.2b', 6.4c). Dla dowolnej prostej  $l$  płaszczyzny  $\alpha$  mamy:  $m_{s_\alpha} \leq m_l \Rightarrow n_{s_\alpha} \geq n_l$ . Zatem prosta spad u spośród wszystkich prostych na płaszczyźnie ma najmniejszy moduł, czyli największe nachylenie. Moduł  $m_{s_\alpha}$  prostej spad u nazywać będziemy *modułem płaszczyzny*, który będziemy oznaczać krócej przez  $m_\alpha (= m_{s_\alpha})$ .



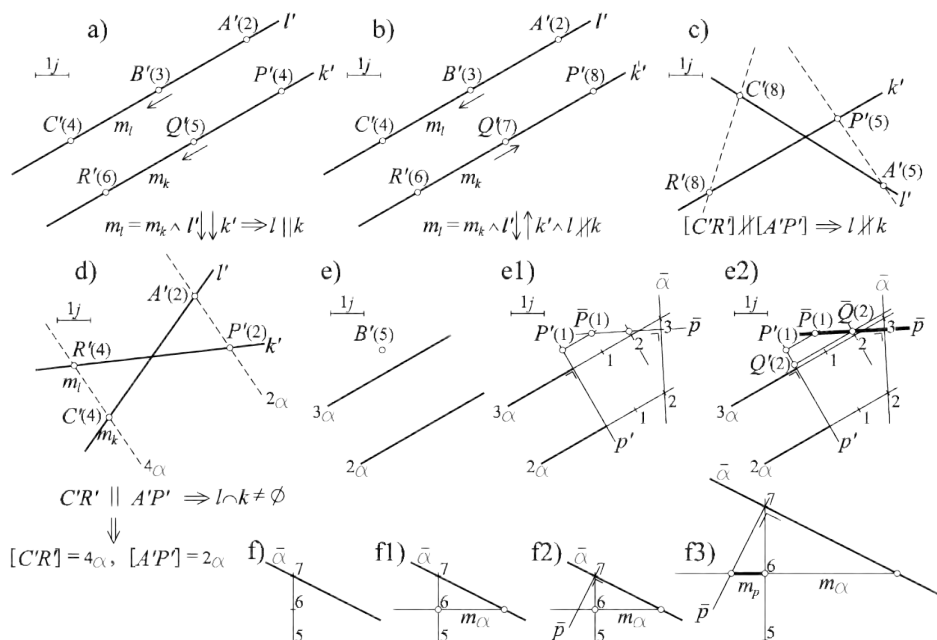
Rysunek 6.5: Wyznaczenie krawędzi wspólnej płaszczyzn trójkątów  $\alpha(ABC')$ ,  $\beta(PQR)$  (a–a7) i przenikania trójkątów (a8): a1) konstrukcja warstwic płaszczyzny  $\beta(PQR)$ ; a2) konstrukcja warstwic płaszczyzny  $\alpha(ABC')$ ; a3) znalezienie dwóch punktów wspólnych obu płaszczyzn (strzałki); a4) konstrukcja krawędzi  $k_{\alpha\beta}$ ; a5) znalezienie punktów przebiecia płaszczyzn  $\alpha, \beta$  odpowiednio krawędziami  $(AB), (PR)$ ; a6–a7) określenie widoczności elementów i zaznaczenie linią grubą przenikających się elementów; a8) przenikające się trójkąty z pominięciem linii niewidocznych

Jako *nachylenie*  $n_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  przyjmujemy (określamy) nachylenie jej prostej spadu, czyli  $n_\alpha = \frac{1}{m_\alpha}$ . Aby jednoznacznie wyznaczyć płaszczyznę za pomocą poziomicy, wystarczy wyznaczyć jej dwie jakiegolwiek poziomicie. Płaszczyzna jest zestopniowana, jeśli wyznaczone są jej poziomicie o kolejnych całkowitych cechach. Wyznaczanie warstwicy płaszczyzny określonej za pomocą trójkąta opisuje rysunek 6.4. Na rysunkach 6.4b, b1 mamy konstrukcję prostej o danym module (nachyleniu) leżącej na danej płaszczyźnie i przechodzącej przez punkt  $P$ . Czy na danej płaszczyźnie można zawsze znaleźć prostą o dowolnym, z góry zadanym, nachyleniu? Rysunek 6.4c przedstawia wyznaczenie modułu i jednocześnie prostej spadu płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $P$  i może być pomocny przy odpowiedzi na powyższe pytanie.



Rysunek 6.6: Punkt wspólny płaszczyzny  $\alpha(3'_\alpha, 4'_\alpha)$  z prostą  $l(AB)$  znajdujemy w sposób następujący: a1–a3 stopniujemy prostą (odcinek  $[AB]$ ) ( $AB$ ); a4) prowadzimy warstwicę  $3'_\beta$  dowolnej płaszczyzny; a5–a6) drugą równoległą warstwicę  $4'_\beta$ ; a7) znajdujemy krawędź  $k'$  jako prostą łączącą punkty przecięcia jednoimiennych warstwicy płaszczyzny  $\alpha$ ; a8) punkt przecięcia  $L'$  prostych  $l'$  i  $k'$  jest szukanym punktem, na koniec zaznaczamy widoczność elementów, kierując się wysokością – cechami punktów

## 6.4. Elementy wspólne: płaszczyzna–płaszczyzna, płaszczyzna–prosta



Rysunek 6.7: Położenie prostych: a) proste równoległe, rzuty prostych muszą być równoległe i muszą mieć ten sam moduł oraz cechy punktów na tych prostych muszą zmieniać się w tej samej orientacji; b) proste skośne leżące w płaszczyznach równoległych (prostopadłych do rzutni); c) proste skośne; d) proste przecinające się. Konstrukcja prostej prostopadłej do płaszczyzny: e1) przez punkt  $P$  poprowadzimy więc płaszczyznę  $\beta$  (prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  i do rzutni), której rzutem jest prosta  $p'$ , znajdujemy profil  $\bar{\alpha}$  płaszczyzny  $\alpha$  oraz profil  $\bar{P}$  punktu  $P$  (konstrukcję interpretujemy jako kład płaszczyzny  $\beta$  na rzutnię), następnie przez punkt  $\bar{P}$  prowadzimy prostą  $\bar{p}$  prostopadłą do prostej  $\bar{\alpha}$ , poprowadzona prosta  $\bar{p}$  jest (w profilu) szukaną prostą; e2) konstruujemy moduł  $m_p$  tej prostej, wybierając na niej punkt  $Q(2)$  o cesze różniącej się (od cechy punktu  $P(1)$ ) o jeden; f-f2) dokładny opis konstrukcji modułu

Płaszczyznę możemy przedstawić za pomocą warstwic. Stąd elementy wspólne dwu płaszczyzn, czyli krawędzie, konstruujemy, łącząc dwa punkty wspólne jednoimiennych warstwic (mających tę samą cechę) (rys. 6.5). Punkt wspólny prostej z płaszczyzną znajdujemy, wykorzystując poprzednią konstrukcję. Mianowicie, wcześniej przez prostą poprowadzimy płaszczyznę (przez zestopniowane punkty prostej poprowadzimy warstwicę) i znajdujemy krawędź (rys. 6.6). Punkt wspólny tej krawędzi

z wyjściową prostą jest szukanym punktem. Przy znajdowaniu punktu wspólnego prostej z płaszczyzną ta trzyetapowa konstrukcja jest stosowana we wszystkich rodzajach rzutów.

## 6.5. Prosta prostopadła do płaszczyzny

Rzut prostej prostopadłej do płaszczyzny jest w oczywisty sposób prostopadły do warstwic tej płaszczyzny. Jest to konsekwencja obowiązywania w rzucie prostokątnym *niezmiennika charakterystycznego rzutowania prostokątnego*. Warto porównać konstrukcję prostej prostopadłej do płaszczyzny w rzutach prostokątnych na dwie rzutnie. Konstrukcję tę omówimy na poniższym przykładzie.

**Przykład 6.1.** Przez dany punkt  $P(1)$  poprowadzić prostą  $p$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  określonej za pomocą warstwic (rys. 6.7e).

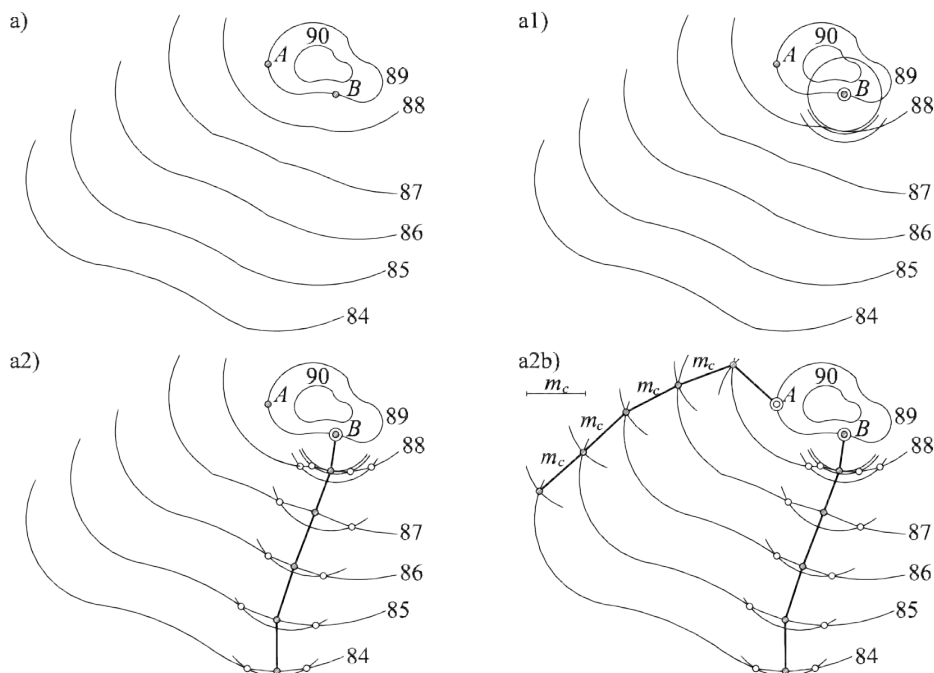
*Rozwiązanie* zagadnienia z przykładu 6.1. Szukana prosta  $p$  leży w płaszczyźnie prostopadłej do rzutni. Rzutem takiej płaszczyzny jest prosta  $p'$ . Przez punkt  $P$  poprowadźmy więc płaszczyznę  $\beta$  (prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  i do rzutni), której rzutem jest prosta  $p'$  (rys. 6.7e1). Jest to tzw. płaszczyzna profilowa płaszczyzny  $\alpha$ . Znajdźmy profil  $\bar{\alpha}$  płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 6.7e1) oraz profil  $\bar{P}$  punktu  $P$ . Powyższą konstrukcję należy interpretować jako kład płaszczyzny  $\beta$  na rzutnię. Następnie poprowadźmy przez punkt  $\bar{P}$  prostą  $\bar{p}$  prostopadłą do prostej  $\bar{\alpha}$ . Poprowadzona prosta jest (w profilu) szukaną prostą. Na rysunku 6.7e2 konstruujemy także moduł  $m_p$  tej prostej. Jego dokładny opis został zilustrowany na rysunkach 6.7f-f2.

## 6.6. Wzajemne położenie prostych

Jak wiadomo, dwie proste mogą mieć wzajemne położenia. Mogą być równoległe. Wówczas z uwagi na to, że rzut cechowany jest rzutem prostokątnym, rzuty prostych muszą być równoległe oraz muszą mieć ten sam moduł, a cechy punktów na tych prostych muszą zmieniać się w tej samej orientacji (rys. 6.7a). Symbolicznie zapisujemy  $(m_l = m_k, l' \downarrow \downarrow k') \longleftrightarrow l \parallel k$ . Na rysunku 6.7b mamy obrazy dwu prostych skośnych, mimo że rzuty  $l'$ ,  $k'$  są prostymi równoległymi i odwzorowane proste mają taki sam moduł. Mamy bowiem  $l' \downarrow \uparrow k'$ ). Mogą się przecinać. Wtedy wyznaczają tę samą płaszczyznę, czyli proste łączące ich punkty o tych

samych cechach muszą być równoległe (rys. 6.7d). Gdy ten warunek nie jest spełniony, mamy rzuty prostych skośnych (rys. 6.7c).

## 6.7. Odzworowanie krzywych i powierzchni



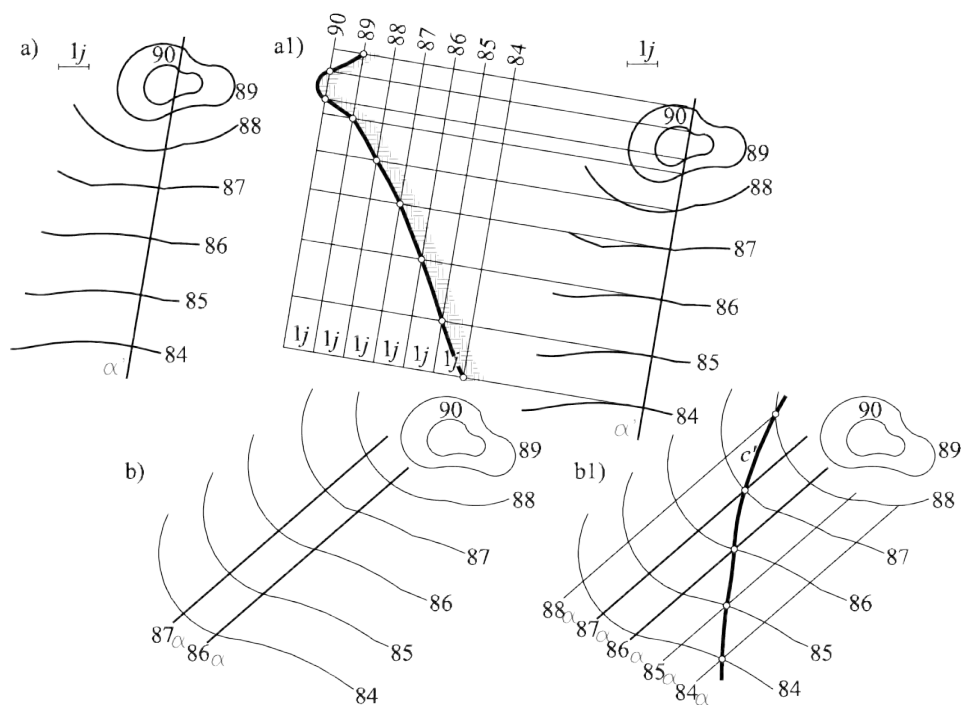
Rysunek 6.8: Konstrukcja linii spadów i linii stokowej: a–a2) wyznaczanie kolejnych punktów linii spadów powierzchni topograficznej; a2b) konstrukcja linii stokowej o danym module  $m_c$

Zakładamy, że odwzorowywane krzywe i powierzchnie są prawie regularne, tzn. mają proste i płaskie styczne wszędzie z wyjątkiem skończonej (w praktyce niewielkiej) liczby punktów. *Nachyleniem krzywej* w danym punkcie nazywać będziemy nachylenie prostej stycznej do tej krzywej w tym punkcie. W praktyce nachylenie krzywej wyznaczamy jako nachylenie siecznej tej krzywej, „bliskiej” danej stycznej.

Istotnym problemem przy odwzorowaniu krzywych jest ich aproksymacja okręgami <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Jak już było powiedziane, okrąg i prosta są podstawowymi krzywymi w logice



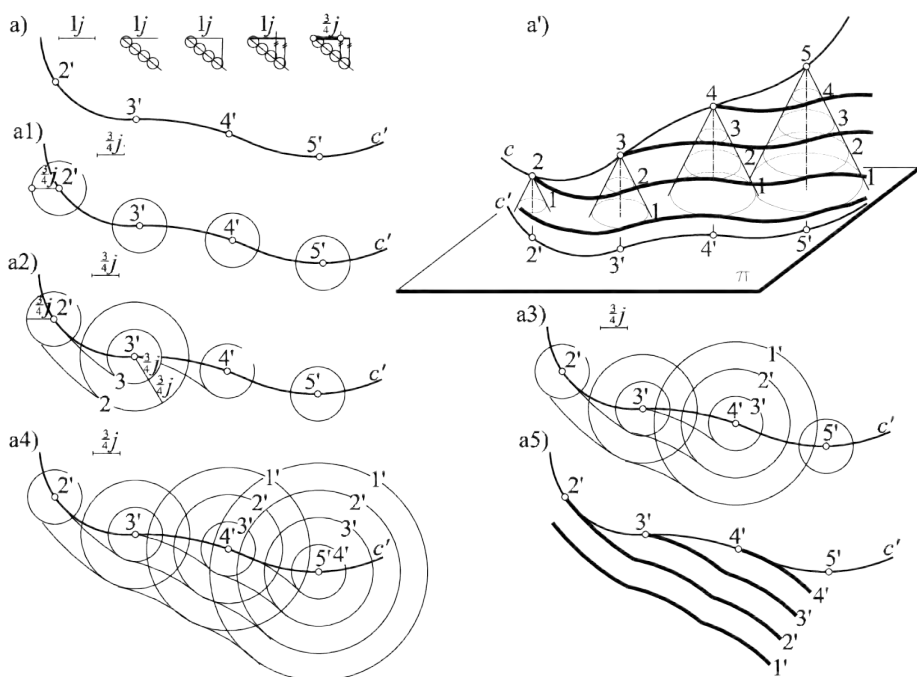


Rysunek 6.9: Przekroje powierzchni topograficznej płaszczyzną: a–a1) przekrój płaszczyzną pionową  $\alpha$  powierzchni topograficznej – *profil*; b–b1) linia przenikania powierzchni topograficznej i płaszczyzny  $\alpha$

Krzywą, której nachylenie w każdym jej punkcie jest jednakowe, nazywamy *krzywą stokową* (rys. 6.8a2b). *Powierzchnię terenu* (zwaną też *powierzchnią topograficzną*) przecinamy płaszczyznami poziomymi leżącymi na określonych wysokościach nad poziomem morza (również pod poziomem morza w przypadku depresji). W przekrojach otrzymujemy linie poziome tej powierzchni. Rzuty tych linii (warstwie) narysowane w skali tworzą *plan poziomicowy* tej powierzchni. Jeżeli krzywa  $c$  leży na powierzchni i przecina linie poziome tej powierzchni, to zestopniują one rzut krzywej. W szczególności krzywe przecinające prostopadle linie poziome powierzchni są *liniami spadu* powierzchni. Z uwagi na niezmiennik charakterystyczny rzutu prostokątnego rzut linii spadu przecina poziomice pod kątem prostym. Na rysunku 6.8 pokazujemy sposób wyzna-

konstrukcji edytorów graficznych, w tym AutoCAD-a, obok tzw. *krzywych sklepanych*. Na nich wykonywane są podstawowe operacje geometryczne. Krzywe, w szczególności warstwie powierzchni, aproksymować będziemy okręgami i to najczęściej w ten sposób uzyskujemy krzywe regularne mające wszędzie styczną.

czania rzutów linii spadu powierzchni. Punkt linii spadu jest punktem stycznego okręgu o środku w punkcie poprzednim. Ponieważ punkt taki trudno znaleźć, przyjmujemy go jako w środku „krzywoliniowej cięciwy” okręgu. Im okrąg ma mniejszy promień, tym dokładniejsza jest konstrukcja (rys. 6.8). Linie spadu nie są jednoznacznie określone w tzw. *punktach stacjonarnych powierzchni* (rys. 6.11b).

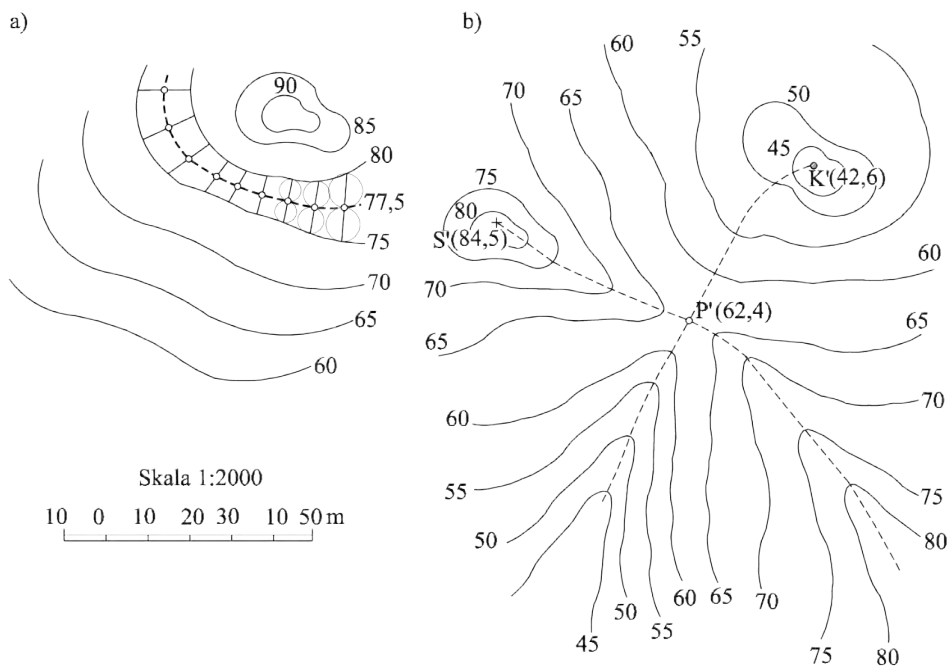


Rysunek 6.10: Konstrukcja *powierzchni stokowej*  $\Phi$ , czyli powierzchni o stałym nachyleniu równym  $n_\Phi = \frac{4}{3}$ : a1) wyznaczenie modułu  $m_\Phi = \frac{3}{4}j$  za pomocą twierdzenia Talesa; a2) konstrukcja obwiedni rodziny stożków (w rzucie jest to obwiednia rodziny okręgów o promieniach będących wielokrotnościami modułu  $m_\Phi (= \frac{3}{4}j)$ )

Są to:

- *punkt wierzchołkowy* (*szczyt* lub *kopa*), w którym powierzchnia przyjmuje maksimum lokalne; w rzucie cechowanym szczyt jest to część terenu z układem warstwic o rosnących cechach, ale o coraz mniejszych obwodach redukujących się w końcu do punktu wierzchołkowego,
- *punkt kotlinowy*, w którym powierzchnia przyjmuje minimum lokalne; w rzucie cechowanym kotlina jest to część terenu z układem warstwic o malejących cechach, ale o coraz mniejszych obwodach redukujących się w końcu do punktu kotlinowego,

o *punkt siodłowy*, w którym część powierzchni jest pod płaszczyzną styczną, część zaś nad nią. W punkcie tym przecinają się linie *grzbietowa* i *ściekowa*. *Linia grzbietowa* to linia spadów, od której oddalają się inne linie spadów (w kierunku zmniejszających się cech linii poziomych). *Linia ściekowa* to linia spadów, do której zbliżają się inne linie spadów (w kierunku zmniejszających się cech linii poziomych) (rys. 6.9).



Rysunek 6.11: Punkty charakterystyczne (stacjonarne) w terenie: b) *S* – szczytowy i wychodząca z niego linia grzbietowa (linie spadów „oddalają się”), *K* – kotlinowy i dochodząca do niego linia ściekowa (linie spadów „zbliżają się”), *P* – siodłowy (punkt przecięcia się linii grzbietowej i ściekowej; a) tworzenie nowych warstwic za pomocą interpolacji polegającej na konstrukcji prostych prostopadłych do warstwic i znajdowania środków cięciw wyznaczonych przez sąsiednią warstwicę

*Nachylenie powierzchni* w danym punkcie jest nachyleniem płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w tym punkcie. Powierzchnię, która w każdym swym punkcie ma jednakowe nachylenie, nazywamy *powierzchnią stokową* (rys. 6.10). Powstaje ona jako obwiednia rodziny stożków o wierzchołkach na danej krzywej o tworzących mających jednakowe na-

chylenie (rys. 6.10). W rzucie otrzymujemy obwiednię rodziny okręgów <sup>2</sup> o promieniach będących wielokrotnościami  $\frac{3}{4}j$ .



Rysunek 6.12: Fragment mapy Białegostoku sprzed II wojny światowej – ukształtowanie terenu charakteryzują warstwyce główne narysowane grubą linią i numerowane liczbami wysokościowymi (cechami) oraz warstwyce podrzędne, których wysokości można wyznaczyć poprzez interpolację

*Profillem terenu* nazywać będziemy przekrój powierzchni terenu płaszczyzną prostopadłą do rzutni (rys. 6.9a1). Profil terenu jest niewidoczny w rzucie i dlatego przedstawiamy go w rzucie bocznym na płaszczyznę równoległą do tnącej płaszczyzny profilowej lub, jak kto woli, w kładzie płaszczyzny profilowej (rys. 6.9a1). Na mapach warstwicznych zwykle podaje się położenie i wysokość w kładzie płaszczyzny profilowej.

## 6.8. Projekt robót ziemnych przy budowie drogi

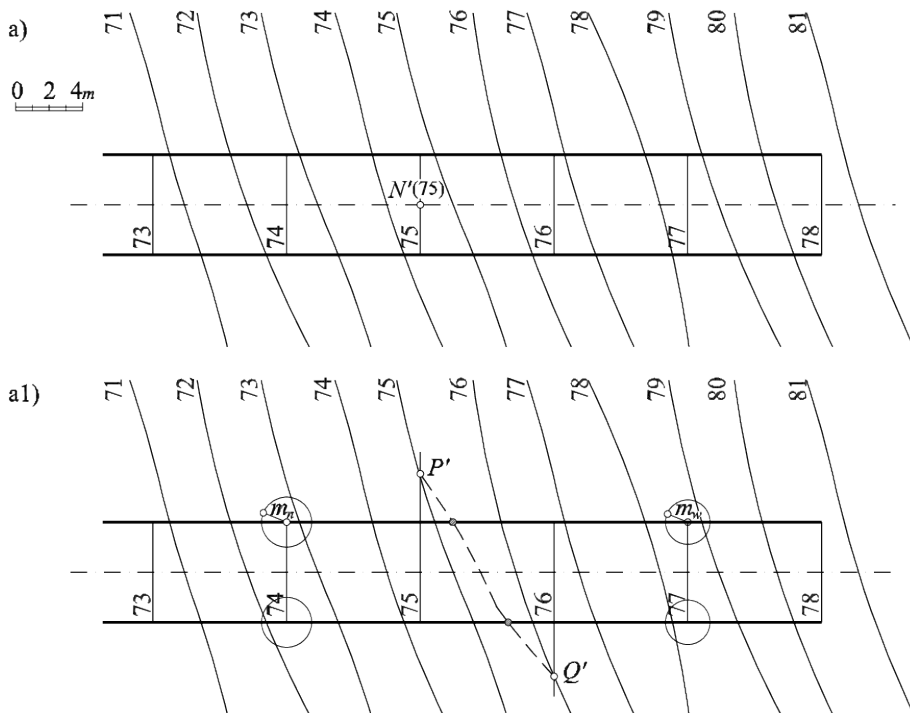
**Przykład 6.2.** Na planie poziomicowym terenu wykonanym w skali 1:200 zaznaczony jest rzut  $s'$  osi  $s$  drogi przechodzący przez punkt niwelacyjny  $N'(75)$  leżący na poziomicy 75' terenu. Szerokość drogi jest

<sup>2</sup> Obwiednią jednoparametrowej rodziny krzywych  $F(x, y, C) = 0$  nazywamy krzywą o następujących własnościach:

- (1) w każdym swoim punkcie jest ona styczna do krzywej należącej do obwodzonej rodziny,
- (2) jest styczna do każdej krzywej tej rodziny,
- (3) żaden jej łuk nie pokrywa się z żadną z krzywych rodziny.

równa 6 m, a jej nachylenie  $n_d = 12,5\%$ . Droga biegnie na nasypie (gdy jej wysokości są większe od wysokości terenu) i w wykopie (gdy jej wysokości są mniejsze od wysokości terenu). Nasyp i wykop są ograniczone płaskimi skarpami, które przechodzą przez krawędzie korony drogi i mają nachylenia odpowiednio  $n_n = \frac{2}{3}$ ,  $n_w = \frac{3}{4}$  (rys. 6.13). Wyznaczyć plan drogi, skarpy nasypu i wykopu oraz dwa przekroje pionowe poprzeczne – profile na nasypie i w wykopie.

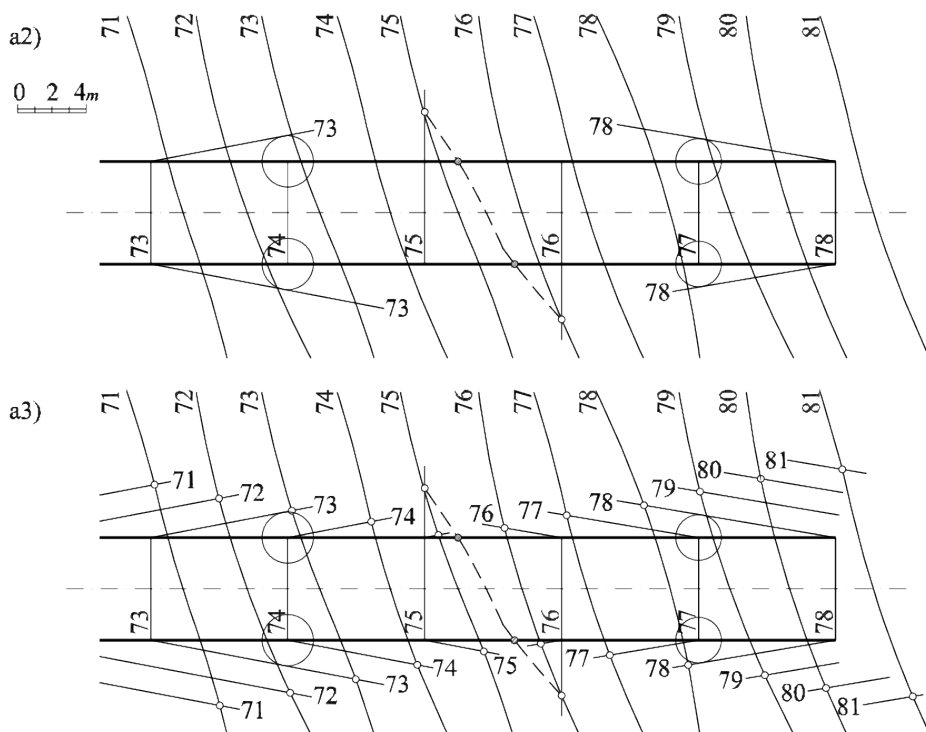
*Rozwiązanie* zadania z przykładu 6.2. Przyjmujemy, że poziomice są wyznaczone przez przekroje terenu płaszczyznami poziomymi w odległości 1 m. W skali 1:200 mamy  $1\text{ cm} \rightarrow 2\text{ m}$ , zatem  $0,5\text{ cm} \rightarrow 1\text{ m}$ ,  $sz = 6\text{ m} \rightarrow 3\text{ cm}$ . Dalej  $n_n = \frac{2}{3} \rightarrow m_n = \frac{3}{2}$  ( $m_n = \frac{3}{2} \cdot 0,5\text{ cm} = 7,5\text{ mm}$ ),  $n_w = \frac{3}{4} \rightarrow m_w = \frac{4}{3}$  ( $m_w = \frac{4}{3} \cdot 0,5\text{ cm} = 6,66\text{ mm}$ ). Nachylenie drogi  $n_d = 12,5\% \rightarrow n_d = \frac{1}{8}$ . Zatem  $m_d = 8 \cdot 0,5\text{ cm} = 4\text{ cm}$ .



Rysunek 6.13: Założenia do projektu rzutu drogi. Stopniowanie drogi. Wyznaczenie punktów przejścia nasypu w wykop (cdn.)

Na rysunku 6.13a przyjęto założenia do projektu rzutu drogi. Najpierw wykonuje się stopniowanie drogi (osi drogi). Moduł drogi w przy-

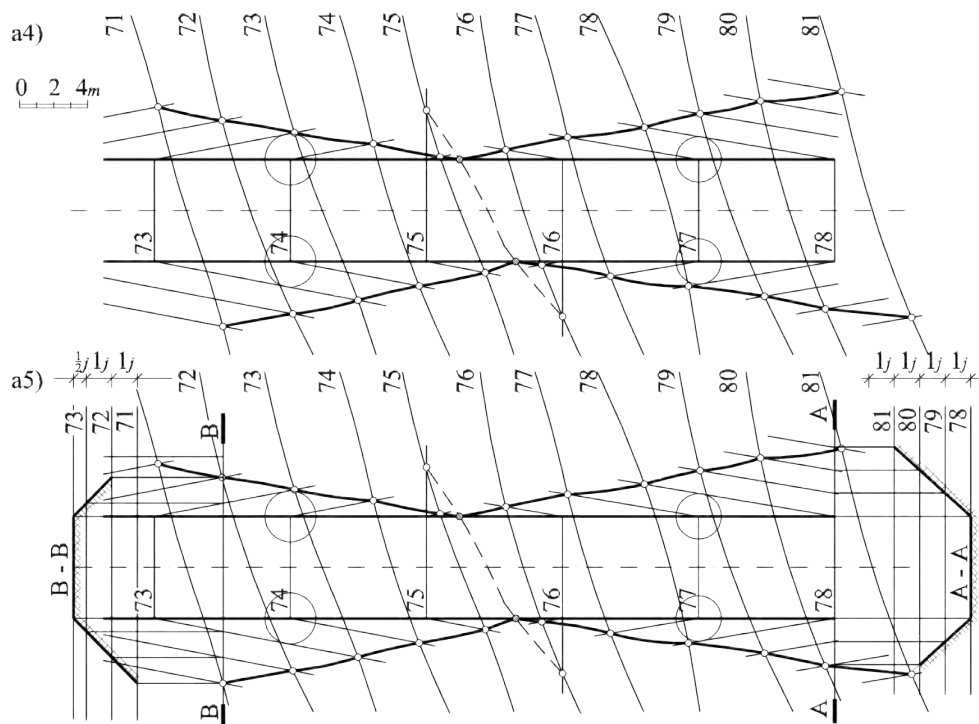
jętej skali wynosi 4 cm, rysujemy warstwicę drogi poprzez odmierzenie (za pomocą cyrkla) odcinków na osi drogi.



Rysunek 6.14: Konstrukcja warstwicy nasypu i wykopu, pierwsze styczne do okręgu, następnie równoległe do nich. Punkty przecięcia się poziomicy nasypu i wykopu z odpowiednimi poziomiami powierzchni topograficznej wyznaczają punkty linii przenikania tej powierzchni z płaszczyznami nasypu i wykopu (cdn.)

Następnie wyznaczamy punkty przejścia nasypu w wykop poprzez przecięcie wybranych warstwicy drogi z odpowiednimi warstwicami powierzchni topograficznej (w terenie) (punkty  $P$  i  $Q$  na rys. 6.13a1). Linia łącząca punkty  $P'$  i  $Q'$  (przerywana na rys. 6.13a1) rozdziela roboty ziemne na dwie części. W celu wyznaczenia warstwicy nasypu i wykopu rysujemy okręgi: w części nasypowej okrąg o promieniu  $m_n = \frac{3}{2}$ , w części, gdzie jest wykop, okrąg o promieniu  $m_w = \frac{4}{3}$ . Okręgi o promieniach  $m_w, m_n$  pozwolą następnie konstruować warstwicę nasypów i wykopów. Pamiętajmy, że okrąg narysowany w miejscu, gdzie jest nasyp, ma cechę o jeden niższą niż punkt, w którym znajduje się rzut jego środka, natomiast okrąg narysowany w miejscu, gdzie jest

wykop, ma cechę o jeden wyższą niż punkt, w którym znajduje się rzut jego środka. W szczególności na rysunku 6.13a1: okrąg narysowany w punkcie o cesze 74 ma cechę 73, a okrąg narysowany w punkcie o cesze 77 ma cechę 78.



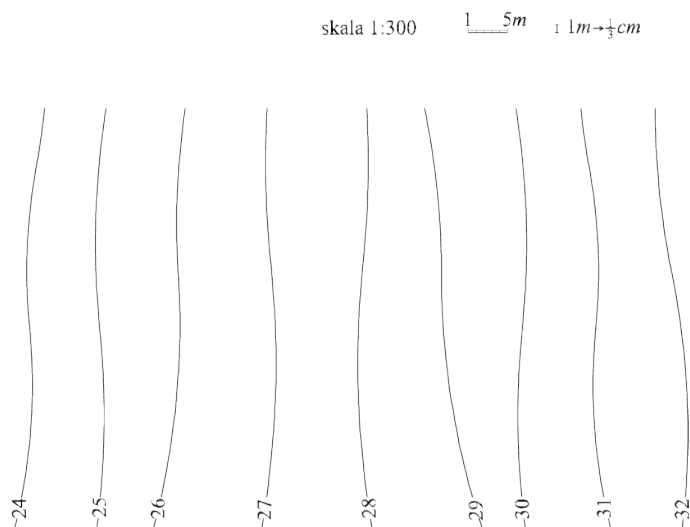
Rysunek 6.15: Profile drogi (przekroje płaszczyznami pionowymi, prostopadłymi do rzutu osi drogi) wykonano: przekrój nasypu na wysokości 73,5 m n.p.m. nawierzchni drogi, przekrój wykopu na wysokości 78 m n.p.m.

Pamiętając o tym, rysujemy pierwsze styczne do okręgów, łącząc punkt o danej wysokości (cesze) z punktem znajdującym się na okręgu (styczności) (rys. 6.14a2). Kolejne warstwy rysujemy równoległe do pierwszej narysowanej z zachowaniem odstępu równego promieniowi okręgu. Można też konstruować okręgi o promieniach będących wielokrotnościami promienia pierwszego podstawowego okręgu (modułu płaszczyzny) (na rys. 6.14a2 tego nie uczyniono). Punkty przecięcia się poziomicy nasypu i wykopu z odpowiednimi poziomiami powierzchni topograficznej wyznaczają punkty linii przenikania (zetknięcia się) powierzchni terenu z płaszczyzną nasypu (rys. 6.14a3). Konstrukcja linii przejścia po-

wierzchni topograficznej terenu w nasyp lub wykop przedstawiona już na rysunku 6.13a1 geometrycznie oznacza linię przekroju powierzchni topograficznej płaszczyzną drogi (por. konstrukcję na rys. 6.9b–b1). Następnie wykonujemy profile drogi jako przekroje wybranymi płaszczyznami pionowymi. Na rysunku 6.15 wykonano dwa profile drogi w miejscach na nasypie (poziomica drogi 73,5 m n.p.m.) i w wykopie (poziomica drogi 78 m n.p.m.). Ogólnie konstrukcja profilu została wcześniej omówiona na rysunku 6.9a–a1. Czytelnik samodzielnie wykona przekrój podłużny terenu i drogi (wzdłuż drogi osi), wzorując się na konstrukcji przekroju wykopu pod basen (rys. 6.18).

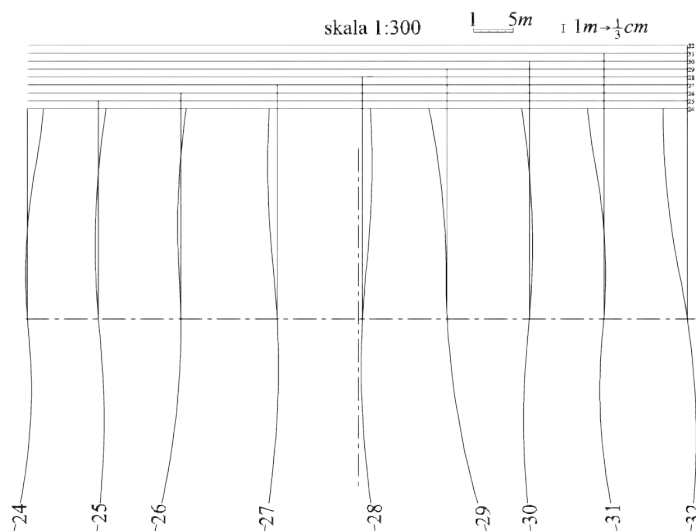
**Przykład 6.3.** Wykonać w skali 1:300 projekt wykopów pod basen pływacki. Dokoła basenu splantować pas terenu o szerokości 9 m. Wymiary basenu i jego usytuowanie oraz profil podłużny w płaszczyźnie symetrii określony jest na rysunkach (rys. 6.16–6.19). Nachylenie wykopów  $n_w = 1$ , nachylenie nasypów  $n_n = \frac{2}{3}$ .

*Rozwiązanie zadania z przykładu 6.3.*

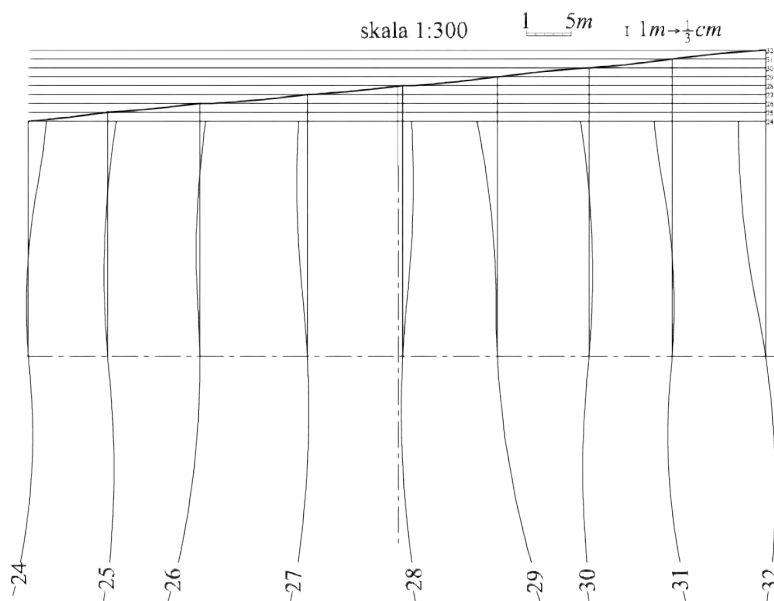


Rysunek 6.16: Warstwiec terenu w skali 1:300 oraz wyznaczona jednostka (cdn.)

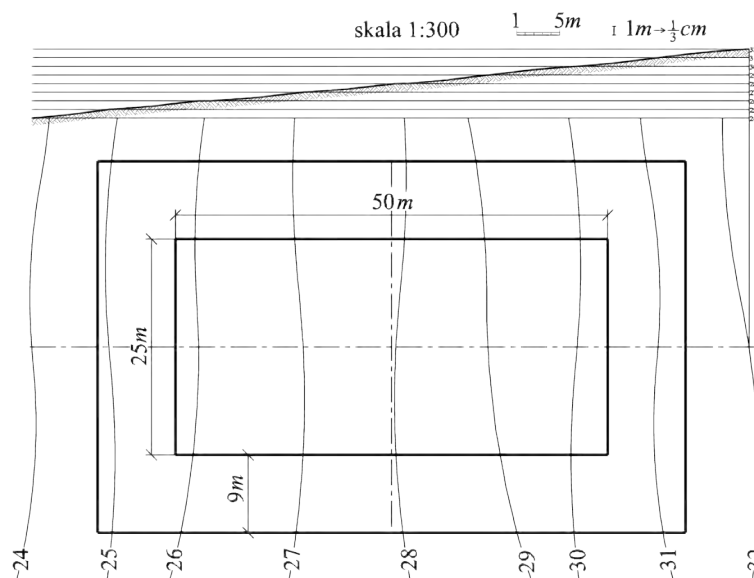




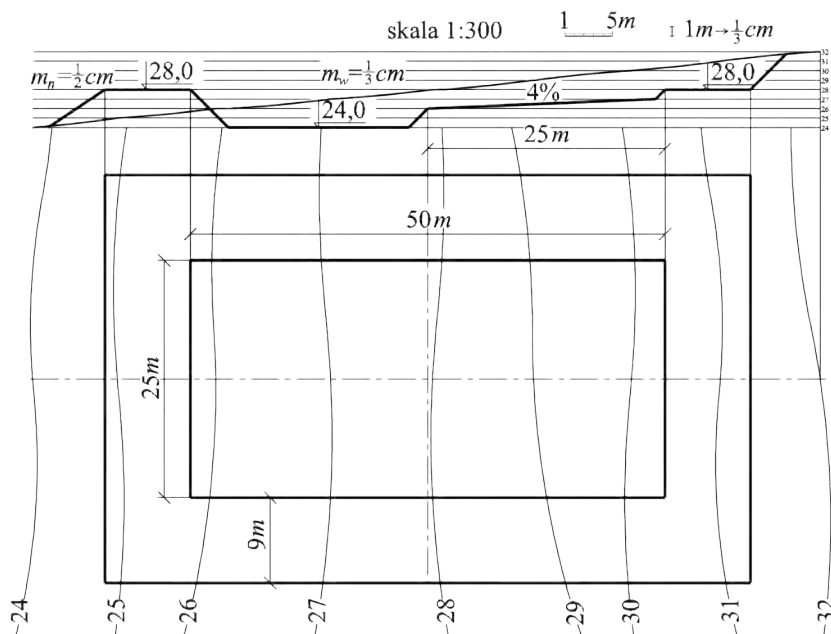
Rysunek 6.17: Przyjmujemy osie symetrii projektowanych wykopów, poziom dna części głębszej, płaszczyzny warstwowe oraz odnoszące punktów przecięcia płaszczyzny przekroju z warstwicami terenu do odpowiednich *prostych warstwowych stopniowych* (cdn.)



Rysunek 6.18: Otrzymane punkty łączymy krzywymi (aproxymującymi), które tworzą krzywą profilową (cdn.)

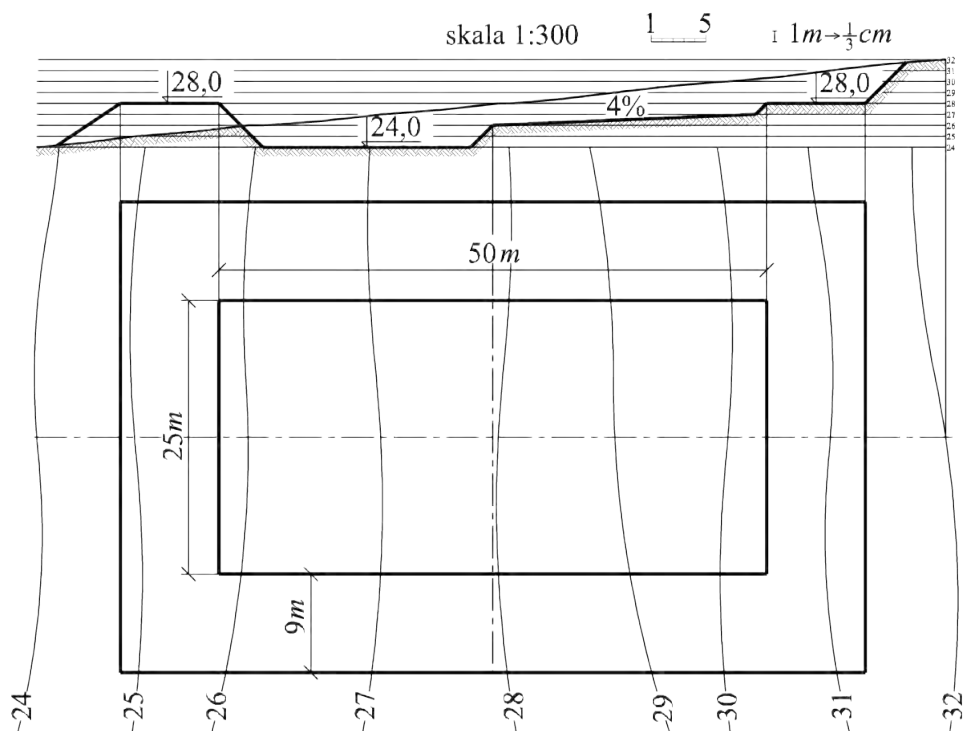


Rysunek 6.19: Przyjmujemy rzut (obrys) górnego poziomu basenu – granice splan-  
towanego pasa (cdn.)



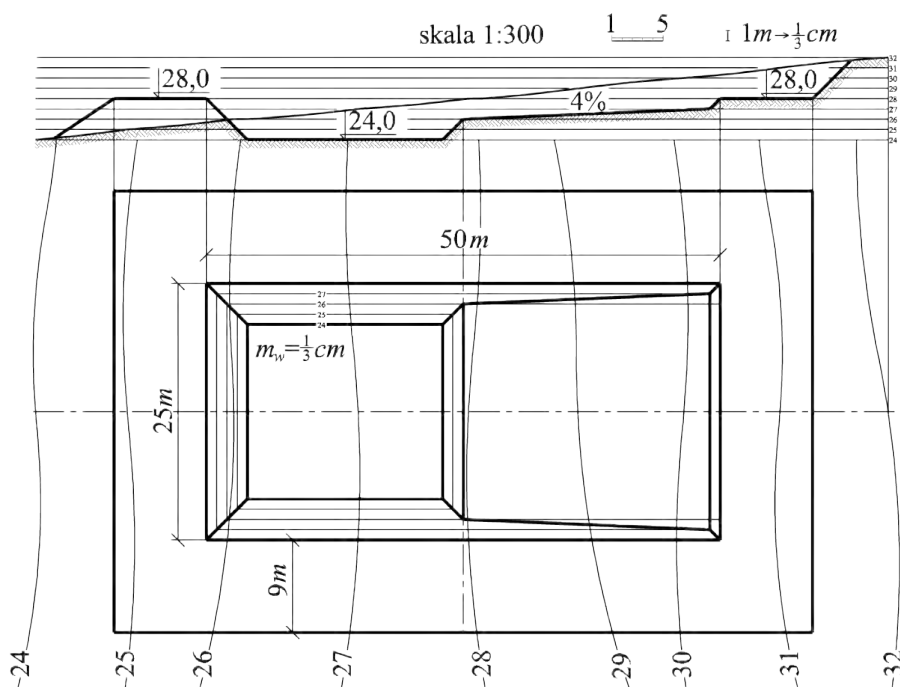
Rysunek 6.20: Po uwzględnieniu  $m_n = \frac{1}{n_n} = \frac{1}{2}$  cm,  $m_w = \frac{1}{n_w} = \frac{1}{3}$  cm otrzymujemy  
profil podłużny basenu (cdn.)

Po przyjęciu osi symetrii projektowanych wykopów, poziomu dna części głębszej, znajdujemy przekrój podłużny basenu w sposób następujący: rysujemy stopniowe linie profilowe poziomych płaszczyzn (rys. 6.17) w odległości jednej jednostki, czyli  $\frac{1}{3}$  cm, następnie znajdujemy punkty przecięcia płaszczyzny przekroju (rzut tej płaszczyzny pokrywa się z podłużną osią symetrii basenu) z warstwicami terenu i ich odnosząc do odpowiednich *prostych warstwowych stopniowych*: odnosząc punktu przecięcia warstwy 24 „dochodzi” do prostej warstwowej stopniowej 24, odnosząc punktu przecięcia warstwy 25 „dochodzi” do prostej warstwowej stopniowej 25 itd. Otrzymane punkty łączymy krzywymi (aproksymującymi), które łącznie tworzą *krzywą profilową* podłużną (rys. 6.17). Następnie przyjmujemy rzut (obrys) górnego poziomu basenu (granice splantowanego pasa) (rys. 6.19). Po uwzględnieniu  $m_n = \frac{1}{n_n} = \frac{1}{2}$  cm,  $m_w = \frac{1}{n_w} = \frac{1}{3}$  cm otrzymujemy profil podłużny basenu (rys. 6.20).



Rysunek 6.21: Zaznaczamy linię gruntu rodzimego (wykop) i część nawiezoną (nasyp). Jeśli nasyp jest przedłużeniem wykopu w kierunku pionowym (dokładniej ukośnym), to przyjmujemy, że nachylenie nasypu jest równe nachyleniu wykopu (cdn.)

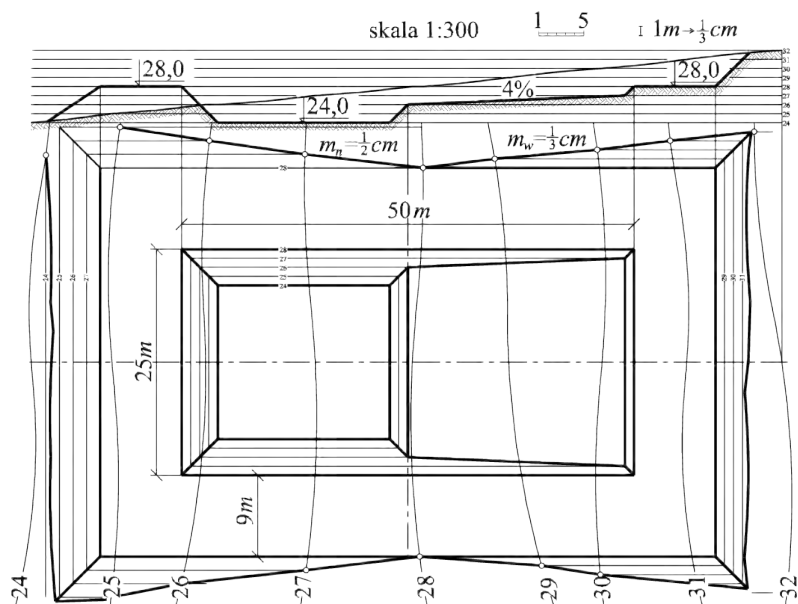
Zaznaczamy linię gruntu rodzimego (wykop) i część nawieszoną (nasyp). Jeśli nasyp jest przedłużeniem wykopu w kierunku pionowym (dokładniej ukośnym), to przyjmujemy, że nachylenie nasypu jest równe nachyleniu wykopu (rys. 6.20). Następnie rysujemy warstwicę wykopu, uwzględniając wartość modułu wykopu. Odległość warstwicy jest równa  $m_w = \frac{1}{3} \text{ cm}$  (rys. 6.21). W przypadku, gdy warstwicę przecinają się, problem znalezienia linii rozgraniczającej jest prosty. Oczywiście dokładnie znalezionymi są tylko punkty przecięcia się warstwicy. Pozostałe części krzywej – linie łączące te punkty – znajdujemy metodą *interpolacji*<sup>3</sup>.



Rysunek 6.22: Rysujemy warstwicę wykopu, uwzględniając wartość modułu wykopu. Odległość warstwicy jest równa  $m_w = \frac{1}{3} \text{ cm}$  (cdn.)

<sup>3</sup> W celu zwiększenia dokładności konstrukcji znajdujemy warstwicę pośrednie. Otrzymujemy je, prowadząc odcinki tworzące z sąsiednimi warstwicami kąty bliskie kątom prostym. Następnie odcinki te dzielimy na pewną liczbę równych części ( $n$ ), jednakową na wszystkich odcinkach. Odpowiadające sobie punkty łączymy odcinkami lub liniami przy krzywiku. W praktyce konstrukcji w rzucie cechowanym interpolowanie często oznacza intuicyjne rysowanie krzywych łączących punkty znalezione metodą dokładną (rys. 6.11a). Na rysunku 6.11a wyznaczono warstwicę pośrednią metodą interpolacji ( $n = 2$ ), warstwicę pośrednią jest tu linią łączącą środki odcinków „prawie prostokątnych” łączących sąsiednie warstwicę.

W przypadku, gdy linia rozgraniczająca biegnie równoległe do warstwicy terenu, cała krzywa wyznaczana jest interpolacyjnie. Linia zetknięcia się nasypu z powierzchnią topograficzną terenu (lewa strona rys. 6.21) jest taką właśnie linią. Następnie rysujemy warstwice wykopu, zdejmując urobek w celu splantowania pasa okalającego zbiornik. Odległość warstwicy jest równa  $m_w = \frac{1}{3} \text{ cm}$ .



Rysunek 6.23: Znajdujemy punkty zerowe robót, tzn. punkty rozgraniczające wykopy od nasypów. Tu są to punkty przecięcia się warstwicy o cenie 28. Po narysowaniu warstwicy nasypu i wykopu znajdujemy linię rozgraniczającą nasyp z powierzchnią terenu, warstwice terenu (wyjściowe) i odpowiadające im (mające tę samą cenę) warstwice nasypu i wykopu

Znajdujemy punkty zerowe robót, tzn. punkty rozgraniczające wykopy od nasypów. Tu są to punkty przecięcia się warstwicy o cenie 28. Rysujemy warstwice nasypu, uwzględniając wartość modułu nasypu. Odległość warstwicy jest równa  $m_n = \frac{1}{2} \text{ cm}$  (prawa strona rysunku). Warstwice terenu (wyjściowe) i odpowiadające im (mające tę samą cenę) warstwice nasypu przecinają się w punktach wyznaczających linię rozgraniczającą nasyp od powierzchni terenu. Następnie rysujemy warstwice wykopu, zdejmując urobek w celu splantowania pasa okalającego zbiornik. Odległość warstwicy jest równa  $m_w = \frac{1}{3} \text{ cm}$ . Warstwice terenu (wyj-

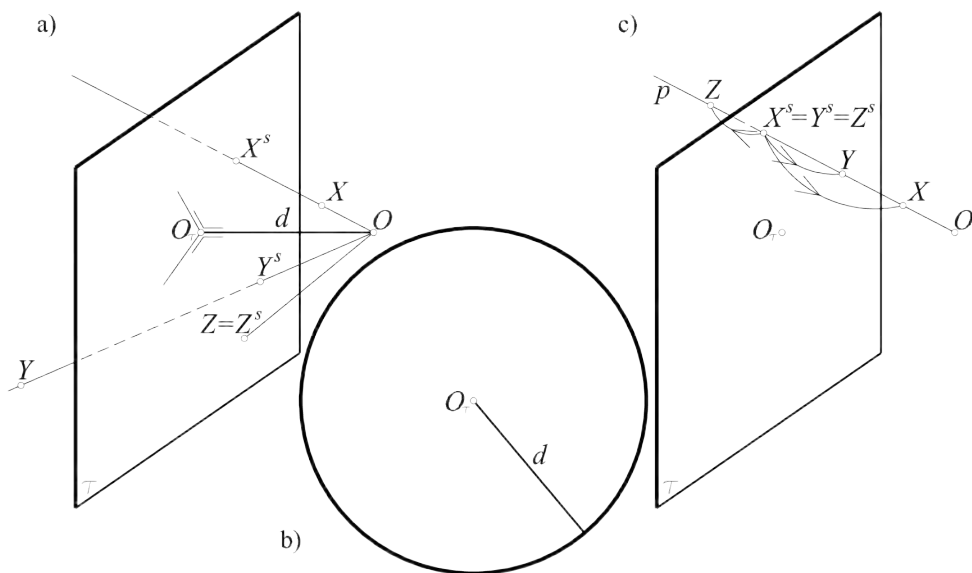
ściowe) i odpowiadające im (mające tę samą cechę) warstwie wykopu przecinają się w punktach wyznaczających linię rozgraniczającą wykop od powierzchni terenu (rys. 6.23). Zwróćmy uwagę na fakt, że część nasypu będąca przedłużeniem wykopu przyjęta na rysunku 6.20 ma takie samo nachylenie jak wykop.



## Rozdział 7

# Rzut środkowy

### 7.1. Rzut środkowy i jego niezmienniki

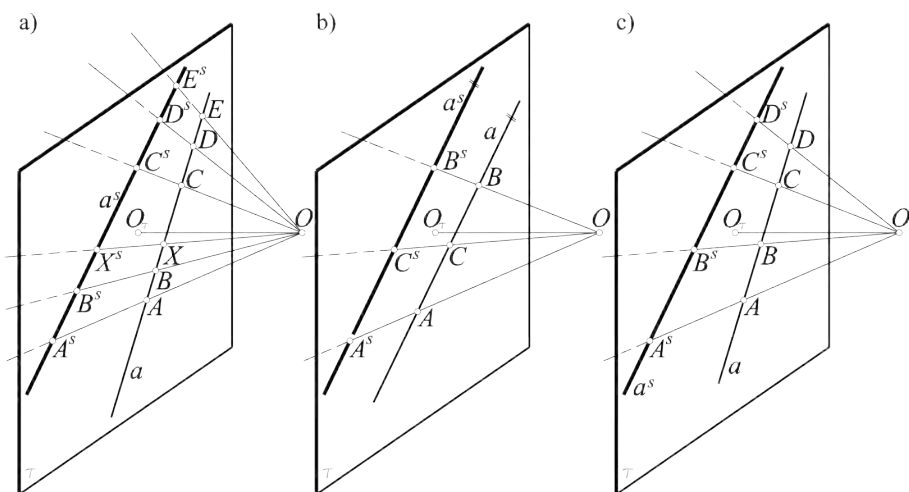


Rysunek 7.1: Aparat rzutujący rzutu środkowego: a) płaszczyzna  $\tau$  – rzutnia, czyli tło, oraz punkt  $O$  – środek rzutowania, czyli oko; b) elementy określające aparat rzutujący rzutu środkowego w realizacji tego rzutu na płaszczyźnie:  $O_\tau$  – punkt główny, okrąg głębokości tłowej; c) rzut środkowy nie jest odwracalny, punkt  $X^S = Y^S = Z^S = \dots$  jest rzutem wszystkich punktów:  $X, Y, Z, \dots$  prostej  $p$ , różnych od  $O$

Przyjmijmy w przestrzeni dowolną płaszczyznę (właściwą)  $\tau$  jako rzutnię oraz punkt (właściwy)  $O$  jako środek rzutowania. Płaszczyznę  $\tau$  nazywać będziemy *płaszczyzną obrazu* albo *tłem*, punkt  $O$  – *okiem*. Dowolnemu punktowi  $X$  różnemu od punktu  $O$  przyporządkowujemy punkt  $X^s$  przebiecia tła prostą  $OX$  (rys. 7.1a). Odwzorowanie takie, jak już wiadomo z rozdziału 1, nazywamy *rzutem środkowym*. Rzut środkowy nie



jest odwracalny, tzn. na podstawie rzutu punktu nie jesteśmy w stanie odtworzyć położenia punktu w przestrzeni (por. rys. 7.1c).



Rysunek 7.2: Niezmienniki rzutu środkowego: a) współliniowość punktów; b) stosunek podziału odcinka  $(AB, C)$  dla punktów leżących na prostej równoległej do tła; c) dwustosunek podziału  $(AB; CD)$

Takich punktów jest nieskończenie wiele – zbiorem wszystkich punktów o tej własności jest prosta przechodząca przez ten punkt i przez oko. Jeżeli prosta nie przechodzi przez oko, to jej rzutem środkowym jest prosta. Istotnie, rzutowana prosta wraz ze środkiem rzutu (okiem) tworzy płaszczyznę, która w przecięciu z rzutnią daje prostą będącą obrazem. Zatem *współliniowość* jest niezmiennikiem rzutu środkowego. Z twierdzenia Talesa wynika, że w rzucie środkowym zachowuje się stosunek podziału odcinka równoległego do tła (por. rys. 7.1b). Z własności jednokładności wnioskujemy, że zachowana jest miara kąta o ramionach równoległych do tła. Ponadto rzut środkowy zachowuje *dwustosunek podziału odcinka* (rys. 7.1c). *Dwustosunkiem podziału odcinka*  $[AB]$  punktami  $C, D$  nazywamy liczbę

$$(AB; CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)},$$

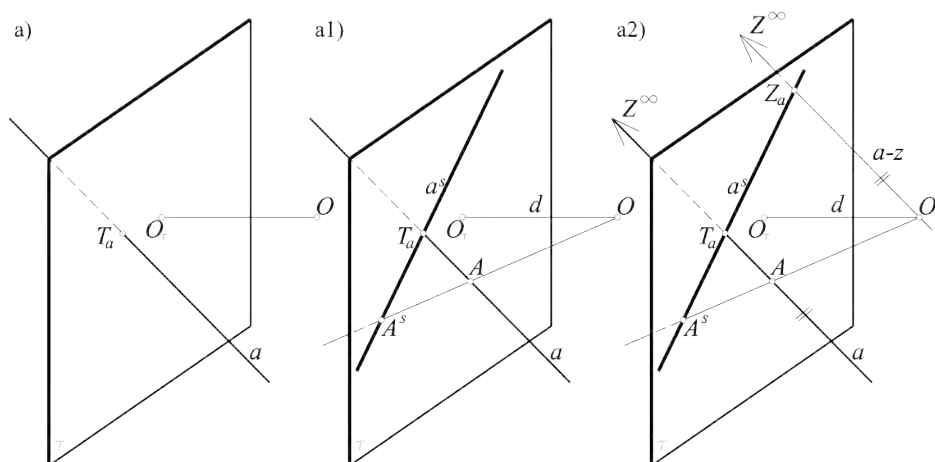
gdzie  $(AB, C)$ ,  $(AB, D)$  są stosunkami podziału odcinka  $[AB]$  odpowiednio punktami  $C$  i  $D$ .

Aby jednoznacznie był określony aparat rzutujący, należy wskazać (ustalić na rysunku) położenie oka względem tła. Precyzujemy to, wska-

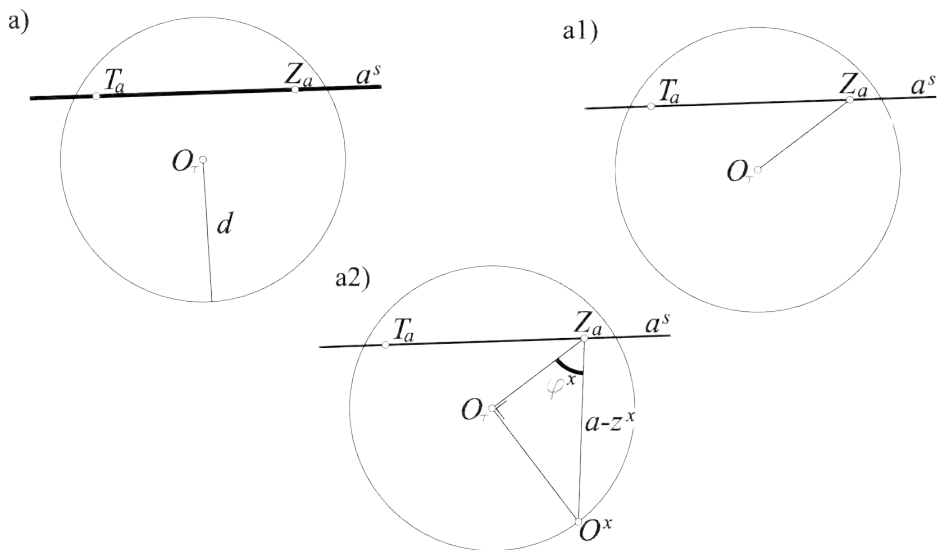
zując rzut prostokątny  $O_\tau$  oka  $O$  na tło  $\tau$  i podając odległość  $d$  oka od tła. Najwygodniej jest to zrobić poprzez wskazanie tzw. okręgu głębokości tłowej (rys. 7.1b) o środku w punkcie  $O_\tau$  i promieniu długości  $d$ . Środek  $O_\tau$  tego okręgu nazywać będziemy *punktem głównym*.

## 7.2. Odwzorowanie prostej

Rzutem prostej jest prosta. Aby zapewnić odwracalność rzutu  $a^s$  prostej  $a$ , wyróżniamy rzuty dwóch jej punktów: punkt  $T_a$  wspólny z tłem, tzw. *ślad tłowy* oraz punkt  $Z_a$  – rzut punktu niewłaściwego prostej  $a$ , zwany *śladem zbiegu* prostej  $a$ . Ślad zbiegu jest więc punktem przecięcia prostej przechodzącej przez oko równoległej do prostej  $a$ . Obydwa ślady leżą, naturalnie, na prostej  $a^s$  (rzucie prostej  $a$ ). Aby zorientować się o położeniu prostej  $a$  (by np. określić kąt, jaki tworzy ona z tłem), dokonujemy kładu oka (rys. 7.4a2). Punkt  $A$  jest jednoznacznie określony przez swój rzut  $A^s$ , jeśli wiemy, że należy do prostej  $a$ , której rzutem jest prosta  $a^s$  ( $T_a Z_a$ ). Zatem punkt jest restytuowalny w rzucie środkowym, jeżeli mamy odwzorowaną jakąkolwiek prostą, do której punkt ten należy.



Rysunek 7.3: „Powstawanie” rzutu prostej: a) prosta  $a$  i jej ślad tłowy  $T_a$  – punkt przecięcia rzutni; a1) rzut  $A^s$  dowolnego punktu  $A$  prostej  $a$  wraz ze śladem  $T_a$  wyznaczają rzut  $a^s$  prostej  $a$ ; a2) wyróżnienie rzutu  $Z_a$  jeszcze jednego (niewłaściwego) punktu  $Z^\infty$  prostej  $a$  zapewnia odwracalność (restytuowalność) odwzorowania



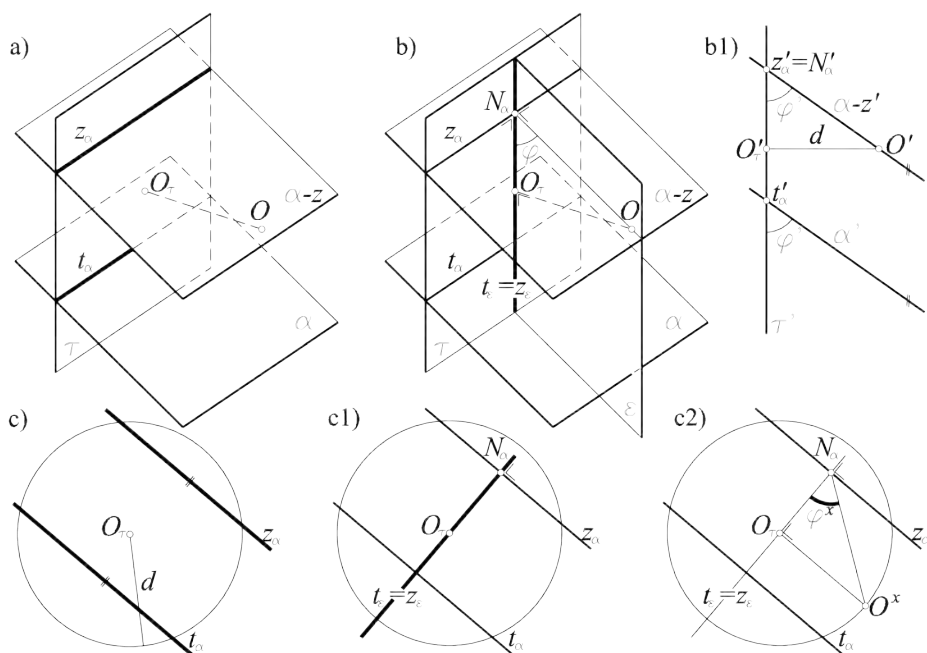
Rysunek 7.4: Konstrukcja kąta nachylenia prostej do tła: a) reprezentacja rzutu środkowego prostej; a1–a2) konstrukcja kąta  $a-z^x$  promienia zbiegu  $a-z$  prostej  $a$

By znaleźć kąt, jaki tworzy prosta z tłem, przez punkt  $O_\tau$  prowadzimy prostą prostopadłą do odcinka  $O_\tau Z_a$ , która przecina okrąg tłowy w punkcie  $O^x$  (faktycznie przecina w dwóch punktach – wybieramy jeden z nich). Kąt  $\varphi^x$  w trójkącie prostokątnym  $O_\tau Z_a O^x$  jest szukanim rzeczywistym kątem. Równocześnie, podnosząc z kładu promień zbiegu prostej w przestrzeni, identyfikujemy odwzorowaną prostą  $a$  jako równoległą do promienia zbiegu  $a-z$  i przechodzącą przez ślad tłowy  $T_a$ . Możemy pomyśleć, że promień zbiegu  $a-z$  określa kierunek prostej przechodzącej przez swój ślad tłowy. Promień zbiegu danej prostej jest pewnego rodzaju „genotypem” tej prostej.

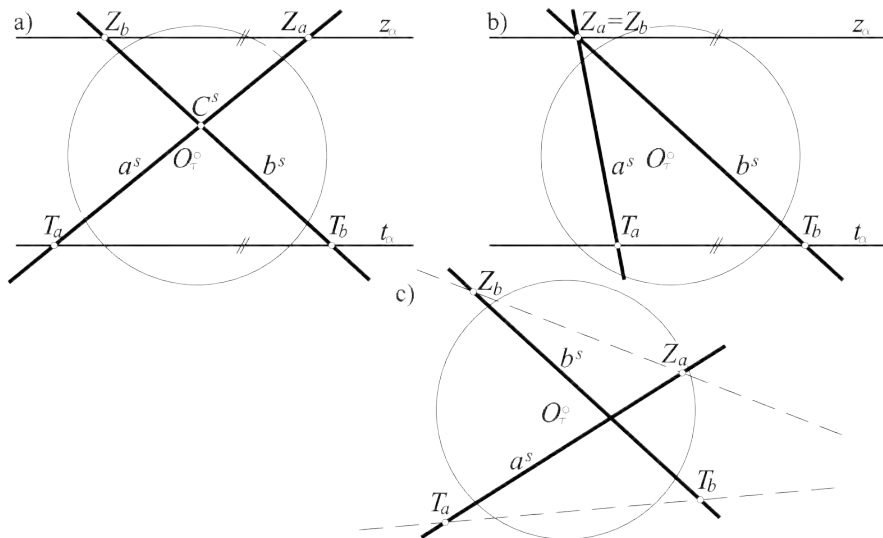
### 7.3. Odwzorowanie płaszczyzny

Podobnie jak prosta, dowolna płaszczyzna  $\alpha$  w rzucie środkowym określona będzie przez swój ślad tłowy  $t_\alpha$  (krawędź z tłem) i ślad zbiegu  $z_\alpha$  – krawędź płaszczyzny, równoległą do  $\alpha$  i przechodzącą przez oko, z tłem (rys. 7.5a,c). Proste  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$  są do siebie równoległe (rys. 7.5c). O położeniu płaszczyzny  $\alpha$  w przestrzeni, podobnie jak w przypadku prostej, informuje nas kład płaszczyzny  $\varepsilon$ , prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$  i przechodzącej przez oko, tzw. *płaszczyzny strzałkowej*. Widzimy wtedy

rzeczywistą rozwartość kąta (kąt  $\omega$  na rys. 7.5c2), jaki tworzy płaszczyzna  $\alpha$  z rzutnią). Kąt ten razem ze śladem tłowym odzwierciedla jednoznacznie położenie płaszczyzny w przestrzeni. Rzeczywiście, aby odtworzyć położenie płaszczyzny  $\alpha$  w przestrzeni, wystarczy znać dwie proste, właśnie jej ślady  $t_\alpha$  i  $z_\alpha$ . Prosta  $z_\alpha$  i punkt  $O$  tworzą płaszczyznę zbiegu  $\alpha$ - $z$ . Płaszczyzna przechodząca przez prostą  $t_\alpha$  i równoległa do płaszczyzny  $\alpha$ - $z$  jest właśnie płaszczyzną  $\alpha$ . Płaszczyzna zbiegu  $\alpha$ - $z$  danej płaszczyzny  $\alpha$ , podobnie jak w przypadku prostej, można uznać za pewnego rodzaju „genotyp” płaszczyzny  $\alpha$ . Warto dodać, że zarówno płaszczyzna  $\alpha$  jak i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe mają tę samą płaszczyznę zbiegu, czyli ten sam „genotyp”. Zauważmy ponadto, że dowolna płaszczyzna jest prostopadła do tła wtedy i tylko wtedy, gdy jej ślad zbiegu przechodzi przez punkt główny  $O_\tau$  (rys. 7.5b – płaszczyzna  $\varepsilon$ , rys. 7.5a – płaszczyzna  $\alpha$ ).



Rysunek 7.5: Odzworowanie płaszczyzny w rzucie środkowym: a) rysunek poglądowy; b) z płaszczyzną strzałkową  $\varepsilon$ ; b1) widok w płaszczyźnie strzałkowej (z profilu); c) reprezentacja płaszczyzny w rzucie środkowym; c1–c2) konstrukcja kąta nachylenia płaszczyzny do tła



Rysunek 7.6: Odwzorowanie płaszczyzny w rzucie środkowym: a) rysunek poglądowy; b) z płaszczyzną strzałkową  $\varepsilon$ ; b1) widok w płaszczyźnie strzałkowej (z profilu); c) reprezentacja płaszczyzny w rzucie środkowym; c1–c2) konstrukcja kąta nachylenia płaszczyzny do tła

## 7.4. Przynależność punktu do prostej i płaszczyzny

Punkt leży na płaszczyźnie, jeżeli leży na prostej leżącej na płaszczyźnie. Prosta  $a$  leży na płaszczyźnie  $\alpha$  wtedy i tylko wtedy, gdy jej ślad tłowy  $T_a$  leży na śladzie tłowym  $t_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , a ślad zbiegu  $Z_a$  leży na śladzie zbiegu  $z_\alpha$ . Formalnie zależność między elementami odwzorowującymi płaszczyznę  $\alpha$  i prostą  $a$  przy założeniu, że figury te przynależą do siebie, opisuje zależność (por. rys. 7.6):

$$C \in \alpha \longleftrightarrow C \in a \subset \alpha, \quad (7.1)$$

$$a \subset \alpha \longleftrightarrow Z_a \in z_\alpha, T_a \in t_\alpha. \quad (7.2)$$

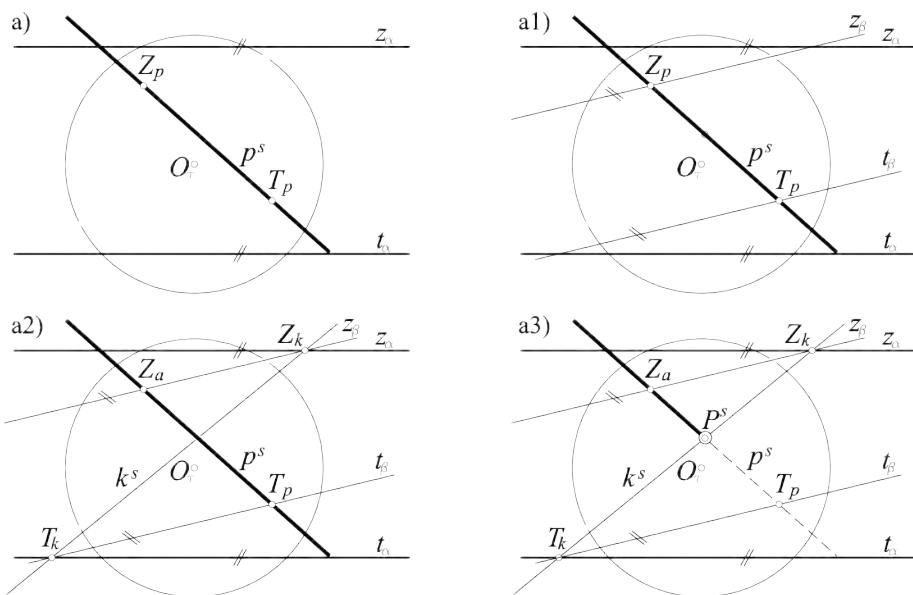
Położenie punktu w przestrzeni daje się jednoznacznie odtworzyć w sytuacji, gdy wiemy, że należy on do znanej, odwzorowanej w rzucie środkowym prostej. Wszystko to przy założeniu, że wymienione obiekty pośrednie są restytuowalne, a więc np. wtedy, gdy znane są punkt główny i okrąg głębokości tłowej. Położenie (odtworzenie w przestrzeni na podstawie rzutów) elementów często daje się ustalić w wyniku analizy sytuacji przestrzennej (np. wiadomo o krawędziach stołu na zdjęciu, że są w rzeczywistości równoległe).

## 7.5. Elementy wspólne

Rysunek 7.6a informuje nas jeszcze o tym, że proste  $a$  i  $b$  przecinają się w punkcie  $C$ . Dlaczego? Dlatego, że ich ślady leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny  $\alpha$  czyli proste  $a$  i  $b$  leżą w jednej płaszczyźnie, a więc przecinają się. Ogólniej, proste  $a^s(T_a, Z_a)$ ,  $b^s(T_b, Z_b)$  przecinają się wtedy i tylko wtedy, gdy proste  $T_a T_b$ ,  $Z_a Z_b$  są do siebie równoległe. Wtedy wyznaczają odpowiednio ślady  $t_\alpha$ ,  $z_\alpha$  pewnej płaszczyzny  $\alpha$ , na której leżą (rys. 7.6a). Formalnie możemy to zapisać:

$$a \times b \longleftrightarrow Z_a Z_b \parallel Z_a Z_b. \quad (7.3)$$

Prosta przebija płaszczyznę w danym punkcie, jeżeli przecina w tym punkcie pewną prostą leżącą na tej płaszczyźnie (por. rys. 7.7).



Rysunek 7.7: Konstrukcja punktu przebiecia płaszczyzny prostą w rzucie środkowym: a1) przez prostą  $p$  prowadzimy dowolną płaszczyznę  $\beta$ ; a2) znajdujemy krawędź wspólną  $k$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ ; a3) punkt przebiecia  $P$  jest punktem wspólnym prostych  $p$  i  $k$

## 7.6. Równoległość prostych i płaszczyzn

Proste równoległe mają wspólny punkt niewłaściwy, którego rzutem środkowym jest, jak już wiadomo, punkt zbiegu każdej z prostych

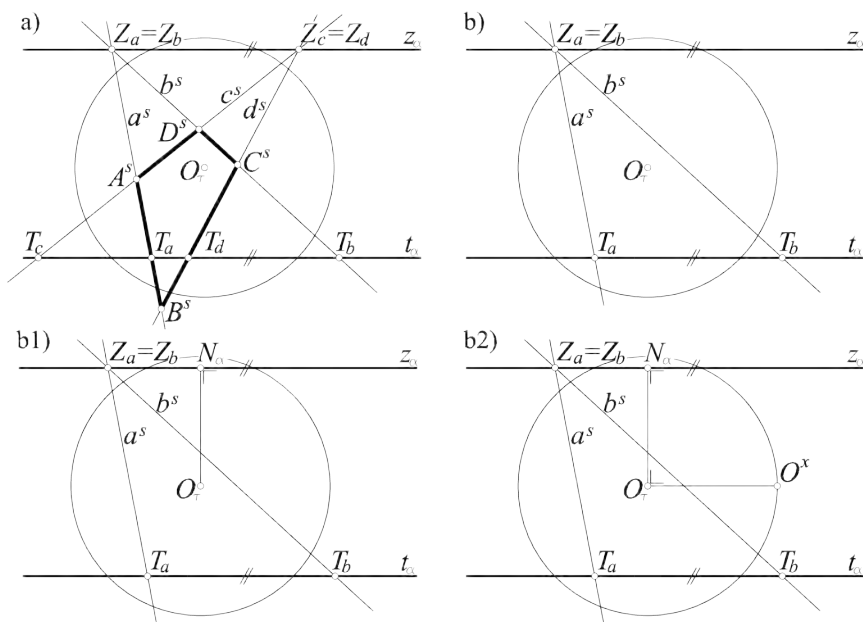
(rys.7.6b). Możemy więc zapisać:

$$a \parallel b \longleftrightarrow Z_a = Z_b. \quad (7.4)$$

Podobnie dla płaszczyzn:

$$\alpha \parallel \beta \longleftrightarrow z_\alpha = z_\beta. \quad (7.5)$$

Odwzorowanie dowolnego równoległoboku  $ABCD$  leżącego na płaszczyźnie  $\alpha$  ilustruje rysunek 7.8a. Przeciwnie boki równoległoboku leżą odpowiednio na parach prostych równoległych  $a, b; c, d$ . Odwzorowanie dowolnego (bez określonych wymiarów) prostokąta zostało przedstawione na rysunkach 7.8, 7.9, 7.10.



Rysunek 7.8: Dowolny równoległobok i prostokąt w rzucie środkowym (cd.): a) rzut środkowy równoległoboku; b–b7) konstrukcja rzutu środkowego prostokąta o bokach na danych prostych równoległych  $a$  i  $b$ ; b1) konstrukcja punktu strzałkowego  $N_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ ; b2) kład boczny  $O^x$  oka (cdn.)

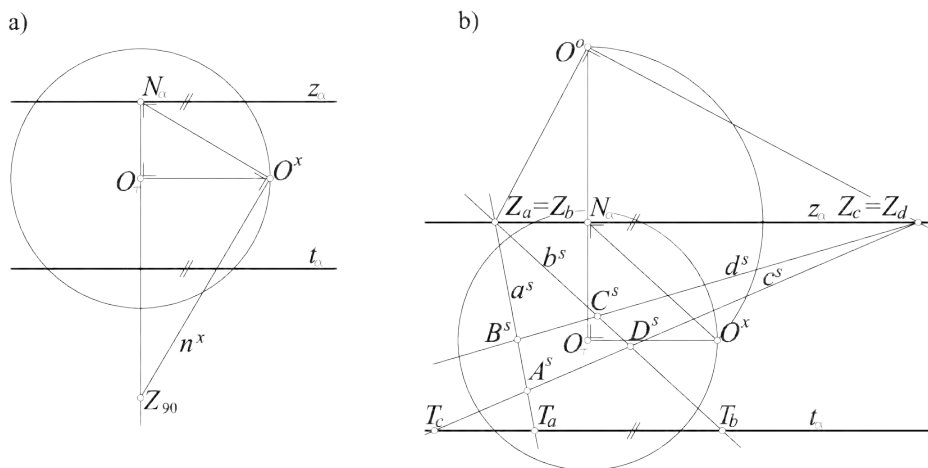




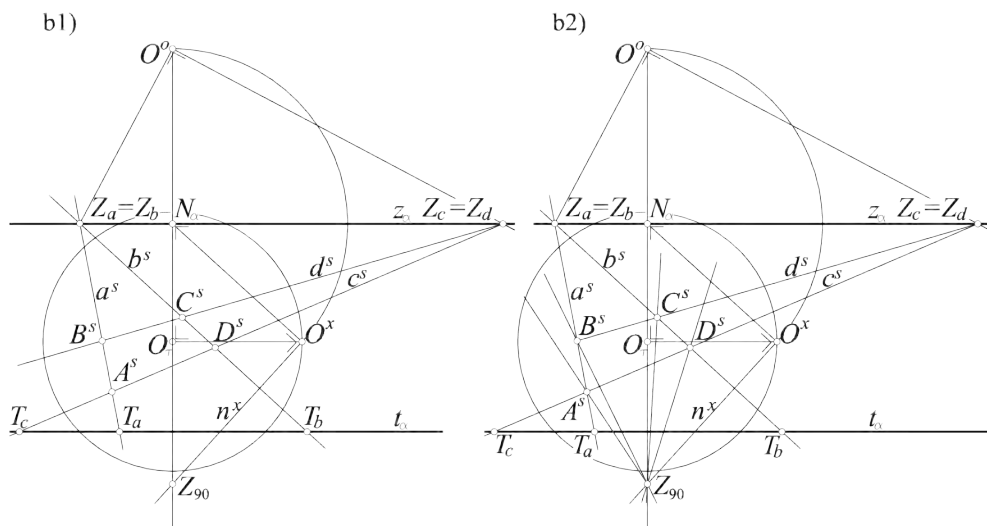
## 7.7. Prosta prostopadła do płaszczyzny

Proste prostopadłe do danej płaszczyzny  $\alpha$  są wzajemnie równoległe, mają więc wspólny kierunek (punkt niewłaściwy), czyli w rzucie wspólny punkt zbiegu, który oznaczmy przez  $Z_{90}$ . Konstrukcję promienia zbiegu  $n^x$  w układzie bocznym płaszczyzny strzałkowej, a tym samym, śladu zbiegu prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ , ilustruje rysunek 7.11. Przebieg tej konstrukcji jest następujący: przez oko prowadzimy płaszczyznę  $\varepsilon$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$  (czyli płaszczyznę strzałkową). Jej ślady zbiegu i łowy pokrywają się i stanowią prostą przechodzącą przez  $O_\tau$  prostopadłą do  $z_\alpha(t_\alpha)$  (rys. 7.11a), przecinającą prostą  $z_\alpha$  w punkcie strzałkowym, który oznaczamy przez  $N_\alpha$ . Dokonując układu bocznego płaszczyzny strzałkowej i prowadząc przez  $O^x$  prostą prostopadłą do odcinka  $[O^x N_\alpha]$ , znajdujemy promień zbiegu  $n^x$ , a następnie ślad zbiegu  $Z_{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 7.11a).

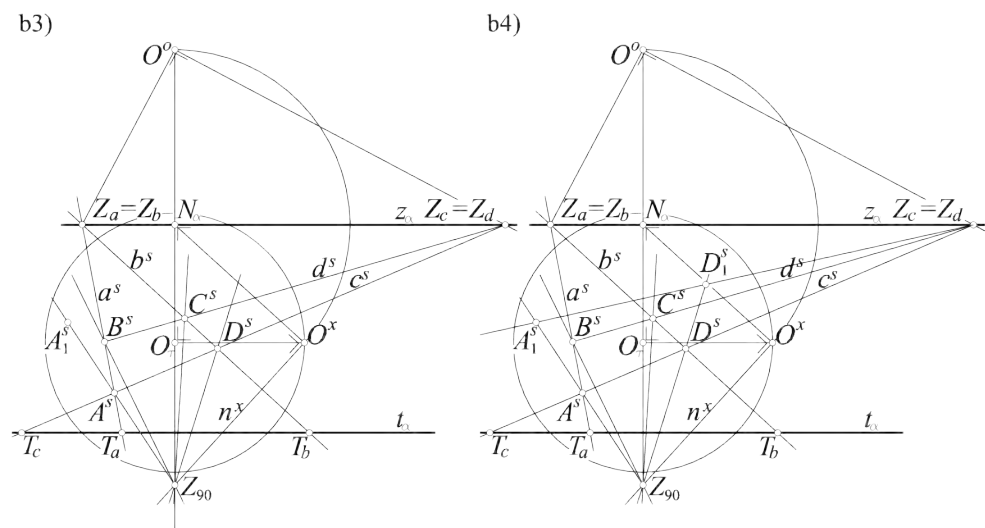
Jako ilustrację powyższych charakterystyk rzutu środkowego konstruujemy prostopadłościan o podstawie na zadanej płaszczyźnie  $\alpha$  (rys. 7.11b) o zadanym kierunku krawędzi podstawy, czyli śladzie zbiegu  $Z_a = (Z_b)$  dwu (a w konsekwencji czterech krawędzi prostopadłościanu) krawędzi podstawy prostopadłościanu.



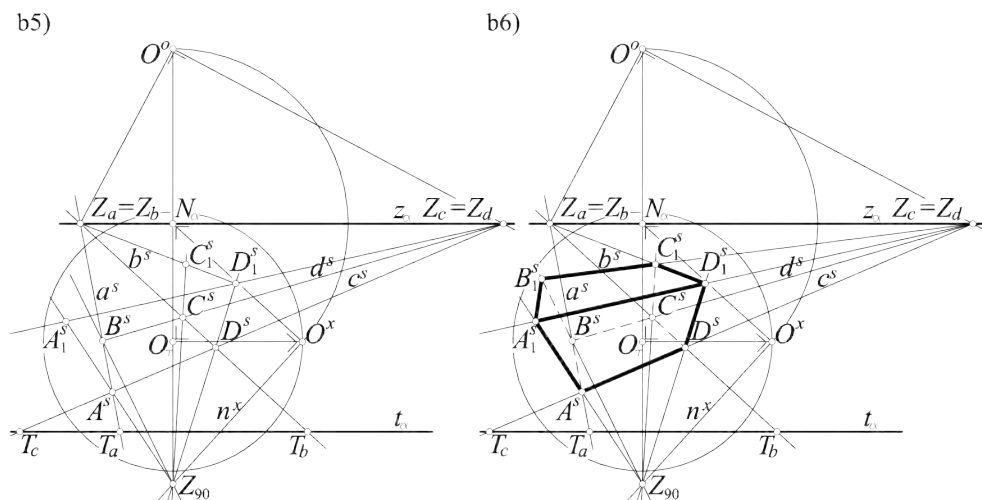
Rysunek 7.11: Konstrukcja prostopadłościanu (cd.): b1) konstrukcja śladu zbiegu  $Z_{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ ; b2) poprowadzenie przez punkt  $Z_{90}$  czterech prostopadłych do podstawy krawędzi prostopadłościanu (cdn.)



Rysunek 7.12: Konstrukcja prostopadłościanu (cd.): b1) konstrukcja śladu zbiegu  $Z_{90}$  prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$ ; b2) poprowadzenie przez punkt  $Z_{90}$  czterech prostopadłych do podstawy krawędzi prostopadłościanu (cdn.)



Rysunek 7.13: Konstrukcja prostopadłościanu (cd.): b3) wybór na krawędzi przechodzącej przez punkt  $A(A^s)$  dowolnego punktu  $A_1^s$ ; b4) konstrukcja pierwszej „górną” krawędzi prostopadłościanu przechodzącej przez punkt  $A_1(A_1^s)$  (cdn.)



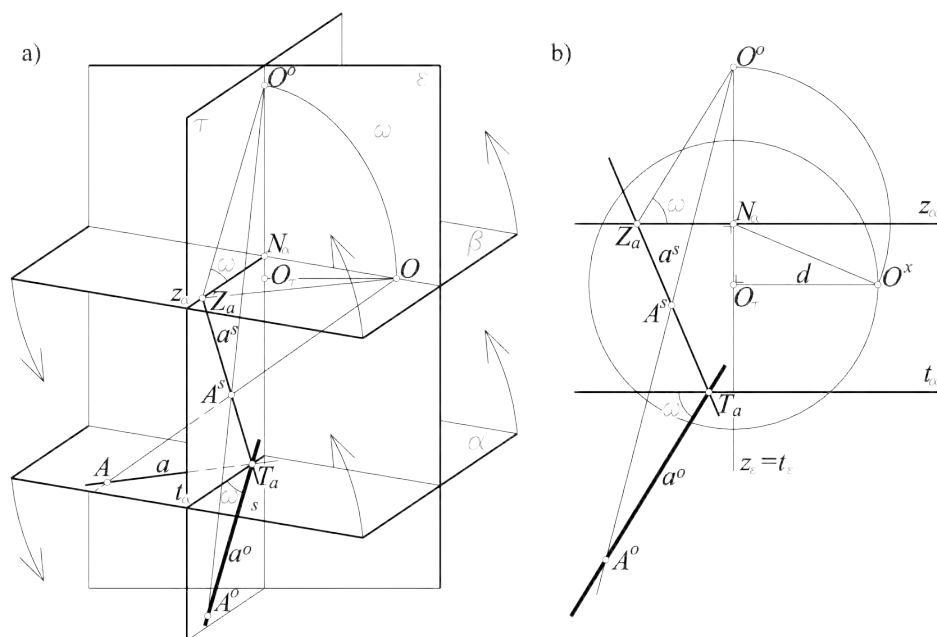
Rysunek 7.14: Konstrukcja prostopadłościanu (cd.): b5) konstrukcja drugiej „górnej” krawędzi prostopadłościanu przechodzącej przez punkt  $D_1(D_1^s)$ ; b6) konstrukcja pozostałych krawędzi

Konstrukcję realizujemy następująco. Konstruujemy dowolny prostokąt – podstawę prostopadłościanu (rys. 7.11b). Znajdujemy punkt zbiegu  $Z_{90}$ , nieznanych jeszcze krawędzi prostopadłościanu prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$  podstawy (rys. 7.12b1). Przez punkt  $Z_{90}$  i przez wierzchołki  $A, B, C, D$  podstawy prostopadłościanu prowadzimy cztery proste (rys. 7.12b2), na których będą leżeć krawędzie boczne prostopadłościanu. Potem przez ślad zbiegu  $Z_c$  i przez punkt  $A_1^s$  prowadzimy prostą, na której leżeć będzie górna krawędź  $[A_1^s D_1^s]$  prostopadłościanu (rys. 7.13b4). W przecięciu z prostą przechodzącą przez punkt  $D^s$  znajdujemy drugi „górny” wierzchołek  $D_1^s$  prostopadłościanu (rys. 7.13b4). Następnie przez ślad zbiegu  $Z_a$  i przez  $D_1^s$  prowadzimy kolejną prostą i znajdujemy w przecięciu z trzecią prostą prostopadłą trzeci „górny” wierzchołek prostopadłościanu  $C_1^s$  (rys. 7.14b5). Pozostały punkt  $B_1^s$  możemy znaleźć na dwa sposoby, posilkując się punktami  $A_1^s$  i  $Z_a$  lub  $C_1^s$  i  $Z_c$ . Wynika to z tzw. konfiguracji Reidemeistera  $R_{12}^{11}$ . Otrzymana perspektywa prostopadłościanu jest tzw. perspektywą trójbieżną (rys. 7.14b6).

## 7.8. Kład płaszczyzny

Omawiane dotychczas konstrukcje nie miały charakteru miarowego, ale jedynie afiniczny (w rzeczywistości) i rzutowy (w rzucie środkowym).

Aby móc wykreślić obiekty o określonych wymiarach, można posłużyć się kładem. Omówimy teraz kład w rzucie środkowym. Będziemy przez to rozumieć obrót płaszczyzny o taki kąt, że pokryje się ona z tłem (rys. 7.15). Przyjmijmy, że na danej płaszczyźnie  $\alpha$  leży prosta  $a$ . Aby wykonać kład płaszczyzny  $\alpha$ , dokonamy obrotu płaszczyzny zbiegu tej płaszczyzny (na rys. 7.15a jest to płaszczyzna  $\alpha$ -z). Wszak możemy przyjąć, że wraz z obrotem płaszczyzny  $\alpha$  obraca się także stowarzyszona z nią płaszczyzna zbiegu  $\alpha$ -z. Oko zajmie położenie  $O^o$ , a promień zbiegu prostej  $a$  położenie  $O^oZ_a$  (rys. 7.15a,b). Kąt  $\omega$ , jaki tworzy prosta  $a$  ze śladem tłowym  $t_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ , jest równy kątowi, jaki tworzy promień zbiegu  $O^oZ_a$  tej prostej ze śladem zbiegu  $z_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$ . Ten sam kąt tworzy oczywiście kład  $a^o$  prostej  $a$  ze śladem tłowym  $t_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 7.15b). Należy zauważyć, że tak jak w przestrzeni, między rzutem perspektywicznym obiektów płaszczyzny  $\alpha$  oraz między kładem tej płaszczyzny zachodzi kolineacja środkowa (por. 8.5). Środkiem tej kolineacji jest punkt  $O^o$ , osią kolineacji ślad  $t_\alpha$ , prostą graniczną ślad zbiegu  $z_\alpha$ .

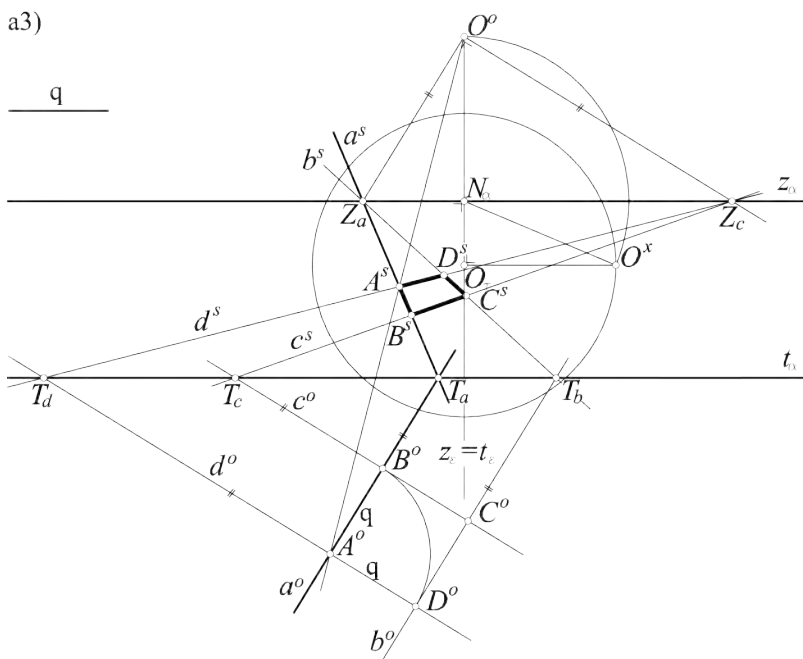


Rysunek 7.15: Konstrukcja kładu płaszczyzny w rzucie środkowym: a) rysunek poglądowy; b) konstrukcja kładu punktu ( $A$ ) i prostej  $a$  płaszczyzny  $\alpha$

Skąd bierze się kolineacja? Zwróćmy uwagę na rysunek poglądowy 7.15a. Obróćmy zatem równocześnie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\alpha$ -z (płaszczyzna





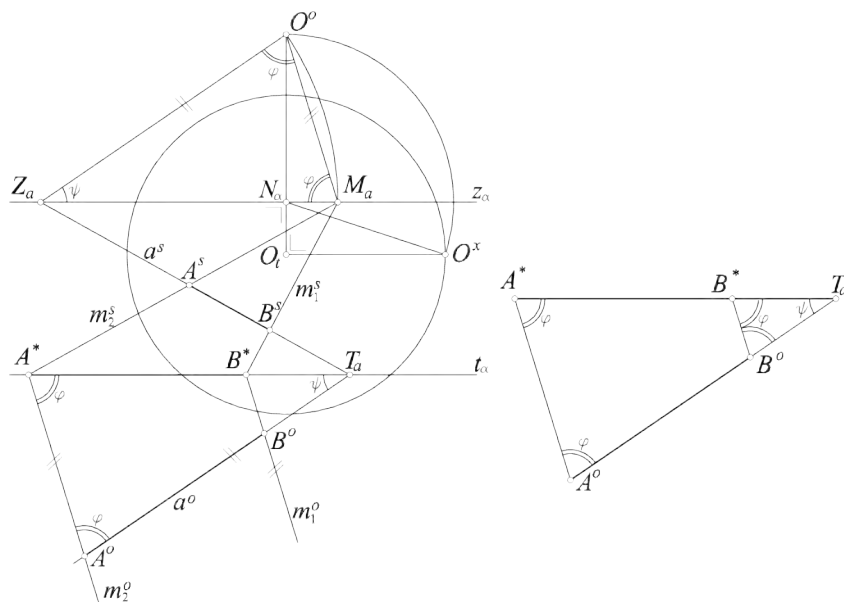


Rysunek 7.19: Konstrukcja kwadratu (cd.): a3) w kładzie konstruujemy pozostałe proste  $b^o$  i  $c^o$  i powracamy do rzutu poprzez konstrukcję prostych  $c^s$  i  $b^s$ . Zauważmy, że trójki punktów  $(A^o, A^s, O^o)$ ;  $(B^o, B^s, O^o)$ ;  $(C^o, C^s, O^o)$ ;  $(D^o, D^s, O^o)$  są współliniowe

## 7.9. Punkty mierzenia

Rozważmy prostą  $a$  i zawarty w niej odcinek  $AB$  w rzucie środkowym oraz kład tych elementów (rys. 7.20). Wyznamy punkt  $M_a$  przecięcia się okręgu o środku  $Z_a$  i promieniu  $[Z_a O^o]$  z prostą  $z_\alpha$ . Otrzymany punkt  $M_a$  uważamy za ślad zbiegu prostych  $m_1, m_2$  przechodzących przez punkty  $A$  i  $B$ . Dokonajmy kładu prostych  $m_1, m_2$ . Z własności kładu (jak pamiętamy, obracane są płaszczyzna  $\alpha$  i stowarzyszona z nią jej płaszczyzna zbiegu  $\alpha-z$ ) mamy równoległości:  $O^o M_a \parallel m_1^o \parallel m_2^o$ ;  $O^o Z_a \parallel a^o$ . Trójkąt  $O^o M_a Z_a$  jest równoramienny. Zatem trójkąty  $A^* T_a A^o$  i  $B^* T_a B^o$  są również równoramienne. Mamy więc równość  $A^* B^* = A^o B^o$ . Ale odległość  $A^o B^o$  jest rzeczywistą długością odcinka  $[AB]$ . Stąd odległość  $A^* B^*$  jest rzeczywistą długością odcinka  $[AB]$ . Otrzymaliśmy zatem prostszy niż poprzez kład sposób znajdowania rzeczywistej długości odcinka danego (znanego) w rzucie środkowym. Ale co jest ważniejsze, mamy również prostszą konstrukcję odwrotną: metodę odmierzania w rzucie środko-

wym odcinka o danej długości. Wystarczy dla danej prostej  $a$  znaleźć punkt  $M_a$  i z niego zrzutować daną prostą  $a^s$  na ślad tłowy  $t_\alpha$  płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 7.20). Punkt  $M_a$  nazywać będziemy *punktem mierzenia prostej  $a$* . Wykorzystanie punktów mierzenia zilustrujemy na przykładzie konstrukcji rzutu środkowego sześcianu o krawędzi mającej daną długość.



Rysunek 7.20: Ilustracja uzasadniająca własność punktu mierzenia prostej

## 7.10. Mierzenie na prostej prostopadłej

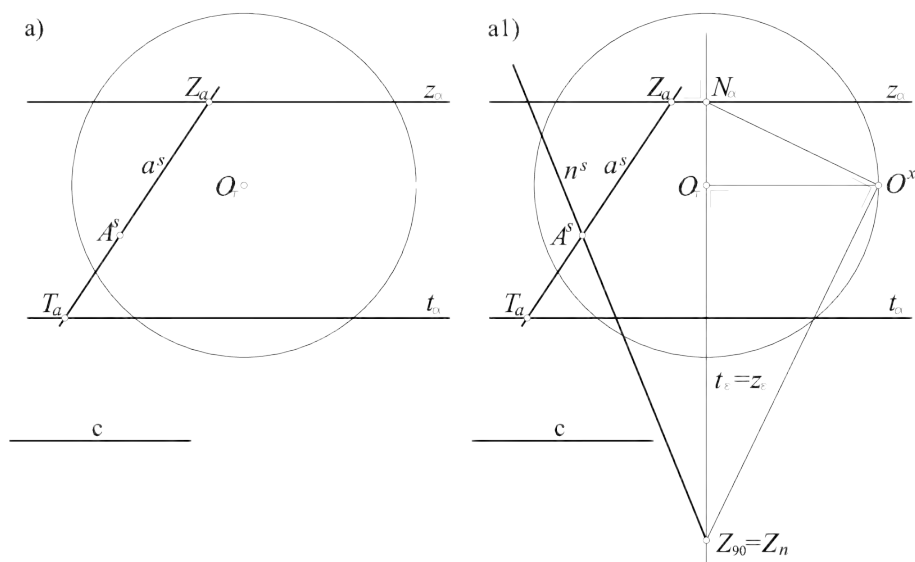
Rozwiążmy następujące zadanie.

**Przykład 7.1.** Dany jest rzut środkowy  $A^s$  punktu  $A$  na płaszczyźnie  $\alpha(t_\alpha, z_\alpha)$  (rys. 7.21). Wyznaczyć w rzucie środkowym odcinek  $[AB]$  prostopadły do płaszczyzny  $\alpha$  i mający daną długość  $c$ .

*Rozwiązanie* zadania z przykładu 7.1. Algorytm przestrzenny rozwiązania jest następujący. Przyjmujemy, że punkt  $A$  leży na pewnej prostej  $a$  o śladzie zbiegu  $Z_a$ . Znajdujemy ślad zbiegu  $Z_{90}$  wszystkich prostych prostopadłych do płaszczyzny  $\alpha$  (rys. 7.21a1). Przez punkt  $A$  prowadzimy prostą  $n$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ . Prosta  $n$ , na której leży punkt  $A$ , przesuwamy równolegle tak, by punkt  $A$  znalazł się na tle (na rys. 7.22a2) jest to punkt  $A^o$ ), czyli na śladzie tłowym  $t_\alpha$ . Prosta ta

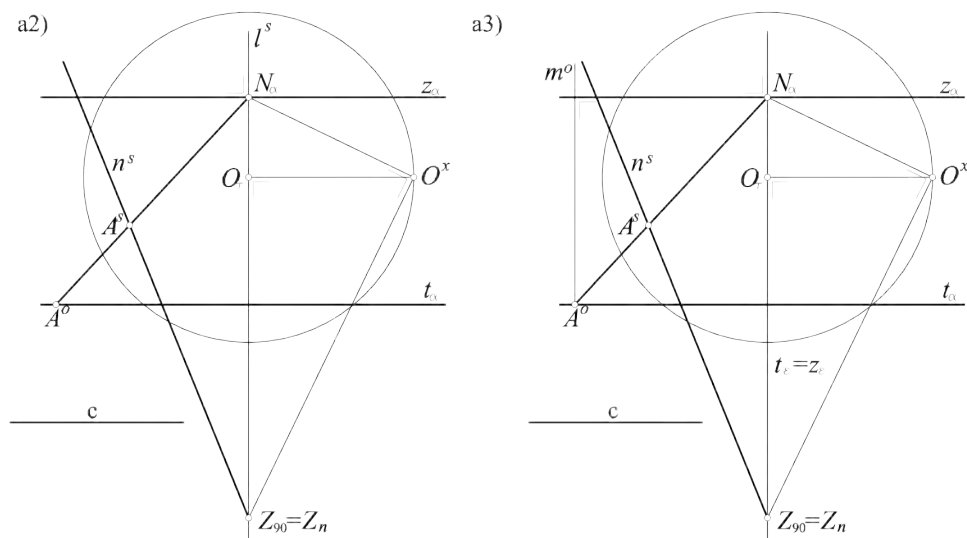


zajmie położenie  $m$  (rys. 7.22a3). Znajdujemy następnie rzut równoległy  $m^o$  prostej  $m$  na tło w kierunku prostej  $ON_\alpha$  (promienie rzutujące mają wspólny ślad zbiegu  $N_\alpha$ ). Prosta  $m$  tworzy z tłem kąt  $\omega$ . Dokonujemy kładu  $m^x$  prostej  $m$  na tło (rys. 7.23a4) i odmierzamy odcinek  $[A^x B^x]$  o długości  $c$  (rys. 7.23a5). Powracając z kładu, znajdujemy punkt  $B^o$  (rys. 7.24a6), który przesuwając równolegle według  $N_\alpha$ , daje szukany punkt  $B^s$  (rys. 7.24a7).

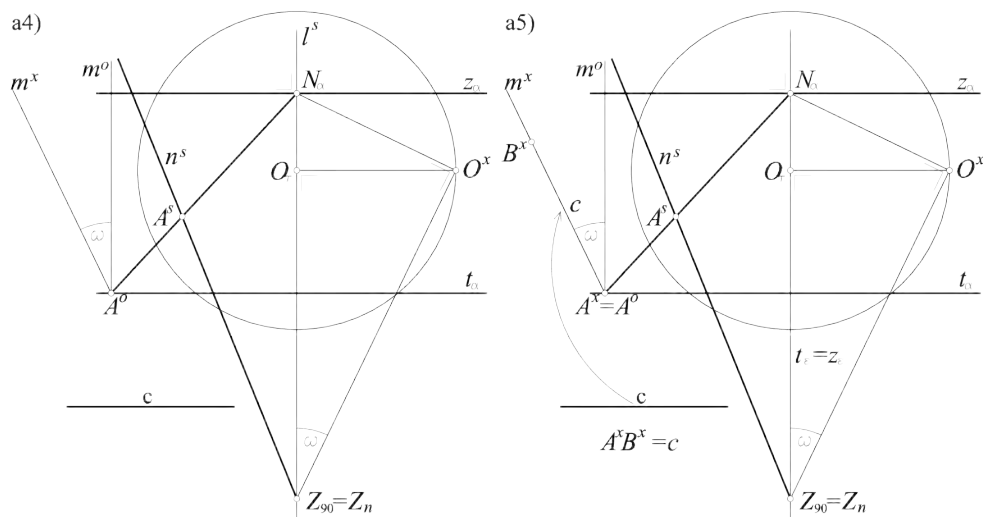


Rysunek 7.21: Konstrukcja odmierzania odcinka na prostej prostopadłej do danej płaszczyzny  $\alpha$ : a) dany w rzucie punkt  $A$  na płaszczyźnie  $\alpha$ ; a1) konstrukcja prostej  $n$  prostopadłej do płaszczyzny  $\alpha$  przechodzącej przez punkt  $A$  (cdn.)

Istnieją także inne konstrukcje odmierzenia na odcinku prostopadłym. Na przykład poprzez punkt mierzenia, korzystając z konstrukcji omówionej wyżej (rys. 7.25). Przez punkt  $A$  prowadzimy proste: prostą  $b$  o kierunku  $N_\alpha$  i prostą  $n$  prostopadłą do płaszczyzny  $\alpha$ . Przez proste  $b$  i  $n$  prowadzimy płaszczyznę  $\beta(t_\beta, z_\beta)$  (rys. 7.25a1). W płaszczyźnie  $\beta$  znajdujemy punkt mierzenia  $M_n$  prostej  $n$ ; a4) i za pomocą tego punktu odmierzamy odcinek  $[A^* B^*]$  o długości  $c$ . Następnie, korzystając z konstrukcji metodą punktu mierzenia, znajdujemy szukany rzut środkowy odcinka (rys. 7.26, 7.27).



Rysunek 7.22: Konstrukcja odmierzania odcinka na prostej prostopadłej do danej płaszczyzny  $\alpha$  (cd.): a2) przesunięcie punktu  $A$  na tło (otrzymujemy punkt  $A^o$ ); a3) przesunięcie prostej  $n$  na tło i jej rzut równoległy z kierunku odwzorowanego na  $N_\alpha$  (otrzymujemy prostą  $m^o$ ) (cdn.)

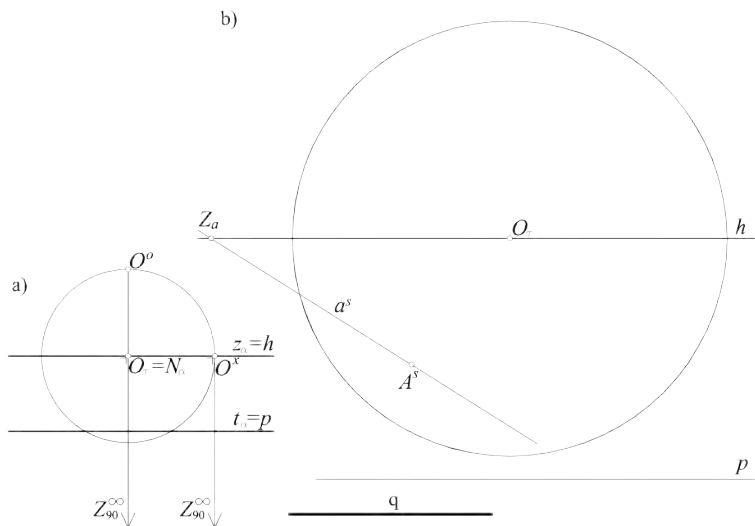


Rysunek 7.23: Konstrukcja odmierzania odcinka na prostej prostopadłej do danej płaszczyzny  $\alpha$  (cd.): a4) dokonanie kładu bocznego prostej  $m^x$  na tło; a5) odmierzenie odcinka  $A^x B^x$  o długości  $c$  (cdn.)

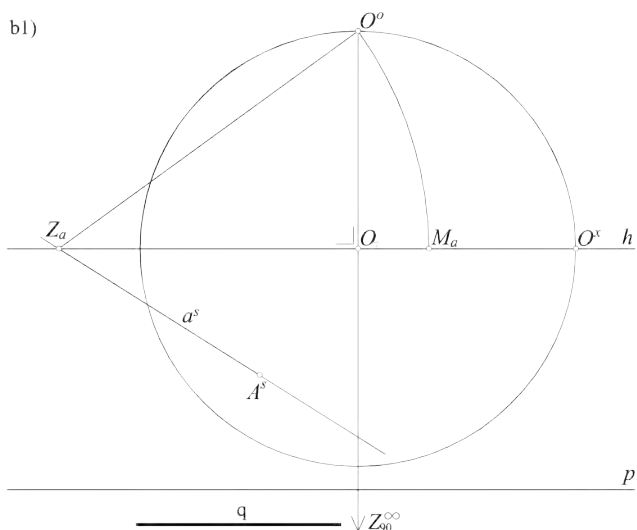




**Przykład 7.2.** Dany jest rzut środkowy  $A^s$  punktu  $A$  na płaszczyźnie  $\alpha(t_\alpha, z_\alpha)$  (rys. 7.28). Wyznaczyć w perspektywie stosowanej sześcián o wierzchołku w punkcie  $A$  i krawędzi równej  $q$  na prostej  $a$ .

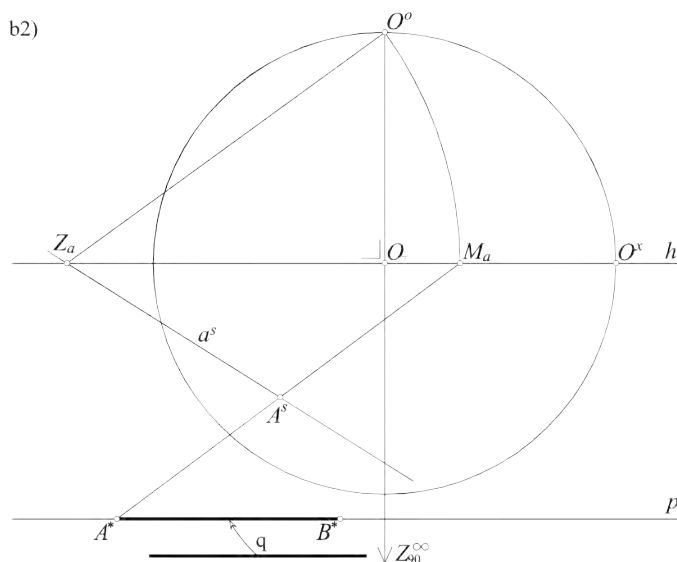


Rysunek 7.28: Perspektywa stosowana: a) podstawowe założenia perspektywy stosowanej; b) dane do konstrukcji sześciánu w perspektywie stosowanej (cdn.)

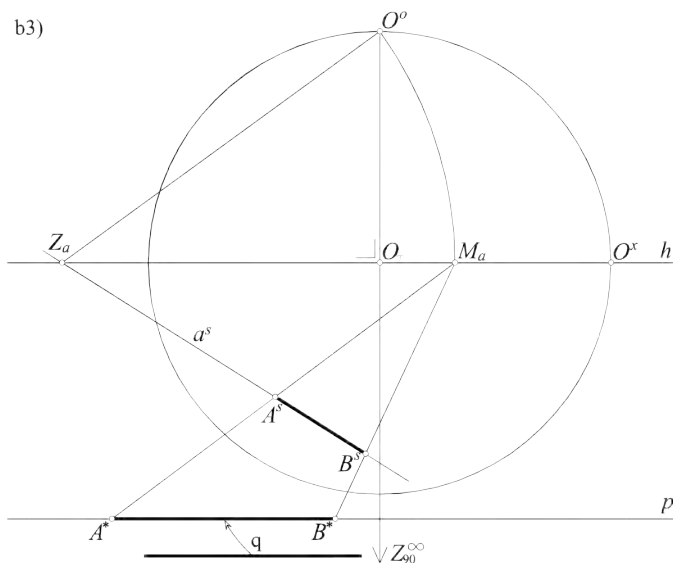


Rysunek 7.29: Wyznaczenie punktu mierzenia  $M_a$  prostej  $a$  (cdn.)

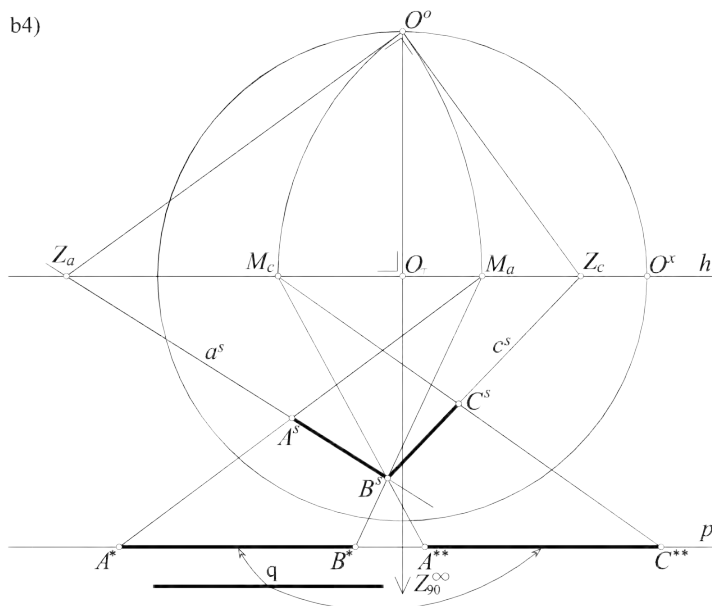
Rozwiązanie zagadnienia z przykładu 7.2 przedstawiamy na rysunkach 7.29–7.35 i omawiamy niżej.



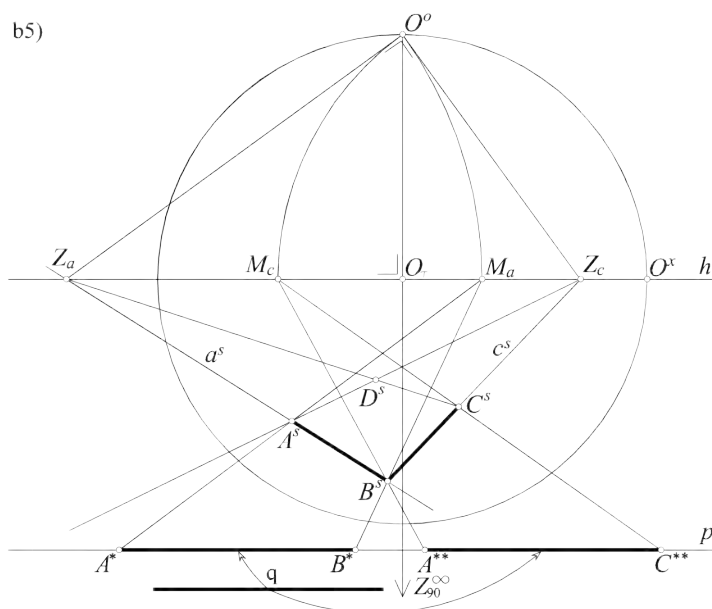
Rysunek 7.30: Wyznaczenie rzutu  $A^*$  na  $t_\alpha$  punktu  $A^s$  (cdn.)



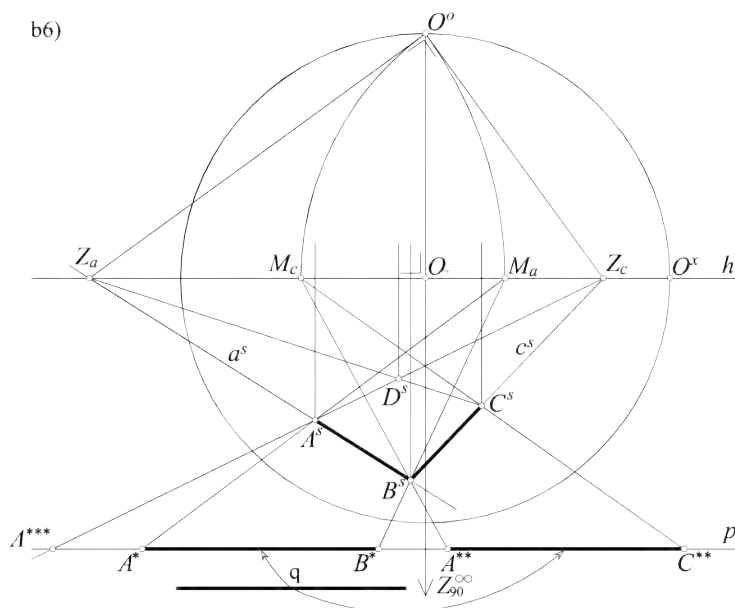
Rysunek 7.31: Odmierzenie odcinka  $[A^* B^*]$  o długości  $q$  i znalezienie rzutu  $[A^s B^s]$  odcinka  $[AB]$  na prostej  $a$  (cdn.)



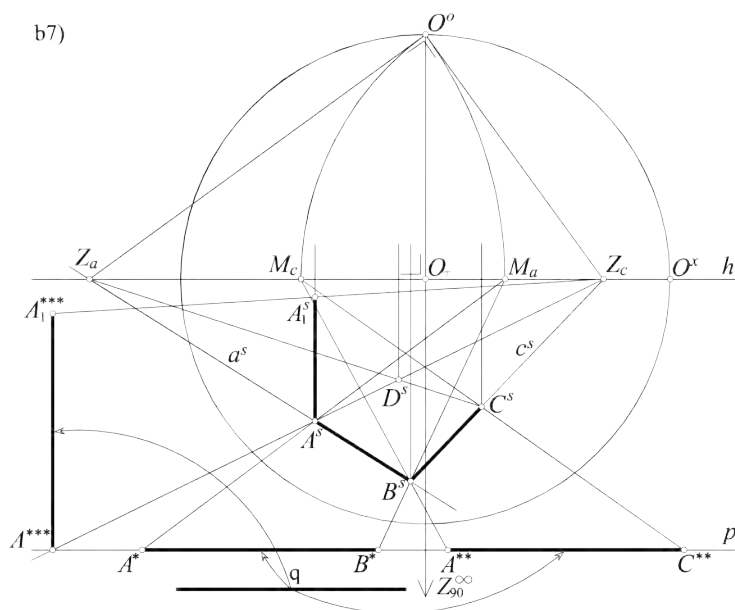
Rysunek 7.32: Wyznaczenie punktu mierzenia  $M_c$  prostej  $c$ , odmierzenie odcinka  $[A^{**}C^{**}]$  o długości  $q$  i znalezienie rzutu  $[A^sC^s]$  odcinka  $[AC]$  na prostej  $c$  (cdn.)



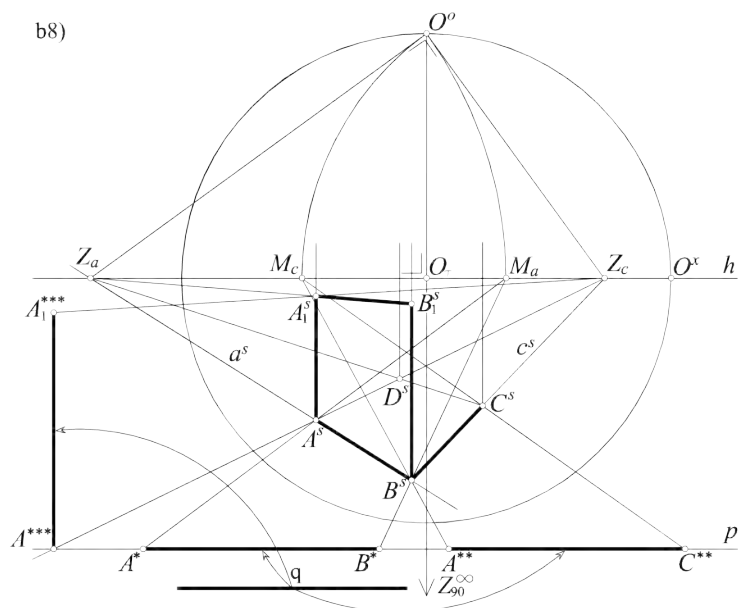
Rysunek 7.33: Wyznaczenie rzutu  $[A^sB^sC^sD^s]$  kwadratu podstawy  $[ABCD]$  sześciangu (cdn.)



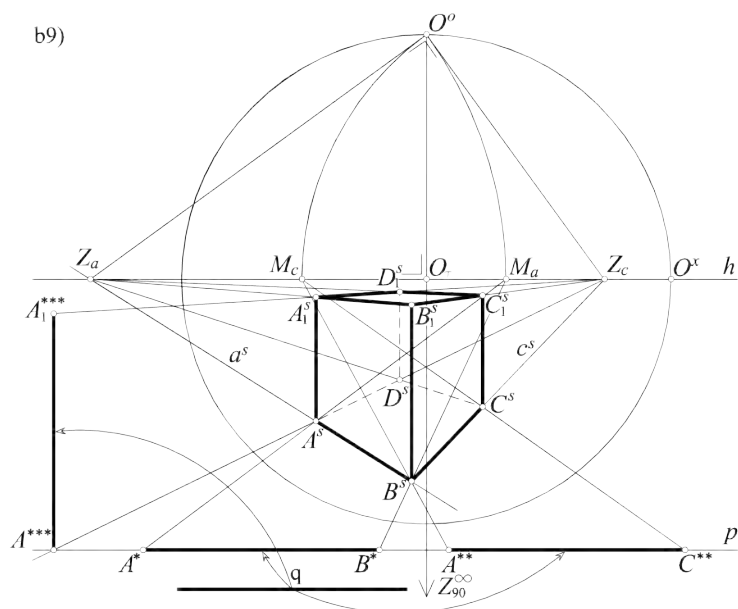
Rysunek 7.34: Poprowadzenie krawędzi sześcianu prostopadłych do podstawy (cdn.)

Rysunek 7.35: Przesunięcie punktu  $A$  na tło w kierunku  $Z_c$  i odmierzenie odcinka  $[A^{***}A_1^{***}]$  o długości  $q$  oraz znalezienie rzutu  $[A^sA_1^s]$  odcinka  $[AA_1]$  na prostej prostopadłej do podstawy sześcianu przechodzącej przez punkt  $A$  (cdn.)





Rysunek 7.36: Znalezienie rzutu  $B_1^s$  kolejnego punktu  $B_1$  poprzez poprowadzenie prostej równoległej do prostej  $a$  przechodzącej przez punkt  $A_1$  (cdn.)



Rysunek 7.37: Znalezienie pozostałych punktów sześciangu poprzez poprowadzenie odpowiednich prostych równoległych przez punkty  $A_1$ ,  $B_1$ , a następnie przez  $C_1$

Zatem proste prostopadłe do płaszczyzny  $\alpha$ , równoległe do siebie w rzeczywistości, w rzucie środkowym są także równoległe (rys. 7.28). W perspektywie stosowanej (dwuzbieżnej) zrealizujemy konstrukcję sześcienu. Zakładamy, że na płaszczyźnie  $\alpha$  prostopadłej do tła ( $O_\tau \in z_\alpha$ ) dana jest prosta  $a$ , na której leży punkt  $A$ . Algorytm konstrukcji jest następujący.

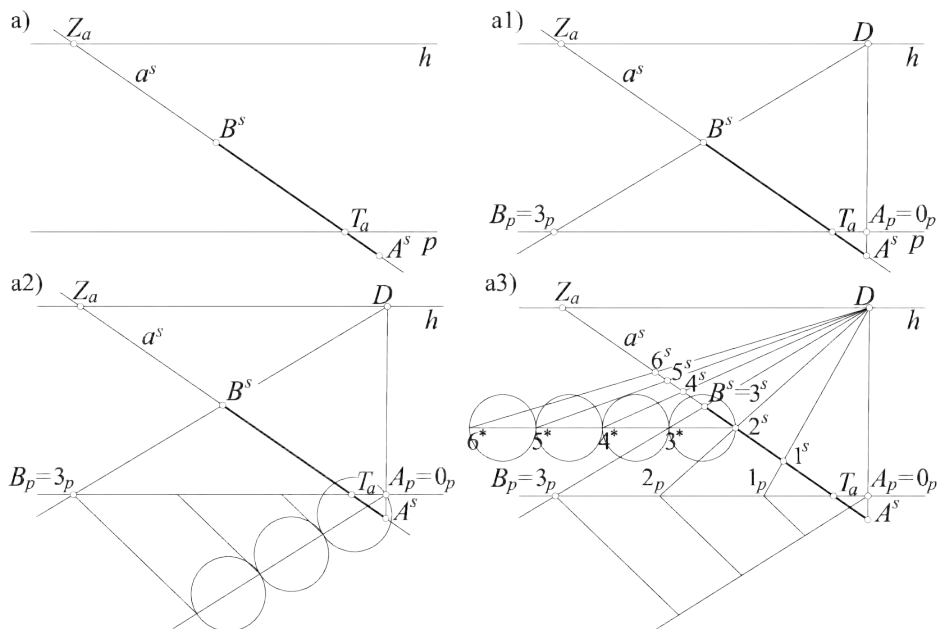
- 1) Znajdujemy punkt mierzenia  $M_a$  prostej  $a$  (rys. 7.29). Następnie
- 2) Rzutujemy punkt  $A^s$  na ślad tłowy  $t_\alpha$ , czyli prostą podstawy  $p$ , i znajdujemy punkt  $A^*$  (rys. 7.30).
- 3) Na prostej podstawy odmierzamy odcinek  $[A^*B^*]$  o długości  $|q|$  (rys. 7.31).
- 4) „Powracamy” z rzutu na prostą  $a^s$ , tj. łączymy punkt  $B^*$  z punktem  $M_a$  i w przecięciu z prostą  $a^s$  otrzymujemy punkt  $B^s$  (rys. 7.31).
- 5) Znajdujemy ślad zbiegu  $Z_c$  prostych prostopadłych do prostej  $a$  i konstruujemy prostą  $c^s$ , łącząc punkty  $Z_c$  i  $B^s$  (rys. 7.32b4).
- 6) Powtarzamy operacje od 1 do 4 w odniesieniu do prostej  $c$  (rys. 7.32b4) i otrzymujemy punkt  $C^s$ .
- 7) Łącząc punkt  $C^s$  z  $Z_a$  i  $A^s$  z  $Z_c$ , otrzymujemy proste, które w przecięciu dają czwarty punkt  $D^s$  kwadratu podstawy (rys. 7.33b5).
- 8) Konstruujemy proste prostopadłe do płaszczyzny  $\alpha$  przechodzące przez wierzchołki kwadratu podstawy (rys. 7.34).
- 9) Prostą przechodzącą przez punkt  $A$  przesuwamy równoległe do położenia na tle (punkt  $A$  zajmie położenie  $A^{***}$ ) i na niej odmierzamy odcinek  $[A^{***}A_1^{***}]$  i „wracając” do rzutu, otrzymujemy punkt  $A_1^s$  (rys. 7.35b7).
- 10) Pozostałe punkty „górnej” ściany sześcienu znajdujemy, prowadząc odpowiednie proste równoległe do krawędzi podstawy (rys. 7.36b8, 7.37b9).

Warto zwrócić uwagę na konfiguracyjność Reidemeistera rysunku sześcienu w perspektywie, która tłumaczy wymiennność prostych przy konstrukcji ostatniego punktu  $D_1^s$  sześcienu.

## 7.11. Punkty dzielenia

Gdy zachodzi potrzeba podzielenia odcinka (np.  $[AB]$ ) odwzorowanego w rzucie środkowym na pewną liczbę jednakowych części, rzutujemy ten odcinek z dowolnego punktu horyzontu na prostą podstawy (na tło). W rzeczywistości jest to rzut równoległy i przy podziale ko-

rzystamy z twierdzenia Talesa. W rzucie środkowym postępujemy następująco. Przyjmujemy dowolny punkt ( $D$ ) na horyzoncie i łączymy ten punkt z końcami odcinka. Na prostej podstawy  $p$  otrzymujemy odcinek  $A_pB_p$ , który dzielimy na żadaną liczbę części i „powracamy” do rzutu (rys. 7.38).



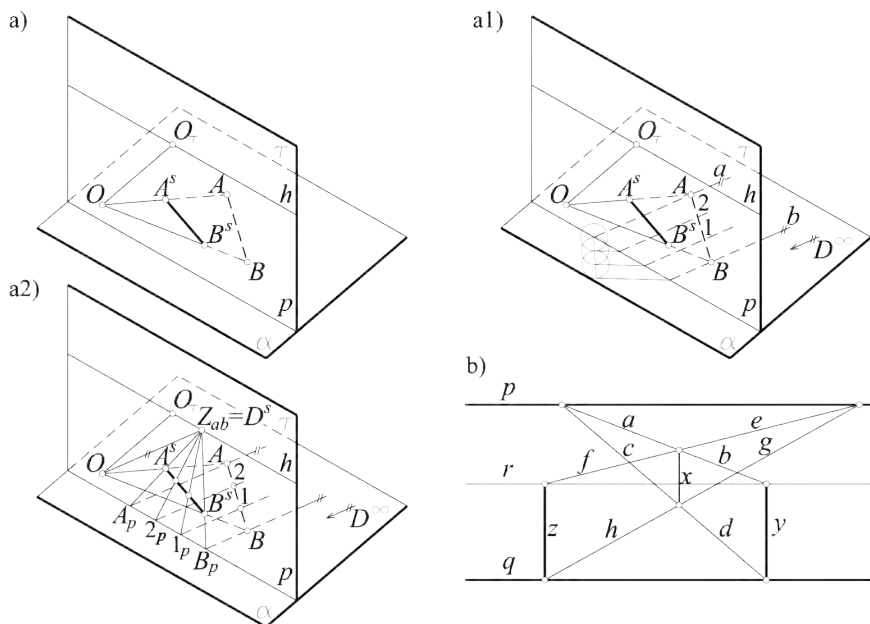
Rysunek 7.38: Ilustracja konstrukcji podziału odcinka w rzucie środkowym na dowolną liczbę jednakowych części: a) odcinek  $[AB]$  ( $[A^sB^s]$ ); a1) wybieramy dowolnie punkt  $D$  na horyzoncie i rzutując punkty  $A^s$ ,  $B^s$  na prostą podstawy  $p$ , otrzymujemy  $A_p$ ,  $B_p$ ; a2) odcinek  $[A_pB_p]$  dzielimy na  $n$  ( $n = 3$ ) równych części; a3) „wracając” do rzutu, otrzymujemy żądany podział; pokazano także sposób wielokrotnego odmierzania odcinka na prostej, przy szczupłości miejsca na rysunku

## 7.12. Częściowe punkty mierzenia

Często mimo ograniczonego miejsca na rysunku zachodzi potrzeba odmierzania odcinka. Posługujemy się wtedy tzw. *częściowym punktem mierzenia*, który pozwoli odmierzyć tylko część odcinka na prostej podstawy  $p$ , a promienie rzutujące wykreślą w perspektywie odcinek całkowity. Zamiast punktu mierzenia  $M_a$  pełnego odcinka konstruuje się punkt  $M_{\frac{2}{3}a}$  na horyzoncie ( $h$ ), który mierzy w perspektywie cały odcinek  $[A^sB^s]$  na prostej  $a^s$ , mimo że na prostej  $p$  odmierzamy tylko

$\frac{2}{3}A^*B^*$  ( $A^{**}B^{**} = \frac{2}{3}A^*B^*$ ) (rys. 7.39a1). Punkt  $M_{\frac{2}{3}a}$  nazywamy *częściowym punktem mierzenia*. Ogólnie, dla punktu mierzenia  $M_{\frac{k}{m}a}$  wystarczy odmierzyć odcinek długości  $\frac{k}{m}A^*B^*$ . Uzasadnijmy to. Niech rzutem punktu  $A^s$  z punktu  $M_a$  na prostą  $p$  będzie punkt  $A^*$ , a rzutem z punktu  $M_{\frac{k}{m}a}$  będzie punkt  $A^{**}$ . Podobnie niech będzie w przypadku punktu  $B^s$  (rys. 7.39a1). Zauważmy, że  $A^*B^* = T_aB^* - T_aA^*$  lub  $B^*A^* = T_aA^* - T_aB^*$ . Mamy  $Z_aM_{\frac{k}{m}a} = \frac{k}{m}Z_aM_a$ . Należy wykazać, że  $A^{**}B^{**} = \frac{k}{m}A^*B^*$ . Zauważmy, że  $T_aA^{**} = \frac{k}{m}T_aA^*$  (z podobieństwa trójkątów  $[Z_aA^sM_a]$ ,  $[T_aA^sA^*]$ ),  $B^*B^{**} = (1 - \frac{k}{m})T_aB^*$  (z podobieństwa trójkątów  $[M_{\frac{k}{m}a}B^sM_a]$ ,  $[B^{**}B^sB^*]$ ),  $T_aB^* = A^*B^* + T_aA^*$ ,  $A^{**}B^{**} = T_aB^* - (1 - \frac{k}{m})T_aB^* - \frac{k}{m}T_aA^* = \frac{k}{m}T_aB^* - \frac{k}{m}T_aA^* = \frac{k}{m}A^*B^*$ . Zatem, zamiast odmierzać  $A^*B^*$  z punktu  $M_a$ , odmierzać będziemy  $\frac{k}{m}A^*B^*$  z punktu  $M_{\frac{k}{m}a}$  (na rys. 7.39a1  $k = 2$ ,  $m = 3$ ).

### 7.13. Zasada zmniejszania



Rysunek 7.39: Zasady zmniejszania (redukcji rysunków): a1) ilustracja istoty częściowego punktu mierzenia; b) konstrukcja w rzucie środkowym poprzez redukcję; c) podziałki zbiegu i posługiwanie się podziałkami zbiegu w konstrukcji prostych o śladach zbiegu poza rysunkiem



jemy z podobieństwa odpowiednich trójkątów na rys. 7.40c). Aby znaleźć prostą o śladzie zbiegu  $Z_a$ , będącym poza rysunkiem, przechodzącą przez punkt  $A^s$ , prowadzimy przez ten punkt prostą tak, by przecinała podziałki zbiegu w punktach o tych samych współrzędnych  $w$ ,  $w^*$  (na rys. 7.40c  $w = w^* \approx -2, 4$ ).



## Rozdział 8

# Przekształcenia geometryczne

### 8.1. Przekształcenia geometryczne we współrzędnych

Konstrukcje obiektów geometrycznych, zwłaszcza w programach komputerowych (edytorach graficznych typu CAD), w znacznej mierze polegają na przetwarzaniu wcześniej narysowanych figur za pomocą przekształceń geometrycznych. Są to znane z geometrii elementarnej następujące przekształcenia: przesunięcie, obrót, symetria osiowa, symetria środkowa, jednokładność. Z pewnością mniej znanym przekształceniem jest powinowactwo osiowe, a prawie nieznanym kolineacja środkowa.

#### 8.1.1. Rzutowanie w układzie współrzędnych

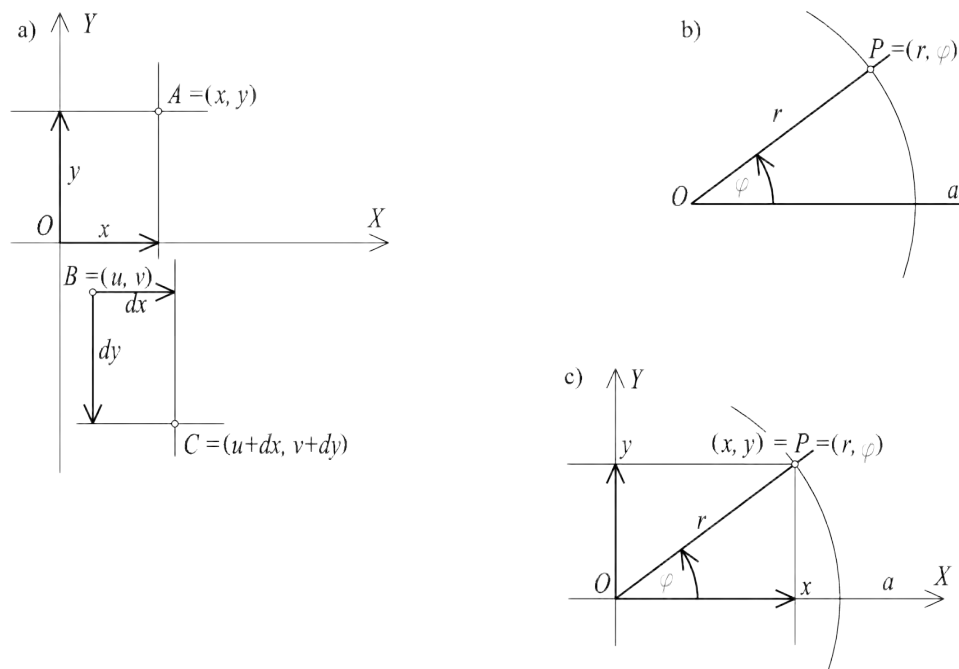
Komputerowa wizualizacja jakiegokolwiek obiektu przestrzennego wymaga jego odwzorowania na płaski ekran monitora lub na wydrukowaną kartkę papieru. Odwzorowanie takie musi być opisane analitycznie. Wcześniej zaś obiekt ten musi być opisany w pewnym wyjściowym układzie współrzędnych, który w grafice komputerowej nazywa się *układem danych* lub *układem rzeczywistym*. Do rysowania potrzebne są współrzędne na płaszczyźnie rzutowania, które otrzymamy poprzez analityczny opis tego odwzorowania. Współrzędne te wyznaczamy najczęściej metodą przekształcenia układu danych do układu obserwatora. *Układ obserwatora* to taki, w którym rzutnia pokrywa się z płaszczyzną  $z = 0$ . O tym, jak przekształcić układ danych do układu obserwatora, powiemy przy omawianiu niektórych przekształceń geometrycznych. Tutaj ograniczymy się do układu obserwatora. Rzutowanie w układzie obserwatora, w którym rzutnia pokrywa się z płaszczyzną  $Oxy$ , jest dość proste [7].



### 8.1.2. Układy współrzędnych

#### Układy współrzędnych na płaszczyźnie

Aby określić punkt w sposób *kartezjański*, wystarczy zadać dwie liczby (dokładniej: parę liczb)  $(x, y)$  – *współrzędne*, czyli dwa odcinki skierowane – *wektory* na *osiach* układu zaczepione w *początku* tego układu. Prowadząc przez ich końce proste równoległe do osi, otrzymujemy w przecięciu żądany punkt (rys. 8.1a). Mówimy wtedy, że punkt jest określony za pomocą współrzędnych *bezwzględnych*. Możemy, będąc w jakimś punkcie układu (np. w punkcie  $B$  na rys. 8.1a), wskazać inny punkt, podając współrzędne *względne*  $(dx, dy)$  (punkt  $C$  na rys. 8.1a). Punkt  $C$  jest obrazem punktu  $B$  w przesunięciu o wektor  $[dx, dy]$ .



Rysunek 8.1: Układy współrzędnych na płaszczyźnie: a) współrzędne kartezjańskie punktu i sposób określania współrzędnych nowego punktu ( $C$ ) względem współrzędnych punktu danego ( $B$ ); b) biegunowy układ współrzędnych; c) ilustracja związku współrzędnych biegunowych z kartezjańskimi

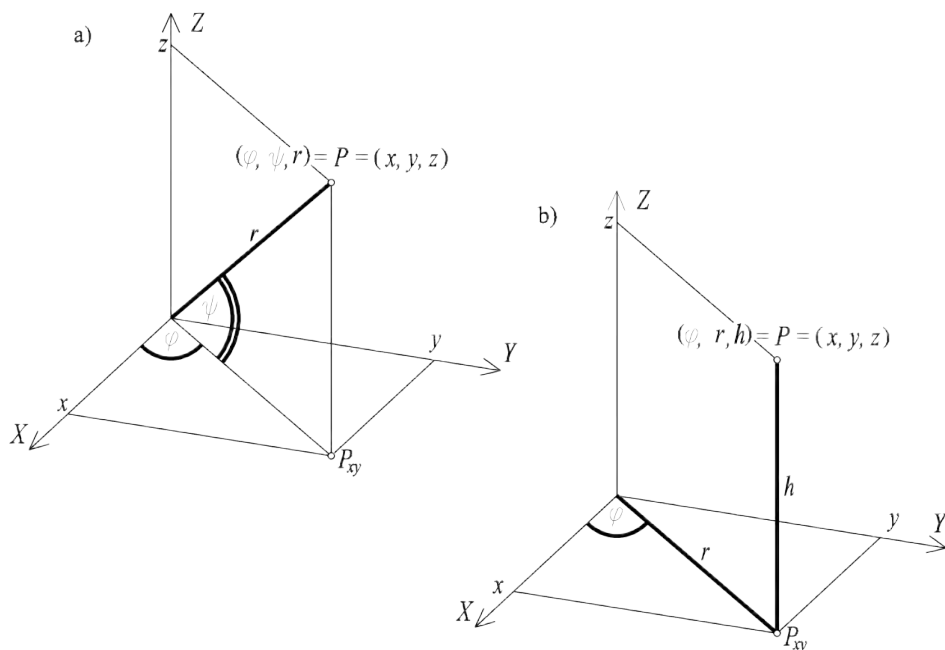
*Układ biegunowy* określamy, zadając *półoś biegunową*  $Oa$  i *orientację* (kierunek odkładania kątów) (rys. 8.1b). W układzie tym punkt  $P$  określany jest przez podanie pary liczb: *odległości*  $r$  punktu  $P$  od punktu  $O$ ,

czyli *promienia*, oraz *kąta*  $\varphi$ , czyli *amplitudy* lub *azymutu*, który tworzy półprosta  $OP$  z półosią biegunową. Zauważmy, że taka para liczb  $(r, \varphi)$  określa punkt jednoznacznie, gdyż pierwsza współrzędna  $r$  oznacza, że punkt leży na okręgu o środku  $O$  i promieniu  $r$ , kąt  $\varphi$  określa półprostą o początku w punkcie  $O$ . Półprosta ta ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny, którego współrzędnymi są liczby  $r, \varphi$ . Zależności algebraiczne między współrzędnymi kartezjańskimi i biegunowymi przy założeniu, że biegun leży w środku układu, a półoś biegunowa pokrywa się z dodatnią półosią  $Ox$ , są następujące:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (8.1)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (8.2)$$

W systemie AutoCAD używa się trzech rodzajów współrzędnych. Poszczególne rodzaje współrzędnych zapisujemy: *prostokątne* –  $x, y$ ; *prostokątne względne* –  $@dx, dy$  (np.  $@5, 7.2$ ); *względne biegunowe* –  $@r < \varphi$  (np.  $@5.3 < 45$ ), gdzie  $\varphi$  jest wyrażony w stopniach. Znak  $@$  oznacza, że współrzędne są względne [28].



Rysunek 8.2: Układy współrzędnych w 3D: a) sferyczny; b) cylindryczny

## Układy współrzędnych w 3D

Aby określić położenie punktu w przestrzeni, wystarczy: (a) *wskazać go geometrycznie*, np. ołówkiem na kartce, myszką na ekranie monitora, bądź (b) podać *warunki geometryczne*, jakie on spełnia, np. że jest to punkt wspólny dwóch danych prostych, lub (c) *analitycznie*, jeśli zadany jest układ współrzędnych poprzez podanie współrzędnych punktu, albo wskazać *częściowo geometrycznie* i *częściowo analitycznie*, tj. zażądać, by pewne współrzędne miały określone wartości. Taki sposób wskazywania punktów w systemie AutoCAD odbywa się poprzez tzw. *filtry*.

Układ prostokątny w przestrzeni 3D opisany jest podobnie jak na płaszczyźnie. Nie będziemy go tu omawiać. Powiemy natomiast o filtrach. Aby określić punkt w przestrzeni, wskazujemy (np. myszką) na płaszczyźnie  $OXY$  lub  $OXZ$  lub  $OYZ$  (ekran, kartka) punkt i następnie podajemy jego trzecią współrzędną jako liczbę (z klawiatury). Dla porównania zwróćmy uwagę na odwzorowanie punktu w aksonometrii, gdzie punkt odwzorowany jest za pomocą rzutu aksonometrycznego swego rzutu prostokątnego na jedną z płaszczyzn, np.  $OXY$  (w AutoCAD-zie jest to filtr *.xy*) i swego rzutu aksonometrycznego (jest to informacja odnośnie do trzeciej współrzędnej  $z$ , czyli względnej wysokości geometrycznej). Podobnie możemy określić najpierw punkt na jednej z osi  $OX$  lub  $OY$  lub  $OZ$ , czyli podać jego względną odległość od jednej z płaszczyzn układu (podając punkt na osi  $OX$ , określamy jego względną odległość od płaszczyzny  $OYZ$ , w AutoCAD-zie jest to filtr *.yz*), a następnie dookreślić, podając dwie (brakujące) współrzędne. *Układ sferyczny* jest uogólnieniem płaskiego układu biegunowego. Opiszemy go od razu w relacji z pewnym układem prostokątnym (rys. 8.2a). Punkt  $P$  określony jest przez: *promień*  $r$ , *szerokość geograficzną*  $\psi$ , czyli kąt, który tworzy półprosta  $OP$  z płaszczyzną  $OXY$ , oraz *długość geograficzną*  $\varphi$ , czyli kąt, który tworzy płaszczyzna  $OPP_{xy}$  z płaszczyzną  $OXZ$ . Zależności między układami prostokątnym i sferycznym wyrażają związki

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi, \quad (8.3)$$

przy czym

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Układ ten jest wykorzystywany w szczególności przy ustalaniu przestrzennej wizualizacji obiektu, czyli parametrów rzutów: równoległego (aksonometria) i środkowego. Zwłaszcza tam, gdzie ustalenie dotyczy kierunku, który poprzez kąty z dwiema ustalonymi płaszczyznami

jest łatwiej wyobrażalny. Do wyznaczenia kierunku wystarczają dwie współrzędne sferyczne, mianowicie długość i szerokość geograficzna. Tak zresztą określono kierunek w analitycznym opisie rzutu równoległego. Układ cylindryczny, podobnie jak układ sferyczny, opiszemy w powiązaniu z pewnym układem kartezjańskim. Układ ten jest innym niż sferyczny rozszerzeniem płaskiego układu biegunowego. Do dwóch współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$  w zakresie płaszczyzny  $OXY$  „dołożono” trzecią współrzędną prostokątną  $h$  (rys. 8.2b). Zależności między układami prostokątnym i cylindrycznym wyrażają związki

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = h; \quad r \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad h \in R. \quad (8.4)$$

### Rzut równoległy

Kierunek rzutowania określimy we współrzędnych sferycznych, zadając dwa kąty  $\varphi$  i  $\alpha$  (rys. 8.3a). Z definicji funkcji trygonometrycznych odpowiednich trójkątów otrzymujemy związki [7]

$$x' - x = d \cos \varphi, \quad y' - y = d \sin \varphi,$$

gdzie  $d = z \operatorname{ctg} \alpha$ . A stąd, po odpowiednim podstawieniu, otrzymujemy wzory na współrzędne rzutu równoległego

$$x' = x + z \operatorname{ctg} \alpha \cos \varphi, \quad y' = y + z \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi. \quad (8.5)$$

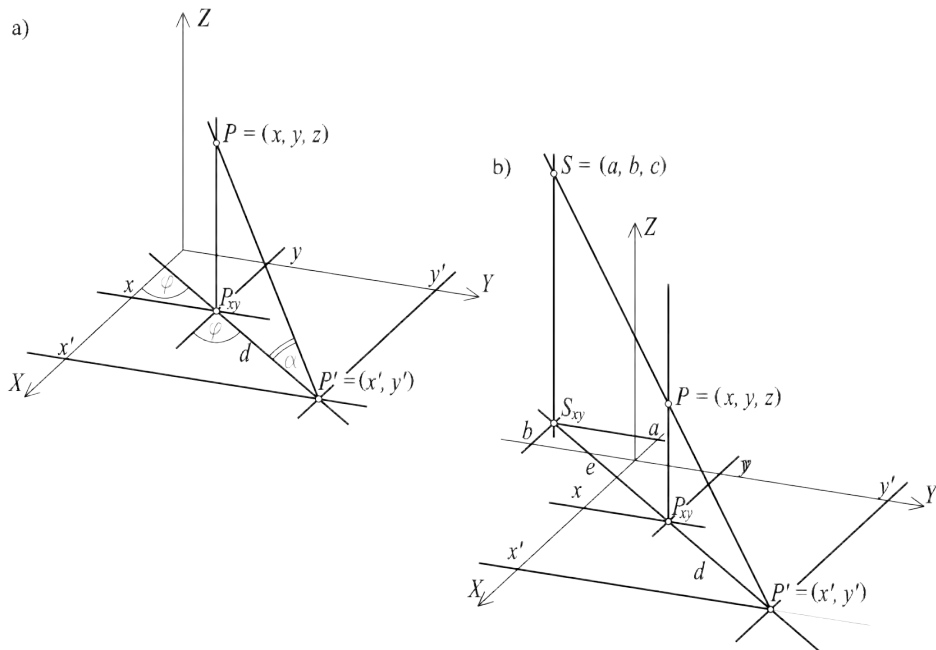
### Rzut środkowy

Niech środek rzutowania  $S$  ma współrzędne  $(a, b, c)$ , rzutowany punkt  $P$  niech ma współrzędne  $(x, y, z)$ , a jego rzut  $P'$  – współrzędne  $(x', y')$  (rys. 8.3b). Wtedy rzut prostokątny  $P_{xy}$  punktu  $P$  ma współrzędne  $(x, y)$ . Oznaczmy przez  $d$  odległość  $P'P_{xy}$ . Wówczas z odpowiednich trójkątów mamy

$$\begin{aligned} \frac{z}{d} &= \frac{c}{d+c} \implies \frac{c}{z} = \frac{d+e}{d}, \\ \frac{x' - a}{x - a} &= \frac{d+e}{d} \implies x' - a = (x - a) \frac{c}{c - z}, \\ \frac{y' - b}{y - b} &= \frac{d+e}{d} \implies y' - b = (y - b) \frac{c}{c - z}. \end{aligned}$$

Po ostatecznym przekształceniu otrzymujemy wzory na współrzędne rzutu środkowego:

$$x' = a + (x - a) \frac{c}{c - z}, \quad y' = b + (y - b) \frac{c}{c - z}. \quad (8.6)$$



Rysunek 8.3: Rzutowanie w układzie współrzędnych: a) równoległe; b) środkowe

### 8.1.3. Przesunięcie równoległe

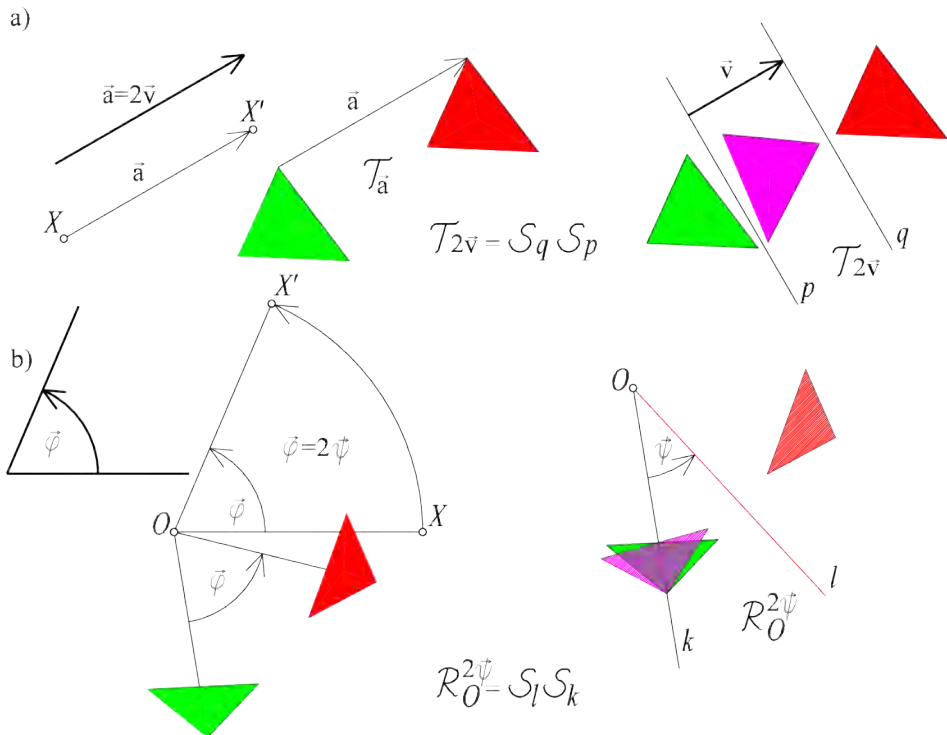
Na płaszczyźnie, czyli w przestrzeni euklidesowej  $E^2$ , ustalmy dowolny wektor  $\vec{a}$ . *Przesunięciem* o wektor  $\vec{a}$  nazywamy przekształcenie postaci:  $\mathcal{T}^{\vec{a}} : E^2 \mapsto E^2$ , gdzie  $\mathcal{T}^{\vec{a}}(X) = X' \iff \overrightarrow{XX'} = \vec{a}$ . Jeżeli wektor  $\vec{a}$  i punkty  $X, X'$  odniesiemy do przestrzeni kartezjańskiej  $R^2$ , a więc potraktujemy jako pary współrzędnych  $\vec{a} = [a_x, a_y]$ ,  $X = (x, y)$ ,  $X' = (x', y')$ , to przesunięcie zapiszemy w postaci

$$x' = x + a_x, \quad y' = y + a_y. \quad (8.7)$$

Jeżeli wprowadzimy współrzędne jednorodne, tzn. przyjmiemy, że punkt  $X$  o współrzędnych  $x, y$  ma współrzędne jednorodne  $x_1, x_2, x_3$ , gdzie  $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}, x_3 = 1$ , to przesunięcie zapiszemy w postaci macierzowej (iloczynu macierzy)

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_x & a_y & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.8)$$

Warto sobie uświadomić, że przesunięcie równoległe można otrzymać jako złożenie dwu symetrii osiowych o osiach równoległych.



Rysunek 8.4: Ilustracja znanych przekształceń geometrii elementarnej: a) przesunięcie równoległe  $\mathcal{T}_{\vec{a}}$  jako złożenie  $\mathcal{S}_q \mathcal{S}_p$  dwu symetrii osiowych  $\mathcal{S}_p, \mathcal{S}_q$ , o osiach  $p, q$  równoległych  $p \parallel q$  o wektorze  $\vec{v}$ , wówczas  $\vec{a} = 2\vec{v}$ ; b) obrót  $\mathcal{R}_O^{\vec{\varphi}}$ , jako złożenie  $\mathcal{S}_l \mathcal{S}_k$  dwu symetrii osiowych  $\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_l$ , o osiach  $k, l$  tworzących kąt  $\vec{\psi}$ , wówczas  $\vec{\varphi} = 2\vec{\psi}$

#### 8.1.4. Obrót

Ustalmy teraz punkt  $O$  oraz kąt skierowany  $\vec{\varphi}$ . *Obrótem* dokoła punktu  $O$  o kąt  $\vec{\varphi}$  nazywamy przekształcenie postaci:  $\mathcal{R}_O^{\vec{\varphi}} : E^2 \mapsto E^2$ , gdzie  $\mathcal{R}_O^{\vec{\varphi}}(X) = X' \iff \overrightarrow{OX} \overrightarrow{OX'} = \vec{\varphi}$ . W przestrzeni kartezjańskiej przy  $O = (0, 0)$ ,  $X = (x, y)$ ,  $X' = (x', y')$  obrót zapiszemy w postaci

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi \quad (8.9)$$

a we współrzędnych jednorodnych i za pomocą macierzy w postaci

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.10)$$

Obrót dokoła dowolnego punktu  $O_0 = (x_0, y_0)$  można zrealizować, składając przesunięcie  $\mathcal{T}^{[-x_0, -y_0]}$  z obrotem  $\mathcal{R}_O^\varphi$  i przesunięciem  $\mathcal{T}^{[x_0, y_0]}$ . W postaci macierzowej złożenie przekształceń  $\mathcal{T}^{[-x_0, -y_0]} \mathcal{R}_O^\varphi \mathcal{T}^{[x_0, y_0]}$  zapiszemy w postaci

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po pomnożeniu macierzy zapis macierzowy obrotu dokoła dowolnego punktu jest następujący

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ x_0 - x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi & y_0 - x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi & 1 \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że *symetrię środkową* możemy zrealizować jako obrót o kąt  $180^\circ$  w dowolnej orientacji. Ponadto warto sobie uświadomić, że obrót można otrzymać jako złożenie dwu symetrii osiowych o osiach przecinających się. Wówczas miara kąta obrotu jest podwojeniem miary kąta, jaki tworzą te proste.

### 8.1.5. Jednokładność

*Jednokładnością* o środku  $O$  i skali  $k \neq 0$  nazywamy przekształcenie postaci:  $\mathcal{S}_O^k : E^2 \mapsto E^2$ , gdzie  $\mathcal{S}_O^k(X) = X' \longleftrightarrow \overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ . W przestrzeni kartezjańskiej przy  $X = (x, y)$ ,  $X' = (x', y')$ ,  $O = (x_0, y_0)$  jednokładność  $\mathcal{S}_O^k$  zapiszemy w postaci

$$x' = x_0 + k(x - x_0), y' = y_0 + k(y - y_0) \quad (8.11)$$

a we współrzędnych jednorodnych i w notacji macierzowej

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ (1 - k)x_0 & (1 - k)y_0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

### 8.1.6. Kolineacja środkowa

*Układ płaski*  $[\pi]$  składa się z trzech obiektów  $(\langle \mathbb{P}, \mathbb{L}, |\rangle)$ : ze zbioru  $\mathbb{P}$  punktów, zbioru  $\mathbb{L}$  prostych płaszczyzny  $\pi$  i relacji przynależności (incydencji)  $|$  punktu z prostą. Incydencja oznacza dla dowolnych  $X \in \mathbb{P}$  i  $l \in \mathbb{L}$  ( $X|l$  lub  $l|X \leftrightarrow X \in l$ ). W przestrzeni  $E^3$  ustalmy punkt  $S$  oraz prostą  $s$  oraz dwa układy płaskie  $[\pi_1] = \langle \mathbb{P}_1, \mathbb{L}_1, |\rangle$ ,  $[\pi_2] = \langle \mathbb{P}_2, \mathbb{L}_2, |\rangle$ .

*Kolineacją środkową* o środku  $S$  i osi  $s$  nazywamy przekształcenie  $\mathcal{C}^{s,S} : [\pi_1] \mapsto [\pi_2]$  zachowujące przynależność i spełniające następujące warunki:

- (c1) dowolny punkt  $X_1 \in \mathbb{P}_1$ , jego obraz  $X_2 = \mathcal{C}^{s,S}(X_1) \in \mathbb{P}_2$  i środek  $S$  są współliniowe,
- (c2) dowolna prosta  $x_1 \in \mathbb{L}_1$ , jej obraz  $x_2 = \mathcal{C}^{s,S}(x_1) \in \mathbb{L}_2$  i oś  $s$  są współpękowe.

Określone w przestrzeni rzutowej przekształcenie przybiera różną postać w przestrzeni euklidesowej w zależności od charakteru punktu  $S$  (właściwy, niewłaściwy) i prostej  $s$  (właściwa, niewłaściwa). Cztery różne możliwe przypadki przedstawiamy na rysunku 8.5.

Przekrój płaski ostrosłupa jest osiowo-kolineacyjnym obrazem podstawy ostrosłupa, w którym środkiem kolineacji jest wierzchołek ostrosłupa, osią zaś jest prosta wspólna płaszczyzny przekroju i płaszczyzny podstawy ostrosłupa (rys. 1.10).

*Powinowactwem osiowym* o środku  $S^\infty$  i osi  $s$  nazywamy przekształcenie  $\mathcal{P}^{s,S^\infty} : [\pi_1] \mapsto [\pi_2]$  zachowujące przynależność i spełniające następujące warunki:

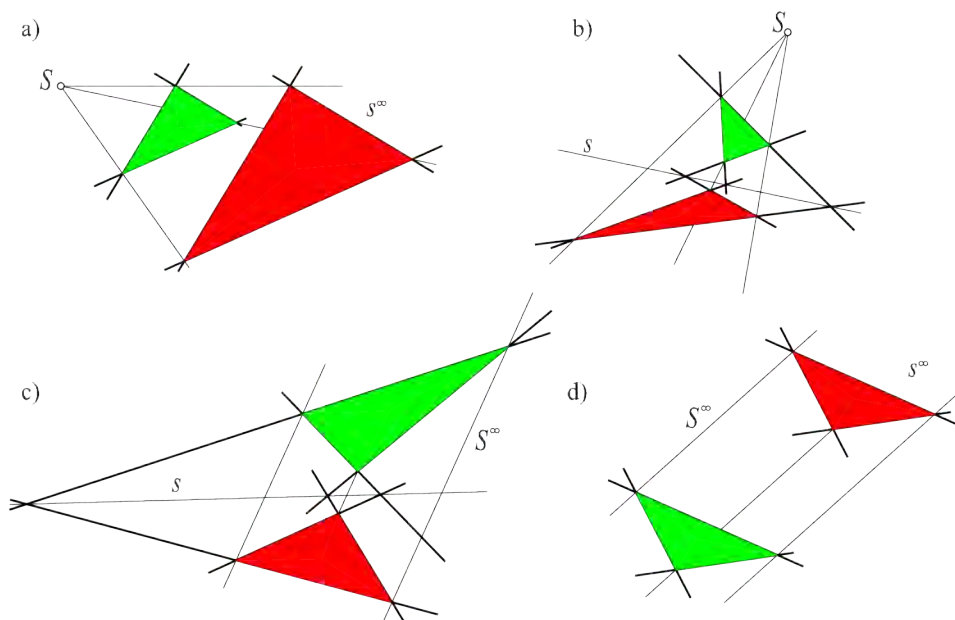
- (c1) dowolny punkt  $X_1 \in \mathbb{P}_1$ , jego obraz  $X_2 = \mathcal{P}^{s,S^\infty}(X_1) \in \mathbb{P}_2$  i środek  $S^\infty$  są współliniowe,
- (c2) dowolna prosta  $x_1 \in \mathbb{L}_1$ , jej obraz  $x_2 = \mathcal{P}^{s,S^\infty}(x_1) \in \mathbb{L}_2$  i oś  $s$  są współpękowe.

Poprawność definicji kolineacji, powinowactwa, jednokładności i przesunięcia uzasadnia twierdzenie Desarguesa omówione w następnym rozdziale. Rysunek 8.5 można traktować jako jego ilustrację.



Tabela 1: Klasyfikacja afiniczna kolineacji środkowych

| Środek (punkt)       | Oś (prosta)           | Rodzaj przekształcenia                                                       | Rys. |
|----------------------|-----------------------|------------------------------------------------------------------------------|------|
| p. wł. $S$           | pr. niewł. $s^\infty$ | jednokładność $\mathcal{S}_S^?$                                              | 8.5a |
| p. wł. $S$           | pr. wł. $s$           | kolineacja środkowa $\mathcal{C}^{s,S}$                                      | 8.5b |
| p. niewł. $S^\infty$ | pr. wł. $s$           | powinowactwo osiowe<br>o osi $s$ i kierunku $S^\infty$                       | 8.5c |
| p. niewł. $S^\infty$ | pr. niewł. $s^\infty$ | przesunięcie ( $S^\infty \in s^\infty$ )<br>równoległe w kierunku $S^\infty$ | 8.5d |



Rysunek 8.5: Ilustracja różnych afinicznych typów kolineacji: a) jednokładność; b) kolineacja środkowa; c) powinowactwo osiowe; d) przesunięcie równoległe (*elacja* – środek kolineacji należy do osi kolineacji, tzn.  $S^\infty \in s^\infty$ )

### 8.1.7. Twierdzenie Desarguesa

**Twierdzenie 8.1** (Desarguesa). Jeżeli dwa trójkąty mają oś perspektywiczną, to mają środek perspektywiczny i odwrotnie.

Twierdzenie Desarguesa, czy raczej *konfiguracja Desarguesa*, a właściwie zamykanie się tej konfiguracji (rys. 8.5, 8.6, 8.7), czyni kolineację osiową definiowalną. Wyraża się to m.in. niezależnością konstrukcji obrazu trójkąta od kolejności, w jakiej wybieramy poszczególne wierzchołki trójkąta (rys. 8.5, 8.6, 8.7a9\*, 8.7a9').

### 8.1.8. Powinowactwo osiowe

Jeżeli w powinowactwie kierunek  $S^\infty$  jest prostopadły do osi  $s$ , to mówimy wówczas o *powinowactwie prostokątnym*. Między rzutem (poziomym lub pionowym) figury płaskiej i jej kładem w szczególności łatwo je ustalić (rys. 4.4, 4.13a25, 5.29). Interesujące są przekształcenia okręgu za pomocą powinowactwa (*elipsa*) i kolineacji środkowej (*elipsa, parabola, hiperbola*).

Jeżeli w powinowactwie określonym za pomocą osi  $s$  i pary odpowiadających sobie punktów  $X_1, X_2$  przez  $X'$  oznaczmy punkt  $\{X'\} = s \cap (X_1X_2)$ , to możemy wyznaczyć liczbę

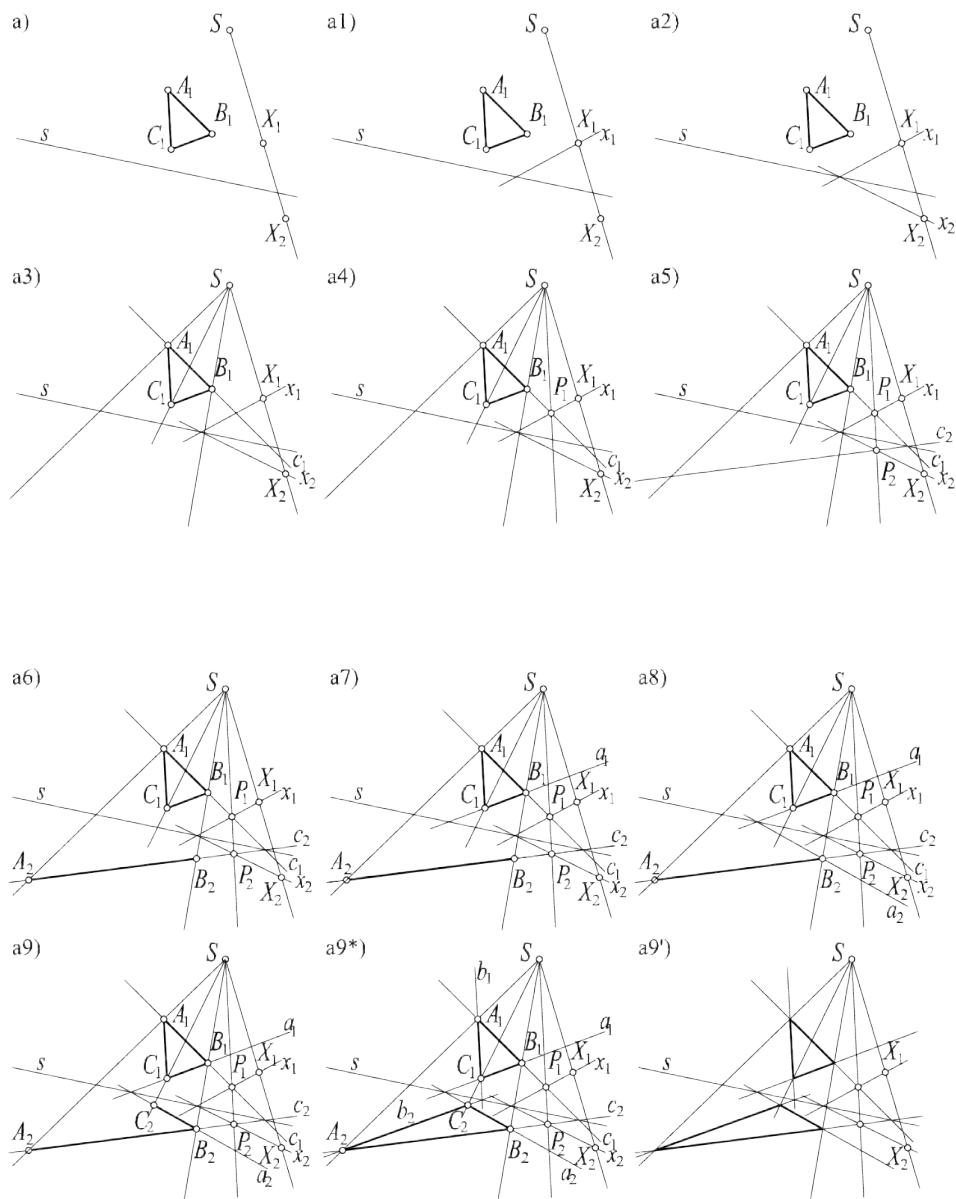
$$k = \begin{cases} \frac{X_1X'}{X_2X'} & \text{gdy } \neg \mathbf{B}(X_1X'X_2), \\ -\frac{X_1X'}{X_2X'} & \text{gdy } \mathbf{B}(X_1X'X_2), \end{cases}$$

gdzie  $(X_1X_2)$  jest prostą, symbol  $\mathbf{B}(X_1X'X_2)$  oznacza, że punkt  $X'$  leży między punktami  $X_1$  i  $X_2$ ,  $\neg$  jest symbolem negacji. Liczbę  $k$  nazywamy *stosunkiem* powinowactwa. Para  $(s, k)$  określa jednoznacznie powinowactwo.

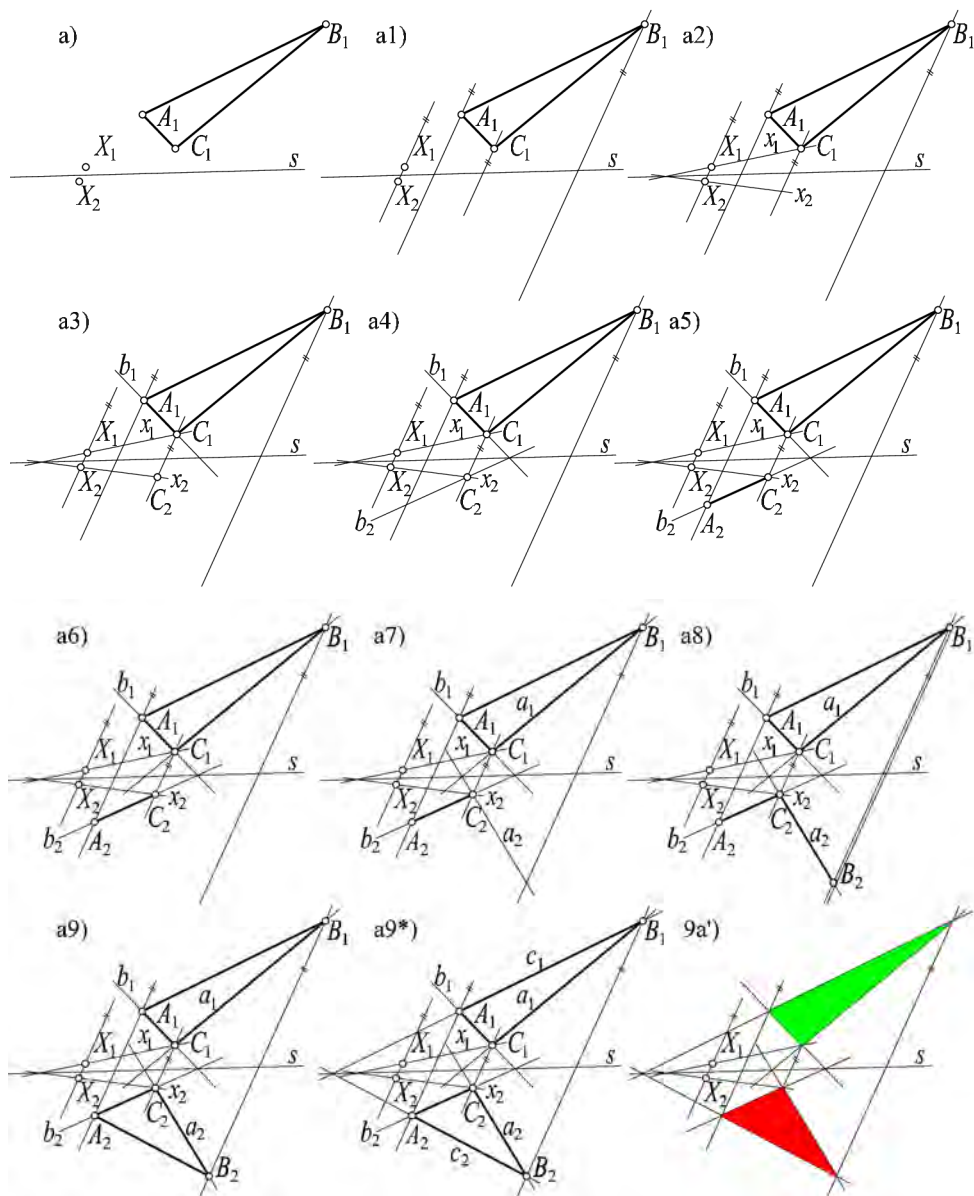
### 8.1.9. Powinowactwo osiowe prostokątne

Niech osią powinowactwa będzie prosta  $s$  o równaniu  $ax + by + c = 0$  i stosunek powinowactwa niech wynosi  $k \neq 0$ . Punkt  $P=(x, y)$  odwzorowujemy w taki punkt  $P'=(x', y')$ ,  $\overrightarrow{QP'} = k\overrightarrow{QP}$ , gdzie  $Q$  jest rzutem prostokątnym punktu  $P$  na oś powinowactwa  $ax + by + c = 0$ . Aby znaleźć współrzędne punktu  $Q$ , prowadzimy przez punkt  $P$  prostą prostopadłą do prostej  $s$  i znajdujemy punkt ich przecięcia. Otrzymamy

$$Q = \left( x - a \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}, y - b \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2} \right).$$



Rysunek 8.6: Konstrukcja obrazu trójkąta w kolineacji środkowej określonej za pomocą osi  $s$ , środka  $S$  i pary  $(X_1, X_2)$  odpowiadających sobie punktów  $X_1, X_2$ ; a1–10) poszczególne etapy znajdowania obrazu trójkąta; a9\*) sprawdzenie twierdzenia Desarguesa – obrazy punktów  $A_2, B_2, C_2$ , można było otrzymać, prowadząc wcześniej proste  $a_1, a_2$  lub  $b_1, b_2$  zamiast prostych  $c_1, c_2$ . Wtedy odpowiednio inaczej należałoby przyjąć pierwszą prostą  $x_1$  przechodzącą przez punkt  $X_1$ ; a9') wizualizacja trójkąta i jego obrazu w kolineacji



Rysunek 8.7: Konstrukcja obrazu trójkąta w powinowactwie osiowym określonym za pomocą osi  $s$  i pary  $(X_1, X_2)$  odpowiadających sobie punktów  $X_1, X_2$ ; a1–a9) poszczególne etapy znajdowania obrazu trójkąta; a9\*) sprawdzenie twierdzenia Desarguesa – zamiast punktu  $A_2$  można było wcześniej skonstruować punkt  $B_2$ , prowadząc prostą  $a_1$  zamiast prostej  $b_1$  – wówczas wcześniej znaleźlibyśmy obraz punktu  $B_1$ ; 9a') wizualizacja zmiany kształtu figury w powinowactwie osiowym

Dalej z zapisanej wcześniej równości wektorowej opisującej przekształcenie otrzymujemy

$$x' = x + (k-1)a \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}, y' = y + (k-1)b \frac{ax + by + c}{a^2 + b^2}, \quad (8.13)$$

a we współrzędnych jednorodnych i w notacji macierzowej

$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} 1 + wa^2 & wab & 0 \\ wab & 1 + wb^2 & 0 \\ wac & wbc & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.14)$$

gdzie  $w = \frac{k-1}{a^2+b^2}$ .

Zauważmy, że dla  $k = -1$  powinowactwo osiowe prostokątne jest symetrią osiową.

### 8.1.10. Skalowanie

Jeżeli prosta  $s$  jest osią współrzędnych  $Ox$ , czyli ma równanie  $y = 0$ , tzn.  $a = 0, b = 1, c = 0$ , to wzory na powinowactwo mają postać

$$x' = x, y' = ky. \quad (8.15)$$

Jeżeli prosta  $s$  jest osią współrzędnych  $Oy$ , czyli ma równanie  $x = 0$ , tzn.  $a = 1, b = 0, c = 0$ , to wzory na powinowactwo mają postać

$$x' = kx, y' = y. \quad (8.16)$$

Złożenie dwu powinowactw osiowych prostokątnych względem osi układu współrzędnych o różnych stosunkach (czynniki skalujących)  $s_x, s_y$  określa przekształcenie zwane w grafice *skalowaniem* wzdłuż osi układu.

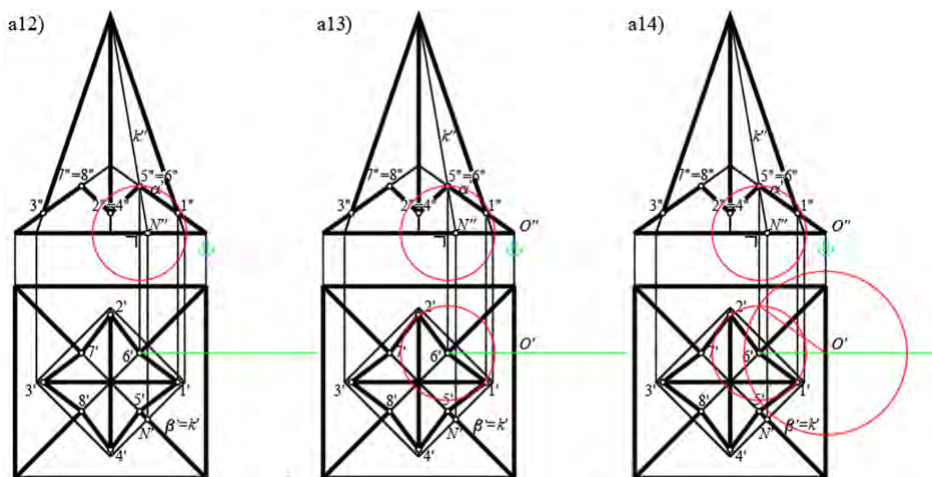
$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

Dla  $s_x = s_y$  jest to jednokładność o środku  $O = (0, 0)$  i skali  $s_x$ . Jeśli chcemy skalować w dowolnych kierunkach prostopadłych, nachylonych do osi układu pod kątem  $\varphi$ , to skalowanie we współrzędnych jednorodnych i w notacji macierzowej wyraża się wzorem

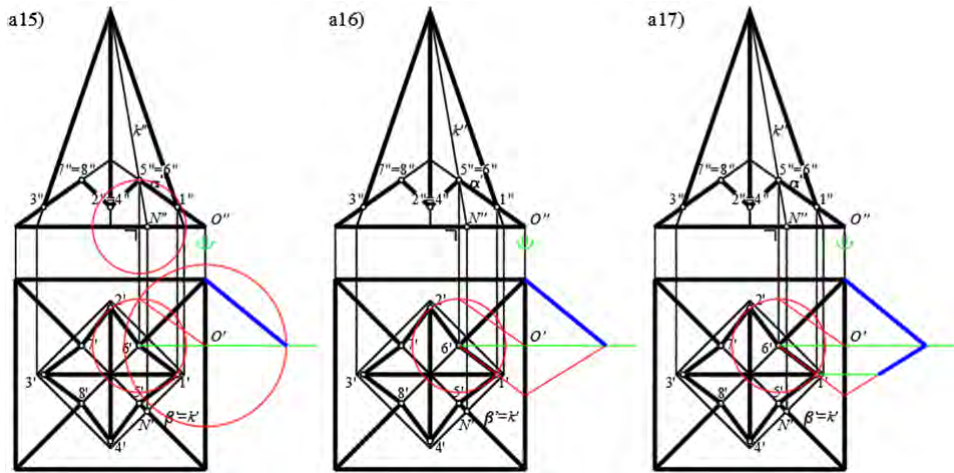
$$[x', y', 1] = [x, y, 1] \begin{bmatrix} s_x \cos^2 \varphi + s_y \sin^2 \varphi & (-s_x + s_y) \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ (-s_x + s_y) \sin \varphi \cos \varphi & s_y \cos^2 \varphi + s_x \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

## 8.2. Jak zmierzyć przenikające się dachy z wieżami?

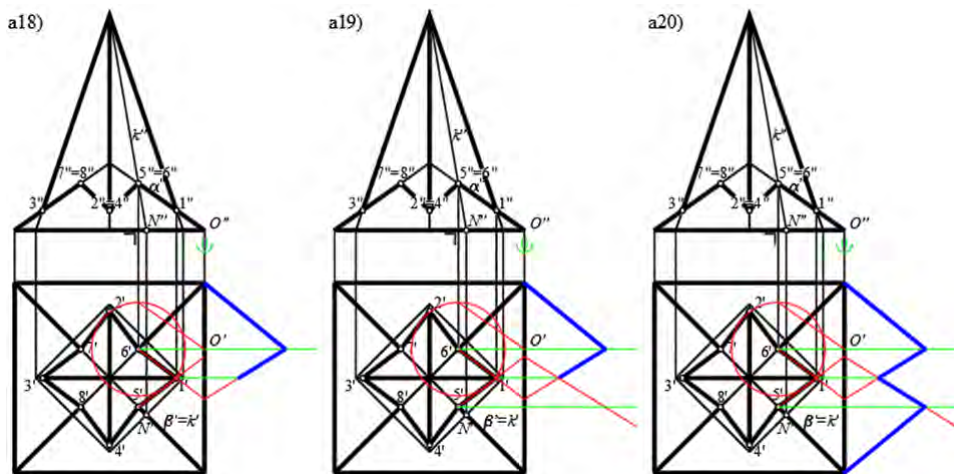
W rozdziale 3.1.4 omówiliśmy metodę elementów wspólnych przenikających się brył i jako przykład 3.5 zastosowania wyznaczaliśmy linię przenikania się dwóch ostrosłupów, tj. wieży z dachem (rys. 3.6). Wyobraźmy sobie teraz, że chcemy zrobić model fizyczny (np. z papieru) przenikających się brył. Potrzebne są wówczas naturalne wymiary ścian i fragmentów ścian ostrosłupów. W tym celu wystarczy wykonać kłady wszystkich ścian lub fragmentów ścian poszczególnych brył. Z uwagi na powtarzalność elementów wystarczą kłady fragmentów dwu ścian. Do konstrukcji wykorzystamy powinowactwo osiowe. Jako oś obrotu w kładzie, a także jako oś powinowactwa przyjmiemy bok podstawy dachu prostopadły do rzutni pionowej (rys. 8.8a12). Płaszczyzny obrotu poszczególnych wierzchołków obracanego wielokąta są prostopadłe do osi i równocześnie określają kierunek powinowactwa.



Rysunek 8.8: Konstrukcja kładu połączenia dachu (fragmentu ściany niższego ostrosłupa zawierającej punkty 1, 5, 6), oś obrotu (osią powinowactwa) jest krawędź podstawy niższego ostrosłupa (okap): a12) przez punkt  $6'$  prowadzimy prostą prostopadłą do okapu (rzut płaszczyzny obrotu punktu 6 i jednocześnie kierunek powinowactwa), w celu wykonania kładu odcinka  $O6$  (promienia obrotu punktu 6 dookoła osi) mierzymy wysokość punktu 6 (promień okręgu); a13) przenosimy do rzutu poziomego poprzez przeniesienie (przesunięcie) okręgu; a14) znajdujemy kład odcinka  $O6$  i tym samym promień obrotu punktu 6 w rzeczywistej długości (cdn.)



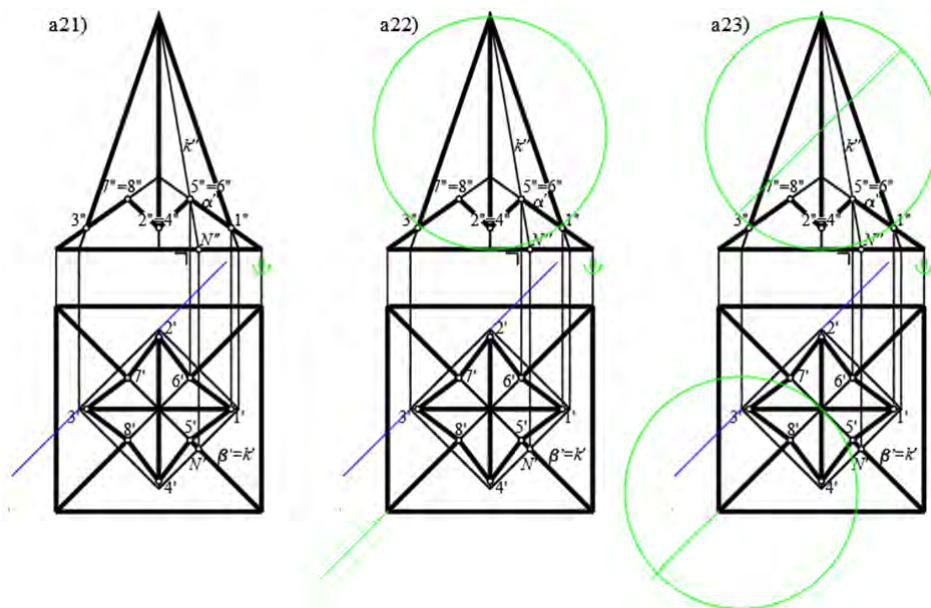
Rysunek 8.9: Konstrukcja kładu połaci dachu (kolejne etapy kładu z wykorzystaniem powinowactwa osiowego prostokątnego cd.): a15) rysujemy kład pierwszego boku wielokąta połaci; a16) przedłużamy drugi odcinek rzutu (poziomego) i punkt przecięcia z osią obrotu łączymy z końcem odcinka obróconego; a17) przez punkt  $1'$  prowadzimy prostą prostopadłą do osi obrotu (prostą kierunku powinowactwa) i rysujemy kład drugiego odcinka połaci (cdn.)



Rysunek 8.10: Konstrukcja kładu połaci dachu (cd.): a18) przedłużamy trzeci odcinek rzutu (poziomego); a19) przez punkt przecięcia z osią obrotu i koniec drugiego odcinka obróconego prowadzimy prostą, równocześnie przez punkt  $5'$  prowadzimy prostą prostopadłą do osi, znajdujemy punkty określające kład trzeciego odcinka połaci; a20) rysujemy kład trzeciego odcinka połaci, a po połączeniu z końcem na osi rzutu czwartego odcinka połaci otrzymujemy kład czwartego odcinka połaci (cdn.)



Kład fragmentu ściany wyższego ostrosłupa (połaci wieży) opiszemy tylko w formule przekształcenia przez powinowactwo osiowe prostokątne. W tym celu za oś powinowactwa wybieramy prostą zawierającą krawędź jego podstawy. Jest to prosta wyróżniona na rysunku 8.11a21. Pozostaje określić parę odpowiadających sobie punktów, czyli znaleźć kład np. wierzchołka wyższego ostrosłupa. Uzyskamy go przez obrót wysokości ściany. W celu wyznaczenia naturalnej wysokości ściany wyższego ostrosłupa mierzymy jego wysokość. Jest to długość średnicy okręgu skonstruowanego na rysunku 8.11a22, pokrywającej się z wysokością ostrosłupa w rzucie pionowym. Przenosimy tę wysokość do rzutu poziomego (rys. 8.11a23), tzn. średnica zawiera rzut krawędzi niższego ostrosłupa.

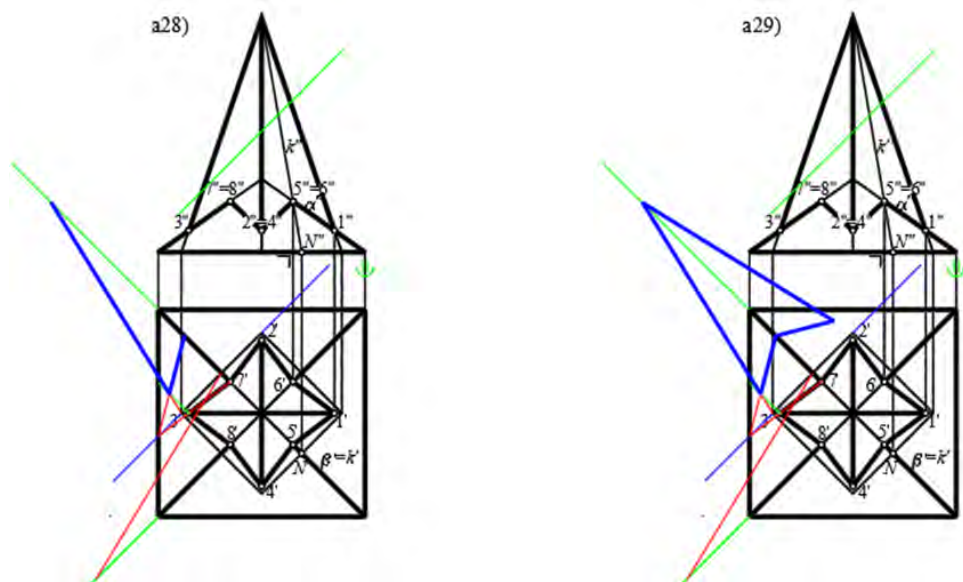


Rysunek 8.11: Konstrukcja kładu połaci wieży: a21) osią obrotu jest krawędź (rzutu) podstawy wyższego ostrosłupa i ściany zawierającej punkty 2, 7, 3; a22) w celu wyznaczenia naturalnej długości wysokości ściany wyższego ostrosłupa mierzymy jego wysokość – jest to długość średnicy narysowanego okręgu, zawierającej wysokość ostrosłupa w rzucie pionowym; a23) odmierzamy wysokość wierzchołka (długość średnicy okręgu), przesuując okrąg tak, by po przesunięciu przechodził przez rzut poziomy wierzchołka i średnica okręgu zawierała rzut krawędzi niższego ostrosłupa (środek okręgu znajduje się na prostej zawierającej przekątną podstawy niższego ostrosłupa) (cdn.)

Dalsza konstrukcja, wyznaczanie kładu wielokąta połaci wieży metodą powinowactwa jest realizowana na rysunkach 8.12, 8.13, 8.14.







Rysunek 8.14: Konstrukcja kładu połaci wieży (cd.): a28) kład drugiego boku wielokąta połaci wieży; a29) kład pozostałej części symetrycznej części wielokąta połaci wieży



# Bibliografia

- [1] Aichholzer O., Aurenhammer F., Alberts D., Gärtner B.: *A Novel Type of Skeleton for Polygons*, „Journal of Universal Computer Science”, Vol. 1, No. 12, 1995, 752–761.
- [2] Blum H., *A transformation for extracting new descriptors of shape*, w: *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, red. W. Wathen-Dunn, MIT Press, Cambridge 1967, 362—380.
- [3] Bryński M., Włodarski L., *Konstrukcje geometryczne*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1979, 500–505.
- [4] Coxeter H.S.M., *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961.
- [5] Grochowski B., *Geometria wykreślna*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976.
- [6] Grochowski B., *Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2020.
- [7] Jankowski M., *Elementy grafiki komputerowej*, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1990.
- [8] Koźniewski E., *On the Existence of Shapes of Roofs*, „Journal for Geometry and Graphics”, 2004, Vol. 8(2), 185–198.
- [9] Koźniewski E., *Geometria dachów. Teoria i zastosowanie*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2007.
- [10] Koźniewski E., *Co jest konstrukcją elementarną w programach CAD?*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Geometria i Grafika Inżynierska” 2009, z. 7, 23–34.
- [11] Koźniewski E., *Offsets in Geometric Creation of Roof Skeletons with Varying Slope and Cut-and-Fill Problems in Topographic Projection*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics” 2010, Vol. 21, 29–35.
- [12] Koźniewski E., *Monge Method in Creating Regular Polyhedrons Models*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics” 2014, Vol. 26, 41–46.
- [13] Koźniewski E., *Rectangular polygons and its shape parameters*, „The

- Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics” 2015, Vol. 27, 9–15.
- [14] Koźniewski E., *A proposal for Descriptive Geometry term papers*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics” 2014, Vol. 26, 33–40.
  - [15] Koźniewski E., Orłowski M., *Rysunki w środowisku AutoCADa wykonywane poza AutoCADem*, „Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej. Budownictwo” 2003, nr 24, 81–87.
  - [16] Koźniewski E., Orłowski M., *The Implementation of the Slice-based Transformations in AutoCAD*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics” 2012, Vol. 23, 51–56.
  - [17] Koźniewski E., Orłowski M., *Volume Optimization of Solid Waste Landfill Using Voronoi Diagram Geometry*, „Open Engineering” 2019, Vol. 9, No. 1, 307–311.
  - [18] Koźniewski E., Orłowski M., *Pre-determination of prediction of yield-line pattern of slabs using Voronoi diagrams*, „Open Engineering” 2022, Vol. 12, No. 1, 647–661.
  - [19] Koźniewski E., Tereszkievicz A., *Matematyka w przykładach z budownictwa i architektury*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2023.
  - [20] Koźniewski E., Koźniewski M., Orłowski M., Owerczuk J., *Modeling an embankment with a natural slope*, „The Journal of Polish Society of Geometry and Engineering Graphics” 2013, Vol. 25, 49–56.
  - [21] Koźniewski E., *Konfiguracyjny charakter metody Monge’a*, [http://og.igi.polsl.pl/biuletyny/Zeszyt\\_6/z6\\_4.pdf](http://og.igi.polsl.pl/biuletyny/Zeszyt_6/z6_4.pdf) [dostęp 10.10.2024].
  - [22] Koźniewski E., *New Methods of the Computer Aided Design of Roof Skeletons*, „Geometry and Graphics” 2016, Vol. 4, No. 2, 3–7.
  - [23] Koźniewski E., *A Static Moment for a Polygon and Its Applications*, „Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering” 2018. Vol. 2, No. 1, 9–16.
  - [24] Koźniewski M., *Thickness Analysis of a Saddle*, „The Journal of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics” 2016, Vol. 28, 25–32.
  - [25] Melton D.W., Stewardson G., *The American Drafter: Why use 1<sup>st</sup> Angle Projection in a 3<sup>rd</sup> Angle World?*, „The Technology Interface Journal/Fall” 2008, Vol. 9, No. 1.
  - [26] Otto F., Otto E., *Podręcznik geometrii wykreślnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN. Warszawa 1994.
  - [27] Pałasiński Z., *Zasady perspektywy*, Zakład Graficzny Politechniki Krakowskiej, Kraków 1985.
  - [28] Pikoń A., *AutoCAD*, wersje 10,11, 12, 12PL, ..., 2023PL, Helion, Gliwice 1992–2023.

- [29] Przewłocki S., *Geometria wykreślna w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1982.
- [30] Pottmann H., Asperl A., Hofer M., Kilian A., *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, Exton 2007.
- [31] Schultz J.A., Henriksson V., *Structural assessment of St. Charles hyperbolic paraboloid roof*, „Curved and Layered Structures”, 2021, Vol. 8, 157–166.
- [32] Saint-Exupéry A. de, *Mały Książę*, Instytut Wydawniczy PAX, Warszawa 1998.
- [33] *Silosy paszowe*, Polnet, <https://www.polnet.pl/pl/silosy> [dostęp 10.10.2024].
- [34] Grupa Azoty Puławy, LinkedIn, 2023, <https://pl.linkedin.com/posts/grupa-azoty-zak%C5%82ady-azotowe-pu%C5%82awy-s-a-grupaazotytypu%C5%82awy-takpracujemy-activity-7028680348410462209-jmXy> [dostęp 10.10.2024].
- [35] *Kaplica Zygmuntowska otwarta dla zwiedzających*, Nasz Kraków, 2020, <https://naszkrakow.com.pl/2020/08/05/krakow-kaplica-zygmuntowska-otwarta-dla-zwiedzajacych/> [dostęp 14.09.2024].
- [36] *Poznaj Allplan Professional*, bd., <https://allbim.pl/allplan-engineering/> [dostęp 7.08.2024].
- [37] *Tekla User Assistance*, bd., <https://support.tekla.com/pl> [dostęp 7.08.2024].
- [38] *Eduardo Fernando Catalano, Faia* (1917–2010), US Modernist, bd., <https://usmodernist.org/catalano.htm> [dostęp 7.08.2024].
- [39] *Kontrowersyjna modernizacja Urzędu Wojewódzkiego w Kielcach [wizualizacje]*, [https://www.bryla.pl/bryla/56,85301,11521865,Kontrowersyjna\\_modernizacja\\_Urzedu\\_Wojewodzkiego\\_w.html](https://www.bryla.pl/bryla/56,85301,11521865,Kontrowersyjna_modernizacja_Urzedu_Wojewodzkiego_w.html) [dostęp 7.08.2024].
- [40] *The Church of St. Aloysius/Erdy McHenry Architecture*, Arch Daily, 2012, <https://www.archdaily.com/296093/the-church-of-st-alloysius-erdy-mchenry-architecture> [dostęp 7.08.2024].
- [41] JB, *Stacja Warszawa Ochota. Kolejny zabytek na linii średnicowej*, Bryla.pl, 2018 <https://www.bryla.pl/bryla/7,85301,23920446,stacja-warszawa-ochota-kolejny-zabytek-na-linii-srednicowej.html> [dostęp 7.08.2024].
- [42] Schlüter L., *Bamboo Structural Systems You Should Know: Hyperbolic Paraboloids*, Bamboou.com, 2022, <https://bamboou.com/hyperbolic-paraboloids-in-bamboo-architecture/> [dostęp 7.08.2024].
- [43] *Przykładowe rysunki w środowisku ArchiCAD*, <https://www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=Przyk%C5%82adowe+rysunki+w+%C5%9Brodowisku+ArchiCAD> [dostęp 7.08.2024].



# Skorowidz

## A

aksonometria hiperboloidy obrotowej, 153  
aksonometria prawie prostokątna, 32  
aksonometria prostokątna, 32  
aparat rzutu aksonometrycznego, 27  
aparat rzutujący, 13  
aparat rzutujący rzutu cechowanego, 189  
asymptota krzywej, 147  
AutoCAD, 66, 119  
AutoLISP, 147  
azymut, 90

## B

basen, 204  
budynek atrialny, 109

## C

CAD, 67, 118  
Catalano Eduardo, 179  
cecha punktu, 188  
cień ostrosłupa, 53  
cień punktu, 96  
cień rzucony, 37, 91, 94  
cień własny, 38  
cień wzajemny, 38, 90, 91  
cylindroida, 163  
częściowy punkt mierzenia, 238, 239  
czworokąt zupełny, 23, 40

## D

dach, 107, 108, 110–112  
dach atrialny, 123  
dach pograżony, 122  
dach regularny, 111  
dach z ograniczeniami, 115  
dach z podwórką, 118  
dach z sąsiadami, 115  
Dandelin Germain Pierre, 144  
diagram Voronoi, 129  
dimetria kawalerska, 30, 154  
długość geograficzna, 246  
droga, 199  
dualność, 13  
dwurzut Monge'a, 42  
dwusieczna kąta, 108, 110, 117  
dwustosunek podziału odcinka, 212

## E

elewacja główna, 44  
elipsa, 63, 137, 140, 142, 145, 146, 148–150, 183  
elipsoida, 141, 163  
entycja, 64  
Euler Leonhard, 111

## F

figura wypukła, 55, 92

## G

geometria brył, 16, 39, 89, 161  
geometria obliczeniowa, 127  
głębokość punktu, 44

## H

helikoida, 136  
hiperbola, 63, 140, 142, 145–147, 150  
hiperboloida jednopowłokowa obrotowa, 132, 154

hiperboloida obrotowa, 136  
hotel Intercontinental, 54

## I

iloczyn macierzy, 248  
incydencja, 251  
izometria równokątna, 30  
izometria wojkowa, 30

## J

jednokładność, 243  
język AutoLISP, 167  
język Pascal, 162

## K

kalenica, 59, 108  
kalenica koszowa, 125  
Kaszubskie Oko, 136  
kąt dwuścienny, 115  
kąt liniowy kąta dwuściennego, 115  
kąt nachylenia połaci, 119  
kąt rozwarcia stożka, 150  
kierownica, 142  
kierunek rzutowania, 11  
kierunek spływu wody, 116  
kład, 89  
kład boczny, 229  
kład odcinka, 48  
kład oka, 213  
kład płaszczyzny, 100–103  
kład połaci, 113, 115  
kład różnicowy, 47, 101  
kład trapezowy, 47  
Kochański Adam Adamandy, 184  
koleba, 164  
kolineacja środkowa, 243  
konoida, 163, 172  
konstrukcja klasyczna, 63  
konstrukcja Kochańskiego, 184  
konstrukcja odmierzenia odcinka na prostej, 229  
konstrukcja siatkowa elipsy, 138–140  
konstrukcja siatkowa paraboli, 146, 147, 150  
konstrukcje elementarne, 64  
konusoida, 163  
kopa, 197  
kozuba, 164, 165  
krażyna, 165  
krzywa definiująca, 132, 134  
krzywa stokowa, 196  
krzywa stożkowa, 144  
krzywik, 159  
kwadratura koła, 65

## L

linia grzbietowa, 109, 127, 198  
linia koszowa, 108  
linia narożna zgubna, 109  
linia offsetowa, 127  
linia ściekowa, 198  
linia śrubowa, 162  
linie spadu, 196

## M

metoda aksonometryczna, 25  
metoda amerykańska, 46, 47  
metoda europejska, 45, 47  
metoda Monge'a, 41, 42  
mimośród, 142  
mimośród stożkowej, 145



model wirtualny, 89  
 moduł płaszczyzny, 191  
 moduł prostej, 189, 190

## N

nachylenie płaszczyzny, 192  
 nachylenie prostej, 190  
 naczólek, 60  
 nasyp, 128, 200  
 niezmiennik, 17  
 niezmiennik charakterystyczny rzutowania  
   prostokątnego, 58, 102  
 niezmienniki rzutu równoległego, 17  
 niezmienniki rzutu środkowego, 212

## O

obrót, 243, 249  
 obrót punktu, 83, 99  
 obwiednia rodziny okręgów, 199  
 obwiednia rodziny stożków, 198  
 odcinek nieskończony, 123  
 odnosząca, 42  
 odprowadzenie wody, 117  
 odwzorowanie odwracalne, 23  
 ognisko, 142, 143  
 ognisko elipsy, 141, 142  
 okap, 59, 110, 111, 115, 117, 119  
 okap dodatkowy, 116  
 okrąg głębokości tłowej, 213  
 okrąg szyjny, 154  
 olorama, 17  
 operacja boolowska, 126  
 oś elipsy, 149  
 oś liczbowa, 188  
 oś obrotu, 99, 113, 132  
 oś powinowactwa, 154, 155  
 oś rzutów, 42  
 oś środkowa, 127–129

## P

panorama, 17  
 parabola, 63, 140, 142, 145, 146  
 Pascal Blaise, 146  
 perspektywa dwuzbieżna, 16, 237  
 perspektywa stosowana, 232, 237  
 pięciokąt foremny, 19  
 plan poziomicowy, 196  
 płaszczyzna niewłaściwa, 12  
 płaszczyzna obrotu, 99  
 płaszczyzna strzałkowa, 215  
 płaszczyzna świetlna, 51  
 płaszczyzna zbiegu, 215  
 podziałki zbiegu, 239  
 Pohlke Karl Wilhelm, 23  
 połączyć dachu, 110, 111  
 południk, 133  
 powierzchnia obrotowa, 132  
 powierzchnia pierścieniowa, 133  
 powierzchnia siodłowa, 179  
 powierzchnia stokowa, 198  
 powierzchnia stożka, 133  
 powierzchnia śrubowa, 136, 161  
 powierzchnia walca, 133  
 powierzchnia walcowa, 134  
 powierzchnia wielościenna, 117  
 powierzchnie Catalana, 179  
 powinowactwo, 137  
 powinowactwo osiowe, 154, 159, 161, 167, 251  
 powłoka wypukła punktów, 53, 55  
 poziomic, 191  
 profil terenu, 199  
 promień rzutujący, 11  
 promień świetlny, 51  
 promień zbiegu prostej, 213  
 prosta czołowa, 49, 50, 115  
 prosta euklidesowa, 15  
 prosta graniczna, 146  
 prosta niewłaściwa, 172, 179

prosta pionowo rzutująca, 49, 50  
 prosta pozioma, 50  
 prosta poziomo rzutująca, 49, 50  
 prosta profilowa, 49, 50  
 prosta rzutowa, 12, 15  
 prosta rzutująca, 11  
 prosta spad, 191  
 prosta warstwowa, 49, 50, 101, 116  
 prostopadłości w rzucie środkowym, 222  
 prostopadłość prostej do płaszczyzny, 103, 106, 107  
 prosty szkielec, 127, 128  
 przekrój bryły, 93  
 przestrzeń rzutowa, 12  
 przesunięcie, 243  
 przesunięcie równoległe, 249  
 punkt główny, 213, 240  
 punkt kotlinowy, 197  
 punkt mierzenia, 234  
 punkt mierzenia prostej, 227  
 punkt niewłaściwy, 11, 38  
 punkt oświetlany, 51  
 punkt redukcji, 240  
 punkt siodłowy, 198  
 punkt w nieskończoności, 11  
 punkt wierzchołkowy, 197  
 punkt właściwy, 11  
 punktowe źródło światła, 51  
 punkty dzielenia, 238

## R

rektyfikacja okręgu, 65  
 reprezentacja szkieletowa, 55, 92  
 restytucja, 25  
 restytuowalny, 23  
 rozpad linii przenikania, 164, 165  
 rozwiązywanie dachów, 107  
 równanie elipsy, 141  
 równoleżnik, 133  
 rzut, 11  
 rzut aksonometryczny, 27  
 rzut boczny, 42  
 rzut cechowany, 187  
 rzut pionowy, 42  
 rzut poziomy, 42  
 rzut równoległy, 13  
 rzut środkowy, 13, 211  
 rzutnia, 11  
 rzutnia boczna, 51, 82  
 rzutnia pionowa, 42  
 rzutnia pozioma, 42  
 rzutowanie w układzie obserwatora, 243

## S

schody kręcone, 157, 159, 162  
 sfera, 62  
 sklepienie klasztorne, 164, 165, 168  
 sklepienie klasztorne otwarte, 168  
 sklepienie krzyżowe, 164, 165  
 sklepienie krzyżowe z podniesionym kluczem, 167  
 stopniowanie prostej, 189, 190  
 stosunek podziału odcinka, 18, 26, 212  
 stożek obrotowy, 62  
 stożek świetlny, 51, 144  
 stożkowa, 142  
 symetria osiowa, 243  
 symetria środkowa, 243  
 szczyt, 197  
 szerokość geograficzna, 246  
 szkielec dachu, 108, 123, 125  
 szkielec prosty, 126

## Ś

ślad pionowy prostej, 50  
 ślad poziomy prostej, 50  
 ślad prostej, 50  
 ślad tłowy płaszczyzny, 214  
 ślad tłowy prostej, 213  
 ślad zbiegu płaszczyzny, 214

ślad zbiegu prostej, 213  
ślady płaszczyzny, 57  
średnice sprzężone, 138–140, 150, 154, 155  
środek elipsy, 148  
środek rzutowania, 11

**T**

tło, 211  
torus, 133, 136  
trójkąt skrótów, 32, 78, 79  
trójkąt śladów, 33  
trzeci rzut punktu, 81  
trzecia rzutnia, 81, 82  
trzyspójny, 127  
twierdzenie Dandolina, 143, 145, 146, 148  
twierdzenie Eulera, 111  
twierdzenie o punkcie węzłowym, 20  
twierdzenie o rozpadzie linii przenikania, 164  
twierdzenie Pascala, 146  
twierdzenie Pohlkego, 23  
tworząca, 154

**U**

układ biegunowy, 244  
układ cylindryczny, 245  
układ danych, 243  
układ obserwatora, 243  
układ płaski, 251  
układ rzeczywisty, 243  
układ sferyczny, 245

**W**

walec, 182  
walec obrotowy, 62, 164  
walec świetlny, 51  
warstwica, 116  
warstwice, 191  
wektor kierunkowy, 134  
wektor zniekształceń, 27  
wielokąt jednospójny, 118, 119, 123, 124  
wielokąt podstawy, 120  
wielokąt podstawy dachu, 119  
wielokąt wielospójny, 118  
wieża ciśnienia, 136, 157  
współpękowe, 251  
współrzędne bezwzględne, 244  
współrzędne jednorodne, 13, 248  
współrzędne prostokątne względne, 245  
współrzędne względne, 244  
współrzędne względne biegunowe, 245  
wykop, 200  
wylaz dachowy, 58  
wysokość punktu, 44

**Z**

zakreślanie przestrzeni, 131  
zakreślanie przez obrót, 133  
zakreślanie przez przesunięcie, 134  
zakreślanie przez ruch śrubowy, 136  
zasada zmniejszania, 239, 240  
złożenie symetrii, 249  
zredukowany ślad zbiegu, 240

