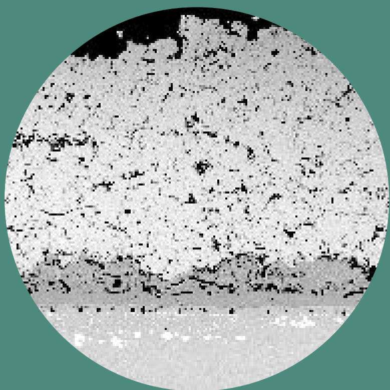
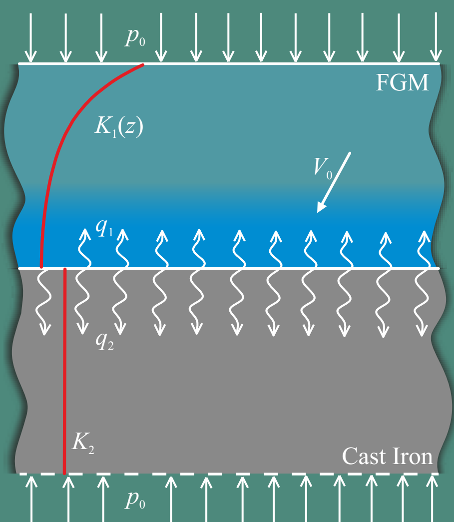
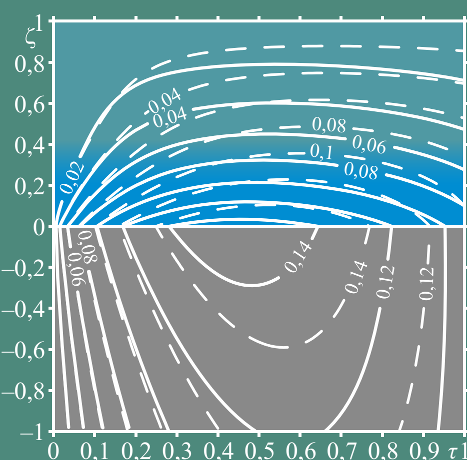
WPŁYW FUNKCYJNEJ GRADACJI PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ MATERIAŁÓW NA TEMPERATURĘ UKŁADÓW CIERNYCH

Przemysław Zamojski
Katarzyna Topczewska
Oleksandr Jewtuszenko







Politechnika Białostocka

WPŁYW FUNKCYJNEJ GRADACJI PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ MATERIAŁÓW NA TEMPERATURĘ UKŁADÓW CIERNYCH

Przemysław Zamojski
Katarzyna Topczewska
Oleksandr Jewtuszenko

Politechnika Białostocka

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2025

Recenzenci:
prof. dr hab. Stanisław Jan Matysiak
prof. dr hab. Yuriy Povstenko

Tabele i rysunki:
Przemysław Zamojski

Korekta językowa:
Katarzyna Duniewska

Skład:
Katarzyna Topczewska
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej

Okładka:
Marcin Dominów

Zdjęcie na okładce:
Wojciech J. Nowak

ISBN 978-83-68077-83-4
ISBN 978-83-68077-84-1 (e-Book)
DOI: 10.24427/978-83-68077-84-1

Druk: Agencja Reklamowa TOP Agnieszka Łuczak

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
e-mail: oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl
www.pb.edu.pl

SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A_a	– pole nominalnego obszaru kontaktu	m^2;
a	– efektywna głębokość nagrzewania	m;
Bi_c	– liczba Biota na powierzchni swobodnej warstwy;	
Bi_r	– liczba Biota na powierzchni kontaktu;	
c	– ciepło właściwe	$J\ K^{-1}\ kg^{-1}$;
d	– grubość warstwy	m;
f	– współczynnik tarcia;	
f_{eff}	– efektywność hamowania;	
f_f	– fluktuacja hamowania;	
f_m	– średnia wartość współczynnika tarcia;	
f_o	– nominalny współczynnik tarcia;	
f_s	– stabilność współczynnika tarcia;	
G	– masa elementu	kg;
h_c	– współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła przez powierzchnię swobodną warstwy	$W\ K^{-1}\ m^{-2}$;
h_r	– kontaktowy współczynnik przewodzenia ciepła między powierzchniami ciernymi	$W\ K^{-1}\ m^{-2}$;
$\mathrm{I}_n(\cdot)$	– zmodyfikowana funkcja Bessela n-tego rzędu pierwszego rodzaju;	
$\mathrm{J}_n(\cdot)$	– funkcja Bessela n-tego rzędu pierwszego rodzaju	
k	– dyfuzyjność cieplna	$m^2\ s^{-1}$;
K	– przewodność cieplna	$W\ K^{-1} m^{-1}$;
K_ε	– bezwymiarowy współczynnik efektywności cieplnej	$W\ K^{-1} m^{-1}$;
$\mathrm{K}_n(\cdot)$	– zmodyfikowana funkcja Bessela n-tego rzędu drugiego rodzaju;	
p	– ciśnienie kontaktowe	Pa;
p_0	– nominalna wartość ciśnienia kontaktowego	Pa;
q	– gęstość mocy tarcia	$W\ m^{-2}$;
q_0	– nominalna wartość gęstości mocy tarcia	$W\ m^{-2}$;
R_e	– promień zewnętrzny nakładki	m;
R_i	– promień wewnętrzny nakładki	m;

t	– czas	s;
t_i	– czas narastania ciśnienia kontaktowego	s;
t_s	– czas hamowania	s;
t_s^0	– czas hamowania przy stałym opóźnieniu	s;
T	– temperatura	°C;
T_a	– temperatura otoczenia	°C;
T_0	– temperatura początkowa	°C;
T^*	– bezwymiarowa temperatura;	
V	– prędkość poślizgu	m s^{-1};
$V_{l,2}$	– udział objętościowy materiału rdzenia	%;
V_0	– nominalna prędkość poślizgu	m s^{-1};
$\mathrm{Y}_n(\cdot)$	– funkcja Bessela *n*-tego rzędu drugiego rodzaju;	
z	– zmienna przestrzenna w kierunku osiowym	m;
α	– współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła;	
Γ	– kontur całkowania;	
γ^*	– bezwymiarowy parametr gradientu FGM;	
ζ	– bezwymiarowa zmienna przestrzenna w kierunku osiowym;	
Θ	– przyrost temperatury	°C;
Θ_0	– współczynnik skali przyrostu temperatury	°C;
Θ^*	– bezwymiarowy przyrost temperatury;	
$\hat{\Theta}^*$	– bezwymiarowy przyrost temperatury w czasie hamowania;	
ρ	– gęstość	kg m^{-3};
τ	– bezwymiarowy czas (liczba Fouriera);	
τ_i	– bezwymiarowy czas narastania ciśnienia kontaktowego;	
τ_s	– bezwymiarowa chwila zatrzymania;	
τ_s^0	– bezwymiarowa chwila zatrzymania przy stałym ciśnieniu kontaktowym;	
φ	– kąt opasania nakładki	°.

WPROWADZENIE

Niniejsza monografia porusza temat modelowania matematycznego procesu nagrzewania tarciowego podczas hamowania, który stanowi ważny problem naukowy i aplikacyjny. Kluczowym elementem rzeczonego modelowania jest zagadnienie cieplne tarcia, tj. początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem nagrzewania na skutek tarcia dla elementów roboczych układu hamulcowego (nakładka-tarcza, szczęka-bęben itp.). Rozwiązania zagadnień tego typu otrzymuje się metodami numerycznymi lub, przy odpowiednich założeniach upraszczających, metodami analitycznymi. Znalezione w ten sposób wartości temperatury weryfikuje się następnie za pomocą odpowiednich danych doświadczalnych, uzyskanych najczęściej za pomocą termopar.

Zakres badań zaprezentowanych w monografii obejmuje analityczne metody teorii przewodnictwa cieplnego stosowane do otrzymywania dokładnych rozwiązań zagadnień cieplnych tarcia ciał wykonanych z funkcyjnie gradientowych materiałów (FGM). Te ostatnie stanowią klasę materiałów niejednorodnych, których właściwości cieplno-fizyczne oraz (lub) mechaniczne zmieniają się w sposób ciągły lub kawałkami-ciągły w jednym bądź w kilku kierunkach. Odpowiednio kontrolowany gradient przewodności cieplnej materiałów tarczy i nakładki może powodować znaczne obniżenie temperatury maksymalnej i naprężeń termicznych w układach hamulcowych. Z tego powodu FGM coraz częściej stosuje się jako powłokowe bariery cieplne (ang. *thermal barrier coating*, dalej TBC), zastępując nimi konwencjonalne materiały jednorodne. Duży potencjał aplikacyjny tych materiałów powoduje pojawienie się potrzeby tworzenia i rozwijania modeli nagrzewania tarciowego FGM. Warto zaznaczyć, że przeważająca większość dokładnych, analitycznych rozwiązań zagadnień cieplnych tarcia i odpowiednich zagadnień brzegowych termosprężystości została otrzymana dla materiałów jednorodnych. W związku z tym opracowanie odpowiednich modeli analitycznych dla elementów ciernych wykonanych z FGM stanowi lukę badawczą, próbę uzupełnienia której podjęto w niniejszej monografii poprzez wyznaczenie dokładnych i asymptotycznych rozwiązań nowej klasy zagadnień cieplnych tarcia podczas hamowania sformułowanych dla FGM. Pozwoliło to na zbadanie wpływu gradientu przewodności cieplnej materiałów elementów ciernych na inicjowane w nich podczas hamowania pole temperatury.

Monografia składa się ze spisu treści, wykazu ważniejszych oznaczeń, wprowadzenia, przeglądu literatury, czterech rozdziałów roboczych (zawierających 66 rysunków i 13 tabel), podsumowania, spisu cytowanej literatury (162 pozycje) oraz streszczeń w językach polskim i angielskim.

Rozdział *pierwszy* zawiera przegląd literatury na temat zastosowania funkcyjnie gradientowych materiałów (FGM) w układach ciernych. Przeanalizowano również problemy związane ze współczesnym stanem wiedzy w zakresie formułowania i metod rozwiązywania zagadnień przewodnictwa cieplnego dla ciał wykonanych w całości lub zawierających elementy wykonane z FGM. Szczególną uwagę poświęcono zaś zagadnieniom cieplnym tarcia.

W rozdziale *drugim* otrzymano dokładne rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia na powierzchni kontaktu dwóch półograniczonych ciał (półprzestrzeni) wykonanych z funkcyjnie gradientowych materiałów. W tym, jak również w następnych rozdziałach monografii, pojawiają się wybrane FGM, które posiadają współczynnik przewodności cieplnej zwiększający się eksponencjalnie wraz z rosnącą odległością od powierzchni ciernej. Przy założeniu warunków doskonałego kontaktu cieplnego tarcia, w otrzymanym rozwiązaniu uwzględniono profil czasowy gęstości mocy tarcia odpowiadający procesowi hamowania z eksponencjalnym narastaniem ciśnienia kontaktowego. Zbadano również wpływ wrażliwości termicznej materiałów składowych FGM na temperaturę podczas pojedynczego hamowania ze stałym opóźnieniem.

Rozdział *trzeci* dotyczy opracowania odpowiedniego modelu matematycznego do wyznaczenia pola temperaturowego układu hamulcowego pracującego w powtórno-krótkoterminowym (PKT) trybie, który składa się z określonej liczby powtarzających się cykli hamowań i rozpędzania pojazdu. Ze względu na potrzebę zadania wartości współczynnika rozdzielenia ciepła pomiędzy elementami ciernymi na etapie rozpędzania, zaproponowano metodykę jego wyznaczania w przypadku pary ciernej, w której jeden z elementów wykonano z FGM, a drugi z materiału jednorodnego. Przeanalizowano także ewolucję temperatury powierzchni kontaktu nakładki z tarczą podczas pięciu etapów hamowania, przy uwzględnieniu wrażliwości termicznej współczynnika tarcia oraz właściwości cieplno-fizycznych materiałów pary ciernej.

Modele obliczeniowe zaproponowane w dwóch wcześniejszych rozdziałach dotyczyły nagrzewania ciernego ciał półograniczonych. W kolejnych rozdziałach analizie poddano natomiast układy, w których jeden z elementów ma skończony wymiar w kierunku oddziaływania strumienia ciepła (warstwy wykonanej z FGM). W rozdziale *czwartym* rozpatrzono dwa schematy nagrzewania ciernego. W pierwszym powierzchnię wolną warstwy FGM naniesionej na jednorodne podłoże nagrzewano strumieniem ciepła o intensywności zmieniającej się w czasie. Otrzymano dokładne oraz asymptotyczne rozwiązania odpowiedniego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla takiego układu, które mogą być stosowane do ustalenia wpływu powłokowej bariery termicznej (TBC) wykonanej z FGM na temperaturę podłoża. Zgodnie z drugim schematem nagrzewanie układu warstwa FGM-podłoże odbywało się na skutek tarcia podczas kontaktu ślizgowego z jednorodną półprzestrzenią. W obydwu schematach badano wpływ gradientu przewodności cieplnej warstwy na pole temperatury.

W opracowanych w rozdziale czwartym modelach naniesiona na podłoże FGM warstwa pełni funkcję elementu ochronnego pozwalającego obniżyć temperaturę elementu podstawowego (podłoża). W rozdziale *piątym* warstwa wykonana z FGM jest natomiast elementem pary ciernej, ślizgającym się po powierzchni jednorodnej półprzestrzeni. W odróżnieniu od wszystkich powyższych modeli obliczeniowych w rozpatrywanym przypadku generacja ciepła ma miejsce przy założeniu niepełnego (niedoskonałego) kontaktu cieplnego tarcia pomiędzy warstwą a półprzestrzenią, zaś na powierzchni wolnej warstwy FGM uwzględniono chłodzenie konwekcyjne. Otrzymane dokładne, jak również asymptotyczne, rozwiązania odpowiedniego zagadnienia cieplnego tarcia pozwoliły na przeprowadzenie analizy pod kątem ustalenia wzajemnego wpływu kontaktowej przewodności cieplnej i intensywności wymiany ciepła pomiędzy warstwą a otoczeniem.

W *podsumowaniu* zamieszczone zostały najważniejsze rezultaty przeprowadzonych badań oraz sformułowane na ich podstawie wnioski końcowe.

Wydanie niniejszej monografii zostało sfinansowane w ramach projektu nr WZ/WM-IIM/4/2023 realizowanego w Katedrze Mechaniki i Informatyki Stosowanej Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej.

1. PRZEGLĄD LITERATURY

Temperatura ma kluczowy wpływ na charakterystyki tarcia i zużycia elementów ciernych układów hamulcowych, a jej znajomość jest niezbędna do oceny ich wydajności. Podstawę teoretycznego wyznaczania pola temperatury podczas hamowania stanowi modelowanie matematyczne procesu nagrzewania tarciowego [122]. Najistotniejszym elementem takiego modelowania są zagadnienia cieplne tarcia – początkowo-brzegowe zagadnienia przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem wytwarzania ciepła na skutek tarcia na powierzchni kontaktu dwóch ciał.

Jedno z podejść do formułowania zagadnień cieplnych tarcia polega na myślowym odseparowaniu elementów pary ciernej z następnym ich osobnym nagrzewaniem strumieniami ciepła o intensywności proporcjonalnej do gęstości mocy tarcia [67, 107, 145]. Współczynnikiem proporcjonalności tu występującym jest tzw. współczynnik rozdzielenia strumienia ciepła (ang. *heat partition ratio*, dalej HPR) [18, 29]. Wzory do jego wyznaczenia otrzymuje się na podstawie obróbki danych doświadczalnych uzyskanych za pomocą termopar lub z dokładnych rozwiązań początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego [44, 120, 145]. Opracowano także metodykę eksperymentalnego badania podziału ciepła tarciowego pomiędzy tarczą i nakładką hamulcową na zredukowanym stanowisku badawczym [71], natomiast przeglądy metod teoretycznego wyznaczania HPR w układach hamulcowych zawarto w pracach [44, 94, 132]. Należy zaznaczyć, że wszystkie metody teoretycznego ustalenia wzorów do wyznaczenia HPR zawierają następujące etapy:

- rozwiązanie w postaci analitycznej zagadnienia przewodnictwa cieplnego o nagrzewaniu wybranego elementu pary ciernej strumieniem ciepła o intensywności zawierającej nieznany *a priori* HPR, pomnożony przez funkcję opisującą przebieg czasowy gęstości mocy tarcia;
- otrzymanie z warunku równości temperatury maksymalnej lub średniej powierzchni ciernych wzoru do wyznaczenia HPR w zależności od właściwości cieplno-fizycznych materiałów trących się elementów.

Warto zauważyć, że otrzymane dotychczas wzory teoretyczne do wyznaczenia HPR dotyczą materiałów jednorodnych [22, 39, 46, 129, 144].

Obok koncepcji opartej na wykorzystaniu HPR przy formułowaniu analitycznych modeli nagrzewania tarciowego stosuje się również tzw. podejście kontaktowe, w którym nagrzewanie obu elementów pary ciernej zachodzi jednocześnie pod wpływem ciepła generowanego na powierzchni kontaktu. Oba elementy podczas nagrzewania są więc „sprzężone" za pomocą dwóch warunków brzegowych na tej powierzchni [57, 66]. Są to tzw. warunki kontaktu cieplnego tarcia – najczęściej korzystano z nich w wariancie idealnym, który deklaruje, że [139]:

- suma intensywności strumieni ciepła absorbowanych po normalnej od powierzchni kontaktu do wewnątrz każdego elementu równa się gęstości mocy tarcia;
- w każdej chwili podczas tarcia powierzchnie cierne elementów są nagrzane do tej samej temperatury.

Pierwszy z powyższych warunków zakłada, że całkowita praca tarcia podczas poślizgu konwertowana jest na ciepło, przy pominięciu jej części odpowiadającej za zużycie cierne. Uproszczenie modelowe założone w warunku drugim polega zaś na pominięciu wpływu oporu termicznego powierzchni kontaktu na temperaturę, co jednak jest zasadne tylko w przypadku gładkich powierzchni ciernych. Najczęściej powierzchnie te są natomiast chropowate, a sumaryczne pole rzeczywistych obszarów styku mikronierówności jest znacznie mniejsze od pola obszaru kontaktu nominalnego, określanego w przypadku tarczowego układu hamulcowego wymiarami nakładki [34]. Uwzględnienie kontaktowego oporu termicznego lub jego odwrotności – termicznej przewodności kontaktowej – w formułowaniu zagadnień cieplnych tarcia skutkuje pojawieniem się nieciągłości rozkładu temperatury na powierzchni kontaktu. Występowanie różnicy temperatury powierzchni roboczych elementów ciernych współpracujących przy wysokim obciążeniu potwierdzają badania doświadczalne [68, 74]. W tarczowych układach hamulcowych maksymalna temperatura tarczy jest zazwyczaj niższa od wartości osiąganych na powierzchniach ciernych nakładek, ponieważ są one wykonane z bardziej miękkiego materiału, przez co łatwiej ulegają odkształceniom plastycznym i zużyciu niż twardszy materiał tarczy [72, 94, 107]. Efekt ten jest szczególnie zauważalny w układach z nakładkami hamulcowymi o małym kącie przykrycia, ponieważ powierzchnie robocze obracającej się tarczy nagrzewane są tylko podczas krótkotrwałego kontaktu z okładziną cierną. Ponadto nie tylko pole temperatury, ale także współczynnik podziału ciepła pomiędzy elementami ślizgowymi (HPR) jest wrażliwy na niedoskonałości powierzchni ciernych [16].

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione, aktualnie coraz częściej podczas opracowywania modeli matematycznych dotyczących wyznaczania trybu temperaturowego układów hamulcowych stosuje się warunki tzw. nieidealnego kontaktu cieplnego tarcia [9]. Jednakowość temperatur powierzchni ciernych elementów, jak to było w warunkach kontaktu idealnego, zastępuje się warunkiem proporcjonalności różnic intensywności strumieni ciepła i temperatury powierzchni ciernych. Współczynnikiem proporcjonalności występującym tym razem jest kontaktowy opór termiczny lub, częściej, termiczna przewodność kontaktowa. W przypadku nieograniczonego zwiększenia tej ostatniej nieidealne warunki kontaktu cieplnego tarcia ulegają transformacji w warunki kontaktu idealnego [139].

Kontaktowy opór termiczny definiowany jest jako stosunek różnicy temperatury powierzchni ciernych do całkowitego strumienia ciepła przepływającego przez obszar kontaktu [62, 125]. W celu wyjaśnienia przyczyn pojawienia się kontaktowego oporu termicznego opracowano koncepcję „trzeciego ciała” (ang. *third body concept*) [31, 40]. W aspekcie materiałowym takie trzecie ciało w obszarze kontaktu tarczy z okładziną cierną tworzy cienką warstwę powstałą w wyniku gromadzenia się produktów zużycia i zanieczyszczeń z otoczenia [1, 41]. Taka warstwa posiada swoje właściwości mechaniczne i cieplno-fizyczne, odmienne od tych charakteryzujących materiały pary ciernej. Trzecie ciało w postaci cienkiej warstwy z objętościowym ciągłym źródłem ciepła o stałej mocy zaimplementowano do modelu matematycznego nagrzewania hamulca tarczowego [75]. Rozwiązanie numeryczne otrzymane z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES) odpowiedniego zagadnienia cieplnego tarcia pozwoliło następnie wyznaczyć pole temperatury i stwierdzić, że na otrzymane rezultaty wpływa przede wszystkim grubość warstwy reprezentującej trzecie ciało. Podobne symulacje numeryczne potwierdziły, że [72]:

- zwiększenie kontaktowego oporu termicznego powoduje podwyższenie temperatury powierzchni ciernej nakładki;
- zwiększenie grubości warstwy skutkuje większą różnicą temperatur pomiędzy powierzchniami ciernymi tarczy i nakładki.

Równolegle z numerycznymi rozwijano również analityczne modele nieustalonego nagrzewania tarciowego oparte na kluczowym założeniu o pominięciu zmiany gradientu temperatury w kierunkach równoległych do powierzchni ciernej. Stosując takie znaczne, ale jednak potwierdzone badaniami doświadczalnymi [18, 22, 39] uproszczenie, zagadnienia cieplne tarcia sformułowano dla ciał ograniczonych powierzchniami kanonicznymi, do których zaliczyć można w szczególności półprzestrzeń i warstwę. Przeanalizowano także przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury powstałej podczas nagrzewania ciernego w warunkach nieidealnego kontaktu cieplnego tarcia ze stałą prędkością dwóch jednorodnych półprzestrzeni [98, 99] oraz zaproponowano metodykę otrzymywania wzorów do wyznaczania oporu termicznego na podstawie dokładnego rozwiązania zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla źródła ciepła o stałej mocy, poruszającego się ze stałą prędkością po powierzchni jednorodnej półprzestrzeni [63]. Otrzymano dokładne rozwiązania jednowymiarowych początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego dla dwóch różnorodnych półprzestrzeni z uogólnionymi warunkami nieidealnego kontaktu cieplnego tarcia przy stałych ciśnieniu kontaktowym i prędkości poślizgu [15, 82, 83]. Na ich podstawie znaleziono wzory do wyznaczenia HPR.

Należy zaznaczyć, że wraz ze spadkiem względnej prędkości poślizgu elementów ciernych wartość oporu cieplnego na styku elementów ciernych wzrasta [16]. Zaproponowano więc algorytm do szacowania temperatury z uwzględnieniem zmiennego w czasie kontaktowego oporu termicznego w układzie hamulcowym składającym się z warstwy (nakładki) ślizgającej się po półprzestrzeni (tarczy) [131]. Analityczne rozwiązania nieustalonych zagadnień cieplnych tarcia podczas hamowania ze stałym spowolnieniem, przy niezmiennej z czasem termicznej przewodności kontaktowej powierzchni ciernej warstwy z półprzestrzenią, otrzymano bez [142] oraz z [151] uwzględnieniem chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy.

Eksperymentalnie zbadano także opór termiczny obszaru kontaktu dwóch drążonych cylindrów przy ich niedoskonałym kontakcie ślizgowym [11]. Zaproponowano również metodę doświadczalnego pomiaru termicznej przewodności kontaktowej [95, 96]. Ustalono, że jej wartość zależy głównie od ciśnienia kontaktowego, prędkości poślizgu, temperatury i właściwości materiałów ciernych [42, 94, 115]. Opracowano model numeryczny z wykorzystaniem MES do jednoczesnego wyznaczania termicznej przewodności kontaktowej, HPR i strumieni ciepła w zagadnieniach tarcia ślizgowego [10]. Przeanalizowano wpływ termicznej przewodności kontaktowej na temperaturę i rozdział ciepła tarciowego w układzie nakładka-tarcza [93]. Zarówno doświadczalnie, jak i za pomocą symulacji komputerowej z wykorzystaniem MES, znaleziono pola temperatury inicjowane podczas testów według schematu *pin-on-disc* [107]. Autorzy opracowali trzy modele MES, stosując różne podejścia, tj. metodę wirtualnego odseparowania ciał z następnym ich sprzężeniem za pomocą HPR, założenie idealnych warunków cieplnego tarcia w obszarze kontaktu oraz koncepcję trzeciego ciała. Stwierdzono, że rezultaty otrzymane za pomocą modelu numerycznego z idealnym kontaktem, czyli z zachowaniem ciągłości temperatury w obszarze styku, najlepiej pasowały do odpowiednich danych pomiarowych. Warto zaznaczyć, że otrzymane dane doświadczalne znaleziono podczas testu stanowiskowego, który przeprowadzono w łagodnych warunkach poślizgu, a więc w sytuacji, gdy opór termiczny był niewielki, co w modelach teoretycznych jest zbliżone do warunków idealnego kontaktu cieplnego tarcia [14, 40].

Ponadto opracowano trójelementowy (półprzestrzeń-warstwa-półprzestrzeń) schemat obliczeniowy do szacowania temperatury tarczowego układu hamulcowego z uwzględnieniem zacisku, na którym osadzona jest nakładka. Przeprowadzono porównanie temperatury ustalonej za pomocą dokładnych rozwiązań jednowymiarowych zagadnień cieplnych tarcia dwu- i trzyelementowych modeli [138]. Trójelementowy układ składający się z półprzestrzeni (tarczy) i warstwy (nakładki) osadzonej na podłożu (zacisku) wykorzystano do sformułowania, a następnie rozwiązania zagadnienia z warunkami idealnego kontaktu cieplnego tarcia podczas hamowania z jednostajnym opóźnieniem [134]. Znalezione w ten sposób niestacjonarne pole temperatury zaimplementowano do wyznaczenia quasi-statycznych naprężeń termicznych w tarczy, nakładce i zacisku [136]. Otrzymano również dokładne rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia z uwzględnieniem oporu termicznego powierzchni ciernej warstwy i półprzestrzeni [149]. Następnie zaproponowano uogólnienie tego rozwiązania, tak aby odnosiło się także do przypadku fluktuacji ciśnienia kontaktowego [58]. Znaleziono asymptotyczne rozwiązania początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla trójelementowego układu tarcza-nakładka-zacisk przy uogólnionych warunkach brzegowych na powierzchni poślizgu [150]. Rozpatrzono zagadnienie cieplne tarcia dla takiego samego układu z nakładką wykonaną z materiału kompozytowego o strukturze mikroperiodycznej [59].

Należy zaznaczyć, że trójelementowy schemat wykorzystywany jest często również do symulacji procesu nagrzewania tarczowego układu hamulcowego z pominięciem zacisku, gdzie trzeci element modelu reprezentuje warstwę ochronną naniesioną na powierzchnię tarczy [137]. Takie warstwy ochronne, czyli powłokowe bariery termiczne (ang. *thermal barrier coating*, dalej TBC), nanoszone są na zewnętrzne powierzchnie elementów pracujących w trudnych warunkach temperaturowych. Należą do nich przede wszystkim tarcze hamulcowe [130]. Rdzeń elementów powlekanych stanowią najczęściej stopy metali utrzymujące sztywność konstrukcji, a nanoszone warstwy ochronne wykonane są z materiałów ceramicznych, które zapewniają wysoką twardość i odporność na zużycie powierzchni roboczych [60]. Powłokowe bariery termiczne najczęściej wytwarzane są z dwutlenku cyrkonu (Zr_2O), tlenku glinu (Al_2O_3), węgliku krzemu (SiC), węgliku wolframu (WC) i tlenku cyrkonu stabilizowanego itrem (YSZ) [17, 108, 123, 141]. Ceramika z natury posiada niską odporność na pękanie, więc warstwy ochronne są podatne na uszkodzenia, takie jak rozwarstwienie lub odpryskiwanie powłoki wierzchniej [21, 80, 87]. Szczególnie widoczne jest to w elementach ciernych, gdy w wyniku nagrzewania tarciowego następuje koncentracja naprężeń w strefie przypowierzchniowej [118]. Niektóre z właściwości ceramiki znacznie różnią się od właściwości podłoża, dlatego bezpośrednia aplikacja takiej powłoki może prowadzić do pękania na skutek, przykładowo, niedopasowania rozszerzalności cieplnej materiałów [161]. Powierzchnia kontaktu pomiędzy warstwą a podłożem jest w przypadku elementów powlekanych szczególnie wrażliwym miejscem, w którym najczęściej dochodzi do uszkodzenia [4].

Eliminację problemu skokowej zmiany charakterystyki materiałowej na powierzchni granicznej TBC z podłożem uzyskano za pomocą materiałów z funkcyjną gradacją właściwości (ang. *functionally graded materials*, dalej FGM) [79, 128]. Funkcyjnie gradientowe materiały cechują się ciągłą zmianą właściwości w funkcji położenia. Efekt taki uzyskiwany jest poprzez wprowadzenie złożonej struktury wewnętrznej o płynnie zmieniającym się profilu składu lub porowatości w objętości materiału wzdłuż określonego kierunku lub kierunków. Możliwość otrzymania w sposób kontrolowany pożądanego przestrzennego rozkładu właściwości materiału o charakterze ciągłym pozwala na pełną adaptację wyrobu do przewidywanych warunków eksploatacji. Taka elastyczność sprawia, że FGM znacznie poszerzają zakres możliwości materiałowych elementów konstrukcyjnych, gdyż pozwalają na tworzenie struktur zoptymalizowanych do konkretnego zastosowania, a następnie umożliwiają otrzymywanie wyrobów o mniejszej masie i ukierunkowanych właściwościach. W związku z tym FGM mają ogromny potencjał aplikacyjny i są doceniane w wielu branżach przemysłu [12, 17, 48, 60, 123, 141, 162]. Przede wszystkim znajdują one jednak zastosowanie przy produkcji TBC elementów eksploatowanych w warunkach wysokiej temperatury. Funkcyjnie gradientowa powłoka (ang. *functionally graded coating*, dalej FGC) stanowi ulepszoną alternatywę dla konwencjonalnej jednorodnej warstwy TBC. Gradientowe łączenie pomiędzy warstwą zewnętrzną a rdzeniem elementu jest natomiast uzyskiwane poprzez wprowadzenie płynnej zmiany rozkładu udziału objętościowego składników materiału [113]. Funkcyjnie gradientowe bariery termiczne znacznie wzmacniają spójność wiązania powłoki z podłożem i ograniczają koncentrację naprężeń przypowierzchniowych w elementach ciernych [4, 97, 161]. Wprowadzenie gradientu właściwości cieplno-fizycznych w materiale ciernym może spowodować znaczną redukcję naprężeń termicznych [52]. Wykazano, że FGC poddane ekstremalnym obciążeniom cieplnym są odporniejsze na szok termiczny i pękanie niż konwencjonalne powłoki ceramiczne [43]. Z tych powodów ceramiczno-metalowe FGM coraz częściej znajdują zastosowanie w produkcji tarcz hamulcowych [130].

Udział objętościowy poszczególnych komponentów FGM zmienia się zwykle wzdłuż grubości tarczy (prostopadle do powierzchni ciernej), ponieważ to głównie w tym kierunku zachodzi transfer ciepła generowanego na powierzchni kontaktu z tarczą. Stosowanie FGM wpływa w tym przypadku na poprawę zdolności elementu do odprowadzenia ciepła z obszaru tarcia [43]. Wykazano, że w takiego typu tarczach wykonanych z FGM poziom temperatury i odkształcenia termiczne osiągane w warunkach tarcia suchego są znacząco niższe niż te w jednorodnej tarczy stalowej [48]. Należy zaznaczyć, że stosowane są również tarcze o promieniowej gradacji właściwości. Posiadają one ceramiczne (pierwszy składnik) zewnętrzne powierzchnie boczne przy gradientowo zwiększającym się udziale objętościowym stopu metalu (drugi składnik) w kierunku promieniowym. Takie zwiększenie występuje do powierzchni wewnętrznej tarczy, wykonanej właśnie ze wspomnianego wyżej stopu metalu [100–102]. Opisana struktura FGM jest przede wszystkim skutkiem wzrostu liniowej prędkości poślizgu oraz jednoczesnego zwiększania odległości promieniowej od osi tarczy, a co za tym idzie – również obciążenia termicznego. Warto wspomnieć, że FGM znajdują zastosowanie nie tylko w przypadku tarcz hamulcowych, ale coraz częściej także przy produkcji nakładek hamulcowych [92]. Testy doświadczalne wykazały, że wprowadzenie gradientowego rozkładu składników kompozytu ciernego może znacząco poprawić jego charakterystykę roboczą [92, 106]. Należy zwrócić szczególną uwagę na to, że odporność na zużycie okładzin ciernych wykonanych z FGM jest wyraźnie wyższa niż ich konwencjonalnych odpowiedników [43]. Badania tribologiczne nakładek hamulca tarczowego wykonanych z funkcyjnie gradientowego żeliwa wykazały pozytywny wpływ aplikacji gradientu na poprawę stabilności współczynnika tarcia [92].

Zagadnienia dotyczące modelowania matematycznego ośrodków niejednorodnych o strukturze gradientowej stanowią jeden z głównych trendów rozwojowych współczesnej mechaniki materiałów [20, 37, 53, 97, 123, 128, 157]. Jedną z klas takich zagadnień tworzą zagadnienia cieplne tarcia elementów o niejednorodnych właściwościach cieplno-fizycznych. Ze względu na dużą złożoność matematyczną zagadnienia te są jednak zwykle trudne do rozwiązania analitycznego – równania przewodności cieplnej i odpowiadające im równania termosprężystości, których rozwiązania opisują nieustalone pola temperatury i rozkłady przestrzenno-czasowe naprężeń w elementach ciernych wykonanych z FGM, zawierają współczynniki zależne od współrzędnych przestrzennych [50]. Rozwiązywanie ich, z uwzględnieniem odpowiednich warunków początkowych i brzegowych, często jest możliwe jedynie po przyjęciu dodatkowych założeń upraszczających [114].

Istotną kwestią w kontekście trudności rozwiązywania zagadnień cieplnych tarcia dla FGM jest przebieg rozkładu właściwości materiałowych w obszarze analizowanego ciała oraz odpowiedni dobór określającej go funkcji. Większość analiz ogranicza się do ciał o gradiencie jednokierunkowym, natomiast do modelowania zmian właściwości w kierunku gradacji stosowana jest zwykle jedna z dwóch charakterystycznych funkcji ciągłych: wykładnicza lub potęgowa [48]. Należy zaznaczyć, że rzeczywiste zmiany właściwości FGM zależą od kontroli gradientu w procesie wytwarzania materiału, która to determinuje, w jakim stopniu możliwe będzie odwzorowanie zaprojektowanego wcześniej rozkładu – najlepsze pod tym względem metody osiągają dokładność na poziomie nawet ponad 90%. Techniki charakteryzujące się niską kontrolą gradientu, z dokładnością około 50–60%, umożliwiają za to płynniejszą zmianę struktury wyrobu [33]. W związku z tym podczas modelowania zawsze zakłada się pewien poziom dopasowania krzywej określającej przebieg gradientu [68]. Zarówno prawo wykładnicze, jak i potęgowe zawierają parametr, który można regulować, tak aby odpowiednio dostosować gradację materiału i poprawić dopasowanie modelu. Rolę parametru gradientu w tych funkcjach odgrywają współczynnik zaniku wykładniczego i wykładnik potęgowy. Najczęściej to właśnie jedną z tych dwóch funkcji przyjmuje się więc w celu opisu rozkładu przestrzennego właściwości cieplnych FGM [120, 153].

Większość analiz nagrzewania tarciowego par ciernych wykonanych z FGM opiera się na symulacjach numerycznych, głównie z wykorzystaniem MES [6, 20, 21, 89, 123]. Wykładnicza zmiana właściwości materiału w kierunku promieniowym została rozpatrzona w numerycznym, osiowosymetrycznym modelu nagrzewania tarciowego czołowej powierzchni tarczy, przy jednoczesnym uwzględnieniu siły bezwładności towarzyszącej wysokiej prędkości obrotowej [3]. Otrzymano również odpowiednie rozwiązania numeryczne takiego zagadnienia w przypadku potęgowej funkcji opisującej zmiany współczynnika przewodności cieplnej w kierunku promieniowym [100, 101]. Rezultaty uzyskane z wykorzystaniem wykładniczej oraz potęgowej zmiany właściwości FGM wykazały, że stopień gradacji (wielkość parametru gradientu) materiału tarczy ma decydujący wpływ na temperaturę i naprężenia termiczne elementów ciernych układu hamulcowego. Opracowano osiowosymetryczny model numeryczny (MES) nagrzewania jedno- i dwustronnego tarczy wykonanej z FGM, z uwzględnieniem zmiany właściwości składowych materiałów pod wpływem temperatury (wrażliwości termicznej) [12]. Przeanalizowano również przestrzenne (3D) pole temperatury i naprężeń termicznych w FGM tarczy hamulcowej [48]. Założono przy tym, że udział objętościowy komponentów FGM zmienia się potęgowo w kierunku osiowym tarczy – od stalowego rdzenia do czystej ceramiki. Wykazano, że przy tych samych parametrach wejściowych gradient temperatury w kierunku osiowym tarczy wykonanej z FGM jest znacznie mniejszy niż w jednorodnej tarczy stalowej. Ponadto ustalono, że wykorzystanie FGM redukuje zużycie cierne oraz zmniejsza prawdopodobieństwo pojawienia się pęknięć powierzchni roboczych tarczy. Zaproponowano model numeryczny z wykorzystaniem MES do wyznaczenia przypowierzchniowych naprężeń termicznych, inicjowanych nagrzewaniem ciernym, w naniesionej na jednorodne podłoże FGM warstwie o wykładniczym rozkładzie właściwości termomechanicznych wzdłuż jej grubości [6]. Za pomocą MES przeprowadzono analizę naprężeń we wrażliwych termicznie porowatych FGM mikropłytach przy ich obciążeniu cieplnym i mechanicznym [38]. Zaproponowano wprowadzenie gradacji właściwości materiałowych w obrębie elementów skończonych do rozwiązywania początkowo-brzegowych zagadnień dla materiałów niejednorodnych typu FGM [110]. Zaprezentowano także przykład wykorzystania tego typu elementów skończonych w celu otrzymania rozwiązania numerycznego sprzężonego zagadnienia termosprężystości dla płyt FGM [20]. Porównanie otrzymanych wyników ze znanymi z literatury rezultatami wykazało bardzo dobrą zgodność zarówno w zakresie osiąganej temperatury, jak i rozkładów naprężeń termicznych.

Oprócz ugruntowanej i powszechnej MES do rozwiązywania zagadnień cieplnych tarcia sformułowanych dla ośrodków FGM używane są również inne metody numerycznej aproksymacji. Przykładowo metodę elementów brzegowych wykorzystano do przekształcenia zagadnień materiałów niejednorodnych o gradientowych właściwościach, zmieniających się w funkcji jednej, dwóch lub trzech zmiennych przestrzennych, do odpowiednich zagadnień jednorodnych [111]. Podejście to poszerzono także o zagadnienia nieustalonej wymiany ciepła [112]. Warto wspomnieć, że do rozwiązywania zagadnień cieplnych tarcia elementów wykonanych z FGM opracowano również inną, bardziej zaawansowaną metodę, opartą na lokalnych równaniach całek brzegowych [104].

Pomimo intensywnego rozwoju metod numerycznych, w przypadku rozwiązywania zagadnień przewodnictwa cieplnego i termosprężystości dla FGM nadal szczególnie doceniane są rozwiązania analityczne. Dzieje się tak głównie ze względu na fakt, że charakteryzują się one większą dokładnością i wymagają znacznie mniej czasu obliczeniowego. Ich ścisła, zamknięta forma ułatwia przeprowadzenie szybkiej oceny trybu temperaturowego i stanu naprężeń termicznych w układach ciernych na podstawie wieloparametrycznej analizy numerycznej.

Przykładowo, przeprowadzono porównanie temperatury otrzymanej za pomocą analitycznego rozwiązania zagadnienia brzegowego ustalonego przewodnictwa cieplnego dla obracającej się tarczy wykonanej z materiału o gradacji potęgowej właściwości cieplno-fizycznych w kierunku promieniowym, z odpowiadającymi im rezultatami znalezionymi z wykorzystaniem metod numerycznych, w tym MES [102]. W efekcie wykazano ich bardzo dobrą zgodność. Metodą rozdzielenia zmiennych z wykorzystaniem funkcji Bessela otrzymano zaś dokładne rozwiązanie zagadnienia nieustalonego przewodnictwa cieplnego dla cylindra FGM o gradacji właściwości w kierunku osiowym [47]. Z wykorzystaniem aparatu matematycznego funkcji Bessela i właściwości szeregów trygonometrycznych zbadano następnie przestrzenne (3D) ustalone pole temperatury w tymże cylindrze [49]. Za pomocą transformacji całkowej Hankela otrzymano natomiast dokładne rozwiązanie osiowosymetrycznego stacjonarnego zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla FGM warstwy, ze zmieniającym się potęgowo w kierunku poprzecznym współczynnikiem przewodności cieplnej naniesionej na jednorodną półprzestrzeń [90]. Zbadano ustalone i nieustalone rozkłady temperatury i quasi-statycznych naprężeń termicznych w płycie, cylindrze kołowym oraz sferze wykonanych z FGM [55, 84, 85]. Zaproponowano przy tym oryginalną metodę analityczną do rozwiązywania jednowymiarowych problemów przewodzenia ciepła dla ciał o funkcyjnej gradacji własności, która jest realizowana przy odpowiednim przemieszczeniu zmiennych, transformacie całkowej Laplace'a oraz metodzie perturbacji. Należy zauważyć, że uniwersalność tej ostatniej sprawia, że można ją stosować również do analizy różnych klas zagadnień termosprężystych dla FGM, nawet z uwzględnieniem wrażliwości termicznej materiału [81]. Uwidoczniono również możliwość wykorzystania znalezionych naprężeń termicznych do przewidywania trajektorii propagacji pęknięć [81]. Stwierdzono, że odpowiedni dobór gradientu FGM może prowadzić do znacznego obniżenia wartości rozciągających naprężeń termicznych. Metoda perturbacji została zastosowana także do otrzymania w postaci analitycznej rozwiązania początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla stożkowego FGM cylindra obciążonego nierównomiernym strumieniem ciepła [130]. Otrzymane rozkłady temperatury okazały się zbliżone do odpowiednich rezultatów znalezionych z wykorzystaniem MES.

Innym podejściem umożliwiającym wykorzystanie znanych metod analitycznych jest zastosowanie modelu wielowarstwowego ośrodka niejednorodnego do symulowania rozkładu właściwości FGM. Polega on na zastąpieniu ciągłej struktury FGM pakietem jednorodnych, cienkich warstw, ułożonych prostopadle do kierunku gradacji tak, że otrzymuje się skokową, ale stopniowaną zmianę właściwości materiału. Takie uproszczenie struktury materiału pozwala na przeprowadzenie analizy dla każdej warstwy osobno, z wykorzystaniem znanych rozwiązań dla ośrodków jednorodnych. Przeprowadzono weryfikację takiego modelu wielowarstwowego przy rozwiązaniu quasi-stacjonarnego, osiowosymetrycznego zagadnienia termosprężystości dla półprzestrzeni wykonanej z FGM, o wykładniczo zmieniających się właściwościach cieplno-fizycznych i mechanicznych [61]. Wykazano, że rezultaty uzyskane z wykorzystaniem modelu wielowarstwowego, przy odpowiednio dużej liczbie warstw są zbieżne z odpowiednimi rezultatami otrzymanymi na podstawie dokładnego rozwiązania tego zagadnienia. Należy zaznaczyć, że liczba takich warstw jest ściśle zależna od rozpatrywanego problemu, a różnice pomiędzy uzyskanymi wynikami mogą w niektórych przypadkach być znaczące [78]. Zaletą modelu warstwowego jest natomiast fakt, że dobór funkcji opisującej zmianę właściwości materiału nie wpływa na złożoność problemu, w przeciwieństwie do zagadnień formułowanych dla ośrodków ciągłych, dlatego też modele opracowane na podstawie tej metody są wykorzystywane do modelowania ośrodków wykonanych z materiałów o gradiencie określonym dowolną funkcją [76]. Przy założeniu, że gradacja materiału przebiega sinuso- lub cosinusoidalnie, w ramach takiego podejścia otrzymano dokładne rozwiązania płaskiego zagadnienia kontaktowego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia dla pary ciernej, której jeden z elementów wykonano z FGM o dowolnie zmieniających się właściwościach cieplno-fizycznych i mechanicznych [69, 70]. Znaleziono także rozwiązanie tego zagadnienia w przypadku dowolnie zmieniającego się modułu Kirchhoffa [54].

Model wielowarstwowy jest często stosowany do rozwiązywania nieliniowych zagadnień, zwłaszcza formułowanych dla FGM, których właściwości nie tylko zależą od współrzędnych przestrzennych, ale również zmieniają się pod wpływem temperatury. Przykładowo, otrzymane zostało rozwiązanie jednowymiarowego zagadnienia nieustalonego przewodzenia ciepła dla wrażliwej termicznie płyty FGM [114]. Analiza znalezionych pól temperatury i naprężeń termicznych wykazała, że zależność właściwości materiału od temperatury jest jednym z najważniejszych czynników wpływających na dokładność oceny maksymalnej temperatury i intensywności naprężeń w węzłach ciernych. W celu minimalizacji naprężeń termicznych pojawiających się na skutek ustalonego obciążenia cieplnego takich węzłów opracowano algorytm optymalizacji struktury wrażliwego termicznie FGM [32]. Z wykorzystaniem modelu wielowarstwowego otrzymano rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla płyty wykonanej z FGM ze zmiennymi parametrami gradientu i nagrzewanej źródłem ciepła o eksponencjalnym profilu czasowym mocy [117]. Przeprowadzono także analizę nieustalonego pola temperatury i odpowiednich naprężeń termicznych powstałych w dwuskładnikowej (W–Cu), funkcyjnie gradientowej, wrażliwej termicznie płycie na skutek gwałtownej zmiany temperatury otoczenia (szoku termicznego) [121].

Wysoka temperatura (na rzeczywistym obszarze kontaktu oraz w całej objętości tarczy) prowadzi do zgniecenia mikrowypukłości bardziej miękkiego materiału pary ciernej, a następnie do jego migracji wzdłuż konturowego obszaru styku. W takich warunkach istnieje ryzyko wystąpienia zjawiska niestabilności termosprężystej (ang. *thermoelastic instability*, dalej TEI), spowodowanego sprzężoną interakcją obciążeń mechanicznych i termicznych w układzie tarciowym. Wystąpieniu TEI towarzyszy lokalna koncentracja nacisku, a co za tym idzie, intensywniejsze nagrzewanie w obszarach znacznie mniejszych niż nominalny obszar kontaktu. Prowadzi to do powstawania zlokalizowanych stref wyższej temperatury, a w konsekwencji do przedwczesnego uszkodzenia elementów ciernych lub zaniku hamowania [67]. Ustalono, że do niestabilności termosprężystej w tarczowych układach hamulcowych dochodzi, gdy prędkość poślizgu przekroczy pewną wartość krytyczną [51, 100]. Badania dotyczące wpływu niejednorodności materiałów na niestabilność termiczną hamulców wykazały, że tarcza wykonana z FGM jest mniej podatna na występowanie TEI [67, 76, 77]. Za pomocą MES przeprowadzono też dwuwymiarową analizę termosprężystego zachowania FGM tarczy hamulcowej [51]. Wykazano, że wartość prędkości krytycznej tarczy hamulcowej wykonanej z FGM jest większa niż w przypadku konwencjonalnej tarczy jednorodnej. Wniosek ten został potwierdzony w dalszych badaniach TEI dla układu składającego się z warstwy FGM ślizgającej się równomiernie pomiędzy dwoma jednorodnymi półprzestrzeniami [64, 67]. Założenie wykładniczej zmienności właściwości cieplno-fizycznych wzdłuż grubości warstwy pozwoliło na uzyskanie dokładnego rozwiązania takiego zagadnienia metodą perturbacji. Stosując tę samą metodologię, zbadano TEI w układzie nakładka-tarcza [76]. Przyjęto tu następujący jednowymiarowy schemat nagrzewania ciernego przy równomiernym ciśnieniu kontaktowym i liniowo zmniejszającą się prędkością poślizgu w warunkach nieidealnego kontaktu cieplnego tarcia: półprzestrzeń FGM-półprzestrzeń jednorodna. W efekcie wyznaczono granice stabilności termosprężystej rozpatrywanego układu. Omówiony wyżej model wielowarstwowy wykorzystano zaś do zbadania wpływu dowolnie zmieniających się właściwości termofizycznych FGM na TEI podczas nagrzewania ciernego, z uwzględnieniem termicznego oporu kontaktowego [76, 77]. Sformułowane wnioski potwierdzają, że zastosowanie tarczy hamulcowej z naniesioną na jej powierzchnię czołową, funkcyjnie gradientową, ceramiczną warstwą ochronną zmniejsza podatność układu hamulcowego na wystąpienie TEI.

Reasumując, można stwierdzić, że w literaturze naukowej mało jest dokładnych rozwiązań zagadnień cieplnych tarcia modelujących proces nagrzewania tarciowego w układach hamulcowych z uwzględnieniem wykonania ich elementów ciernych z funkcyjnie gradientowych materiałów. Większość opublikowanych dotychczas analiz termicznych i termosprężystych dla FGM przeprowadzono z wykorzystaniem metod numerycznych lub uproszczonego modelu wielowarstwowego. Nieliczne dokładne opracowania analityczne, ze względu na przyjęte założenia, posiadają ograniczone zakresy stosowalności, dlatego zauważalna jest potrzeba dalszego rozwijania dla FGM metod rozwiązywania początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia.

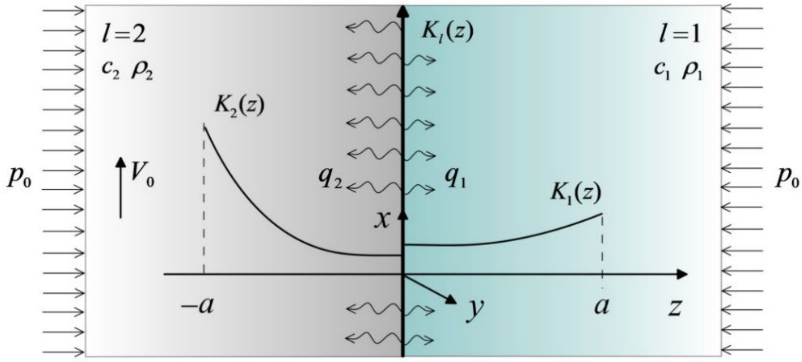
2. MODELOWANIE PROCESU NAGRZEWANIA ELEMENTÓW CIERNYCH WYKONANYCH Z FGM PODCZAS HAMOWANIA JEDNOKROTNEGO

W niniejszym rozdziale rozpatrzono zagadnienie cieplne tarcia dla układu dwóch półprzestrzeni wykonanych z funkcyjnie gradientowych materiałów (FGM). Dla takiego układu ciernego najpierw sformułowano, a następnie otrzymano dokładne rozwiązanie jednowymiarowego zagadnienia początkowo-brzegowego przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem nagrzewania tarciowego przy stałej gęstości mocy tarcia. Otrzymano również rozwiązanie asymptotyczne w początkowych chwilach procesu nagrzewania. W dalszej części rozdziału, na podstawie uzyskanego rozwiązania, z wykorzystaniem twierdzenia Duhamela opracowano metodykę wyznaczania nieustalonego pola temperatury w nakładce i tarczy podczas hamowania z eksponencjalnym zwiększeniem ciśnienia kontaktowego. Następnie zbadano wpływ wrażliwości termicznej materiałów składowych FGM na pole temperatury w trakcie hamowania ze stałym opóźnieniem. W związku z tak powstałą nieliniowością zagadnienia zaproponowano algorytm obliczeniowy do wyznaczania przestrzenno-czasowego rozkładu temperatury, oparty o pojęcie temperatury objętościowej.

2.1. Zagadnienie cieplne tarcia dla układu dwóch FGM półprzestrzeni przy stałej gęstości mocy tarcia

2.1.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrywany jest układ dwóch ciał półograniczonych wykonanych z funkcyjnie gradientowych materiałów. W początkowej chwili $t = 0$ ciała są ściskane stałym ciśnieniem p_0 i jednocześnie zaczynają ślizgać się ze stałą prędkością V_0. Na skutek oddziaływania sił tarcia na powierzchni kontaktu generowane jest ciepło i ciała nagrzewają się. Należy ustalić rozkład temperatury T w każdym z ciał w dowolnej chwili $t > 0$ (rysunek 2.1).



Rysunek 2.1. Schemat zagadnienia przy stałej gęstości mocy tarcia

Model matematyczny opisujący proces nagrzewania takiego układu tarciowego oparto na następujących założeniach:

1. Temperatura początkowa ciał T_0 jest jednakowa i równa temperaturze otoczenia T_a.
2. Podczas nagrzewania tarciowego suma intensywności strumieni ciepła skierowanych od powierzchni kontaktu, wzdłuż normalnej, do wnętrza każdego ciała równa jest gęstości mocy sił tarcia $q_0 = fp_0V_0$, gdzie f to współczynnik tarcia.
3. Opór termiczny powierzchni ciernych jest pomijalnie mały, a przez to kontakt cieplny tarcia ciał jest doskonały. Skutkuje to tym, że temperatura na powierzchniach ciernych obu ciał jest jednakowa.
4. Cała praca tarcia zamienia się w ciepło, powodując nagrzewanie ciał. Zużycie powierzchni ciernych jest pomijane.
5. W układzie współrzędnych kartezjańskich zmiany gradientów temperatury w kierunkach równoległych do powierzchni kontaktu są pomijalnie małe.
6. Ciała są wykonane z materiałów funkcyjnie gradientowych, a ich współczynniki przewodnictwa cieplnego $K_l = 1;2$ są eksponencjalnymi funkcjami zmiennej z, natomiast ciepła właściwe c_l i gęstości ρ_l, $l = 1;2$ są stałe [109]. W tym miejscu i dalej dolny indeks $l = 1$ wskazuje na parametry i wielkości odnoszące się do ciała pierwszego, a $l = 2$ – ciała drugiego.
7. Właściwości mechaniczne i cieplne materiałów oraz współczynnik tarcia nie zmieniają się pod wpływem temperatury T.

Uwzględniwszy założenia 1–7, przyrostu temperatury $\Theta(z,t) = T(z,t) - T_0$ w elementach pary ciernej poszukiwano z rozwiązania następującego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] = c_1\rho_1 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \; z>0, \; t>0, \tag{2.1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_2(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] = c_2\rho_2 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \; z<0, \; t>0, \tag{2.1.2}$$

$$K_2(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^-} - K_1(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = q_0, \; t>0, \tag{2.1.3}$$

$$\Theta(0^-,t) = \Theta(0^+,t), \; t>0, \tag{2.1.4}$$

$$\Theta(z,t) \to 0, \; |z| \to \infty, \; t>0, \tag{2.1.5}$$

$$\Theta(z,0) = 0, \; |z| < \infty. \tag{2.1.6}$$

Przy uwzględnieniu następujących zależności [109]:

$$K_l(z) = K_{l,0}e^{\gamma_l |z|}, \; |z|<\infty, \; K_{l,0} \equiv K_l(0), \; \gamma_l \ge 0, \; l=1;2, \tag{2.1.7}$$

zagadnienie (2.1.1)–(2.1.6) zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2 \Theta(z,t)}{\partial z^2} + \gamma_1 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z} = \frac{e^{-\gamma_1 z}}{k_{1,0}}\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \; z>0, \; t>0, \tag{2.1.8}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(z,t)}{\partial z} - \gamma_2 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z} = \frac{e^{\gamma_2 z}}{k_{2,0}}\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \; z<0, \; t>0, \tag{2.1.9}$$

$$K_{2,0}\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^-} - K_{1,0}\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = q_0, \; t>0, \tag{2.1.10}$$

$$\Theta(0^-,t) = \Theta(0^+,t), \; t>0, \tag{2.1.11}$$

$$\Theta(z,t) \to 0, \; |z| \to \infty, \; t>0, \tag{2.1.12}$$

$$\Theta(z,0) = 0, \; |z| < \infty, \tag{2.1.13}$$

przy czym $k_{l,0}$ to współczynniki dyfuzyjności cieplnej materiałów powierzchni ciernych:

$$k_{l,0} = \frac{K_{l,0}}{c_l \rho_l}, \; l = 1; 2 \, . \tag{2.1.14}$$

2.1.2. Rozwiązanie w przestrzeni transformaty całkowej Laplace'a

Do początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego (2.1.8)–(2.1.13) zastosowano transformatę całkową Laplace'a [2],

$$L[\,\Theta(z,t); p] \equiv \overline{\Theta}(z,p) = \int_0^\infty \Theta(z,t) e^{-pt} dt \, , \tag{2.1.15}$$

i otrzymano następujące zagadnienie brzegowe dla dwóch równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}(z,p)}{dz^2} + \gamma_1 \frac{d\overline{\Theta}(z,p)}{dz} - \frac{p}{k_{1,0}} e^{-\gamma_1 z} \overline{\Theta}(z,p) = 0 \, , \; z > 0 \, , \tag{2.1.16}$$

$$\frac{d^2\overline{\Theta}(z,p)}{dz^2} - \gamma_2 \frac{d\overline{\Theta}(z,p)}{dz} - \frac{p}{k_{2,0}} e^{\gamma_2 z} \overline{\Theta}(z,p) = 0 \, , \; z < 0 \, , \tag{2.1.17}$$

$$K_{2,0} \left. \frac{d\overline{\Theta}(z,p)}{dz} \right|_{z=0^-} - K_{1,0} \left. \frac{d\overline{\Theta}(z,p)}{dz} \right|_{z=0^+} = \frac{q_0}{p} \, , \tag{2.1.18}$$

$$\overline{\Theta}(0^-, p) = \overline{\Theta}(0^+, p) \, , \tag{2.1.19}$$

$$\overline{\Theta}(z,p) \to 0 \, , \; |z| \to \infty \, . \tag{2.1.20}$$

Po wprowadzeniu nowych zmiennych,

$$\xi_1 = \xi \, e^{-\gamma_1 z/2} \, , \; z \geq 0 \, , \; \xi_2 = \gamma_\varepsilon \xi \, e^{\gamma_2 z/2} \, , \; z \leq 0 \, , \; \xi = \frac{2}{\gamma_1} \sqrt{\frac{p}{k_{1,0}}} \, , \tag{2.1.21}$$

oraz bezwymiarowych parametrów,

$$\gamma_\varepsilon = \gamma^* \sqrt{k_0^*} \, , \; \gamma^* = \gamma_1 / \gamma_2 \, , \; k_0^* = k_{1,0} / k_{2,0} \, , \tag{2.1.22}$$

ze związków (2.1.21) znaleziono:

$$\frac{d\xi_1}{dz} = -\frac{1}{2}\gamma_1 \xi \, e^{-\gamma_1 z/2} = -\frac{1}{2}\gamma_1 \xi_1 \,, \quad \frac{d\xi_2}{dz} = \frac{1}{2}\gamma_2 \gamma_\varepsilon \xi \, e^{\gamma_2 z/2} = \frac{1}{2}\gamma_2 \xi_2 \,. \quad (2.1.23)$$

Uwzględniając pochodne (2.1.23), otrzymano:

$$\frac{d\overline{\Theta}(z,p)}{dz} = \frac{d\overline{\Theta}}{d\xi_l}\frac{d\xi_l}{dz} = (-1)^l \frac{1}{2}\gamma_l \xi_l \frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l} \,, \; l = 1;2 \,, \qquad (2.1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\overline{\Theta}(z,p)}{dz^2} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{d\overline{\Theta}}{d\xi_l}\frac{d\xi_l}{dz}\right) = \frac{d^2\overline{\Theta}}{d\xi_l^2}\left(\frac{d\xi_l}{dz}\right)^2 + \frac{d\overline{\Theta}}{d\xi_l}\frac{d}{d\xi_l}\left(\frac{d\xi_l}{dz}\right)\frac{d\xi_l}{dz} = \\ &= \frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l^2 \frac{d^2\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l^2} + \frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l} \,, \; l = 1;2. \end{aligned} \qquad (2.1.25)$$

Z uwzględnieniem pochodnych (2.1.24) i (2.1.25) równania różniczkowe (2.1.16) i (2.1.17) zapisano w postaci:

$$\frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d^2\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l^2} + \frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l} - \frac{1}{2}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l} - \frac{p}{k_{l,0}} e^{(-1)^l \gamma_l z}\overline{\Theta}(\xi_l,p) = 0,$$

$$\xi_l > 0, \; l = 1;2, \qquad (2.1.26)$$

a następnie:

$$\frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d^2\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l^2} - \frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l} - \frac{p}{k_{l,0}} e^{(-1)^l \gamma_l z}\overline{\Theta}(\xi_l,p) = 0,$$

$$\xi_l > 0, \; l = 1;2 \,. \qquad (2.1.27)$$

Z zależności (2.1.21) wyznaczono:

$$e^{(-1)^l \gamma_l z} = \frac{\xi_l^2 \gamma_l^2 k_{l,0}}{4p} \,, l = 1;2. \qquad (2.1.28)$$

Przy uwzględnieniu związku (2.1.28) w równaniu (2.1.27) uzyskano:

$$\frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l^2 \frac{d^2\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l^2} - \frac{1}{4}\gamma_l^2 \xi_l \frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l} - \frac{p}{k_{l,0}} \frac{\xi_l^2 \gamma_l^2 k_{l,0}}{4p}\overline{\Theta}(\xi_l,p) = 0,$$

$$\xi_l > 0 \,, \; l = 1;2 \qquad (2.1.29)$$

lub:

$$\frac{1}{4}\gamma_l^2\xi_l^2\left(\frac{d^2\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l^2}-\frac{1}{\xi_l}\frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l}-\overline{\Theta}(\xi_l,p)\right)=0\,,\ \xi_l>0\,,\ l=1;2 \tag{2.1.30}$$

i ostatecznie:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l^2}-\frac{1}{\xi_l}\frac{d\overline{\Theta}(\xi_l,p)}{d\xi_l}-\overline{\Theta}(\xi_l,p)=0\,,\ \xi_l>0\,,\ l=1;2\,. \tag{2.1.31}$$

Rozwiązanie ogólne równań zwyczajnych liniowych drugiego rzędu (2.1.31) ma postać [73]:

$$\overline{\Theta}(\xi_l,p)=A_l(p)\xi_l\mathrm{I}_1(\xi_l)+B_l(p)\xi_l\mathrm{K}_1(\xi_l)\,,\ l=1;2\,, \tag{2.1.32}$$

gdzie tu i dalej:

$\mathrm{I}_k(x)$, $\mathrm{K}_k(x)$ – zmodyfikowane funkcje Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju *k*-tego rzędu,
$A_l(p)$ – niewiadome funkcje parametru Laplace'a.

Przy uwzględnieniu warunku brzegowego (2.1.20) w rozwiązaniu (2.1.32) oraz zachowaniu zmodyfikowanej funkcji Bessela $K_1(\xi_l)$ przy $\xi_l \to 0^+$ otrzymano:

$$\overline{\Theta}(\xi_l,p)=A_l(p)\xi_l\mathrm{I}_1(\xi_l)\,,\ l=1;2\,. \tag{2.1.33}$$

Podstawiając zależności (2.1.21) i (2.1.22) do (2.1.33), uzyskano:

$$\overline{\Theta}(z,p)=A_1(p)\,\xi\, e^{-\gamma_1 z/2}\mathrm{I}_1(\xi\, e^{-\gamma_1 z/2}),\ z>0\,, \tag{2.1.34}$$

$$\overline{\Theta}(z,p)=A_2(p)\,\gamma_\varepsilon\xi\, e^{\gamma_2 z/2}\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi\, e^{\gamma_2 z/2}),\ z<0\,. \tag{2.1.35}$$

Po zróżniczkowaniu rozwiązania (2.1.33), z uwzględnieniem związków (2.1.21), (2.1.22) oraz pochodnej $[x\mathrm{I}_1(x)]'=x\mathrm{I}_0(x)$ [2] (tu i dalej symbol ' oznacza pochodną zwyczajną), znaleziono:

$$\frac{d\overline{\Theta}}{d\xi_l}=\left[A_l(p)\xi_l\mathrm{I}_1(\xi_l)\right]'=A_l(p)\xi_l\mathrm{I}_0(\xi_l)\,,\ l=1;2\,, \tag{2.1.36}$$

a następnie:

$$\left.\frac{d\overline{\Theta}}{dz}\right|_{z=0^+}=\left.\frac{d\overline{\Theta}}{d\xi_1}\frac{d\xi_1}{dz}\right|_{z=0^+}=A_1(p)\xi_1\mathrm{I}_0(\xi_1)\left.(-\frac{1}{2}\gamma_1\xi_1)\right|_{z=0^+}=-\frac{\gamma_1}{2}A_1(p)\xi^2\mathrm{I}_0(\xi),\quad(2.1.37)$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\overline{\Theta}}{dz}\right|_{z=0^-}&=\left.\frac{d\overline{\Theta}}{d\xi_2}\frac{d\xi_2}{dz}\right|_{z=0^-}=\\&=A_2(p)\xi_2\mathrm{I}_0(\xi_2)\left.(\frac{1}{2}\gamma_2\xi_2)\right|_{z=0^-}=\frac{\gamma_2}{2}A_2(p)(\gamma_\varepsilon\xi)^2\,\mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon\xi).\end{aligned}\quad(2.1.38)$$

Po podstawieniu do warunków brzegowych (2.1.18) i (2.1.19) zależności (2.1.34)–(2.1.37) otrzymano układ dwóch równań liniowych algebraicznych względem poszukiwanych funkcji $A_l(p)$, l = 1;2:

$$\begin{cases}A_2(p)\gamma_\varepsilon\xi\,\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)-A_1(p)\xi\,\mathrm{I}_1(\xi)=0,\\A_2(p)\gamma_\varepsilon^2\xi^2\mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon\xi)+A_1(p)K_0^*\gamma^*\xi^2\mathrm{I}_0(\xi)=\dfrac{2q_0}{pK_{2,0}\gamma_2}.\end{cases}\quad(2.1.39)$$

Rozwiązanie układu równań (2.1.39) ma postać:

$$A_1(p)=2\Lambda\frac{\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)}{p\gamma_\varepsilon\xi^2\psi(p)},\ \ A_2(p)=2\Lambda\frac{\mathrm{I}_1(\xi)}{p(\gamma_\varepsilon\xi)^2\psi(p)},\quad(2.1.40)$$

gdzie:

$$\psi(p)=\mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon\xi)\mathrm{I}_1(\xi)+K_\varepsilon\mathrm{I}_0(\xi)\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)\,,\quad(2.1.41)$$

$$K_\varepsilon=\frac{K_0^*}{\sqrt{k_0^*}},\ K_0^*=\frac{K_{1,0}}{K_{2,0}},\ \Lambda=\frac{q_0}{\gamma_2K_{2,0}}.\quad(2.1.42)$$

Uwzględniając postaci zmiennych ξ_l (2.1.21) oraz funkcji $A_l(p)$, l = 1;2 (2.1.40)–(2.1.42), rozwiązania (2.1.34) i (2.1.35) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}(z,p)=2\Lambda\,e^{-\gamma_1z/2}\frac{\varphi_1(z,p)}{\Psi(p)},\ z\ge0\,,\ \overline{\Theta}(z,p)=2\Lambda\,e^{\gamma_2z/2}\frac{\varphi_2(z,p)}{\Psi(p)},\ z\le0\,,\quad(2.1.43)$$

$$\varphi_1(z,p)=\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)\mathrm{I}_1(\xi\,e^{-\gamma_1z/2}),\ \varphi_2(z,p)=\mathrm{I}_1(\xi)\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi\,e^{\gamma_2z/2}),\quad(2.1.44)$$

$$\Psi(p)=p\gamma_\varepsilon\xi\psi(p).\quad(2.1.45)$$

2.1.3. Przejście do przestrzeni oryginałów

Korzystając z twierdzenia o rozkładzie Vashchenko-Zakharchenko [73, 124], rozwiązanie (2.1.43)–(2.1.45) zapisano w postaci:

$$\Theta(z,t) = 2\Lambda e^{-\gamma_1 z/2}\left[\frac{\varphi_1(z,0)}{\Psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_1(z,p_n)}{\Psi'(p_n)}e^{p_n t}\right],\ z \geq 0,\ t \geq 0, \tag{2.1.46}$$

$$\Theta(z,t) = 2\Lambda e^{\gamma_2 z/2}\left[\frac{\varphi_2(z,0)}{\Psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_2(z,p_n)}{\Psi'(p_n)}e^{p_n t}\right],\ z \leq 0,\ t \geq 0, \tag{2.1.47}$$

gdzie $p_n < 0$, $n = 1;2;\ldots$ to rzeczywiste pierwiastki funkcyjnego równania:

$$\psi(p) = \mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon \xi)\mathrm{I}_1(\xi) + K_\varepsilon \mathrm{I}_0(\xi)\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon \xi) = 0. \tag{2.1.48}$$

Przy uwzględnieniu przekształcenia rozkładów zmodyfikowanych funkcji Bessela $\mathrm{I}_k(x)$, $k = 0;\ 1$ w szeregi potęgowe [2]:

$$\mathrm{I}_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \ldots,\ \mathrm{I}_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \ldots, \tag{2.1.49}$$

ze wzorów (2.1.44)–(2.1.45) znaleziono asymptotyki:

$$\begin{gathered}\varphi_1(z,p) \cong \left[\frac{1}{2}\gamma_\varepsilon \xi + \frac{1}{16}(\xi\gamma_\varepsilon)^3 + \ldots\right]\left[\frac{1}{2}\xi\, e^{-\gamma_1 z/2} + \frac{1}{16}\left(\xi\, e^{-\gamma_1 z/2}\right)^3 + \ldots\right] \approx \\ \approx \frac{1}{4}\gamma_\varepsilon^2 \xi^2\, e^{-\gamma_1 z/2} + \frac{1}{32}\gamma_\varepsilon^3 \xi^{\,4} e^{-\gamma_1 z/2} + \ldots \approx \frac{1}{4}\gamma_\varepsilon \xi^2 e^{-\gamma_1 z/2}\left[1 + \frac{1}{8}(\gamma_\varepsilon \xi)^2\right],\ z \geq 0,\end{gathered} \tag{2.1.50}$$

$$\begin{gathered}\varphi_2(z,p) \cong \left[\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{16}\xi^3 + \ldots\right]\left[\frac{1}{2}\gamma_\varepsilon \xi\, e^{\gamma_2 z/2} + \frac{1}{16}\left(\gamma_\varepsilon \xi\, e^{\gamma_2 z/2}\right)^3 + \ldots\right] \approx \\ \approx \frac{1}{4}\gamma_\varepsilon \xi^2\, e^{-\gamma_1 z/2} + \frac{1}{32}\gamma_\varepsilon \xi^{\,4} e^{-\gamma_1 z/2} + \ldots \approx \frac{1}{4}\gamma_\varepsilon \xi^2 e^{\gamma_2 z/2}\left(1 + \frac{1}{8}\xi^2\right),\ z \leq 0,\end{gathered} \tag{2.1.51}$$

$$\begin{aligned}\Psi(p) = p\gamma_\varepsilon \xi \Bigg\{ & \left[\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{16}\xi^3 + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{4}(\xi\gamma_\varepsilon)^2 + \ldots\right)\right] + \\ & + K_\varepsilon\left[\left(1 + \frac{1}{4}\xi^2 + \ldots\right)\left(\frac{1}{2}\xi\gamma_\varepsilon + \frac{1}{16}\gamma_\varepsilon^3 \xi^3 + \ldots\right)\right]\Bigg\} \approx \\ \approx p\gamma_\varepsilon \xi^2 & \left[\frac{1}{2}(1 + \gamma_\varepsilon K_\varepsilon) + \frac{1}{16}(1 + 2\gamma_\varepsilon K_\varepsilon + 2\gamma_\varepsilon^2 + K_\varepsilon \gamma_\varepsilon^3)\xi^2\right].\end{aligned} \tag{2.1.52}$$

Zakładając, że $p \to 0$, ze wzorów (2.1.50)–(2.1.52) ustalono, że:

$$\frac{\varphi_1(0)}{\Psi'(0)} = \frac{e^{-\gamma_1 z/2}}{2(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)}, \ z \geq 0, \ \frac{\varphi_2(0)}{\Psi'(0)} = \frac{e^{\gamma_2 z/2}}{2(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)}, \ z \leq 0. \qquad (2.1.53)$$

Przy uwzględnieniu wzoru (2.1.21) otrzymano:

$$\frac{d\xi}{dp} = \frac{1}{\gamma_1\sqrt{pk_1}} = \frac{1}{p\gamma_1}\sqrt{\frac{p}{k_1}} = \frac{\xi}{2p}, \ \frac{d(p\xi)}{dp} = \xi + p\frac{\xi}{2p} = \frac{3}{2}\xi, \qquad (2.1.54)$$

$$\mathrm{I}_0'(\xi) = \frac{\xi}{2p}\mathrm{I}_1(\xi), \ \mathrm{I}_1'(\xi) = \frac{\xi}{2p}\left[\mathrm{I}_0(\xi) - \frac{1}{\xi}\mathrm{I}_1(\xi)\right]. \qquad (2.1.55)$$

Wówczas pochodną funkcji $\Psi(p)$ (2.1.45) zapisano w postaci:

$$\begin{aligned}\Psi'(p) &\equiv \frac{d}{dp}\{\gamma_\varepsilon \xi\, p[\mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon\xi)\mathrm{I}_1(\xi) + K_\varepsilon \mathrm{I}_0(\xi)\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)]\} = \\ &= \gamma_\varepsilon\xi[\mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon\xi)\mathrm{I}_1(\xi) + K_\varepsilon\mathrm{I}_0(\xi)\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)] + \qquad (2.1.56) \\ &+ \frac{\gamma_\varepsilon\xi^2}{2}\{(K_\varepsilon+\gamma_\varepsilon)\mathrm{I}_1(\gamma_\varepsilon\xi)\mathrm{I}_1(\xi) + (1+K_\varepsilon\gamma_\varepsilon)\mathrm{I}_0(\gamma_\varepsilon\xi)\mathrm{I}_0(\xi)\}.\end{aligned}$$

Zmodyfikowane funkcje Bessela $\mathrm{I}_k(x)$, $k = 0;1$ są związane z funkcjami Bessela pierwszego rodzaju $\mathrm{J}_k(x)$, $k = 0;1$ za pomocą relacji [2]:

$$\mathrm{I}_0(x) = \mathrm{J}_0(ix), \ \mathrm{I}_1(x) = -i\mathrm{J}_1(ix), \qquad (2.1.57)$$

$$\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x), \ \mathrm{J}_1'(x) = \mathrm{J}_0(x) - x^{-1}\mathrm{J}_1(x), \ i \equiv \sqrt{-1}.$$

Wykonując następujące oznaczenia:

$$\mu = i\xi, \ \mu^2 = -\xi^2, \ p = -\frac{1}{4}k_{1,0}\gamma_1^2\mu^2 \ (2.1.58)$$

i uwzględniając relacje (2.1.57), ze wzorów (2.1.44), (2.1.45) i (2.1.48) otrzymano:

$$\varphi_1(z,\mu) = -\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu)\mathrm{J}_1(\mu\, e^{-\gamma_1 z/2}), \ z \geq 0, \qquad (2.1.59)$$

$$\varphi_2(z,\mu) = -\mathrm{J}_1(\mu)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu\, e^{\gamma_2 z/2}), \ z \leq 0, \qquad (2.1.60)$$

$$\Psi'(\mu) = -\frac{\gamma_\varepsilon\mu^2}{2}[(1+K_\varepsilon\gamma_\varepsilon)\mathrm{J}_0(\gamma_\varepsilon\mu)\mathrm{J}_0(\mu) - (K_\varepsilon+\gamma_\varepsilon)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu)\mathrm{J}_1(\mu)], \qquad (2.1.61)$$

$$\mathrm{J}_0(\gamma_\varepsilon\mu)\,\mathrm{J}_1(\mu)+K_\varepsilon \mathrm{J}_0(\mu)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu)=0. \tag{2.1.62}$$

Na podstawie wzorów (2.1.53), (2.1.59)–(2.1.62) rozwiązanie (2.1.46), (2.1.47) zapisano w postaci:

$$\Theta(z,t)=\Lambda e^{-\gamma_1 z/2}\left[\frac{e^{-\gamma_1 z/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)}+\frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varphi}_1(z,\mu_n)}{\hat{\Psi}'(\mu_n)}\,e^{-p_n t}\right],\ z\ge 0,\ t\ge 0, \tag{2.1.63}$$

$$\Theta(z,t)=\Lambda e^{\gamma_2 z/2}\left[\frac{e^{\gamma_2 z/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)}+\frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varphi}_2(z,\mu_n)}{\hat{\Psi}'(\mu_n)}\,e^{-p_n t}\right],\ z\le 0,\ t\ge 0, \tag{2.1.64}$$

gdzie:

$$\hat{\varphi}_1(z,\mu_n)=\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma_1 z/2}),\ \hat{\varphi}_2(z,\mu_n)=\mathrm{J}_1(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n e^{\gamma_2 z/2}), \tag{2.1.65}$$

$$\hat{\Psi}'(\mu_n)=\mu_n^2[(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)\mathrm{J}_0(\mu_n)\mathrm{J}_0(\gamma_\varepsilon\mu_n)-(\gamma_\varepsilon+K_\varepsilon)\mathrm{J}_1(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n)], \tag{2.1.66}$$

$$p_n=0{,}25k_{1,0}\gamma_1^2\mu_n^2 \tag{2.1.67}$$

oraz $\mu_n > 0$, $n = 1;2;3,\ldots$ to proste, rzeczywiste pierwiastki funkcyjnego równania (2.1.62).

Na powierzchni ciernej $z = 0$ z rozwiązań (2.1.63)–(2.1.65) otrzymano:

$$\Theta(t)\equiv\Theta(0,t)=\Lambda\left[\frac{1}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)}+\frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varphi}(\mu_n)}{\hat{\Psi}'(\mu_n)}\,e^{-p_n t}\right],\ t\ge 0, \tag{2.1.68}$$

$$\hat{\varphi}(\mu_n)\equiv\hat{\varphi}_1(0,\mu_n)=\hat{\varphi}_2(0,\mu_n)=\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n). \tag{2.1.69}$$

Jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że materiały pary ciernej są jednakowe ($K_{1,0} = K_{2,0} \equiv K_0$, $k_{1,0} = k_{2,0} \equiv k_0$, $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$), to ze wzorów (2.1.21), (2.1.22) i (2.1.42) wynika, że $K_\varepsilon = \gamma_\varepsilon = 1$, zatem rozwiązanie (2.1.63)–(2.1.65) przyjmie postać:

$$\Theta(t)=2\Lambda\left(\frac{1}{4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-p_n t}}{\mu_n^2}\right),\ t\ge 0, \tag{2.1.70}$$

gdzie μ_n to pierwiastki równania:

$$\mathrm{J}_0(\mu)=0. \tag{2.1.71}$$

Wprowadzono następujące bezwymiarowe zmienne i parametry:

$$\zeta = \frac{z}{a}\,,\ \tau = \frac{k_{1,0}t}{a^2}\,,\ \gamma_l = \frac{\gamma_l^*}{a}\,,\ l = 1;2\,,\ \Theta_0 = \frac{q_0 a}{K_{1,0}}\,,\ \Theta^* = \frac{\Theta}{\Theta_0}\,, \tag{2.1.72}$$

gdzie a oznacza efektywną głębokość nagrzewania elementów pary ciernej, czyli odległość od powierzchni tarcia, na której temperatura osiąga 5% maksymalnej wartości [26].

Biorąc pod uwagę oznaczenia (2.1.72), rozwiązania (2.1.63)–(2.1.67) zapisano w postaci bezwymiarowej:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*} e^{-\gamma_1^*\zeta/2}\left[\frac{e^{-\gamma_1^*\zeta/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} + \frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_1^*(\zeta,\mu_n)}{\hat{\Psi}'(\mu_n)} e^{-\lambda_n^2\tau}\right],\ \zeta \ge 0\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{2.1.73}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*} e^{\gamma_2^*\zeta/2}\left[\frac{e^{\gamma_2^*\zeta/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} + \frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_2^*(\zeta,\mu_n)}{\hat{\Psi}'(\mu_n)} e^{-\lambda_n^2\tau}\right],\ \zeta \le 0\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{2.1.74}$$

gdzie:

$$\varphi_1^*(\zeta,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma_1^*\zeta/2})\,,\ \varphi_2^*(\zeta,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n e^{\gamma_2^*\zeta/2})\,, \tag{2.1.75}$$

$$\lambda_n = 0{,}5\gamma_1^*\mu_n\,,\ n = 1;\ 2;\ \ldots \tag{2.1.76}$$

Na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ ze wzorów (2.1.73), (2.1.74) otrzymano:

$$\Theta^*(\tau) \equiv \Theta^*(0,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*}\left[\frac{1}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} + \frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi^*(\mu_n)}{\hat{\Psi}'(\mu_n)} e^{-\lambda_n^2\tau}\right],\ \tau \ge 0\,, \tag{2.1.77}$$

gdzie

$$\varphi^*(\mu_n) \equiv \varphi_1^*(0,\mu_n) = \varphi_2^*(0,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon\mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n)\,. \tag{2.1.78}$$

2.1.4. Asymptotyczne rozwiązanie w początkowych chwilach nagrzewania

Przy dużych wartościach parametru p transformacji całkowej Laplace'a (2.1.15), z uwzględnieniem asymptotyk funkcji [2]

$$\mathrm{I}_k(x) \cong (2\pi\, x)^{-1/2} e^x\,,\ k = 0;1\,, \tag{2.1.79}$$

ze wzorów (2.1.44) i (2.1.45) otrzymano:

$$\varphi_1(z,p) \cong \frac{e^{\gamma_\varepsilon \xi}}{\sqrt{2\pi\gamma_\varepsilon \xi}} \frac{e^{\xi\, e^{-\gamma_1 z/2}}}{\sqrt{2\pi\xi\, e^{-\gamma_1 z/2}}} = \frac{e^{(1+\gamma_\varepsilon - \gamma_1 z/2)\xi}}{2\pi\xi\sqrt{\gamma_\varepsilon}} e^{\gamma_1 z/4},\ z \geq 0, \tag{2.1.80}$$

$$\varphi_2(z,p) \cong \frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} \frac{e^{\gamma_\varepsilon \xi\, e^{\gamma_2 z/2}}}{\sqrt{2\pi\gamma_\varepsilon \xi\, e^{\gamma_2 z/2}}} = \frac{e^{\xi(1+\gamma_\varepsilon + \gamma_\varepsilon \gamma_2 z/2)}}{2\pi\xi\sqrt{\gamma_\varepsilon}} e^{-\gamma_2 z/4},\ z \leq 0, \tag{2.1.81}$$

$$\Psi(p) \cong \xi\, p\left[\frac{e^{\gamma_\varepsilon \xi}}{\sqrt{2\pi\gamma_\varepsilon \xi}} \frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} + K_\varepsilon \frac{e^{\gamma_\varepsilon \xi}}{\sqrt{2\pi\gamma_\varepsilon \xi}} \frac{e^{\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}}\right] = (1+K_\varepsilon)\frac{pe^{(1+\gamma_\varepsilon)\xi}}{2\pi\sqrt{\gamma_\varepsilon}}. \tag{2.1.82}$$

Po podstawieniu funkcji $\phi_l(z,p), l=1;2$, $\Psi(p)$ (2.1.80)–(2.1.82) do transformowanych rozwiązań (2.1.43) otrzymano:

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}(z,p) &= 2\Lambda e^{-\gamma_1 z/2} \frac{e^{(1+\gamma_\varepsilon - \gamma_1 z/2)\xi}}{2\pi\xi\sqrt{\gamma_\varepsilon}} e^{\gamma_1 z/4} \frac{2\pi\sqrt{\gamma_\varepsilon}}{(1+K_\varepsilon)pe^{(1+\gamma_\varepsilon)\xi}} = \\ &= 2\Lambda e^{-\gamma_1 z/4} \frac{e^{-\gamma_1 \xi z/2}}{(1+K_\varepsilon)p\xi},\quad z \geq 0,\end{aligned} \tag{2.1.83}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}(z,p) &= 2\Lambda e^{\gamma_2 z/2} \frac{e^{\xi(1+\gamma_\varepsilon + \gamma_\varepsilon \gamma_2 z/2)}}{2\pi\xi\sqrt{\gamma_\varepsilon}} e^{-\gamma_2 z/4} \frac{2\pi\sqrt{\gamma_\varepsilon}}{(1+K_\varepsilon)pe^{(1+\gamma_\varepsilon)\xi}} = \\ &= 2\Lambda e^{\gamma_2 z/4} \frac{e^{\gamma_\varepsilon \gamma_2 \xi z/2}}{(1+K_\varepsilon)p\xi},\quad z \leq 0.\end{aligned} \tag{2.1.84}$$

Przy uwzględnieniu definicji parametrów γ_ε (2.1.22) i (2.1.21) transformowane rozwiązania (2.1.83) i (2.1.84) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}(z,p) = \frac{\Lambda\gamma_1}{(1+K_\varepsilon)} e^{-\gamma_1 z/4} \frac{e^{-\sqrt{\frac{p}{k_{1,0}}}z}}{p\sqrt{\frac{p}{k_{1,0}}}},\ z \geq 0, \tag{2.1.85}$$

$$\overline{\Theta}(z,p) = \frac{\Lambda\gamma_1}{(1+K_\varepsilon)} e^{\gamma_2 z/4} \frac{e^{\sqrt{\frac{p}{k_{2,0}}}z}}{p\sqrt{\frac{p}{k_{1,0}}}},\ z \leq 0. \tag{2.1.86}$$

Korzystając ze związku [8]

$$L^{-1}[p^{-3/2}e^{-\alpha\sqrt{p}};t] = 2\sqrt{t}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right),\ \alpha \geq 0\,, \tag{2.1.87}$$

gdzie:
$\mathrm{ierfc}(x) = \pi^{-1/2}e^{-x^2} - x\,\mathrm{erfc}(x),\ \mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}\,(x)$,
zaś $\mathrm{erf}\,(x)$ – funkcja błędu Gaussa [2],
z transformowanego rozwiązania (2.1.85), (2.1.86) otrzymano:

$$\Theta(z,t) = \frac{2\Lambda\gamma_1}{(1+K_\varepsilon)}e^{-\gamma_1 z/4}\sqrt{k_{1,0}t}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{k_{1,0}t}}\right),\ z \geq 0,\ 0 \leq t << 1\,, \tag{2.1.88}$$

$$\Theta(z,t) = \frac{2\Lambda\gamma_1}{(1+K_\varepsilon)}e^{\gamma_2 z/4}\sqrt{k_{1,0}t}\,\mathrm{ierfc}\left(-\frac{z}{2\sqrt{k_{2,0}t}}\right),\ z \leq 0,\ 0 \leq t << 1. \tag{2.1.89}$$

Przy z = 0 z rozwiązań (2.1.88) i (2.1.89) znaleziono:

$$\Theta(t) = \frac{2\Lambda\gamma_1}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\frac{k_{1,0}t}{\pi}},\ t \geq 0. \tag{2.1.90}$$

Uwzględniając oznaczenia (2.1.72), rozwiązanie (2.1.88)–(2.1.90) zapisano w postaci bezwymiarowej:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{2\gamma_\varepsilon K_\varepsilon}{(1+K_\varepsilon)}e^{-\gamma_1^*\zeta/4}\sqrt{\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \zeta \geq 0,\ 0 \leq \tau << 1, \tag{2.1.91}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{2\gamma_\varepsilon K_\varepsilon}{(1+K_\varepsilon)}e^{\gamma_2^*\zeta/4}\sqrt{\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(-\frac{\zeta}{2}\sqrt{\frac{k_0^*}{\tau}}\right),\ \zeta \leq 0, 0 \leq \tau << 1, \tag{2.1.92}$$

$$\Theta^*(\tau) = \frac{2\gamma_\varepsilon K_\varepsilon}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\ ,\ 0 \leq \tau << 1\,. \tag{2.1.93}$$

Zaprezentowaną wyżej metodę otrzymania asymptotycznego rozwiązania przy małych wartościach liczby Fouriera τ (oraz dużych wartościach parametru p transformacji Laplace'a) zastosowano do przeprowadzenia przejścia od rozwiązania dla pary ciernej wykonanej z funkcyjnie gradientowych materiałów do znanego rozwiązania dla układu z materiałów jednorodnych. Wynika to z faktu, że przy $\gamma_1 = \gamma_2 \to 0$ ze wzoru (2.1.21) otrzymujemy $\xi \to \infty$.

Podstawiając formalnie we wzorach (2.1.91)–(2.1.93) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma^* = 1$, otrzymano znane rozwiązania służące do wyznaczenia bezwymiarowego zwiększenia temperatury elementów ciernych wykonanych z materiałów jednorodnych [22]:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{2K_0^*}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \zeta \ge 0,\ \tau \ge 0, \tag{2.1.94}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{2K_0^*}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(-\frac{\zeta}{2}\sqrt{\frac{k_0^*}{\tau}}\right),\ \zeta \le 0,\ \tau \ge 0, \tag{2.1.95}$$

$$\Theta^*(\tau) = \frac{2K_0^*}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}},\ \tau \ge 0. \tag{2.1.96}$$

2.1.5. Analiza numeryczna

Obliczenia przeprowadzono na podstawie dokładnego rozwiązania (2.1.73)–(2.1.78) oraz rozwiązań asymptotycznych (2.1.91)–(2.1.93). W przypadku materiałów jednorodnych korzystano z rozwiązań (2.1.94)–(2.1.96). Na materiały cierne wybrano dwuskładnikowe FGM, zaś powierzchnie cierne są to odpowiednio ZrO_2 (element 1) i Al_2O_3 (element 2). Wraz ze wzrostem odległości od tych powierzchni zwiększa się także udział materiałów rdzeni Ti-6Al-4V (element 1) i TiC (element 2). Właściwości cieplno-fizyczne materiałów składowych przedstawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Właściwości cieplno-fizyczne materiałów [24, 117]

Element, l	**Materiał**	**Przewodność cieplna $K, \mathrm{W\,m^{-1}K^{-1}}$**	**Dyfuzyjność cieplna $k \times 10^6, \mathrm{m^2 s^{-1}}$**
1	ZrO_2	2,09	0,86
	Ti-6Al-4V	7,5	3,16
2	Al_2O_3	1,5	4,98
	TiC	33,9	9,59

Uwzględniając oznaczenia (2.1.72), zmianę współczynnika przewodności cieplnej materiałów (2.1.7), w zależności od odległości od powierzchni kontaktu, zapisano w postaci:

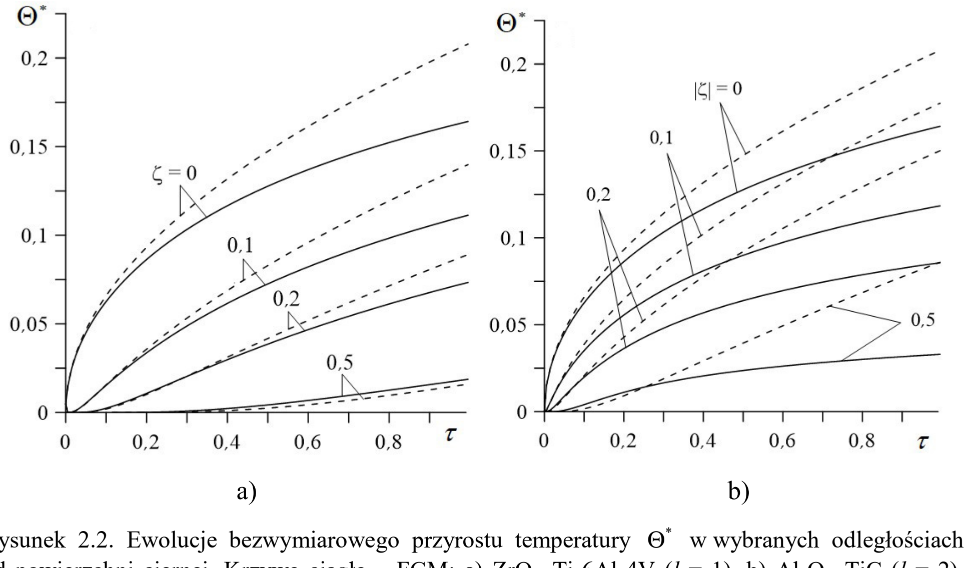
$$K_l(z) = K_{l,0}K_l^*(\zeta),\ K_l^*(\zeta) = e^{\gamma_l^*|\zeta|},\ |\zeta| < \infty,\ l = 1;2, \tag{2.1.97}$$

gdzie [77]:

$$\gamma_l^* = \ln(K_{l,1} / K_{l,0}),\ K_{l,0} \equiv K_l^*(0)\,,\ K_{l,1} \equiv K_l^*(1)\,,\ l = 1; 2\,. \qquad (2.1.98)$$

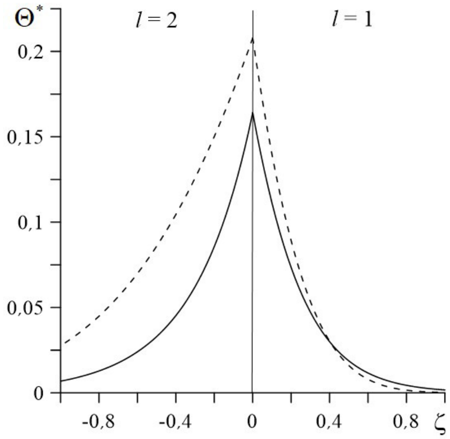
Na podstawie danych zawartych w tabeli 2.1, przy zastosowaniu wzoru (2.1.97), ustalono że $\gamma_1^* = 1{,}28$, $\gamma_2^* = 3{,}12$.

Zmiany bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (2.1.73)–(2.1.78) pary ciernej ZrO_2–Ti-6Al-4V ($l = 1$) i Al_2O_3–TiC ($l = 2$) w czasie poślizgu przedstawiają krzywe ciągłe na rysunku 2.1. Na tymże rysunku liniami przerywanymi zaznaczono odpowiednie rezultaty otrzymane z rozwiązań (2.1.94)–(2.1.96) dla ciał wykonanych z materiałów jednorodnych ZrO_2 ($l = 1$) i Al_2O_3 ($l = 2$). Przy ustalonej odległości od powierzchni ciernej ζ temperatura monotonicznie zwiększa się wraz z upływem czasu (liczby Fouriera τ), przy czym najbardziej nagrzane są powierzchnie cierne $\zeta = 0$. Intensywność nagrzewania elementów wykonanych z materiałów gradientowych jest mniejsza niż w przypadku ciał jednorodnych. Wraz z upływem czasu różnice pomiędzy odpowiadającymi sobie rezultatami stają się coraz większe. Biorąc pod uwagę oznaczenia (2.1.72), ustalono, że w chwili zakończenia procesu nagrzewania maksymalne wymiarowe przyrosty temperatury dla pary wykonanej z funkcyjnie gradientowych lub jednorodnych materiałów wyniosły odpowiednio $\Theta = 604$°C i $\Theta = 765$°C.



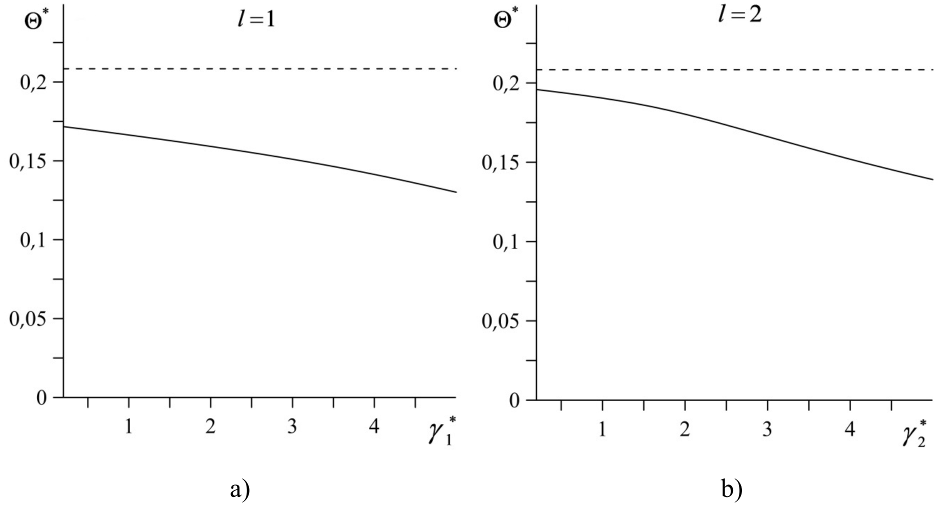
Rysunek 2.2. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* w wybranych odległościach od powierzchni ciernej. Krzywe ciągłe – FGM: a) ZrO_2–Ti-6Al-4V ($l = 1$), b) Al_2O_3–TiC ($l = 2$). Krzywe przerywane – materiały jednorodne: a) ZrO_2 ($l = 1$), b) Al_2O_3 ($l = 1$)

Obniżenie bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,1)$ wraz ze zwiększeniem odległości od powierzchni kontaktu w chwili zakończenia procesu nagrzewania przedstawiono na rysunku 2.3. Wraz z oddalaniem od powierzchni kontaktu różnica pomiędzy odpowiednimi wartościami Θ^* w elemencie $l = 1$ maleje, zaś w elemencie $l = 2$ pozostaje prawie niezmienna, a nawet nieco się zwiększa. Znacznie wyższa temperatura jednorodnego elementu ceramicznego Al_2O_3 ($l = 2$) w porównaniu z temperaturą tegoż elementu wykonanego z FGM Al_2O_3–TiC jest spowodowana wyborem na materiał rdzenia węglika tytanu TiC o wysokiej zdolności przewodzenia i dyfuzji ciepła (tabela 2.1).



Rysunek 2.3. Rozkład bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* po odległości ζ od powierzchni tarcia przy $\tau = 1$. Krzywe ciągłe – tworzywa gradientowe ZrO_2–Ti-6Al-4V ($l = 1$) i Al_2O_3–TiC ($l = 2$), krzywe przerywane – materiały homogeniczne ZrO_2 ($l = 1$) i Al_2O_3 ($l = 2$)

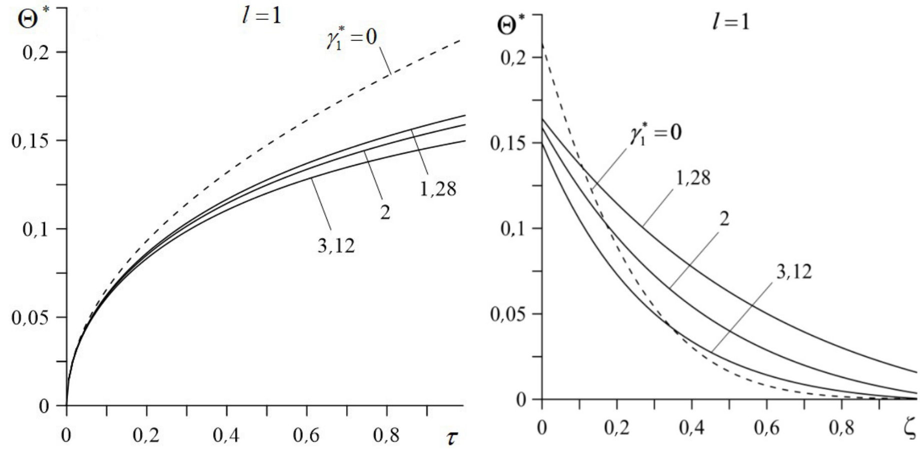
Wpływ bezwymiarowych parametrów materiałów $\gamma_l^*, l = 1;2$ (2.1.72) na temperaturę powierzchni ciernych w chwili zakończenia procesu nagrzewania pokazano na rysunku 2.4. Najwyższa temperatura powierzchni kontaktu osiągana jest w przypadku pary ciernej wykonanej z materiałów ceramicznych ZrO_2 ($l = 1$) i Al_2O_3 ($l = 2$). Zastosowanie funkcyjnie gradientowych materiałów powoduje natomiast obniżenie temperatury przy jednoczesnym zwiększeniu parametrów gradientu $\gamma_l^*, l = 1;2$. Obniżenie temperatury powierzchni ciernej elementu Al_2O_3–TiC ($l = 2$), występujące wraz ze wzrostem parametru gradientu, jest za to bardziej intensywne niż w przypadku elementu ZrO_2–Ti-6Al-4V ($l = 1$).



Rysunek 2.4. Zależność bezwymiarowej temperatury Θ^* na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ przy $\tau = 1$ od: a) parametru γ_1^* przy $\gamma_2^* = 3{,}12$; b) parametru γ_2^* przy $\gamma_1^* = 1{,}28$ (krzywe ciągłe), przy czym linie przerywane – rezultaty dla materiałów jednorodnych

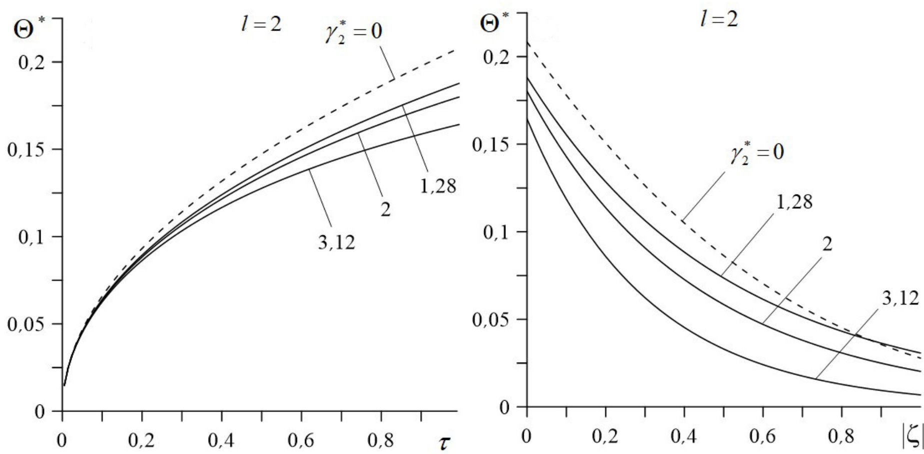
Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* powierzchni ciernych $\zeta = 0$ dla wybranych wartości parametru gradientu γ_l^* przedstawiono odpowiednio na rysunku 2.5a (l = 1) i na rysunku 2.6a (l = 2). Im mniejszy jest parametr gradientu materiału, tym wyższa jest temperatura powierzchni kontaktu, a jej przebieg jest bliższy wartościom otrzymanym w przypadku jednorodnych materiałów ceramicznych. Wraz ze wzrostem czasu nagrzewania różnice pomiędzy odpowiadającymi sobie temperaturami otrzymanymi dla materiałów jednorodnych i FGM się zwiększają.

Zmiany bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* przy zwiększeniu odległości od powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ zaprezentowano na rysunku 2.5b (l = 1) i na rysunku 2.6b (l = 2). Należy zaznaczyć, że efektywna głębokość przenikania ciepła w elemencie ZrO_2–Ti-6Al-4V (l = 1) wynosi 3,2 mm, a w elemencie Al_2O_3–TiC (l = 2) jest równa 7,7 mm, tak więc w przypadku parametru odniesienia w oznaczeniach (2.1.72) przyjęto a = 7,7 mm Oznacza to, że bezwymiarowa odległość $|\zeta| = 1$ odpowiada odległości z = 7,7 mm.



a) b)

Rysunek 2.5. Zmiany bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* w elemencie wykonanym z ZrO_2–Ti-6Al-4V (l = 1) przy ustalonej wartości parametru $\gamma_2^* = 3{,}12$ oraz różnych wartościach parametru γ_1^* : a) w czasie poślizgu na powierzchni ciernej $\zeta = 0$; b) z oddaleniem ζ od powierzchni kontaktu w chwili zakończenia procesu τ = 1



a) b)

Rysunek 2.6. Zmiany bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* w elemencie wykonanym z Al_2O_3–TiC (l = 2) przy ustalonej wartości parametru $\gamma_1^* = 1{,}28$ oraz różnych wartościach parametru γ_2^* : a) w czasie poślizgu na powierzchni ciernej $\zeta = 0$; b) z oddaleniem ζ od powierzchni kontaktu w chwili zakończenia procesu τ = 1

W przypadku elementu $l = 1$ wykonanego z dwutlenku cyrkonu ZrO_2 obniżenie temperatury z oddaleniem od powierzchni ciernej następuje szybciej niż w przypadku materiału gradientowego ZrO_2–Ti-6Al-4V. Jednym z niepożądanych efektów szybkiego obniżenia temperatury wraz ze zwiększeniem odległości od powierzchni kontaktu w materiale jednorodnym może być inicjacja znacznego naprężenia termicznego. Zmiana temperatury na grubości elementu $l = 2$ ma podobny charakter tak dla materiału jednorodnego Al_2O_3, jak i FGM dla Al_2O_3–TiC, przy czym na ustalonej odległości od powierzchni kontaktu temperatura powierzchni ciernej elementu jednorodnego jest wyższa niż w przypadku FGM. Im wyższa jest natomiast wartość parametru gradientu danego materiału, czyli im większy jest udział objętościowy materiału rdzenia, tym niższa jest temperatura osiągana w strefie przypowierzchniowej elementu, czyli w miejscu najbardziej narażonym na skutki oddziaływania wysokiej temperatury.

2.1.6. Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale zaproponowano model matematyczny procesu nagrzewania tarciowego z uwzględnieniem funkcyjnej gradientowości materiałów elementów pary ciernej. W tym celu sformułowano jednowymiarowe początkowo-brzegowe zagadnienie przewodzenia cieplnego dla dwóch półograniczonych ciał, przy doskonałych warunkach kontaktu cieplnego tarcia, ze stałą wartością gęstości mocy tarcia. Założono, że przewodności cieplne materiałów zwiększają się eksponencjalnie wraz z odległością od powierzchni ciernych. Dokładne oraz asymptotyczne (w początkowych chwilach procesu) rozwiązania zagadnienia otrzymano z wykorzystaniem transformacji całkowej Laplace'a. Weryfikację rezultatów przeprowadzono natomiast za pomocą przejść granicznych do odpowiednich znanych rozwiązań dla materiałów jednorodnych.

W oparciu o otrzymane rozwiązania analityczne przeprowadzono następnie analizę numeryczną pola temperatury wybranej pary ciernej wykonanej z funkcyjnie gradientowych materiałów ZrO_2–Ti-6Al-4V ($l = 1$) i Al_2O_3–TiC ($l = 2$). Ustalono, że zastosowanie takich materiałów powoduje znaczący spadek temperatury w porównaniu z odpowiadającymi im materiałami jednorodnymi. Zbadano także wpływ parametrów gradientu materiałów ciernych na przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury. Pokazano, że wzrost parametru gradientu, a zatem udziału objętościowego komponentu materiału rdzenia w warstwie przypowierzchniowej elementu, skutkuje poprawą procesu odprowadzania ciepła tarciowego w głąb materiałów, a co za tym idzie, obniżeniem maksymalnej temperatury osiąganej na powierzchni kontaktu elementów ciernych.

Rezultaty badań z tego podrozdziału opublikowano w artykule [153].

2.2. Uwzględnienie zmienności profilu czasowego gęstości mocy tarcia

2.2.1. Sformułowanie zagadnienia

W podrozdziale 2.1 otrzymano dokładne rozwiązanie zagadnienia cieplnego tarcia przy stałych ciśnieniu kontaktowym i prędkości poślizgu (stałej gęstości mocy tarcia). Większość układów ciernych pracuje jednak w warunkach, w których gęstość mocy tarcia zmienia się w czasie poślizgu. Typowym przykładem takiej zmiany jest proces nagrzewania tarciowego podczas hamowania.

Rozpatrzmy zatem proces generacji ciepła w tarczowym układzie hamulcowym podczas hamowania jednokrotnego. Robocze elementy układu to dwie jednakowe nakładki położone symetrycznie względem tarczy. W początkowej chwili $t = 0$ nakładki są przyciskane do powierzchni ciernych tarczy z ciśnieniem równomiernie rozłożonym na całym obszarze kontaktu i zmieniającym się wraz z upływem czasu według związku [26]:

$$p(t) = p_0 p^*(t) \,, \ \ p^*(t) = 1 - e^{-t/t_i} \,, \ 0 \le t \le t_s \,, \tag{2.2.1}$$

gdzie:

$t_i \ge 0$ – czas narastania ciśnienia kontaktowego p_0, zaś t_s – czas hamowania.

Redukcję liniowej prędkości V pojazdu od wartości początkowej $V_0 \equiv V(0)$ do zera w chwili zatrzymania $t = t_s$ na skutek oddziaływania sił tarcia opisują następujące wzory [119, 146]:

$$V(t) = V_0 V^*(t) \,, \ V^*(t) = 1 - \frac{t}{t_s^0} + \frac{t_i}{t_s^0} p^*(t) \,, \ t_s^0 = \frac{W_0}{f p_0 A_a V_0} \,, \ 0 \le t \le t_s \,, \tag{2.2.2}$$

gdzie:

W_0 – początkowa energia kinetyczna układu,

f – współczynnik tarcia,

A_a – pole nominalnego obszaru kontaktu nakładki z tarczą,

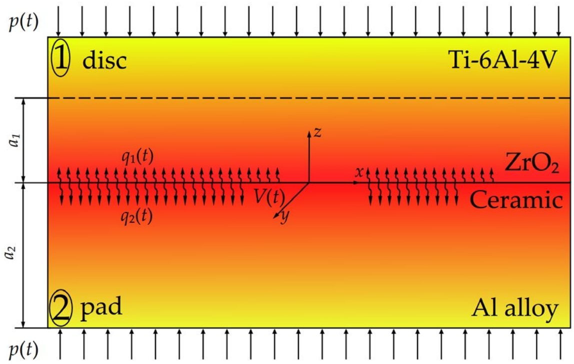
t_s^0 – czas hamowania ze stałym opóźnieniem ($t_i \to 0$).

Z uwzględnieniem profilu czasowego prędkości (2.2.2) czas hamowania wyznaczono z warunku zatrzymania $V^*(t_s) = 0$. Należy zaznaczyć, że przy $0 < t_i \le 0{,}3 t_s^0$ przybliżony wzór do ustalenia chwili zatrzymania ma postać $t_s \cong t_s^0 + 0{,}99 t_i$ [119].

Biorąc pod uwagę wzory (2.2.1) oraz (2.2.2), wyznaczono gęstość mocy tarcia:

$$q(t) = q_0 q^*(t)\,,\ q_0 = f p_0 V_0\,,\ q^*(t) = p^*(t) V^*(t)\,,\ 0 \le t \le t_s\,. \tag{2.2.3}$$

Zmniejszaniu prędkości podczas hamowania towarzyszy generacja ciepła tarciowego, a co za tym idzie, nagrzewanie elementów pary ciernej. Przy czym, z powodu symetrii względem środkowej płaszczyzny tarczy, do wyznaczenia temperatury rozpatrywanego układu hamulcowego wystarczy rozpatrzyć schemat kontaktu jednej nakładki z tarczą o połowie jej grubości (rysunek 2.2.1).



Rysunek 2.7. Schemat zagadnienia przy zmiennym profilu gęstości mocy tarcia

Przy takich samych założeniach 1–7 jak w podrozdziale 2.1, do wyznaczenia przyrostu temperatury w elementach pary ciernej $\Theta(z,t) = T(z,t) - T_0$ przyjęto następne jednowymiarowe początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] = c_1\rho_1 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}\,,\ z > 0,\ 0 < t \le t_s\,, \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_2(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] = c_2\rho_2 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}\,,\ z < 0,\ 0 < t \le t_s\,, \tag{2.2.5}$$

$$K_2(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^-} - K_1(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = q(t)\,,\ 0 < t \le t_s\,, \tag{2.2.6}$$

$$\Theta(0^-,t) = \Theta(0^+,t)\,,\ 0 < t \le t_s\,, \tag{2.2.7}$$

$$\Theta(z,t) \to 0\,,\ |z| \to \infty\,,\ 0 < t \le t_s\,, \tag{2.2.8}$$

$$\Theta(z,0)=0\,,\ |z|<\infty\,, \tag{2.2.9}$$

gdzie zmiana przewodności cieplnej po normalnej od powierzchni tarcia ma postać (2.1.7), zaś profil czasowy gęstości mocy tarcia $q(t)$ postać (2.2.3). Uwzględniając postać funkcji (2.1.7), zagadnienie początkowo-brzegowe (2.2.4)–(2.2.9) zapisano jako:

$$\frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial z^2}+\gamma_1\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}=\frac{e^{-\gamma_1 z}}{k_{1,0}}\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial t}\,,\ z>0\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{2.2.10}$$

$$\frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial z}-\gamma_2\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}=\frac{e^{\gamma_2 z}}{k_{2,0}}\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial t}\,,\ z<0\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{2.2.11}$$

$$K_{2,0}\left.\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^-}-K_{1,0}\left.\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^+}=q(t)\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{2.2.12}$$

$$\Theta(0^-,t)=\Theta(0^+,t)\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{2.2.13}$$

$$\Theta(z,t)\to 0\,,\ |z|\to\infty\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{2.2.14}$$

$$\Theta(z,0)=0\,,\ |z|<\infty\,, \tag{2.2.15}$$

gdzie $k_{l,0}$, l = 1;2 to współczynniki dyfuzyjności cieplnej na powierzchni ciernej $z = 0$ (2.1.14).

2.2.2. Rozwiązanie dokładne

Przyrostu temperatury $\hat{\Theta}(z,t)$ odpowiadającego gęstości mocy tarcia $q(t)$ (2.2.3) poszukiwano na podstawie wzoru Duhamela [86]:

$$\hat{\Theta}(z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t q^*(t-s)\Theta(z,s)ds\,,\ 0\le t\le t_s\,, \tag{2.2.16}$$

gdzie $\Theta(z,t)$ to przyrost temperatury (2.1.63)–(2.1.67) przy stałej gęstości mocy tarcia $q(t) = q_0$. Z uwzględnieniem postaci rozwiązania (2.1.63), (2.1.64) w całce (2.2.16) otrzymano:

$$\hat{\Theta}(z,t) = \Lambda e^{-\gamma_1 z/2}\left[\frac{e^{-\gamma_1 z/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(t) + \frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_1(z,\mu_n)}{\Psi'(\mu_n)} G_n'(t)\right], z \geq 0,\, 0 \leq t \leq t_s, \quad (2.2.17)$$

$$\hat{\Theta}(z,t) = \Lambda e^{\gamma_2 z/2}\left[\frac{e^{\gamma_2 z/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(t) + \frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_2(z,\mu_n)}{\Psi'(\mu_n)} G_n'(t)\right], z \leq 0,\, 0 \leq t \leq t_s, \quad (2.2.18)$$

gdzie:

$$G_n(t) = \int_0^t q^*(t-s) e^{-p_n t} ds\,,\ n = 1;2;3;\ldots. \quad (2.2.19)$$

Pozostałe oznaczenia stałych występujących we wzorach (2.2.17)–(2.2.19) zostały zdefiniowane w podrozdziale 2.1.

Podstawiając pod znak całki (2.2.19) profil czasowy gęstości mocy $q^*(t)$ (2.2.3), uzyskano:

$$G_n(t) = G_{n,1}(t) - \frac{1}{t_s^0} G_{n,2}(t) + \frac{t_i}{t_s^0} G_{n,3}(t)\,,\ n = 1;2;3;\ldots, \quad (2.2.20)$$

gdzie:

$$G_{n,1}(t) = \int_0^t p^*(t-s) e^{-p_n t} ds\,,\ G_{n,2}(t) = \int_0^t (t-s) p^*(t-s) e^{-p_n t} ds\,,$$

$$G_{n,3}(t) = \int_0^t [p^*(t-s)]^2 e^{-p_n t} ds\,. \quad (2.2.21)$$

Obliczenie całek (2.2.21) z uwzględnieniem w nich profilu czasowego ciśnienia $p^*(t)$ (2.2.1) dało:

$$G_{n,1}(t) = p_n^{-1}(1 - e^{-p_n t}) + a_n^{-1}(e^{-p_n t} - e^{-t/t_i})\,, \quad (2.2.22)$$

$$G_{n,2}(t) = t(p_n^{-1} - a_n^{-1} e^{-t/t_i}) - p_n^{-2}(1 - e^{-p_n t}) - a_n^{-2}(e^{-p_n t} - e^{-t/t_i}), \quad (2.2.23)$$

$$G_{n,3}(t) = p_n^{-1}(1 - e^{-p_n t}) + 2a_n^{-1}(e^{-p_n t} - e^{-t/t_i}) - b_n^{-1}(e^{-p_n t} - e^{-2t/t_i}), \quad (2.2.24)$$

gdzie:

$$a_n = p_n - t_i^{-1} \neq 0\,,\ b_n = p_n - 2t_i^{-1} \neq 0\,,\ n = 1;2;3;\ldots. \quad (2.2.25)$$

Zakładając, że jeżeli dla pewnego $n = k$, $k = 1;2;\ldots$ zachodzi równość $p_k = t_i^{-1}$ ($a_k = 0,\ b_k = -t_i^{-1}$), po obliczeniu całek (2.2.21) znaleziono:

$$G_{k,1}(t) = t_i(1 - e^{-t/t_i}) - te^{-t/t_i}\,, \tag{2.2.26}$$

$$G_{k,2}(t) = t_i[t - t_i(1 - e^{-t/t_i})] - 0{,}5t^2 e^{-t/t_i}\,, \tag{2.2.27}$$

$$G_{k,3}(t) = t_i(1 - e^{-2t/t_i}) - 2te^{-t/t_i}\,. \tag{2.2.28}$$

Przy $p_k = 2t_i^{-1}$ ($a_k = t_i^{-1},\ b_k = 0$) otrzymano natomiast:

$$G_{k,1}(t) = 0{,}5t_i(1 - e^{-t/t_i})^2\,, \tag{2.2.29}$$

$$G_{k,2}(t) = 0{,}5t_i[t - 0{,}5t_i(1 - e^{-2t/t_i})] - t_i[t - t_i(1 - e^{-t/t_i})]e^{-t/t_i}\,, \tag{2.2.30}$$

$$G_{k,3}(t) = 0{,}5t_i(1 - e^{-2t/t_i}) - 2t_i(1 - e^{-t/t_i})e^{-t/t_i} + te^{-2t/t_i}\,. \tag{2.2.31}$$

Podstawienie funkcji $G_{n,i}(t)$, $i = 1;2;3$ (2.2.22)–(2.2.24) do prawej strony wzoru (2.2.20) dało:

$$\begin{aligned} G_n(t) = {} & \left(1 + \frac{t_i}{t_s^0} + \frac{1}{t_s^0 p_n}\right)\frac{(1 - e^{-p_n t})}{p_n} - \left(1 + \frac{2t_i}{t_s^0} + \frac{1}{t_s^0 a_n}\right)\frac{(e^{-t/t_i} - e^{-p_n t})}{a_n} + \\ & + \frac{t_i(e^{-2t/t_i} - e^{-p_n t})}{t_s^0 b_n} - \frac{t}{t_s^0}\left(\frac{1}{p_n} - \frac{e^{-t/t_i}}{a_n}\right),\ 0 \le t \le t_s,\ n = 1;2;\ldots\,. \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

Występująca we wzorach (2.2.17), (2.2.18) pochodna funkcji $G_n(t)$ (2.2.32), spełniającej warunki (2.2.25), ma postać:

$$\begin{aligned} G'_n(t) = {} & \left(1 + \frac{t_i}{t_s^0}\right)e^{-p_n t} + \left(1 + \frac{2t_i}{t_s^0} + \frac{1}{t_s^0 a_n}\right)\frac{(t_i^{-1}e^{-t/t_i} - p_n e^{-p_n t})}{a_n} + \\ & + \frac{1}{t_s^0 a_n}\left(1 - \frac{t}{t_i}\right)e^{-t/t_i} - \frac{t_i(2t_i^{-1}e^{-2t/t_i} - p_n e^{-p_n t})}{t_s^0 b_n} - \frac{(1 - e^{-p_n t})}{t_s^0 p_n}, \\ & 0 \le t \le t_s,\ n = 1;2;\ldots\,. \end{aligned} \tag{2.2.33}$$

Postępując w podobny sposób, ze wzorów (2.2.20), (2.2.26)–(2.2.31) wyznaczono odpowiednie pochodne:

$$G_k'(t) = \frac{t}{t_s^0}\left(3 + \frac{t_s^0}{t_i} - \frac{t}{2t_i}\right)e^{-t/t_i} + \frac{t_i}{t_s^0}\left(2e^{-2t/t_i} - e^{-t/t_i} - 1\right) \text{ przy } p_k = t_i^{-1} \qquad (2.2.34)$$

oraz

$$G_k'(t) = \left(1 + 4\frac{t_i}{t_s^0}\right)\left(e^{-t/t_i} - e^{-2/t_i}\right) - \frac{t_i}{2t_s^0}\left(1 - e^{-2t/t_i}\right) - \frac{t}{t_s^0}\left(e^{-t/t_i} + 2e^{-2t/t_i}\right) \qquad (2.2.35)$$

przy $p_k = 2t_i^{-1}$.

Pochodne (2.2.34) i (2.2.35) można otrzymać także w inny sposób, a mianowicie, wykonując kolejno przejścia graniczne $a_n \to 0$ i $b_n \to 0$ we wzorze (2.2.33). Rzeczywiście, z uwzględnieniem granic:

$$\begin{aligned}
\lim_{a_n \to 0} \frac{(t_i^{-1}e^{-t/t_i} - p_n e^{-p_n t})}{a_n} &= \lim_{a_n \to 0} \frac{(t_i^{-1} - p_n)e^{-t/t_i} + p_n(e^{-t/t_i} - e^{-p_n t})}{a_n} = \\
&= \lim_{a_n \to 0} \frac{[-a_n + t_i^{-1}(1 - e^{-a_n t})]e^{-t/t_i}}{a_n} = \left[\frac{0}{0}\right]_{\mathrm{H}} = \\
&= \lim_{a_n \to 0}(-1 + t_i^{-1}te^{-a_n t})e^{-t/t_i} = (t/t_i - 1)e^{-t/t_i},
\end{aligned} \qquad (2.2.36)$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{a_n \to 0}\left[\frac{1}{a_n}\left(1 - \frac{t}{t_i}\right)e^{-t/t_i} + \frac{1}{a_n^2}\left(\frac{1}{t_i}e^{-t/t_i} - p_n e^{-p_n t}\right)\right] = \\
&= \lim_{a_n \to 0} \frac{a_n[1 - (p_n - a_n)t]e^{-t/t_i} + [(p_n - a_n)e^{-t/t_i} - p_n e^{-p_n t}]}{a_n^2} = \\
&= \lim_{a_n \to 0} \frac{a_n^2 te^{-t/t_i} - a_n t_i^{-1}te^{-t/t_i} + t_i^{-1}e^{-t/t_i}(1 - e^{-a_n t})}{a_n^2} = \left[\frac{0}{0}\right]_{\mathrm{H}} = \\
&= te^{-t/t_i} + \lim_{a_n \to 0} \frac{t_i^{-1}te^{-t/t_i}(-1 + e^{-a_n t})}{2a_n} = te^{-t/t_i} + \left[\frac{0}{0}\right]_{\mathrm{H}} = \\
&= te^{-t/t_i} - 0{,}5t_i^{-1}t^2e^{-t/t_i} = t(1 - 0{,}5t/t_i)e^{-t/t_i},
\end{aligned} \qquad (2.2.37)$$

gdzie notacja $\left[\frac{0}{0}\right]_{\mathrm{H}}$ oznacza zastosowanie reguły de l'Hospitala, ze wzoru (2.2.33), przy $n = k$, $p_k = t_i^{-1}$, $b_k = -t_i^{-1}$, otrzymano pochodną:

$$
\begin{aligned}
G_k'(t) &= \left(1+\frac{t_i}{t_s^0}\right)e^{-t/t_i} - \frac{t_i}{t_s^0}(1-e^{-t/t_i}) + \left(1+\frac{2t_i}{t_s^0}\right)\left(\frac{t}{t_i}-1\right)e^{-t/t_i} + \\
&+ \frac{t}{t_s^0}\left(1-\frac{t}{2t_i}\right)e^{-t/t_i} + \frac{t_i}{t_s^0}(2t_i^{-1}e^{-2t/t_i} - p_n e^{-p_n t}) = \\
&= \left(1+\frac{t_i}{t_s^0}+\frac{2t}{t_s^0}-\frac{2t_i}{t_s^0}+\frac{t}{t_s^0}-\frac{t^2}{2t_i t_s^0}\right)e^{-t/t_i} + \frac{t_i}{t_s^0}\left(2e^{-2t/t_i}-e^{-t/t_i}\right) - \frac{t_i}{t_s^0} = \\
&= \frac{t}{t_s^0}\left(3+\frac{t_s^0}{t_i}-\frac{t}{2t_i}\right)e^{-t/t_i} + \frac{t_i}{t_s^0}\left(2e^{-2t/t_i}-e^{-t/t_i}-1\right),
\end{aligned}
\tag{2.2.38}
$$

która jest identyczna z pochodną (2.2.34), otrzymaną za pomocą bezpośredniego całkowania.

Postępując podobnie, z uwzględnieniem następującej granicy:

$$
\begin{aligned}
\lim_{b_n\to 0}\frac{(2t_i^{-1}e^{-2t/t_i} - p_n e^{-p_n t})}{b_n} &= \lim_{b_n\to 0}\frac{(2t_i^{-1}-p_n)e^{-2t/t_i} + p_n(e^{-2t/t_i}-e^{-p_n t})}{b_n} = \\
&= \lim_{b_n\to 0}\frac{[-b_n + 2t_i^{-1}(1-e^{-b_n t})]e^{-2/t_i}}{b_n} = \left[\frac{0}{0}\right]_{\mathrm{H}} = \\
&= \lim_{b_n\to 0}(-1+2t_i^{-1}te^{-b_n t})e^{-2/t_i} = (2t/t_i - 1)e^{-2t/t_i},
\end{aligned}
\tag{2.2.39}
$$

pochodną (2.2.33) przy $n = k$, $p_k = 2t_i^{-1}$, $a_k = t_i^{-1}$ zapisano w postaci:

$$
\begin{aligned}
G_k'(t) &= \left(1+\frac{t_i}{t_s^0}\right)e^{-2t/t_i} - \frac{t_i}{2t_s^0}\left(1-e^{-2t/t_i}\right) + \left(1+\frac{3t_i}{t_s^0}\right)\left(e^{-t/t_i}-2e^{-2t/t_i}\right) - \\
&- \frac{t_i}{t_s^0}\left(\frac{2t}{t_i}-1\right)e^{-2t/t_i} + \frac{t_i}{t_s^0}\left(1-\frac{t}{t_i}\right)e^{-t/t_i} = \\
&= \left(1+\frac{4t_i}{t_s^0}\right)e^{-t/t_i} - \left(1+\frac{4t_i}{t_s^0}\right)e^{-2t/t_i} - \frac{t_i}{2t_s^0}\left(1-e^{-2t/t_i}\right) - \frac{t}{t_s^0}\left(e^{-t/t_i}+2e^{-2t/t_i}\right) = \\
&= \left(1+4\frac{t_i}{t_s^0}\right)\left(1-e^{-t/t_i}\right)e^{-t/t_i} - \frac{t_i}{2t_s^0}\left(1-e^{-2t/t_i}\right) - \frac{t}{t_s^0}\left(1+2e^{-t/t_i}\right)e^{-t/t_i},
\end{aligned}
\tag{2.2.40}
$$

która jest tożsama z tą we wzorze (2.2.35).

Z uwzględnieniem granicy

$$\lim_{p_n \to 0} \frac{(1-e^{-p_n t})}{p_n} = \left[\frac{0}{0}\right]_{\mathrm{H}} = \lim_{p_n \to 0} t e^{-p_n t} = t \tag{2.2.41}$$

ze wzoru (2.2.33), przy $a_n = -t_i^{-1}$, $b_n = -2t_i^{-1}$, znaleziono:

$$\begin{aligned}
\lim_{p_n \to 0} G_n'(t) &= 1 + \frac{t_i}{t_s^0} - \frac{t}{t_s^0} - \left(1 + \frac{2t_i}{t_s^0} - \frac{t_i}{t_s^0}\right) e^{-t/t_i} + \frac{t_i}{t_s^0} e^{-2t/t_i} - \frac{t_i}{t_s^0}\left(1 - \frac{t}{t_i}\right) e^{-t/t_i} = \\
&= \left(1 + \frac{t_i}{t_s^0} - \frac{t}{t_s^0}\right)\left(1 - e^{-t/t_i}\right) - \frac{t_i}{t_s^0}\left(e^{-t/t_i} - e^{-2t/t_i}\right) = \\
&= \left(1 + \frac{t_i}{t_s^0} - \frac{t}{t_s^0}\right)\left(1 - e^{-t/t_i}\right) - \frac{t_i}{t_s^0}\left(1 - e^{-t/t_i}\right) e^{-t/t_i} = \\
&= \left(1 - e^{-t/t_i}\right)\left[1 - \frac{t}{t_s^0} + \frac{t_i}{t_s^0}\left(1 - e^{-t/t_i}\right)\right] = \\
&= p^*(t)\left[1 - \frac{t}{t_s^0} + \frac{t_i}{t_s^0} p^*(t)\right] = q^*(t), \quad 0 \le t \le t_s,
\end{aligned} \tag{2.2.42}$$

gdzie $p^*(t)$ i $q^*(t)$ to odpowiednio bezwymiarowe czasowe profile ciśnienia (2.2.1) i gęstości mocy tarcia (2.2.3).

Warto zauważyć, że funkcja $q^*(t)$ występuje poza znakiem sumy w tzw. zerowym składniku rozwiązania (2.2.17)–(2.2.18). W przypadku szczególnym $t_i \to 0$ ciśnienie p (2.2.1) osiąga swoją wartość nominalną p_0 natychmiastowo, prędkość V (2.2.2) podczas hamowania zmniejsza się liniowo (hamowanie ze stałym opóźnieniem), a bezwymiarowy profil czasowy gęstości ma postać:

$$q^*(t) = 1 - \frac{t}{t_s^0}, \; 0 \le t \le t_s^0, \tag{2.2.43}$$

gdzie t_s^0 – czas hamowania (2.2.2).

Korzystając z granic:

$$\lim_{t_i \to 0} e^{-t/t_i} = 0, \; \lim_{t_i \to 0} \frac{1 - t/t_i}{a_n} = \lim_{t_i \to 0} \frac{1 - t/t_i}{p_n - 1/t_i} = \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i - t}{p_n t_i - 1} = t,$$

$$\lim_{t_i \to 0} \frac{1 + 2t_i/t_s^0}{a_n} = \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i(1 + 2t_i/t_s^0)}{p_n t_i - 1} = 0, \; \lim_{t_i \to 0} \frac{1 + 2t_i/t_s^0}{a_n t_i} = \lim_{t_i \to 0} \frac{1}{p_n t_i - 1} = -1,$$

$$\lim_{t_i \to 0} \frac{1}{a_n^2} = \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i^2}{(p_n t_i - 1)^2} = 0\,, \quad \lim_{t_i \to 0} \frac{1}{a_n^2 t_i} = \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i}{(p_n t_i - 1)^2} = 0\,,$$

$$\lim_{t_i \to 0} \frac{1}{b_n} = \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i}{p_n t_i - 2} = 0\,, \quad \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i}{b_n} = \lim_{t_i \to 0} \frac{t_i^2}{p_n t_i - 2} = 0\,, \tag{2.2.44}$$

ze wzoru (2.2.33) przy $t_i \to 0$ otrzymano:

$$G_n'(t) = e^{-p_n t} - \frac{(1 - e^{-p_n t})}{t_s^0 p_n}\,. \tag{2.2.45}$$

Należy zaznaczyć, że w początkowej chwili gęstość mocy tarcia (2.2.3) $q^*(0) = 0$, zaś z zastosowania wzoru (2.2.33), z uwzględnieniem oznaczeń (2.2.25), wynika, że:

$$\begin{gathered} G_n'(0) = 1 + \frac{t_i}{t_s^0} + \left(1 + \frac{2t_i}{t_s^0} + \frac{1}{t_s^0 a_n}\right)\frac{(t_i^{-1} - p_n)}{a_n} - \frac{t_i(2t_i^{-1} - p_n)}{t_s^0 b_n} + \frac{1}{t_s^0 a_n} = \\ = 1 + \frac{t_i}{t_s^0} - 1 - \frac{2t_i}{t_s^0} - \frac{1}{t_s^0 a_n} + \frac{t_i}{t_s^0} + \frac{1}{t_s^0 a_n} = 0,\ p_n \neq t_i^{-1} \vee\ p_n \neq 2t_i^{-1}\,, n = 1; 2; \ldots\,. \end{gathered} \tag{2.2.46}$$

Podobnie, przy $n = k$, $p_k = t_i^{-1} \vee p_k = 2t_i^{-1}$, wzory (2.2.34) i (2.2.35) dają $G_k'(0) = 0$. Reasumując, oznacza to, że rozwiązanie (2.2.17), (2.2.18) spełnia warunek początkowy (2.2.9).

Trzeba podkreślić, że zachowanie warunku początkowego w przypadku hamowania ze stałym opóźnieniem jest bardziej skomplikowane, gdyż, jak wynika ze wzorów (2.2.43) i (2.2.45), $q^*(0) = 1$ i $G_n'(0) = 1$. W tym przypadku warunek początkowy (2.2.9) sprawdzano numerycznie, a w efekcie znaleziono sumy szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1(z, \mu_n)}{\Psi'(\mu_n)} = \frac{0{,}25\gamma_\varepsilon}{1 + \gamma_\varepsilon K_\varepsilon} e^{-\gamma_1 z/2}, \quad z \geq 0$$

$$\text{i} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2(z, \mu_n)}{\Psi'(\mu_n)} = \frac{0{,}25\gamma_\varepsilon}{1 + \gamma_\varepsilon K_\varepsilon} e^{\gamma_2 z/2}, \quad z \leq 0\,. \tag{2.2.47}$$

2.2.3. Postać bezwymiarowa rozwiązania

Wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\zeta = \frac{z}{a},\ \tau = \frac{k_{1,0}t}{a^2},\ \tau_s = \frac{k_{1,0}t_s}{a^2},\ \tau_s^0 = \frac{k_{1,0}t_s^0}{a^2},\ \tau_i = \frac{k_{1,0}t_i}{a^2},\ \gamma_l = \frac{\gamma_l^*}{a},\ l = 1;2,$$

$$\Theta_0 = \frac{q_0 a}{K_{1,0}},\ \Theta^* = \frac{\hat{\Theta}}{\Theta_0}, \tag{2.2.48}$$

gdzie:
$a = \max\{a_1, a_2\}$, a_l, l = 1;2 – grubości elementów pary ciernej uczestniczące w pochłanianiu ciepła.

Parametry te są ściśle związane z pojęciem efektywnej grubości (odległości od powierzchni ciernej, na której temperatura wynosi 5% maksymalnej wartości) [25]:

$$d_{l,eff} = \sqrt{3k_{l,0}t_s},\ l = 1;2. \tag{2.2.49}$$

Jeżeli wyznaczona ze wzoru (2.2.49) efektywna grubość $d_{l,eff}$ jest mniejsza od faktycznej grubości d_l elementów, to w obliczaniach przyjmuje się $a_l = d_{l,eff}$, l = 1;2, a w przypadku przeciwnym: ($d_{l,eff} \geq d_l$) $a_l = d_l$, l = 1;2.

Z uwzględnieniem oznaczeń (2.2.48) w rozwiązaniach (2.2.17), (2.2.18) oraz wzorach (2.2.1)–(2.2.3), (2.1.65), (2.2.33) bezwymiarowe zwiększenie temperatury zapisano w postaci:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*} e^{-\gamma_1^*\zeta/2} \left[\frac{e^{-\gamma_1^*\zeta/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(\tau) + \frac{4}{\gamma_\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1^*(\zeta,\mu_n)}{\Psi'(\mu_n)} G_n'(\tau) \right],$$

$$\zeta \geq 0,\ 0 \leq \tau \leq \tau_s, \tag{2.2.50}$$

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*} e^{\gamma_2^*\zeta/2} \left[\frac{e^{\gamma_2^*\zeta/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(\tau) + \frac{4}{\gamma_\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2^*(\zeta,\mu_n)}{\Psi'(\mu_n)} G_n'(\tau) \right],$$

$$\zeta \leq 0,\ 0 \leq \tau \leq \tau_s, \tag{2.2.51}$$

gdzie:

$$q^*(\tau) = p^*(\tau)\left[1 - \frac{\tau}{\tau_s^0} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0} p^*(\tau)\right],\ p^*(\tau) = 1 - e^{-\tau/\tau_i}, \tag{2.2.52}$$

$$\varphi_1^*(z,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon \mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma_1^* \zeta/2}),\ \varphi_2^*(z,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon \mu_n e^{\gamma_2^* \zeta/2}), \tag{2.2.53}$$

$$G_n'(\tau) = \left(1+\frac{\tau_i}{\tau_s^0}\right)e^{-\lambda_n \tau} - \frac{(1-e^{-\lambda_n\tau})}{\tau_s^0\lambda_n} + \left(1+\frac{2\tau_i}{\lambda_s^0}+\frac{1}{\tau_s^0\alpha_n}\right)\frac{(\tau_i^{-1}e^{-\tau/\tau_i}-\lambda_n e^{-\lambda_n\tau})}{\alpha_n} - \\ - \frac{\tau_i(2\tau_i^{-1}e^{-2\tau/\tau_i}-\lambda_n e^{-\lambda_n\tau})}{\tau_s^0\beta_n} + \frac{1}{\tau_s^0\alpha_n}\left(1-\frac{\tau}{\tau_i}\right)e^{-\tau/\tau_i}, \tag{2.2.54}$$

$$\alpha_n = \lambda_n - \tau_i^{-1} \neq 0,\ \beta_n = \lambda_n - 2\tau_i^{-1} \neq 0,\ \lambda_n = (0{,}5\gamma_1^*\mu_n)^2,\ n = 1;2;\ldots, \tag{2.2.55}$$

$$\tau_s \cong \tau_s^0 + 0{,}99\tau_i,\ \text{jeśli}\ 0 < \tau_i \le 0{,}3\tau_s^0. \tag{2.2.56}$$

Funkcja $\Psi'(\mu_n)$ określona jest wzorem (2.1.66), zaś liczby $\mu_n > 0$ to proste pierwiastki równania charakterystycznego (2.1.62). Jeżeli przy $n = k$ zachodzi równość $\lambda_k = \tau_i^{-1}$, to ze wzoru (2.2.34) otrzymujemy:

$$G_k'(\tau) = \frac{\tau}{\tau_s^0}\left(3+\frac{\tau_s^0}{\tau_i}-\frac{\tau}{2\tau_i}\right)e^{-\tau/\tau_i} + \frac{\tau_i}{\tau_s^0}\left(2e^{-2\tau/\tau_i} - e^{-\tau/\tau_i} - 1\right), \tag{2.2.57}$$

a przy $\lambda_k = 2\tau_i^{-1}$ na podstawie wzoru (2.2.35):

$$G_k'(\tau) = \left(1+4\frac{\tau_i}{\tau_s^0}\right)\left(e^{-t/t_i} - e^{-2\tau/\tau_i}\right) - \frac{\tau_i}{2\tau_s^0}\left(1-e^{-2\tau/\tau_i}\right) - \frac{\tau}{\tau_s^0}\left(e^{-\tau/\tau_i}+2e^{-2\tau/\tau_i}\right). \tag{2.2.58}$$

2.2.4. Analiza numeryczna

Na podstawie otrzymanych dokładnych rozwiązań (2.2.50)–(2.2.56) z uwzględnieniem oznaczeń (2.2.48) przeprowadzono obliczenia temperatury powstałej na skutek tarcia w układzie nakładka-tarcza podczas hamowania jednokrotnego. Materiały powierzchni ciernych elementów to dwutlenek cyrkonu (l = 1) oraz ceramika (l = 2). Wraz z oddalaniem się od tych powierzchni w głąb ciał ich współczynniki przewodności cieplnej zwiększają się eksponencjalnie zgodnie ze wzorem (2.1.7), osiągając na efektywnych głębokościach a_l, l = 1;2 wartości charakterystyczne odpowiednio dla stopów tytanu i aluminium. Właściwości termiczne wyżej wspomnianych materiałów zaprezentowano w tabeli 2.2.

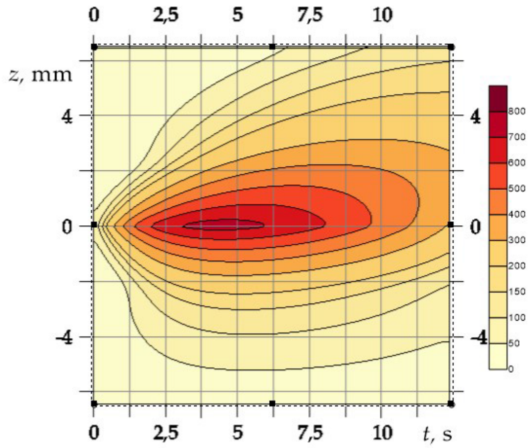
Tabela 2.2. Właściwości cieplne komponentów FGM [76, 117]

Element, l	**Materiał**	**Przewodność cieplna K, W m^{-1}K^{-1}**	**Dyfuzyjność cieplna $k \times 10^6$, m^{2}s^{-1}**
1	ZrO_2	2,09	0,86
	Ti-6Al-4V	7,5	3,16
2	ceramika	3	1,15
	stop Al	173	67,16

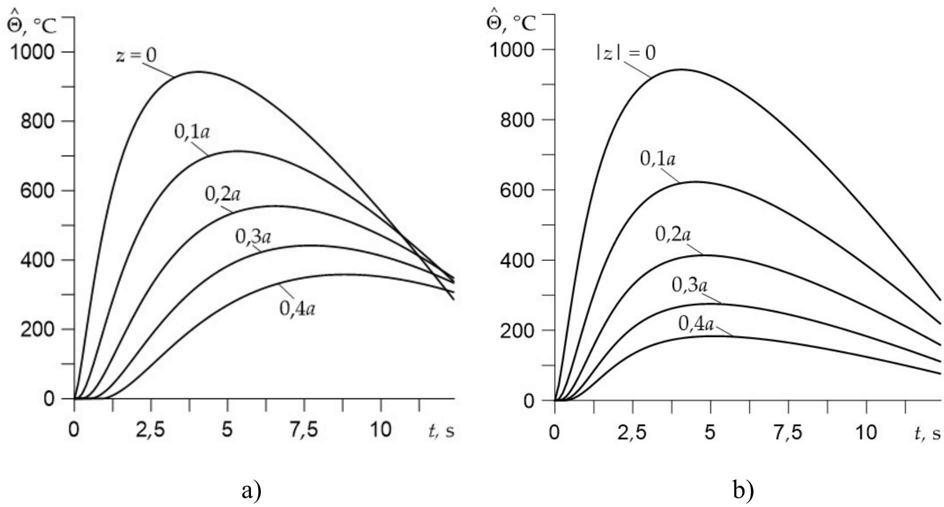
Wartości pozostałych parametrów wejściowych były następujące: $A_a = 0{,}442 \cdot 10^{-2}$ m^2, $f = 0{,}27$, $p_0 = 0{,}607$ MPa, $T_0 = 20$°C, $V_0 = 23{,}8$ m s^{-1}, $W_0 = 103{,}54$ kJ [27]. Ze wzoru (2.2.2) wyznaczono czas hamowania przy stałym opóźnieniu $t_s^0 = 12$ s, a następnie czas zatrzymania $t_s = 12{,}49$ s. Pozwoliło to na znalezienie ze wzoru (2.2.49) efektywnych głębokości przenikania ciepła $a_1 = 5{,}556$ mm i $a_2 = 6{,}435$ mm, a tym samym parametru skali $a = a_2$. Za pomocą wzoru (2.1.98) ustalono natomiast wartości bezwymiarowych parametrów gradientu $\gamma_1^* = 1{,}28$ i $\gamma_2^* = 4{,}05$.

Izotermy $\hat{\Theta}(z,t)$ w elementach pary ciernej pokazano na rysunku 2.8. Najbardziej nagrzany ($\hat{\Theta} = 800 \div 943$°C) jest wąski, mający grubość około 0,5 mm, przypowierzchniowy obszar pojawiający się po ≈ 3 s od rozpoczęcia procesu hamowania. Czas istnienia takiego obszaru wysokiej temperatury wynosi ≈ 3 s. Wraz ze zbliżaniem się do chwili zatrzymania następuje ochłodzenie powierzchni ciernych obu elementów. Przy zatrzymaniu odległość od powierzchni ciernej, na której występuje zauważalna temperatura, jest większa w tarczy niż w nakładce.

Ewolucję przyrostu temperatury $\hat{\Theta}(z,t)$ elementów ciernych podczas hamowania na wybranych odległościach od powierzchni kontaktu zaprezentowano natomiast na rysunku 2.9. Wraz z rozpoczęciem hamowania temperatura powierzchni ciernych $z = 0$ szybko zwiększa się wraz z upływem czasu, osiągając maksymalną wartość $\hat{\Theta}_{\max} = 943$°C w chwili $t_{\max} = 5$ s, po czym następuje okres ochłodzenia tych powierzchni, trwający aż do zatrzymania. Podobny kształt mają również profile czasowe temperatury wewnątrz tarczy i nakładki. W tarczy widoczny jest przy tym znany efekt „opóźnienia", polegający na tym, że czas osiągnięcia maksymalnej temperatury zwiększa się wraz z oddalaniem od powierzchni kontaktu, podczas gdy w nakładce efekt ten jest praktycznie niezauważalny. Na uwagę zasługuje również proces szybkiego chłodzenia powierzchni ciernej tarczy po osiągnięciu $\hat{\Theta}_{\max}$ – w chwili zatrzymania temperatura wewnątrz tarczy jest wyższa niż na jej powierzchni. W nakładce efekt ten natomiast nie występuje.

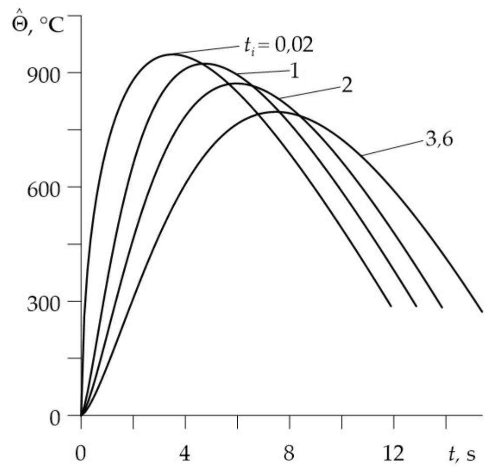


Rysunek 2.8. Izotermy $\hat{\Theta}(z,t)$ przy czasie narastania ciśnienia kontaktowego t_i = 0,5 s

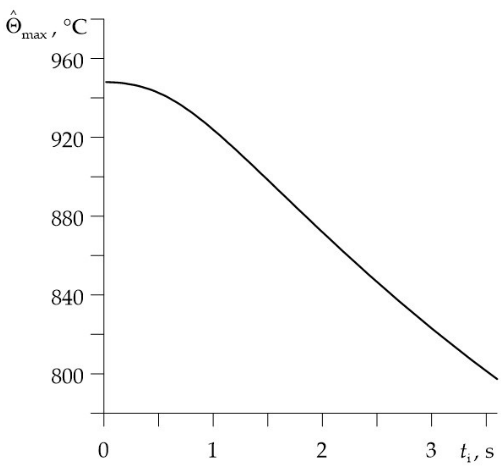


Rysunek 2.9. Ewolucje przyrostu temperatury $\hat{\Theta}(z,t)$ w wybranych odległościach $|z|$ od powierzchni kontaktu podczas hamowania przy czasie narastania ciśnienia t_i = 0,5 s: a) tarcza, b) nakładka

Zmianę temperatury powierzchni ciernych tarczy i nakładki w czasie hamowania przy różnych wartościach czasu narastania ciśnienia kontaktowego pokazano na rysunku 2.10. Zwiększenie czasu osiągnięcia wartości nominalnej ciśnienia powoduje obniżenie temperatury maksymalnej powierzchni kontaktu przy jednoczesnym zwiększeniu czasu hamowania. Efekt obniżenia maksymalnego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}_{\max} = \hat{\Theta}(0,t_{\max})$ od czasu narastania ciśnienia zaprezentowano na rysunku 2.10.

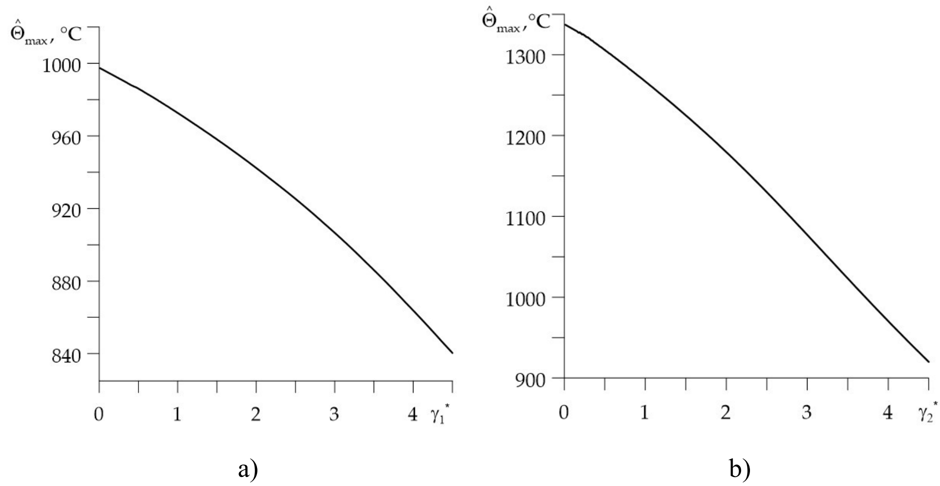


Rysunek 2.10. Ewolucje przyrostu temperatury $\hat{\Theta}(z,t)$ podczas hamowania dla wybranych wartości czasu narastania ciśnienia kontaktowego t_i



Rysunek 2.11. Zależność maksymalnego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}_{max}$ od czasu narastania ciśnienia kontaktowego t_i

Wpływ bezwymiarowych parametrów gradientu materiałów γ_l^*, l = 1;2 na temperaturę maksymalną $\hat{\Theta}_{max}$ zaprezentowano na rysunku 2.12. Można zauważyć, że zwiększenie w wybranych FGM udziału materiału rdzenia (Ti-6Al-4V dla tarczy oraz stopu aluminium dla nakładki) powoduje obniżenie maksymalnej temperatury układu hamulcowego. Największy spadek $\hat{\Theta}_{max}$ ma miejsce przy zwiększeniu gradientu γ_2^* materiału nakładki (rysunek 2.2.6b), natomiast najwyższe wartości $\hat{\Theta}_{max}$ są osiągane w przypadku pary ciernej, której jeden z elementów wykonano całkowicie z materiału jednorodnego. Są to dwutlenek cyrkonu ZrO_2 ($\gamma_1^* = 0$) w przypadku tarczy ($\hat{\Theta}_{max} = 995°C$, rysunek 2.2.6a) oraz ceramika ($\gamma_2^* = 0$) dla nakładki ($\hat{\Theta}_{max} = 1340°C$, rysunek 2.2.6b).



Rysunek 2.12. Zależność maksymalnego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}_{max}$ dla $t_i = 0{,}5$ s od bezwymiarowego parametru gradientu: a) γ_1^* przy $\gamma_2^* = 4{,}05$; b) γ_2^* przy $\gamma_1^* = 1{,}28$

2.2.5. Podsumowanie

Przedstawione rezultaty stanowią kontynuację badań z podrozdziału 2.1, w którym w postaci bezwymiarowej przeprowadzono jakościową analizę porównawczą wpływu gradientowości materiału na temperaturę podczas tarcia z równomiernym poślizgiem. W niniejszym podrozdziale zaproponowano natomiast model matematyczny do wyznaczenia pola temperatury w układzie nakładka-tarcza podczas hamowania jednokrotnego. Istotną cechą tego modelu, różniącą go od innych powszechnie znanych, było uwzględnienie w nim profilu czasowego ciśnienia i prędkości dla elementów ciernych wykonanych z funkcyjnie gradientowych materiałów o eksponencjalnie zmieniającym się na grubości współczynniku przewodnictwa cieplnego. Zaproponowany model pozwala na szybką ocenę trybu temperaturowego hamulca w zależności od parametrów operacyjnych, w szczególności takich, jak czas narastania ciśnienia oraz wielkość gradientu wybranych materiałów nakładki i tarczy. Obliczenia przeprowadzono w postaci wymiarowej. Powierzchnie cierne materiałów były ceramiczne, a ich rdzenie stanowiły stopy tytanu (tarcza) i aluminium (nakładka). Ustalono, że zwiększenie czasu narastania ciśnienia powoduje znaczne wydłużenie czasu zatrzymania, a tym samym drogi hamowania. Maksymalna temperatura osiągana na powierzchniach ciernych zmniejsza się natomiast przy zwiększeniu parametrów gradientu materiałów.

Należy zaznaczyć, że stosowanie zaproponowanego modelu ma pewne ograniczenia wynikające z istniejących założeń upraszczających oraz przyjętego tylko jednego eksponencjalnego typu zmiany przewodności cieplnej stosowanych materiałów. W dalszych etapach badań rozwiązania otrzymane w podrozdziałach 2.1 i 2.2 zostaną zaadaptowane do procesu wyznaczania temperatury układu ciernego wykonanego z wrażliwych termicznie FGM.

Zaprezentowane w niniejszym podrozdziale wyniki opublikowano w artykule [154].

2.3. Wpływ wrażliwości termicznej materiałów składowych FGM na temperaturę

2.3.1. Sformułowanie zagadnienia

W niniejszym podrozdziale rozpatrzono proces nagrzewania tarciowego układu hamulcowego nakładka-tarcza. W celu wyznaczenia temperatury takiego układu zmodyfikowany został matematyczny model z podrozdziału 2.2. Główne założenia tego modelu zaprezentowano w podrozdziale 2.1.1. Dodatkowym czynnikiem, który został uwzględniony w tym podrozdziale, jest wrażliwość termiczna materiałów składowych FGM.

Rozpatrzono także proces nagrzewania tarciowego podczas hamowania ze stałym opóźnieniem. Założono, że elementy cierne układu wykonano z dwuskładnikowych, wrażliwych termicznie, funkcyjnie gradientowych materiałów w ten sposób, że ich powierzchnie cierne są zrobione z materiałów o niskiej przewodności cieplnej (metaloceramiki itp.), natomiast materiały rdzeni charakteryzują się wysoką zdatnością do przewodzenia ciepła (stopy tytanu, aluminium itp.). Do wyznaczenia temperatury układu nakładka-tarcza przyjęto schemat poślizgu z liniowo zmniejszającą się w czasie gęstością mocy tarcia dwóch półprzestrzeni: $z \geq 0$ (tarcza) i $z \leq 0$ (nakładka) (rysunek 2.7). Na skutek nagrzewania tarciowego w elementach pary ciernej powstaje nieustalone pole temperatury $T = T(z,t)$.

Właściwości cieplno-fizyczne pary ciernej są zaś funkcjami temperatury T :

$$K_{l,m} = K_{l,m}(T), \quad c_{l,m} = c_{l,m}(T), \quad \rho_{l,m} = \rho_{l,m}(T), \tag{2.3.1}$$

gdzie $K_{l,m}$, $c_{l,m}$, $\rho_{l,m}$ – odpowiednio przewodność cieplna, ciepło właściwe i gęstość pierwszej (m = 1) i drugiej (m = 2) składowej materiałów tarczy (l = 1) i nakładki (l = 2).

Odpowiednie wartości przy początkowej temperaturze układu $T = T_0$ oznaczono następująco:

$$K_{l,m}^{(0)} \equiv K_{l,m}(T_0),\ \ c_{l,m}^{(0)} \equiv c_{l,m}(T_0),\ \ \rho_{l,m}^{(0)} \equiv \rho_{l,m}(T_0)\,. \tag{2.3.2}$$

Efektywne wartości ciepła właściwego $c_l^{(0)}$ i gęstości $\rho_l^{(0)}$ poszczególnych elementów wyznaczono według prawa mieszanin:

$$c_l^{(0)} = c_{l,2}^{(0)} V_{l,2} + (1 - V_{l,2}) c_{l,1}^{(0)}\,,\ \rho_l^{(0)} = \rho_{l,2}^{(0)} V_{l,2} + (1 - V_{l,2}) \rho_{l,1}^{(0)}\,, \tag{2.3.3}$$

gdzie $V_{l,2}$ – udział objętościowy materiału, $l = 1;2$.

Przewodności cieplne K_l, $l = 1;2$ materiałów FGM w temperaturze początkowej otrzymano ze wzoru:

$$K_1(z) = K_{1,1}^{(0)} e^{\gamma_1 z}\,,\ 0 \le z \le a\,,\ K_2(z) = K_{2,1}^{(0)} e^{-\gamma_2 z}\,,\ -a \le z \le 0\,, \tag{2.3.4}$$

gdzie:

$$\gamma_l = \frac{\gamma_l^*}{a}\,,\ \gamma_l^* = \ln\left(\frac{K_{l,2}^{(0)}}{K_{l,1}^{(0)}}\right), \tag{2.3.5}$$

$$a = \max\{a_1, a_2\}\,,\ a_l = \sqrt{3 k_l^{(0)} t_s}\,, \tag{2.3.6}$$

$$k_l^{(0)} = \frac{K_{l,1}^{(0)}}{c_l^{(0)} \rho_l^{(0)}}\,, \tag{2.3.7}$$

przy czym t_s to czas zatrzymania, a parametry a_l, $l = 1;2$, (2.3.6) – grubości przypowierzchniowych warstw aktywnie uczestniczących w pochłanianiu ciepła tarciowego odpowiednio w tarczy i nakładce (tzw. efektywne głębokości nagrzewania zdefiniowane w podrozdziale 2.2).

Przy hamowaniu ze stałym opóźnieniem gęstość mocy tarcia zmniejsza się liniowo od wartości nominalnej q_0 do zera [145]:

$$q(t) = q_0 q^*(t)\,,\ q_0 = f p_0 V_0\,,\ q^*(t) = 1 - t\,t_s^{-1}\,,\ 0 \le t \le t_s\,, \tag{2.3.8}$$

$$t_s = W_0 Q_0^{-1}\,,\ Q_0 = q_0 A_a\,,\ A_a = 0{,}5\beta(R_e^2 - R_i^2)\,, \tag{2.3.9}$$

gdzie:
A_a – pole nominalnego obszaru kontaktu nakładki z tarczą,
f – współczynnik tarcia,
p_0 – wartość nominalna ciśnienia,
Q_0 – nominalna moc tarcia,
$0 \le \beta \le 2\pi$ – kąt rozwarcia,
R_i i R_e – odpowiednio wewnętrzny i zewnętrzny promień nakładki,
V_0 – początkowa prędkość,
zaś W_0 – początkowa energia kinetyczna układu, która równa jest całkowitej pracy tarcia ze względu na pominięcie zużycia powierzchni ciernych.

2.3.2. Schemat obliczeniowy

Rozwiązanie takiego zagadnienia otrzymano w podrozdziale 2.2 w postaci (2.2.50)–(2.2.56). Jak widać, kluczowym elementem zaproponowanego podejścia jest dokładne rozwiązanie liniowego zagadnienia cieplnego tarcia podczas hamowania ze stałym opóźnieniem. W przypadku FGM takie rozwiązanie dla przyjętego wyżej schematu dwóch ślizgających się półprzestrzeni przy gęstości mocy tarcia $q(t)$ (2.3.8), (2.3.9) można zapisać w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*} e^{-\gamma_1^*\zeta/2} \left[\frac{e^{-\gamma_1^*\zeta/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(\tau) + \frac{4}{\gamma_\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_1^*(\zeta,\mu_n)}{\Psi(\mu_n)} G_n(\tau) \right], \quad (2.3.10)$$

$\zeta \ge 0, 0 \le \tau \le \tau_s$,

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*} e^{\gamma_2^*\zeta/2} \left[\frac{e^{\gamma_2^*\zeta/2}}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(\tau) + \frac{4}{\gamma_\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_2^*(\zeta,\mu_n)}{\Psi(\mu_n)} G_n(\tau) \right], \quad (2.3.11)$$

$\zeta \le 0, 0 \le \tau \le \tau_s$,

gdzie:

$$\varphi_1^*(\zeta,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon \mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma_1^*\zeta/2}),\ \varphi_2(\zeta,\mu_n) = \mathrm{J}_1(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon \mu_n e^{\gamma_2^*\zeta/2}), \quad (2.3.12)$$

$$\Psi(\mu_n) = \mu_n^2[(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)\mathrm{J}_0(\mu_n)\mathrm{J}_0(\gamma_\varepsilon \mu_n) - (\gamma_\varepsilon + K_\varepsilon)\mathrm{J}_1(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon \mu_n)], \quad (2.3.13)$$

$$G_n(\tau) = e^{-\lambda_n \tau} - \frac{1}{\lambda_n \tau_s}(1 - e^{-\lambda_n \tau}),\ \lambda_n = \frac{1}{4}(\gamma_1^* \mu_n)^2, \quad (2.3.14)$$

$$K_\varepsilon = K^*(k^*)^{-1/2},\ \gamma_\varepsilon = \gamma^*(k^*)^{1/2}, \quad (2.3.15)$$

$$\Lambda = \frac{q_0}{\gamma_2 K_{2,1}^{(0)}}\,,\ K^* = \frac{K_{1,1}^{(0)}}{K_{2,1}^{(0)}}\,,\ k^* = \frac{k_1^{(0)}}{k_2^{(0)}}\,,\ \gamma^* = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\,, \tag{2.3.16}$$

$$\zeta = \frac{z}{a}\,,\ \tau = \frac{k_1^{(0)} t}{a^2}\,,\ \tau_s = \frac{k_1^{(0)} t_s}{a^2}\,,\ \Theta_0 = \frac{q_0 a}{K_{1,1}^{(0)}}\,,\ \Theta^* = \frac{\Theta}{\Theta_0}\,, \tag{2.3.17}$$

a $\mu_n > 0$, $n = 1;2;3;\ldots$ to pierwiastki funkcyjnego równania:

$$\mathrm{J}_0(\gamma_\varepsilon \mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n) + K_\varepsilon \mathrm{J}_0(\mu_n)\mathrm{J}_1(\gamma_\varepsilon \mu_n) = 0\,, \tag{2.3.18}$$

gdzie $J_k(x)$ to funkcje Bessela pierwszego rodzaju rzędu $k = 0;1$ [126].

Podstawiając $\zeta = 0$ we wzorach (2.3.10)–(2.3.12), otrzymano bezwymiarowy przyrost temperatury powierzchni ciernych:

$$\Theta^*(\tau) \equiv \Theta^*(0^\pm, \tau) = \frac{K_0^*}{\gamma_2^*}\left[\frac{q^*(\tau)}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} + \frac{4}{\gamma_\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\varphi}(\mu_n)}{\Psi(\mu_n)}G_n(\tau)\right],\ 0 \le \tau \le \tau_s\,. \tag{2.3.19}$$

Na podstawie prawa Fouriera zdefiniowano intensywności strumieni ciepła skierowanych wzdłuż normalnej od powierzchni kontaktu $z = 0$ do wnętrz elementów pary ciernej:

$$q_l(t) = (-1)^l K_{l,1}^{(0)} \left.\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^\pm},\ 0 \le t \le t_s\,,\ l = 1;2\,. \tag{2.3.20}$$

Z uwzględnieniem oznaczeń (2.3.17) bezwymiarowe intensywności strumieni ciepła $q_l^* = q_l q_0^{-1}, l = 1;2$ zapisano w postaci:

$$q_1^*(\tau) = -\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^+},\ q_2^*(\tau) = \left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{K_0^*\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^-},\ 0 \le \tau \le \tau_s\,. \tag{2.3.21}$$

Po zróżniczkowaniu rozwiązania (2.3.10)–(2.3.12) względem zmiennej ξ, a następnie podstawieniu otrzymanych pochodnych do prawej części wzorów (2.3.21) znaleziono bezwymiarowe intensywności strumieni ciepła:

$$q_1^*(\tau) = \frac{\gamma_\varepsilon K_\varepsilon}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(\tau) + 2\gamma_\varepsilon K_\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\varphi}(\mu_n)}{\widetilde{\Psi}(\mu_n)} G_n(\tau),\ 0 \le \tau \le \tau_s\,, \tag{2.3.22}$$

$$q_2^*(\tau) = \frac{1}{(1+\gamma_\varepsilon K_\varepsilon)} q^*(\tau) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{\varphi}(\mu_n)}{\widetilde{\Psi}(\mu_n)} G_n(\tau),\ 0 \le \tau \le \tau_s\,, \tag{2.3.23}$$

gdzie:

$$\tilde{\varphi}(\mu_n) = \mathrm{J}_0(\gamma_\varepsilon \mu_n)\mathrm{J}_1(\mu_n)\,,\ \tilde{\Psi}(\mu_n) = \mu_n^{-1}\Psi(\mu_n)\,. \tag{2.3.24}$$

Funkcje $\Psi(\mu_n)$ i $G_n(\tau)$ wyznaczono zaś odpowiednio ze wzorów (2.3.13) i (2.3.14).

Należy zaznaczyć, że w przypadku jednorodnych ($\gamma_i \to 0$, i = 1;2) materiałów tarczy i nakładki bezwymiarowe przyrosty temperatury podczas hamowania ze stałym opóźnieniem mają postać [134]:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{2K^*\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\left\{\mathrm{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{\tau}{\tau_s}\left[\left(1+\frac{\zeta^2}{6\tau}\right)\mathrm{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\zeta^2}{4\tau}}\right]\right\},$$

$$\zeta \geq 0\,,\ 0 \leq \tau \leq \tau_s\,, \tag{2.3.25}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{2K^*\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\left\{\mathrm{ierfc}\left(-\frac{\zeta}{2}\sqrt{\frac{k_0^*}{\tau}}\right) - \frac{\tau}{\tau_s}\left[\left(1+\frac{\zeta^2 k_0^*}{6\tau}\right)\mathrm{ierfc}\left(-\frac{\zeta}{2}\sqrt{\frac{k_0^*}{\tau}}\right) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\zeta^2 k_0^*}{4\tau}}\right]\right\},$$

$$\zeta \leq 0\,,\ 0 \leq \tau \leq \tau_s\,, \tag{2.3.26}$$

gdzie $\mathrm{ierfc}(x) = \pi^{-1/2}e^{-x^2} - x\,\mathrm{erfc}(x)$, $\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x)$, $\mathrm{erf}(x)$ to funkcja błędu Gaussa.

Przy $\zeta = 0$ ze wzorów (2.3.25) i (2.3.26) otrzymano znane rozwiązanie Fazekasa [36]:

$$\Theta^*(\tau) = \frac{2K^*}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left(1 - \frac{2\tau}{3\tau_s}\right),\ 0 \leq \tau \leq \tau_s\,. \tag{2.3.27}$$

Przy zadanych parametrach wejściowych rozwiązania (2.3.10)–(2.3.18) pozwalają znaleźć przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury w nakładce i tarczy wykonanych z niewrażliwych termicznie FGM. Uwzględnienie wrażliwości termicznej materiałów przy wyznaczaniu temperatury układu hamulcowego za pomocą wspomnianych wyżej rozwiązań będzie polegało na zastąpieniu w nich przewodności cieplnej $K_{l,m}^{(0)}$, ciepła właściwego $c_{l,m}^{(0)}$ i gęstości $\rho_{l,m}^{(0)}$ w temperaturze początkowej T_0 odpowiednimi wartościami: $K_{l,m}^{(\vartheta_l)}$, $c_{l,m}^{(\vartheta_l)}$ i $\rho_{l,m}^{(\vartheta_l)}$, znalezionymi z zależności (2.3.1), (2.3.2), przy uśrednionej w czasie hamowania temperaturze objętościowej nakładki i tarczy [25, 35]:

$$\vartheta_l = T_0 + \hat{\vartheta}_l\,,\ l = 1;2\,, \tag{2.3.28}$$

gdzie:

$$\hat{\vartheta}_l = \frac{2\alpha_l W_0}{3G_l c_l^{(0)}}, \; G_l = A_a a_l \rho_l^{(0)}, \tag{2.3.29}$$

przy czym:

a_l – efektywne głębokości przenikania ciepła (2.3.6),

$\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, $0 \le \alpha \le 1$ – współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła.

Na podstawie zależności (2.3.22)–(2.3.24) współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła wyznaczono ze wzoru:

$$\alpha \equiv \frac{q_1(t)}{q(t)} \approx \frac{\gamma_\varepsilon K_\varepsilon}{1 + \gamma_\varepsilon K_\varepsilon}, \tag{2.3.30}$$

gdzie stałe γ_ε i K_ε określone są wzorami (2.3.15).

Należy zaznaczyć, że w rozpatrywanym zagadnieniu dotyczącym uwzględnienia wrażliwości termicznej materiałów składowych FGM współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła występuje we wzorze (2.3.29) przy wyznaczeniu temperatury objętościowej nakładki i tarczy. Nie znaleziono jednak w literaturze naukowej wzorów empirycznych do obliczenia tego parametru w przypadku FGM. Z tego powodu została podjęta próba znalezienia go na mocy definicji (2.3.30), odrzucając przy tym wpływ członu związanego z sumą (2.3.22). Uwzględnienie wspomnianego członu dawałoby zmienny w czasie współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła, a co za tym idzie, zmianę w czasie temperatury objętościowej nakładki i tarczy. Uzasadnieniem jest również fakt, że przyjęta postać (2.3.30) współczynnika rozdzielenia strumieni ciepła jest podobna do wzoru Charrona (3.2.64), powszechnie wykorzystywanego w przypadku materiałów jednorodnych.

2.3.3. Analiza numeryczna

Obliczenia przeprowadzono dla pary ciernej, której jeden element wykonano z tlenku glinu Al_2O_3 (powierzchnia cierna) oraz miedzi Cu (rdzeń), zaś powierzchnię cierną i rdzeń drugiego elementu wykonano odpowiednio z dwutlenku cyrkonu ZrO_2 i tytanowego stopu Ti-6Al-4V. Zależności właściwości tych materiałów od temperatury są następujące:

Al_2O_3 [5, 19, 56]:

$$K_{1,1}(T) = 39{,}717 - 0{,}130\mathrm{T} + 4{,}463 \cdot 10^{-4} T^2 - 2{,}836 \cdot 10^{-7} T^3 + 1{,}941 \cdot 10^{-10} T^4, \quad (2.3.31)$$

$$c_{1,1}(T) = 680{,}72 + 2{,}432T - 0{,}53 \cdot 10^{-2} T^2 + 0{,}6 \cdot 10^{-5} T^3 + \\ - 0{,}4 \cdot 10^{-8} T^4 + 10^{-12} T^5, \quad (2.3.32)$$

$$\rho_{1,1}(T) = 3992{,}2 - 0{,}062T - 0{,}6 \cdot 10^{-4} T^2 + 0{,}4 \cdot 10^{-7} T^3 - 0{,}9 \cdot 10^{-11} T^4. \quad (2.3.33)$$

Cu [51, 103]:

$$K_{1,2}(T) = 31{,}985 + 0{,}0099\mathrm{T} - 0{,}1 \cdot 10^{-5} T^2, \quad (2.3.34)$$

$$c_{1,2}(T) = 523{,}3 + 1{,}4726T - 0{,}0024T^2 + 0{,}2 \cdot 10^{-5} T^3 - 0{,}5 \cdot 10^{-9} T^4, \quad (2.3.35)$$

$$\rho_{1,2}(T) = 492{,}45 - 0{,}01T - 0{,}1 \cdot 10^{-5} T^2. \quad (2.3.36)$$

ZrO_2 [56, 88, 116]:

$$K_{2,1}(T) = 1{,}9365 + 0{,}7 \cdot 10^{-4} T + 0{,}5 \cdot 10^{-6} T^2 - 0{,}2 \cdot 10^{-9} T^3, \quad (2.3.37)$$

$$c_{2,1}(T) = 437{,}96 + 0{,}7767T - 0{,}17 \cdot 10^{-2} T^2, \quad (2.3.38)$$

$$\rho_{2,1}(T) = 6104{,}6 - 0{,}1212T - 0{,}4 \cdot 10^{-4} T^2 + 0{,}3 \cdot 10^{-7} T^3 - 0{,}1 \cdot 10^{-10} T^4. \quad (2.3.39)$$

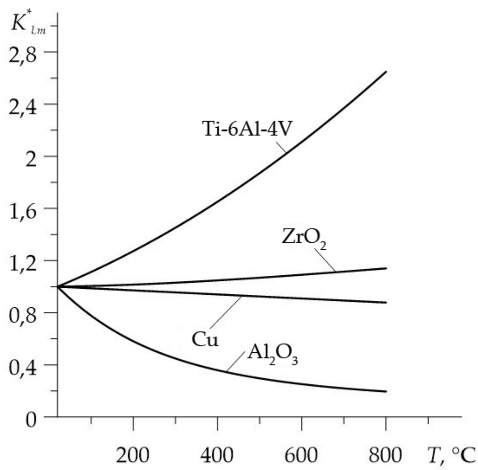
Ti-6Al-4V [23, 30]:

$$K_{2,2}(T) = 6{,}6926 + 8{,}9177 \cdot 10^{-3} T + 6{,}8432 \cdot 10^{-6} T^2, \quad (2.3.40)$$

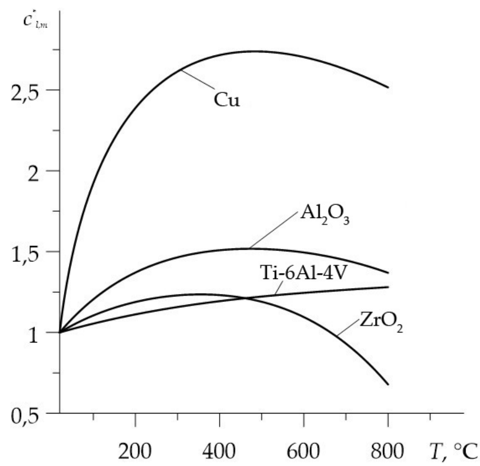
$$c_{2,2}(T) = 529{,}9316 + 0{,}4154T - 4{,}01646 \cdot 10^{-4} T^2 + 1{,}6364 \cdot 10^{-7} T^3, \quad (2.3.41)$$

$$\rho_{2,2}(T) = 4434 - 0{,}1088T - 0{,}8 \cdot 10^{-4} T^2 + 10^{-7} T^3 - 0{,}6 \cdot 10^{-10} T^4. \quad (2.3.42)$$

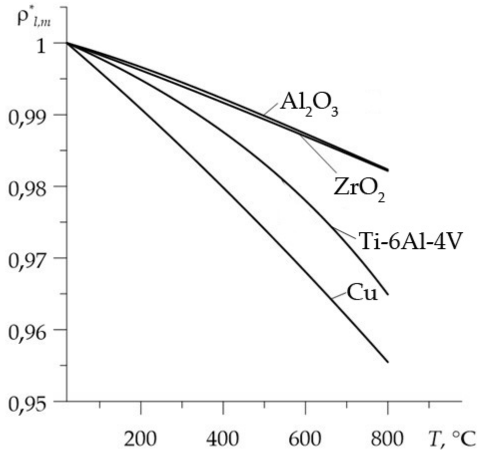
Wykresy bezwymiarowych funkcji $K^*_{l,m} = K_{l,m}(T) / K^{(0)}_{l,m}$, $c^*_{l,m} = c_{l,m}(T) / c^{(0)}_{l,m}$ oraz $\rho^*_{l,m} = \rho_{l,m}(T) / \rho^{(0)}_{l,m}$ pokazano odpowiednio na rysunkach 2.3.1–2.3.3.



Rysunek 2.13. Bezwymiarowa zależność przewodności cieplnej $K^*_{l,m}$ l, m = 1;2 od temperatury T



Rysunek 2.14. Bezwymiarowa zależność ciepła właściwego $c^*_{l,m}$ l, m = 1;2 od temperatury T



Rysunek 2.15. Bezwymiarowa zależność gęstości $\rho^*_{l,m}$ l, m = 1;2 od temperatury T

Obliczenia przeprowadzono według następującego schematu:

1. Na początku zadano wartości parametrów wejściowych (tabela 2.3.1), a następnie ze wzorów (2.3.8) i (2.3.9) obliczono pole nominalnego obszaru kontaktu A_a = 0,0022 m^2, gęstość q_0 = 3,87 MW m^{-2}, moc tarcia Q_0 = 8510 W oraz czas zatrzymania t_s = 12,1 s.
2. Za pomocą zależności (2.3.31)–(2.3.42) ustalono właściwości materiałów $K^{(0)}_{l,m}$, $c^{(0)}_{l,m}$ i $\rho^{(0)}_{l,m}$, l, m = 1;2 przy temperaturze początkowej T_0 = 20°C (tabela 2.4).
3. Ze wzorów (2.3.3) i (2.3.5)–(2.3.7) wyznaczono efektywne wartości ciepła właściwego $c^{(0)}_l$, gęstości $\rho^{(0)}_l$, dyfuzyjności cieplnej $k^{(0)}_l$, efektywne głębokości nagrzewania a_l oraz bezwymiarowe parametry gradientu materiałów γ^*_l, l = 1;2. Ze wzorów (2.3.15) wyznaczono bezwymiarowe parametry K_ε i γ_ε, a następnie ze wzorów (2.3.29) i (2.3.30) wagę G_l i współczynniki rozdzielenia strumieni ciepła α_l, l =1;2 (tabela 2.5).
4. Ze wzorów (2.3.28) i (2.3.29) znaleziono objętościową temperaturę $\vartheta^{(0)}_1$ = 471,97°C tarczy i $\vartheta^{(0)}_2$ = 260,92°C nakładki.
5. Z zależności (2.3.31)–(2.3.42) wyznaczono odpowiadające temperaturze objętościowej $\vartheta^{(0)}_l$ wartości $K^{(\vartheta^{(0)}_l)}_{l,m}$, $c^{(\vartheta^{(0)}_l)}_{l,m}$, $\rho^{(\vartheta^{(0)}_l)}_{l,m}$ i l, m = 1;2.
6. Następnie kroki 3–5 powtórzono, w efekcie ustalając wartości temperatury objętościowej $\vartheta^{(1)}_l$ = 624,93°C i $\vartheta^{(1)}_2$ = 292,98°C uwzględniające wrażliwość termiczną materiałów.

7. Ze wzoru $\vartheta_l = 0{,}5(\vartheta_l^{(0)} + \vartheta_l^{(1)})$, l = 1;2 znaleziono uśrednione wartości temperatury objętościowej ϑ_1 = 548,45°C i ϑ_2 = 267,95°C.
8. Z zależności (2.3.31)–(2.3.42) wyznaczono odpowiadające temperaturze objętościowej ϑ_l wartości $K_{l,m}^{(\vartheta_l)}$, $c_{l,m}^{(\vartheta_l)}$, $\rho_{l,m}^{(\vartheta_l)}$, l, m = 1;2 (tabela 2.6) oraz pozostałe parametry niezbędne do przeprowadzenia obliczeń (tabela 2.7).
9. Wyznaczono pole bezwymiarowej temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (24)–(27), jej ewolucję $\Theta^*(\tau)$ (2.3.28) oraz profile czasowe bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła $q_l^*(\tau)$, l = 1;2 (2.3.31)–(2.3.33).

Tabela 2.3. Parametry wejściowe [27]

Współczynnik tarcia f	0,27
Nominalne ciśnienie p_0, MPa	0,602
Początkowa prędkość poślizgu V_0, ms^{-1}	23,8
Początkowa energia kinetyczna W_0, kJ	103,54
Zewnętrzny promień nakładki R_e, mm	37,5
Wewnętrzny promień nakładki R_i, mm	26,5
Temperatura początkowa T_0, °C	20

Tabela 2.4. Właściwości materiałów w temperaturze początkowej T_0

Numer elementu	$l = 1$		$l = 2$	
Numer materiału	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$
Nazwa materiału	Al_2O_3	Cu	ZrO_2	Ti-6Al-4V
Przewodność cieplna $K_{l,m}^{(0)}$, $\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$	37,24	402,65	1,94	6,87
Ciepło właściwe $c_{l,m}^{(0)}$, $\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	727,29	147,35	452,83	538,08
Gęstość $\rho_{l,m}^{(0)}$, $\mathrm{kgm^{-3}}$	3990,92	8947,92	6102,16	4431,79

Tabela 2.5. Parametry obliczone w temperaturze początkowej T_0

Numer elementu	$l = 1$	$l = 2$
Efektywne ciepło właściwe $c_l^{(0)}, \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	437,3	495,5
Efektywna gęstość $\rho_l^{(0)}, \mathrm{kgm^{-3}}$	6469,4	5267
Efektywna dyfuzyjność cieplna $k_l^{(0)} \mathrm{x} 10^6, \mathrm{mm^2\,s^{-1}}$	13,2	0,743
Parametr gradientu γ_l^*	2,381	1,266
Efektywna głębokość nagrzewania a_l, mm	21,854	5,193
Masa elementu G_l, kg	0,3127	0,0605
Współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła α_l	0,896	0,104

Tabela 2.6. Właściwości materiałowe w temperaturze objętościowej ϑ_l, $l = 1;2$

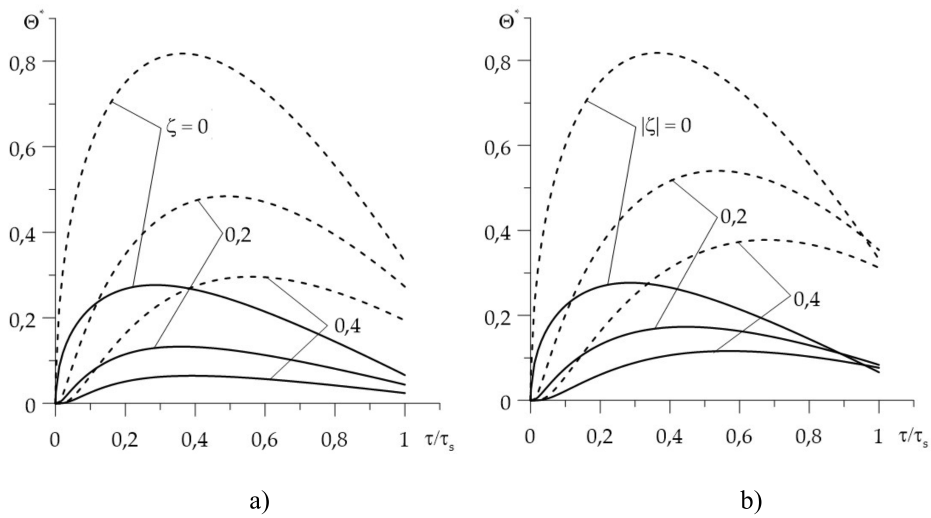
Numer elementu	$l = 1$		$l = 2$	
Numer materiału	$m = 1$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 2$
Nazwa materiału	Al_2O_3	Cu	ZrO_2	Ti-6Al-4V
Przewodność cieplna $K_{l,m}^{(0)}, \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$	10,19	367,15	1,99	9,57
Ciepło właściwe $c_{l,m}^{(0)}, \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	1097,93	401,89	552,67	615,44
Gęstość $\rho_{l,m}^{(0)}, \mathrm{kgm^{-3}}$	3945,59	8690,2	6069,84	4399,06

Tabela 2.7. Parametry obliczone w temperaturze objętościowej ϑ_l, $l = 1;2$

Numer elementu	$l = 1$	$l = 2$
Efektywne ciepło właściwe $c_l^{(0)}, \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	749,7	584,9
Efektywna gęstość $\rho_l^{(0)}, \mathrm{kgm^{-3}}$	6317,2	5233,8
Efektywna dyfuzyjność cieplna $k_l^{(0)} \mathrm{x} 10^6, \mathrm{mm^2\,s^{-1}}$	2,15	0,65
Parametr gradientu γ_l^*	3,585	1,583
Efektywna głębokość nagrzewania a_l, mm	8,834	4,854
Masa elementu G_l, kg	0,1234	0,0562
Współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła α_l	0,863	0,137

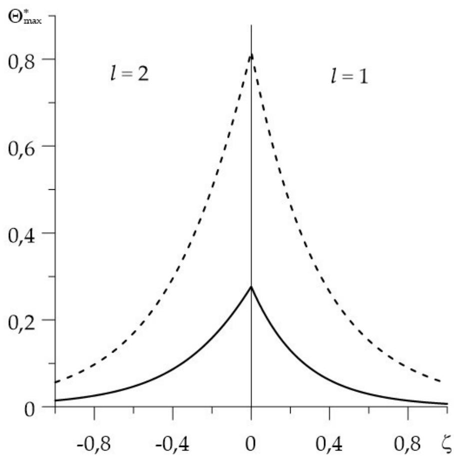
Należy zaznaczyć, że na wartość współczynnika przewodzenia ciepła ma wpływ wiele czynników, takich jak grubość poszczególnych warstw materiałowych, ich odmiana, a także proces wytwarzania. W przypadku tlenku glinu Al_2O_3 występuje szereg jego odmian, które mogą znacząco różnić się między sobą wartościami współczynnika przewodzenia ciepła. Dane zawarte w tabeli 2.1 zaczerpnięto z prac [24, 117], natomiast te zawarte w tabeli 2.4 z prac [5, 19, 56].

Zmianę bezwymiarowego wzrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ podczas hamowania przy kilku ustalonych odległościach od powierzchni kontaktu zaprezentowano na rysunku 2.16. Uwzględnienie wrażliwości termicznej materiałów powoduje znaczące obniżenie temperatury obu elementów ciernych. Maksymalna bezwymiarowa temperatura powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ bez i z uwzględnieniem wrażliwości termicznej materiałów wynosi odpowiednio 0,816 i 0,277 (około trzykrotne obniżenie) i jest osiągana w chwilach $\tau_{\max} = 0{,}37$ i $\tau_{\max} = 0{,}29$ (zmniejszenie o 21,6%).



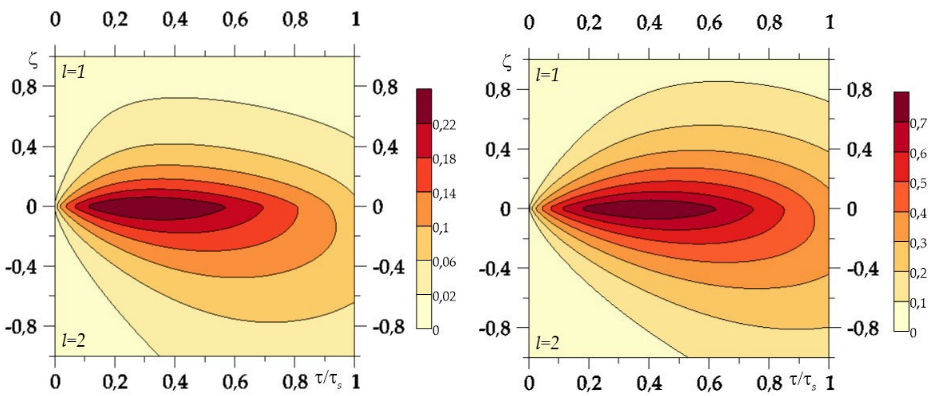
Rysunek 2.16. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ podczas hamowania w wybranych odległościach ζ od powierzchni kontaktu z uwzględnieniem (krzywe ciągłe) i z pominięciem (krzywe przerywane) wrażliwości termicznej materiałów: a) Al_2O_3–Cu, b) ZrO_2–Ti-6Al-4V

Wraz z oddalaniem się od powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ temperatura obu elementów spada (rysunek 2.17). W przypadku elementów wykonanych z materiałów wrażliwych termicznie jest ona niższa niż ta znaleziona przy zachowaniu stałych wartości właściwości materiałów. Największa różnica pomiędzy temperaturą znalezioną z i bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiałów występuje na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$.



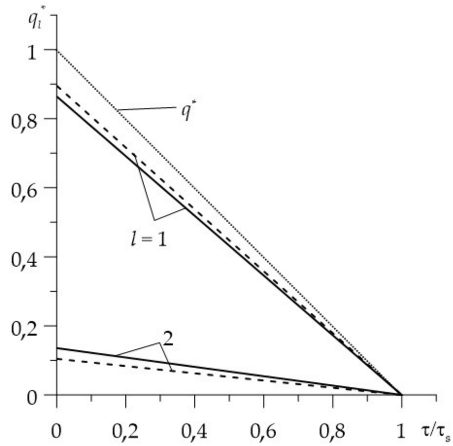
Rysunek 2.17. Rozkład maksymalnego bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*_{\max}(\zeta) \equiv \Theta^*(\zeta, \tau_{\max})$ z uwzględnieniem (krzywe ciągłe) i pominięciem (krzywe przerywane) wrażliwości termicznej materiałów

Izotermy $\Theta^*(\zeta, \tau)$ zaprezentowano na rysunku 2.18. Ustalono, że efektywna głębokość przenikania ciepła w przypadku niezmiennych pod wpływem temperatury właściwości materiałowych jest znacznie większa niż przy wykorzystaniu materiałów wrażliwych termicznie. Ten efekt jest najbardziej zauważalny dla pierwszego (l = 1) elementu Al_2O_3–Cu. Wynik ten potwierdzają wartości parametrów a_l i l = 1;2 zawarte w tabelach 2.3 i 2.4.



a) b)

Rysunek 2.18. Izolinie bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta, \tau)$: a) z uwzględnieniem, b) z pominięciem wrażliwości termicznej materiałów



Rysunek 2.19. Profil czasowy bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła $q^*(\tau)$, l = 1;2 podczas hamowania z uwzględnieniem (linie ciągłe) i pominięciem (linie przerywane) wrażliwości termicznej materiałów. Linia kropkowana odpowiada bezwymiarowej gęstości mocy tarcia $q^*(\tau)$

Profile czasowe bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła $q_l^*(\tau)$, l = 1;2 (2.3.22)–(2.3.24)pokazano na rysunku 2.19. W procesie hamowania zmniejszają się one liniowo wraz z upływem czasu od wartości maksymalnej w chwili początkowej do zera przy zatrzymaniu. Taki profil czasowy $q_l^*(\tau)$ jest skutkiem zmniejszającej się liniowo podczas hamowania ze stałym spowolnieniem gęstości mocy tarcia $q^*(\tau)$ (2.3.8) oraz spełnienia warunku brzegowego $q_1^*(\tau)+q_2^*(\tau)=q^*(\tau)$, $0\leq\tau\leq\tau_s$. Większość ciepła generowanego na skutek tarcia jest pochłaniana przez pierwszy element (l = 1) Al_2O_3–Cu. Warto zaznaczyć, że wpływ wrażliwości termicznej na intensywności strumieni ciepła jest znacznie mniejszy niż na temperaturę. Dla materiałów wrażliwych termicznie maksymalne wartości intensywności strumieni ciepła wynoszą $q_{1,\max}^*$ = 0,864 i $q_{2,\max}^*$ = 0,136, zaś przy niezmiennych właściwościach materiałów otrzymujemy odpowiednio $q_{1,\max}^*$ = 0,895 i $q_{2,\max}^*$ = 0,105.

2.3.4. Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale zaproponowano schemat obliczeniowy do wyznaczania pola temperatury w elementach ciernych FGM tarczowego układu hamulcowego uwzględniający zmiany właściwości materiałowych z czasem nagrzewania. Obliczenia wykonano dla układu dwóch ciał, z których każde wykonano z dwuskładnikowego FGM. Ustalono, że uwzględnienie wrażliwości termicznej wybranych materiałów FGM powoduje niemalże trzykrotny spadek maksymalnej temperatury w porównaniu do odpowiednich wartości uzyskanych przy stałych właściwościach. Wpływ wrażliwości termicznej materiałów na intensywności strumieni ciepła jest nieznaczny. Umożliwia to oszacowanie ilości absorbowanego przez elementy pary ciernej ciepła na podstawie uzyskanego rozwiązania przy niezależnych od temperatury właściwościach.

Rezultaty przedstawione w powyższym podrozdziale zostały opublikowane w pracy [155].

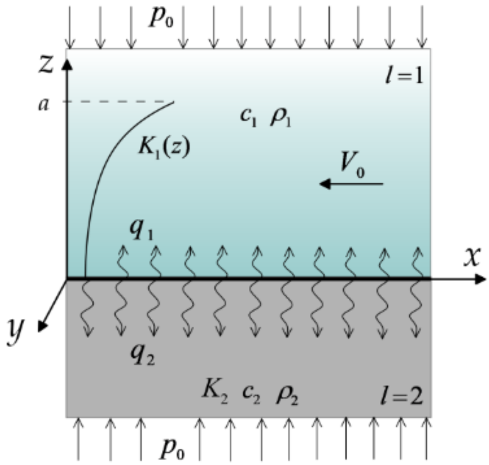
3. ANALITYCZNY MODEL PROCESU NAGRZEWANIA ELEMENTÓW CIERNYCH WYKONANYCH Z FGM PODCZAS HAMOWANIA WIELOKROTNEGO

W rozdziale 2 otrzymano analityczne rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia w przypadku, w którym oba elementy pary ciernej wykonano z funkcyjnie gradientowych materiałów. W niniejszym rozdziale zostanie natomiast rozważone odpowiadające mu zagadnienie, w którym tylko jeden element został wykonany z FGM, natomiast drugi jest jednorodny. Rozwiązanie to stanowi kluczowy element metody wyznaczania pola temperatury powstałego w procesie hamowania tarczowego układu hamulcowego pracującego w powtarzalnym, krótkoterminowym trybie hamowania (PKT). Następnie rozpatrzone zostanie zagadnienie nagrzewania strumieniem ciepła półprzestrzeni wykonanej z FGM. Pozwoli to uzyskać wzór potrzebny do wyznaczenia współczynnika rozdzielenia strumieni ciepła (dalej HPR) z półograniczonymi elementami gradientowymi. Powyższe etapy badań zostaną zaadaptowane do algorytmu obliczeniowego trybu temperaturowego tarczowego układu hamulcowego pracującego w PKT.

3.1. Zagadnienie cieplne tarcia dla układu dwóch półprzestrzeni, z których jedną wykonano z FGM, a drugą – z materiału jednorodnego

3.1.1. Sformułowanie zagadnienia

Przedmiotem badań jest nieustalone pole temperatury powstałe w procesie nagrzewania tarciowego elementów roboczych układu hamulcowego. Na podstawie założeń upraszczających 1–7 sformułowanych w podrozdziale 2.1 do opisu procesu nagrzewania układu przyjęto schemat kontaktu dwóch półograniczonych ciał odniesionych do kartezjańskiego układu współrzędnych $Oxyz$ (rysunek 3.1). Nakładkę (ciało 1) wykonano z dwuskładnikowego, funkcyjnie gradientowego materiału (FGM) w taki sposób, że powierzchnię cierną stanowi materiał o niskiej przewodności cieplnej i wysokiej odporności na zużycie (metaloceramika itp.), natomiast materiał rdzenia posiada wysokie zdolności do przewodzenia ciepła (stopy tytanu, miedzi, żelaza itp.). Zwiększanie przewodności cieplnej materiału nakładki wraz z oddalaniem od powierzchni ciernej ma charakter eksponencjalny. Tarczę (ciało 2) wykonano natomiast z materiału jednorodnego (żeliwo szare, stal itp.).



Rysunek 3.1. Schemat zagadnienia

Pola temperatury $T(z, t)$ takiego układu poszukiwano z rozwiązania następującego zagadnienia cieplnego tarcia:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right] = c_1\rho_1\frac{\partial T(z,t)}{\partial t}\,,\ z>0,\ \ 0<t\le t_s\,, \tag{3.1.1}$$

$$K_2\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} = c_2\rho_2\frac{\partial T(z,t)}{\partial t}\,,\ z<0,\ \ 0<t\le t_s\,, \tag{3.1.2}$$

$$T(0^+,t) = T(0^-,t) \equiv T(t)\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{3.1.3}$$

$$K_2\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^-} - K_1(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} = q(t)\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{3.1.4}$$

$$T(z,t)\to T_0\,,\ |z|\to\infty\,,\ 0<t\le t_s\,, \tag{3.1.5}$$

$$T(z,0) = T_0\,,\ |z|<\infty\,, \tag{3.1.6}$$

gdzie:

$$K_1(z) = K_{1,1}e^{\gamma z}\,,\ z\ge 0\,,\ \gamma\ge 0\,, \tag{3.1.7}$$

$$c_1 = c_{1,1}(1-V_1) + c_{1,2}V_1\,,\ \rho_1 = \rho_{1,1}(1-V_1) + \rho_{1,2}V_1\,,\ 0\le V_1\le 1\,, \tag{3.1.8}$$

zaś profil czasowy gęstości mocy tarcia $q(t)$ wyznaczano ze wzorów (2.3.8) i (2.3.9), przy czym:

$K_{1,m}$, $c_{1,m}$, $\rho_{1,m}$ – przewodność cieplna, ciepło właściwe i gęstość materiałów składowych nakładki ($m = 1;2$);

K_2, c_2 i ρ_2 – odpowiednie właściwości materiału tarczy;

V_1 – względny objętościowy udział pierwszego materiału składowego nakładki;

T_0 – temperatura układu w chwili początkowej $t = 0$.

Wprowadzono bezwymiarowe zmienne i parametry:

$$\zeta = \frac{z}{a},\ \tau = \frac{k_1 t}{a^2},\ \tau_s = \frac{k_1 t_s}{a^2},\ K^* = \frac{K_2}{K_{1,1}},\ k^* = \frac{k_2}{k_1},\ \Theta^* = \frac{T - T_0}{\Theta_0},\ \Theta_0 = \frac{q_0 a}{K_{1,1}}, \quad (3.1.9)$$

gdzie:

$$a = \sqrt{3 k_1 t_s}\,, \quad (3.1.10)$$

$$k_1 = \frac{K_{1,1}}{c_1 \rho_1},\ k_2 = \frac{K_2}{c_2 \rho_2},\ l = 1;2\,. \quad (3.1.11)$$

Z uwzględnieniem oznaczeń (3.1.9)–(3.1.11) zagadnienie (3.1.1)–(3.1.8) zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2 \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} + \gamma^* \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} - e^{-\gamma^* \zeta} \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau} = 0,\ \zeta > 0,\ 0 < \tau \le \tau_s, \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{k^*} \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau} = 0,\ \zeta < 0,\ 0 < \tau \le \tau_s, \quad (3.1.13)$$

$$\Theta^*(0^+,\tau) = \Theta^*(0^-,\tau) \equiv \Theta^*(\tau),\ 0 < \tau \le \tau_s, \quad (3.1.14)$$

$$K^* \left. \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^-} - \left. \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0^+} = q^*(\tau),\ 0 < \tau \le \tau_s, \quad (3.1.15)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \to 0,\ |\zeta| \to \infty,\ 0 < \tau \le \tau_s, \quad (3.1.16)$$

$$\Theta^*(\zeta,0) = 0,\ |\zeta| < \infty, \quad (3.1.17)$$

gdzie:

$$q^*(\tau) = 1 - \frac{\tau}{\tau_s}, \; 0 < \tau \le \tau_s, \tag{3.1.18}$$

$$\gamma^* \equiv a\gamma = \ln\left(\frac{K_{1,2}}{K_{1,1}}\right). \tag{3.1.19}$$

Należy zaznaczyć, że rozpatrywane początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego w postaci (3.1.1)–(3.1.6) lub w postaci bezwymiarowej (3.1.12)–(3.1.19) jest szczególnym przypadkiem zagadnienia przeanalizowanego w rozdziale 2. Rozwiązanie tego ostatniego otrzymano z wykorzystaniem techniki przejścia do przestrzeni oryginałów transformaty całkowej Laplace'a na podstawie twierdzenia Vashchenko-Zakharchenko. Rezultatem takiego podejścia było rozwiązanie w postaci szeregu po pierwiastkach odpowiedniego równania charakterystycznego. W tym i następnych rozdziałach monografii będzie zastosowana inna technika otrzymania oryginału rozwiązania – na podstawie całkowania w przestrzeni zespolonej parametru transformaty całkowej Laplace'a.

3.1.2. Rozwiązanie dokładne przy stałej gęstości mocy tarcia

Najpierw rozpatrzono przypadek nagrzewania tarciowego podczas poślizgu nakładki po powierzchni tarczy ze stałą prędkością V_0. Wówczas, przy $\tau_s \to \infty$, ze wzoru (3.1.18) wynika, że $q^*(\tau) = 1$. Stosując do początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego (3.1.12)–(3.1.19) ze stałym profilem czasowym gęstości mocy tarcia $q^*(\tau) = 1$ transformatę całkową Laplace'a [104],

$$L[\Theta^*(\zeta,\tau);p] \equiv \overline{\Theta}^*(\zeta,p) = \int_0^\infty \Theta^*(\zeta,\tau)e^{-p\tau}d\tau, \tag{3.1.20}$$

otrzymano:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2} + \gamma^*\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta} - pe^{-\gamma^*\zeta}\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = 0, \; \zeta > 0, \tag{3.1.21}$$

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2} - \frac{p}{k^*}\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = 0, \; \zeta > 0, \tag{3.1.22}$$

$$\overline{\Theta}^*(0^+,p) = \overline{\Theta}^*(0^-,p) \equiv \overline{\Theta}^*(p), \tag{3.1.23}$$

$$K^{*} \left.\frac{d\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^{-}} - \left.\frac{d\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^{+}} = \frac{1}{p}, \tag{3.1.24}$$

$$\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p) \to 0\,,\ |\zeta| \to \infty\,. \tag{3.1.25}$$

Dokładne rozwiązanie równań różniczkowych zwyczajnych (3.1.21) i (3.1.22), spełniające warunki brzegowe (3.1.23)–(3.1.25), ma postać:

$$\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p) = \frac{\Delta_1(\zeta,p)}{p\sqrt{p}\,\Delta(p)},\ \zeta \ge 0,\ \overline{\Theta}^{*}(\zeta,p) = \frac{\Delta_2(\zeta,p)}{p\sqrt{p}\,\Delta(p)},\ \zeta \le 0, \tag{3.1.26}$$

gdzie:

$$\Delta_1(\zeta,p) = e^{-\gamma^{*}\zeta/2}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^{*}}\sqrt{p}e^{-\gamma^{*}\zeta/2}\right),\ \Delta_2(\zeta,p) = e^{\sqrt{\frac{p}{k^{*}}}\zeta}\,\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^{*}}\sqrt{p}\right), \tag{3.1.27}$$

$$\Delta(p) = \mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma^{*}}\sqrt{p}\right) + K_{\varepsilon}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^{*}}\sqrt{p}\right), \tag{3.1.28}$$

przy czym $\mathrm{I}_k(x)$, $k = 0;1$ to zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju, k-tego rzędu [2].

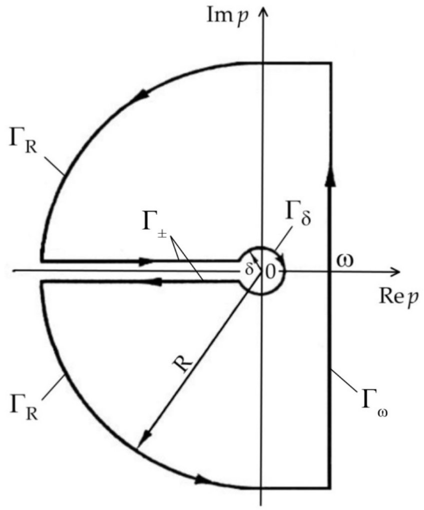
Stosując do rozwiązania (3.1.26)–(3.1.28) odwrotną transformatę Laplace'a, bezwymiarowy przyrost temperatury otrzymano w postaci:

$$L^{-1}[\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p);\tau] \equiv \Theta^{*}(\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p)\,e^{p\tau}dp,\ \tau \ge 0,$$
$$\omega \equiv \operatorname{Re} p > 0,\ i \equiv \sqrt{-1}. \tag{3.1.29}$$

Z postaci wzorów (3.1.26)–(3.1.28) wynika, że rozwiązanie to posiada punkt rozgałęzienia przy $p = 0$. W związku z tym do przeprowadzenia całkowania na płaszczyźnie zespolonej ($\operatorname{Re} p$, $\operatorname{Im} p$) wybrano krzywą zamkniętą Γ (rysunek 3.2). Składa się ona z odcinka Γ_{ω}, prostej $\operatorname{Re} p = \omega$, dwóch łuków kołowych Γ_R i Γ_{δ} o promieniach odpowiednio R i δ oraz ze środkiem w punkcie $p = 0$, a także z rozcięcia wzdłuż osi $\operatorname{Re} p < 0$ o dwóch brzegach $\Gamma_{\pm}$. Wewnątrz krzywej Γ funkcja podcałkowa $\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p)$ we wzorze (3.1.29) jest jednoznaczna i analityczna.

Wówczas na podstawie twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy [127]:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \overline{\Theta}^*(\zeta, p)\, e^{p\tau} dp = 0\,. \tag{3.1.30}$$



Rysunek 3.2. Kontur całkowania

W wyniku spełnienia przez transformatę $\overline{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ warunków lematu Jordana [105], czyli:

$$\left|\frac{\Delta_l(\zeta, p)}{p\sqrt{p}\Delta(p)}\right| \le \frac{\text{const.}}{p\sqrt{p}}\,,\ l=1;2\,, \tag{3.1.31}$$

całki po łuku Γ_R we wzorze (3.1.30) zanikają przy $R\to\infty$. Na podstawie wzorów (3.1.29) i (3.1.30) zapisano natomiast bezwymiarowy przyrost temperatury w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)+\Theta_+^*(\zeta,\tau)+\Theta_-^*(\zeta,\tau)+\Theta_\delta^*(\zeta,\tau)=0\,,\ |\zeta|<\infty,\ \tau\ge 0\,, \tag{3.1.32}$$

gdzie:

$$\Theta_\pm^*(\zeta,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\pm}\overline{\Theta}^*(\zeta, p)\, e^{p\tau}dp\,,\ \Theta_\delta^*(\zeta,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\overline{\Theta}^*(\zeta, p)\, e^{p\tau}dp\,. \tag{3.1.33}$$

W układzie biegunowym (r, φ) z początkiem w punkcie $p = 0$ parametr transformaty Laplace'a $p = re^{i\phi}$, $r \geq 0$, $|\phi| \leq \pi$. Wówczas na brzegu Γ_+ otrzymujemy $p = re^{i\pi} = -r$, $\sqrt{p} = i\sqrt{r}$, zaś na brzegu Γ_- odpowiednio $p = re^{-i\pi} = -r$, $\sqrt{p} = -i\sqrt{r}$. W związku z tym pierwsze dwie całki (3.1.33) przyjmą postać:

$$\Theta_{\pm}^{*}(\zeta,\tau) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\overline{\Theta}_{\pm}^{*}(\zeta,r)\, e^{-r\tau}dr\,,\ |\zeta| < \infty\,,\ \tau \geq 0\,, \tag{3.1.34}$$

gdzie: $\overline{\Theta}_{\pm}^{*}(\zeta,r) \equiv \overline{\Theta}^{*}(\zeta,re^{\pm i\pi})$.

Z uwzględnieniem związków [2]

$$\mathrm{I}_0(x) = \mathrm{J}_0(ix)\,,\ \mathrm{I}_1(x) = -i\mathrm{J}_1(ix)\,, \tag{3.1.35}$$

przy czym $\mathrm{J}_k(x)$, k = 0;1 to funkcje Bessela pierwszego rodzaju, k-tego rzędu, ze wzorów (3.1.26)–(3.1.28), otrzymano:

$$\overline{\Theta}_{\pm}^{*}(\zeta,r) = \frac{\Delta_1^{\pm}(\zeta,r)}{r\sqrt{r}\,\Delta^{\mp}(r)}\,,\ \zeta \geq 0\,,\ \overline{\Theta}_{\pm}^{*}(\zeta,r) = \frac{\Delta_2^{\pm}(\zeta,r)}{r\sqrt{r}\,\Delta^{\mp}(r)}\,,\ \zeta \leq 0\,, \tag{3.1.36}$$

gdzie:

$$\Delta_1^{\pm}(\zeta,r) = \pm ie^{-\gamma^*\zeta/2}\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{r}e^{-\gamma^*\zeta/2}\right),\ \Delta_2^{\pm}(\zeta,r) = \pm ie^{\pm i\sqrt{\frac{r}{k^*}}\zeta}\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{r}\right), \tag{3.1.37}$$

$$\Delta^{\pm}(\zeta,r) = K_{\varepsilon}\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{r}\right) \pm i\mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{r}\right). \tag{3.1.38}$$

Na łuku Γ_δ (rysunek 3.2) otrzymano $p = \delta e^{i\phi}$, $\sqrt{p} = \sqrt{\delta}e^{0,5i\phi}$, $|\phi| \leq \pi$. Następnie, przechodząc do granicy $\delta \to 0$, z uwzględnieniem postaci rozwiązań (3.1.26)–(3.1.28), trzecią całkę we wzorze (3.1.33) zapisano w postaci:

$$\Theta_{\delta}^{*}(\zeta,\tau) = \lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\Theta}_{\delta}^{*}(\zeta,\delta e^{i\varphi})\, e^{\delta e^{i\varphi}\tau}i\delta e^{i\varphi}d\varphi\right),\ \tau \geq 0\,, \tag{3.1.39}$$

gdzie:

$$\overline{\Theta}^*_\delta(\zeta,\delta e^{i\varphi})=\frac{\Delta_1(\zeta,\delta e^{i\varphi})}{\delta\sqrt{\delta}e^{3i\varphi/2}\Delta(\delta e^{i\varphi})},\ \zeta\ge 0,$$

$$\overline{\Theta}^*_\delta(\zeta,\delta e^{i\varphi})=\frac{\Delta_2(\zeta,\delta e^{i\varphi})}{\delta\sqrt{\delta}e^{3i\varphi/2}\Delta(\delta e^{i\varphi})},\ \zeta\le 0, \tag{3.1.40}$$

$$\Delta_1(\zeta,\delta e^{i\varphi})=e^{-\gamma^*\zeta/2}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}e^{-\gamma^*\zeta/2}\right),$$

$$\Delta_2(\zeta,\delta e^{i\varphi})=e^{\sqrt{\frac{\delta}{k^*}}\zeta\,e^{i\varphi/2}}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}\right), \tag{3.1.41}$$

$$\Delta(p)=\mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}\right)+K_\varepsilon\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}\right). \tag{3.1.42}$$

Podstawiając funkcję (3.1.40)–(3.1.42) pod znak całki we wzorze (3.1.39), znaleziono:

$$\Theta^*_\delta(\zeta,\tau)=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_1(\zeta,\delta e^{i\varphi})}{\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}\Delta(\delta e^{i\varphi})}e^{\delta e^{i\varphi}\tau}d\varphi\right),\ \zeta\ge 0,\ \tau\ge 0, \tag{3.1.43}$$

$$\Theta^*_\delta(\zeta,\tau)=\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Delta_2(\zeta,\delta e^{i\varphi})}{\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}\Delta(\delta e^{i\varphi})}e^{\delta e^{i\varphi}\tau}d\varphi\right),\ \zeta\le 0,\ \tau\ge 0. \tag{3.1.44}$$

Biorąc pod uwagę to, że przy małych wartościach argumentu [2]

$$\mathrm{I}_0(x)\cong 1,\ \mathrm{I}_1(x)\cong 0{,}5x, \tag{3.1.45}$$

ze wzorów (3.1.43) i (3.1.44) otrzymano:

$$\Theta^*_\delta(\zeta,\tau)=-\frac{1}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2},\ \zeta\ge 0,\ \Theta^*_\delta(\zeta,\tau)=-\frac{1}{\gamma^*},\ \zeta\le 0,\ \tau\ge 0. \tag{3.1.46}$$

Podstawiając funkcje $\Theta^*_{\pm}(\zeta,\tau)$ (3.1.34), (3.1.36)–(3.1.38) oraz $\Theta^*_{\delta}(\zeta,\tau)$ (3.1.46) do równania (3.1.32) i oznaczając $\sqrt{r}=x$, $r=x^2$, bezwymiarowy przyrost temperatury wyznaczono w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=\frac{1}{\gamma^*}\left[e^{-0,5\gamma^*\zeta}-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_1(\zeta,x)e^{-(\gamma^* x/2)^2\tau}dx\right],\ \zeta\geq 0\,,\ \tau\geq 0\,, \tag{3.1.47}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=\frac{1}{\gamma^*}\left[1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_2(\zeta,x)e^{-(\gamma^* x/2)^2\tau}dx\right],\ \zeta\leq 0\,,\ \tau\geq 0\,, \tag{3.1.48}$$

gdzie:

$$F(x)=\frac{\mathrm{J}_1(x)}{x^2\{[\mathrm{J}_0(x)]^2+[K_\varepsilon \mathrm{J}_1(x)]^2\}}\,, \tag{3.1.49}$$

$$G_1(\zeta,x)=K_\varepsilon e^{-0,5\gamma^*\zeta}\mathrm{J}_1(xe^{-0,5\gamma^*\zeta})\,, \tag{3.1.50}$$

$$G_2(\zeta,x)=K_\varepsilon \mathrm{J}_1(x)\cos\left(\frac{\gamma^*\zeta}{2\sqrt{k^*}}x\right)-\mathrm{J}_0(x)\sin\left(\frac{\gamma^*\zeta}{2\sqrt{k^*}}x\right). \tag{3.1.51}$$

Podstawiając $\zeta=0$ we wzorach (3.1.47)–(3.1.51) ustalono, że bezwymiarowy przyrost temperatury powierzchni kontaktu (3.1.23) ma postać:

$$\Theta^*(\tau)=\frac{1}{\gamma^*}\left[1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty G(x)e^{-(\gamma^* x/2)^2\tau}dx\right],\ \tau\geq 0\,, \tag{3.1.52}$$

gdzie:

$$G(x)=\frac{K_\varepsilon[\mathrm{J}_1(x)]^2}{x^2\{[\mathrm{J}_0(x)]^2+[K_\varepsilon \mathrm{J}_1(x)]^2\}}\,. \tag{3.1.53}$$

Na podstawie prawa Fouriera intensywności strumieni ciepła, skierowane od powierzchni kontaktu do elementów pary ciernej, zdefiniowano w postaci:

$$q_1(t)=-K_{1,1}\left.\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^+},\ q_2(t)=K_2\left.\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^-},\ t\geq 0\,. \tag{3.1.54}$$

Przechodząc we wzorach (3.1.54) do postaci bezwymiarowej:

$$q_l^*(\tau) = \frac{q_l(t)}{q_0}, \ l = 1;2, \tag{3.1.55}$$

z uwzględnieniem oznaczeń (3.1.7) i (3.1.17), otrzymano:

$$q_1^*(\tau) = -\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^+}, \ q_2^*(\tau) = K^* \left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^-}, \ \tau \geq 0. \tag{3.1.56}$$

Podstawiając do prawej strony równości (3.1.56) bezwymiarowe przyrosty temperatury (3.1.47)–(3.1.51) i różniczkując, znaleziono:

$$q_1^*(\tau) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(x) e^{-(\gamma^* x/2)^2 \tau} dx, \ q_2^*(\tau) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(x) e^{-(\gamma^* x/2)^2 \tau} dx, \ \tau \geq 0, \tag{3.1.57}$$

gdzie:

$$Q(x) = \frac{K_\varepsilon \mathrm{J}_0(x)\mathrm{J}_1(x)}{x\{[\mathrm{J}_0(x)]^2 + [K_\varepsilon \mathrm{J}_1(x)]^2\}}. \tag{3.1.58}$$

Ze wzorów (3.1.57) i (3.1.58) wynika natomiast, że $q_1^*(\tau) + q_2^*(\tau) = 1$, co potwierdza spełnienie warunku brzegowego (3.1.15) przy $q^*(\tau) = 1, \ \tau \geq 0$.

3.1.3. Rozwiązania asymptotyczne

Należy zaznaczyć, że rozwiązania (3.1.47)–(3.1.53) mają postać kwadratur i przy ich wykorzystaniu należy każdorazowo przeprowadzać całkowanie numeryczne na przedziale półograniczonym. Jednak dla przypadków małych i dużych wartości bezwymiarowego czasu (liczby Fouriera) τ poniżej zostaną otrzymane odpowiednie asymptotyczne rozwiązania w postaci analitycznej, niewymagającej całkowania numerycznego.

Małe wartości liczby Fouriera $0 \leq \tau \ll 1$
(duże wartości parametru p transformacji całkowej Laplace'a (3.1.29))

Przy dużych wartościach argumentu zmodyfikowane funkcje Bessela zachowują się w następujący sposób [2]:

$$\mathrm{I}_0(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 + \frac{1}{8x} + \frac{9}{128x^2} + \ldots\right), \ \mathrm{I}_1(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \frac{3}{8x} - \frac{15}{128x^2} - \ldots\right). \tag{3.1.59}$$

Ograniczając się do pierwszych dwóch składników w prawych stronach wzorów (3.1.59), transformaty bezwymiarowego przyrostu temperatury (3.1.26)–(3.1.28) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\gamma^*\zeta/4-\alpha\sqrt{p}}}{(1+K_\varepsilon)p\sqrt{p}}\left(1-\frac{3\gamma^* e^{\gamma^*\zeta/2}}{16\sqrt{p}}\right)\left[1+\frac{\gamma^*(1-3K_\varepsilon)}{16(1+K_\varepsilon)\sqrt{p}}\right]^{-1}, \ \zeta \geq 0, \tag{3.1.60}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{\sqrt{\frac{p}{k^*}}\zeta}}{(1+K_\varepsilon)p\sqrt{p}}\left(1-\frac{3\gamma^*}{16\sqrt{p}}\right)\left[1+\frac{\gamma^*(1-3K_\varepsilon)}{16(1+K_\varepsilon)\sqrt{p}}\right]^{-1}, \ \zeta \leq 0, \tag{3.1.61}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{2}{\gamma^*}(1-e^{-0,5\gamma^*\zeta}), \ \zeta \geq 0. \tag{3.1.62}$$

Biorąc pod uwagę to, że:

$$\left(1-\frac{3\gamma^* e^{\gamma^*\zeta/2}}{16\sqrt{p}}\right)\left[1+\frac{\gamma^*(1-3K_\varepsilon)}{16(1+K_\varepsilon)\sqrt{p}}\right]^{-1} \approx 1-\frac{\gamma^*}{16\sqrt{p}}\left(3e^{\gamma^*\zeta/2}+\frac{1-3K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon}\right), \tag{3.1.63}$$

$$\left(1-\frac{3\gamma^*}{16\sqrt{p}}\right)\left[1+\frac{\gamma^*(1-3K_\varepsilon)}{16(1+K_\varepsilon)\sqrt{p}}\right]^{-1} \approx 1-\frac{\gamma^*}{4(1+K_\varepsilon)\sqrt{p}}, \tag{3.1.64}$$

transformaty (3.1.60)–(3.1.62) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\gamma^*\zeta/4-\alpha\sqrt{p}}}{(1+K_\varepsilon)p\sqrt{p}}\left[1-\frac{\gamma^*}{16\sqrt{p}}\left(3e^{\gamma^*\zeta/2}+\frac{1-3K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon}\right)\right], \ \zeta \geq 0, \tag{3.1.65}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{\sqrt{\frac{p}{k^*}}\zeta}}{(1+K_\varepsilon)p\sqrt{p}}\left(1-\frac{\gamma^*}{4(1+K_\varepsilon)\sqrt{p}}\right), \ \zeta \leq 0. \tag{3.1.66}$$

Z uwzględnieniem związków [8]

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p^n}};\tau\right]=(4\tau)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{i}^{\mathrm{n}}\mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{\tau}}\right),\ n=1;2\,,\ a\geq 0 \qquad (3.1.67)$$

z transformowanych rozwiązań (3.1.65) i (3.1.66) znaleziono bezwymiarowe przyrosty temperatury:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2e^{-\gamma^*\zeta/4}\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\left[\mathrm{ierfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}\right)-\frac{\gamma^*\sqrt{\tau}}{8}\left(3e^{\gamma^*\zeta/2}+\frac{1-3K_\varepsilon}{1+K_\varepsilon}\right)\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\tau}}\right)\right],$$

$$\zeta\geq 0\,, \qquad (3.1.68)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\left[\mathrm{ierfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right)-\frac{\gamma^*\sqrt{\tau}}{2(1+K_\varepsilon)}\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right)\right],$$

$$\zeta\leq 0\,,\ 0\leq\tau<<1\,, \qquad (3.1.69)$$

gdzie:

$$\mathrm{i}^2\mathrm{erfc}(x)=0{,}25[\mathrm{erfc}(x)-2x\,\mathrm{ierfc}(x)]\,,$$

$$\mathrm{ierfc}(x)=\pi^{-1/2}e^{-x^2}-x\,\mathrm{erfc}(x)\,,\mathrm{erfc}(x)=1-\mathrm{erf}(x)\,, \qquad (3.1.70)$$

przy czym:
erf(x) – funkcja błędu Gaussa [2].

Na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$, ze wzorów (3.1.68) i (3.1.69), wyznaczono:

$$\Theta^*(\tau)\cong\frac{2\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\frac{\gamma^*\sqrt{\tau}}{8(1+K_\varepsilon)}\right],\ 0\leq\tau<<1\,. \qquad (3.1.71)$$

Przechodząc we wzorach (3.1.68)–(3.1.71) do granicy $\gamma^*\to 0$ ($\alpha\to\zeta$), otrzymano znane rozwiązania dla materiałów jednorodnych [13]:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \zeta\geq 0\,,$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2\sqrt{\tau}}{(1+K_\varepsilon)}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right),\ \zeta\leq 0\,, \qquad (3.1.72)$$

$$\Theta^*(\tau) \cong \frac{2}{(1+K_\varepsilon)}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\ , \ 0 \le \tau << 1 \,. \tag{3.1.73}$$

Duże wartości liczby Fouriera $\tau >> 1$
(małe wartości parametru p transformacji całkowej Laplace'a (3.1.29))

Rozkłady zmodyfikowanych funkcji Bessela w szeregi potęgowe przy małych wartościach argumentu mają postać [2]:

$$\mathrm{I}_0(x) \cong 1 + \frac{x^2}{4} + \ldots, \ \mathrm{I}_1(x) \cong \frac{x}{2}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \ldots\right). \tag{3.1.74}$$

Z uwzględnieniem wzorów (3.1.74) transformaty Laplace'a bezwymiarowego przyrostu temperatury (3.1.26)–(3.1.28) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\gamma^*\zeta}}{\gamma^*}\left[\frac{\beta}{p(\beta+\sqrt{p})} + \frac{e^{-\gamma^*\zeta}}{2K_\varepsilon\gamma^*(\beta+\sqrt{p})}\right], \ \zeta \ge 0\,, \tag{3.1.75}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{\sqrt{\frac{p}{k^*}}\zeta}}{\gamma^*}\left[\frac{\beta}{p(\beta+\sqrt{p})} + \frac{1}{2K_\varepsilon\gamma^*(\beta+\sqrt{p})}\right], \ \zeta \le 0\,, \tag{3.1.76}$$

gdzie:

$$\beta = \frac{\gamma^*}{K_\varepsilon}\,. \tag{3.1.77}$$

Korzystając z poniższych związków [8]:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\beta+\sqrt{p})};\tau\right] = \frac{e^{-\frac{a^2}{4\tau}}}{\sqrt{\pi\tau}} - \beta\, e^{a\beta+\beta^2\tau}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{\tau}} + \beta\sqrt{\tau}\right), \tag{3.1.78}$$

$$L^{-1}\left[\frac{\beta\, e^{-a\sqrt{p}}}{p(\beta+\sqrt{p})};\tau\right] = \mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{a\beta+\beta^2\tau}\ \mathrm{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{\tau}} + \beta\sqrt{\tau}\right), \ a \ge 0\,, \tag{3.1.79}$$

z rozwiązań (3.1.75) i (3.1.76) otrzymano bezwymiarowe przyrosty temperatury w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{e^{-\gamma^*\zeta}}{\gamma^*}\left\{1 - e^{\beta^2\tau}\operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) + \frac{e^{-\gamma^*\zeta}}{2K_\varepsilon\gamma^*}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - \beta\, e^{\beta^2\tau}\operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau})\right]\right\},$$

$$\zeta \geq 0\,,\ \tau >> 1\,, \tag{3.1.80}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{1}{\gamma^*}\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}}\right) - e^{\frac{\beta|\zeta|}{\sqrt{k^*}}+\beta^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}} + \beta\sqrt{\tau}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2K_\varepsilon\gamma^*}\left[\frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4k^*\tau}}}{\sqrt{\pi\tau}} - \beta e^{\frac{\beta|\zeta|}{\sqrt{k^*}}+\beta^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{|\zeta|}{2\sqrt{k^*\tau}} + \beta\sqrt{\tau}\right)\right]\right\},\ \zeta \leq 0,\ \tau >> 1. \tag{3.1.81}$$

Podstawiając we wzorach (3.1.80) i (3.1.81) $\zeta = 0$, znaleziono bezwymiarowy przyrost temperatury na powierzchni kontaktu:

$$\Theta^*(\tau) \cong \frac{1}{\gamma^*}\left\{1 - e^{\beta^2\tau}\operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau}) + \frac{1}{2K_\varepsilon\gamma^*}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} - \beta\, e^{\beta^2\tau}\operatorname{erfc}(\beta\sqrt{\tau})\right]\right\},\ \tau >> 1\,. \tag{3.1.82}$$

3.1.4. Rozwiązanie przy liniowo zmniejszającej się z czasem gęstości mocy tarcia

Bezwymiarowego przyrostu temperatury podczas hamowania ze stałym opóźnieniem poszukiwano na podstawie twierdzenia Duhamela, w postaci [86]:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau q^*(\tau - s)\Theta^*(\zeta,s)ds\,,\ |\zeta| < \infty,\ 0 \leq \tau \leq \tau_s\,, \tag{3.1.83}$$

gdzie profil czasowy gęstości mocy tarcia $q^*(\tau)$ i funkcję $\Theta^*(\zeta,\tau)$ wyznaczono odpowiednio ze wzorów (2.3.8), (2.3.9) oraz (3.1.47), (3.1.48). Przeprowadzając najpierw całkowanie, a następnie różniczkowanie, ze wzoru (3.1.83) otrzymano:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{\gamma^*}\left[e^{-\gamma^*\zeta/2}q^*(\tau) - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_1(\zeta,x)P(\tau,x)dx\right],\ \zeta \geq 0\,,\ 0 \leq \tau \leq \tau_s\,, \tag{3.1.84}$$

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{\gamma^*}\left[1 - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_2(\zeta,x)P(\tau,x)dx\right],\ \zeta \le 0,\ 0 \le \tau \le \tau_s, \tag{3.1.85}$$

gdzie:

$$P(\tau,x) = e^{-(\gamma^* x/2)^2 \tau} - \frac{(1 - e^{-(\gamma^* x/2)^2 \tau})}{(0{,}5\gamma^* x)^2 \tau_s}, \tag{3.1.86}$$

zaś funkcje $F(x)$, $G_1(\zeta,x)$ i $G_2(\zeta,x)$ wyznaczono odpowiednio ze wzorów (3.1.49)–(3.1.51).

Podstawiając $\zeta = 0$ we wzorach (3.1.84) i (3.1.85), bezwymiarowy przyrost temperatury powierzchni ciernej znaleziono w postaci:

$$\hat{\Theta}^*(\tau) = \frac{1}{\gamma^*}\left[1 - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty G(x)P(\tau,x)dx\right],\ \tau \ge 0, \tag{3.1.87}$$

gdzie funkcje $G(x)$ i $P(\tau,x)$ wyznaczono odpowiednio ze wzorów (3.1.53) i (3.1.86).

Znając bezwymiarowy wzrost temperatury (3.1.84), (3.1.85), ze wzorów (3.1.56) znaleziono bezwymiarowe intensywności strumieni ciepła:

$$\hat{q}_1^*(\tau) = q^*(\tau) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(x)P(\tau,x)dx,\ \hat{q}_2^*(\tau) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty Q(x)P(\tau,x)dx,\ 0 \le \tau \le \tau_s, \tag{3.1.88}$$

gdzie funkcje $Q(x)$ i $P(\tau,x)$ przyjęły odpowiednio postaci (3.1.58) i (3.1.86). Ze wzorów (3.1.88) wynika, że $\hat{q}_1^*(\tau) + \hat{q}_2^*(\tau) = q^*(\tau)$, co potwierdza spełnienie warunku brzegowego (3.1.15) z bezwymiarową gęstością mocy tarcia $q^*(\tau)$ w postaci (2.3.8), (2.3.9).

3.1.5. Analiza numeryczna

Obliczenia przeprowadzono dla pary ciernej, której pierwszy element wykonano z dwuskładnikowego FGM składającego się z dwutlenku cyrkonu ZrO_2 (powierzchnia cierna) i tytanowego stopu Ti-6Al-4V (rdzeń). W charakterze jednorodnego materiału przyjęto natomiast żeliwo szare ChNMKh. Właściwości tych materiałów opisano w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Właściwości materiałowe w temperaturze początkowej T_0 [117, 152]

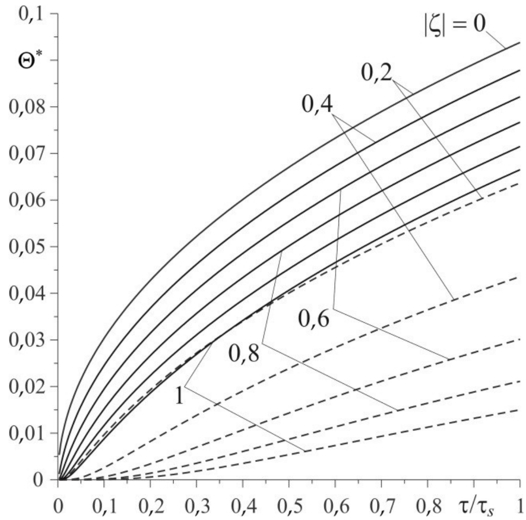
Materiał	**Przewodność cieplna** $\mathbf{Wm^{-1}K^{-1}}$	**Ciepło właściwe** $\mathbf{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	**Gęstość** $\mathbf{kg\,m^{-3}}$
ZrO_2	1,94	452,83	6102,16
Ti-6Al-4V	6,87	538,08	4431,79
ChNMKh	52,17	444,6	7100

Wartości pozostałych parametrów wejściowych wykorzystanych do przeprowadzenia obliczeń zawarto w tabeli 3.2.

Tabela 3.2. Parametry wejściowe [27]

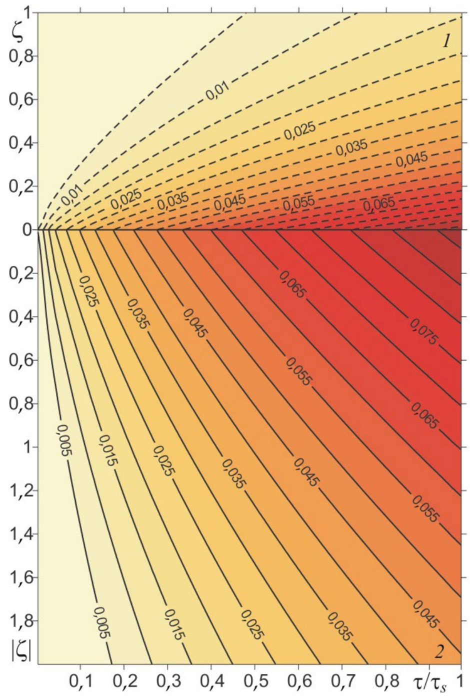
Współczynnik tarcia f_0	0,27
Ciśnienie nominalne p_0, MP	0,602
Początkowa prędkość poślizgu V_0, m s^{-1}	23,8
Początkowa energia kinetyczna W_0, kJ	103,54
Pole powierzchni nominalnego obszaru kontaktu A_a, m^2	0,00221
Temperatura początkowa T_0, °C	20

Następnie, ze wzorów (2.3.8), (2.3.9) i (3.1.18), wyznaczono nominalną wartość gęstości mocy tarcia q_0 = 3,87 MW m^{-2}, czas hamowania t_s = 12,1 s oraz parametr gradientu γ^* = 1,26. Znalezione za pomocą wzorów (3.1.8), przy jednakowym objętościowym udziale składowych FGM ($V_c = V_\rho = 0{,}5$), efektywne wartości ciepła właściwego i gęstości są równe odpowiednio: c_1 = 495,45 J kg^{-1} K^{-1} oraz ρ_1 = 5266,97 J kg m^{-3}. Dalej, na podstawie związków (3.1.11), wyznaczono najpierw współczynniki dyfuzji cieplnej $k_1 = 0{,}743 \cdot 10^{-6}$ m^{2}s^{-1}, $k_2 = 1{,}65 \cdot 10^{-5}$ m^{2}s^{-1}, a następnie, ze wzoru (3.1.10), efektywną głębokość nagrzewania nakładki a = 5,2 mm. Ostatecznie, z zależności (3.1.9), znaleziono bezwymiarowy czas hamowania τ_s = 0,33 oraz współczynnik skali temperatury Θ = 10373°C. Zmiany bezwymiarowych przyrostów temperatury i intensywności strumieni ciepła podczas poślizgu ze stałą prędkością zaprezentowano na rysunkach 3.3–3.6.

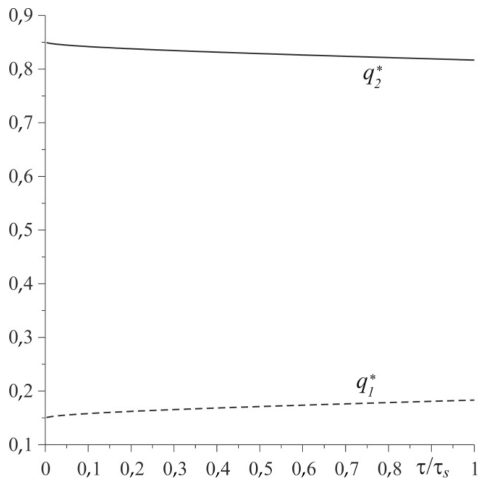


Rysunek 3.3. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ na ustalonych odległościach $|\zeta|$ od powierzchni ciernej podczas poślizgu ze stałą prędkością. Linie ciągłe – żeliwo, linie przerywane – FGM

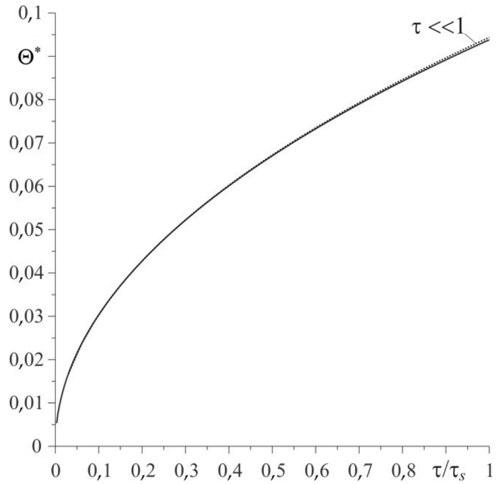
Profile czasowe bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (3.1.47)–(3.1.51) na kilku odległościach od powierzchni ciernej pokazano na rysunku 3.3. Wraz z upływem czasu temperatura obu elementów zwiększa się monotonicznie – najwyższa jest osiągana na powierzchni ciernej, a wraz z oddalaniem od niej jej wartość spada. Przy czym dla ustalonej od tej powierzchni odległości temperatura jednorodnego elementu żeliwnego jest zawsze wyższa od temperatury elementu wykonanego z FGM. Posiadając o wiele większą przewodność cieplną, żeliwny element jest nagrzewany na znacznie większą głębokość niż element wykonany z FGM (rysunek 3.4). Profile czasowe bezwymiarowych strumieni ciepła $q_l^*(\tau)$, l = 1;2 (3.1.57) (3.1.58) zaprezentowano na rysunku 3.5. Ustalono, że głównym elementem pochłaniającym ciepło jest żeliwna tarcza, w szczególności w początkowych chwilach procesu nagrzewania. Wraz z upływem czasu ilość ciepła skierowanego od powierzchni ciernej do wnętrza nakładki zwiększa się, zaś do tarczy – maleje. Porównanie wartości bezwymiarowej temperatury $\Theta^*(\tau)$ powierzchni ciernej, znalezionych za pomocą dokładnego (3.1.52), (3.1.53) oraz asymptotycznego (3.1.72) rozwiązania, pokazano na rysunku 3.6. W rozpatrywanym zakresie zmiany liczby Fouriera $0 \le \tau \le \tau_s$ odpowiednie wartości temperatury są praktycznie takie same.



Rysunek 3.4. Izotermy bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ podczas poślizgu ze stałą prędkością. Krzywe ciągłe – żeliwo, krzywe przerywane – FGM

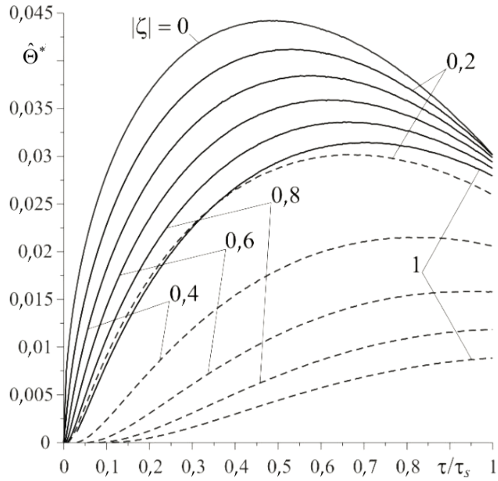


Rysunek 3.5. Ewolucja bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła $q_l^*, l = 1;2$ skierowanych po normalnej od powierzchni ciernej do elementu z żeliwa (krzywa ciągła) oraz elementu z FGM (krzywa przerywana) podczas poślizgu ze stałą prędkością



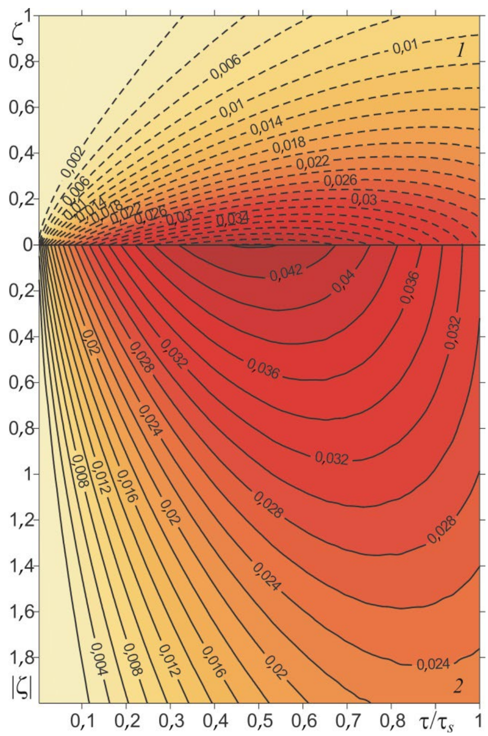
Rysunek 3.6. Zmiana bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\tau)$ powierzchni ciernej $\zeta = 0$ podczas poślizgu ze stałą prędkością. Krzywa ciągła – rozwiązanie dokładne, krzywa kropkowana – rozwiązanie asymptotyczne

Odpowiednie rezultaty, otrzymane w przypadku liniowo zmniejszającej się prędkości (tzw. hamowanie ze stałym opóźnieniem), zaprezentowano na rysunkach 3.7–3.10. Przebieg czasowy bezwymiarowego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta, \tau)$ (3.1.84)–(3.1.87) podczas hamowania jest inny niż podczas równomiernego poślizgu (rysunek 3.7).

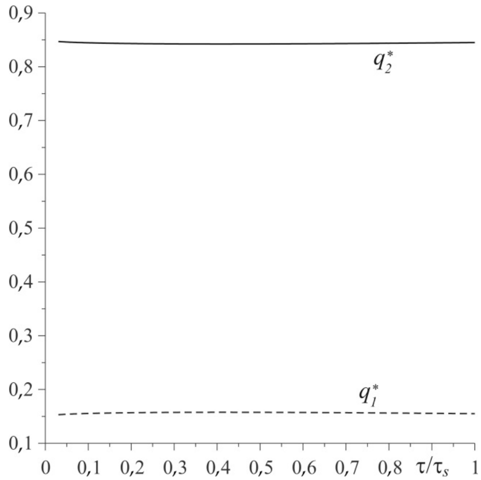


Rysunek 3.7. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta, \tau)$ na ustalonych odległościach $|\zeta|$ od powierzchni ciernej podczas hamowania ze stałym opóźnieniem. Krzywe ciągłe – żeliwo, krzywe przerywane – FGM

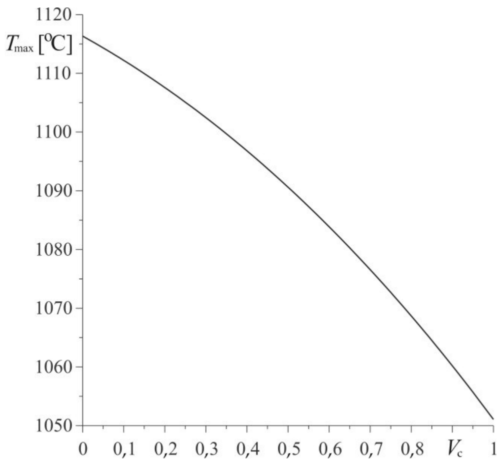
Bezwymiarowy czas osiągnięcia maksymalnej temperatury powierzchni ciernej wynosi $\tau_{\max} \approx 0,5\tau_s$ i zwiększa się wraz z oddalaniem od niej. Po osiągnięciu najwyższej wartości następuje obniżenie temperatury trwające aż do zatrzymania. Taką koncentrację wysokiej temperatury w pobliżu powierzchni ciernej bardziej obrazowo pokazuje rozkład izoterm zaprezentowany na rysunku 3.8. Podobnie jak przy równomiernym poślizgu, większa część ciepła generowanego na skutek tarcia jest pochłaniana przez żeliwną tarczę ($\approx 85\%$) (rysunek 3.9), przy czym intensywności strumieni ciepła $\hat{q}_l^*(\tau)$, $l = 1;2$ (3.1.88) pozostają praktycznie niezmienne podczas całego procesu hamowania.



Rysunek 3.8. Izotermy $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ podczas hamowania ze stałym opóźnieniem. Krzywe ciągłe – żeliwo, krzywe przerywane – FGM



Rysunek 3.9. Ewolucja bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła q_l^*, l = 1;2 skierowanych po normalnej od powierzchni ciernej do elementu z żeliwa (krzywa ciągła) oraz elementu z FGM (krzywa przerywana) podczas hamowania ze stałym opóźnieniem



Rysunek 3.10. Zależność maksymalnej temperatury $T_{\max}$ podczas hamowania ze stałym opóźnieniem od współczynnika objętościowego udziału V_c

Rezultaty zaprezentowane na rysunkach 3.3–3.9 otrzymano przy jednakowym (V_c = 0,5) objętościowym udziale składowych ZrO_2 i Ti-6Al-4V, przy wyznaczeniu efektywnych ciepła właściwego i gęstości za pomocą wzorów (3.1.8). Zmianę maksymalnej temperatury $T_{\max} \equiv T(0, t_{\max})$ przy zwiększeniu parametru V_c zaprezentowano natomiast na rysunku 3.10. Najwyższa wartość $T_{\max}$ = 1117°C jest osiągana w przypadku nakładki wykonanej całkowicie z dwutlenku cyrkonu, zaś najniższa, $T_{\max}$ = 1052°C, gdy jest ona wykonana ze stopu tytanu.

3.1.6. Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale zaproponowano matematyczny model do wyznaczenia nieustalonego pola temperatury w parze ciernej, w której jeden element wykonano z FGM, a drugi – z materiału jednorodnego. Założono, że przewodność cieplna FGM zwiększa się eksponencjalnie wraz z oddalaniem od powierzchni kontaktu. Sformułowano, a następnie otrzymano, dokładne rozwiązanie odpowiedniego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia. Szczegółowo rozpatrzono dwa przypadki profilu czasowego gęstości mocy tarcia: stały (poślizg równomierny) oraz liniowo zmniejszający się z czasem (hamowanie ze stałym opóźnieniem). Analizę numeryczną przeprowadzono dla dwuskładnikowego FGM (ZrO_2–Ti-6Al-4V) ślizgającego się po jednorodnej tarczy żeliwnej (ChNMKh). Ustalono, że większa część ciepła generowanego na skutek tarcia jest absorbowana przez tarczę ($\approx 85\%$), co, biorąc pod uwagę dobrą przewodność cieplną żeliwa, skutkuje większą efektywną głębokością przenikania ciepła w tym elemencie. Na ustalonej odległości od powierzchni ciernej temperatura żeliwnego elementu jest wyższa niż elementu wykonanego z FGM zarówno przy równomiernym poślizgu, jak i podczas hamowania. Tak więc, z punktu widzenia ochrony przed tego typu niepożądanymi zjawiskami jak przegrzanie czy termopękanie, stosowanie FGM w przypadku elementów ciernych może być jak najbardziej uzasadnione. Na podkreślenie zasługuje również fakt, że w rozpatrywanym przedziale zmiany liczby Fouriera, $0 \leq \tau \leq 0{,}33$, można efektywnie (z dużą dokładnością) korzystać z odpowiednich rozwiązań asymptotycznych, pozbawionych dodatkowych trudności związanych z całkowaniem numerycznym w rozwiązaniu dokładnym.

Przedstawione w tym podrozdziale rezultaty zostały opublikowane w pracy [147].

3.2. Współczynnik rozdzielenia ciepła w parze ciernej wykonanej z FGM

Dotychczasowe rozwiązania zagadnień cieplnych tarcia, czyli początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia, otrzymano przy dwóch specyficznych warunkach brzegowych na powierzchni kontaktu. Jeden z nich określa równość gęstości mocy tarcia q i sumy intensywności strumieni ciepła q_l, $l = 1;2$ skierowanych po normalnej od powierzchni kontaktu do wewnątrz elementów pary ciernej, czyli $q_1 + q_2 = q$ (warunek energetyczny). Drugi natomiast dotyczy rodzaju kontaktu termicznego – z uwzględnieniem (niepełny) lub bez uwzględnienia (pełny) oporu termicznego powierzchni ciernych. W tym ostatnim przypadku wymagano, aby temperatury powierzchni były jednakowe. Sprzężenie pól temperatury obu elementów pary ciernej spowodowane przez wyżej wymienione warunki brzegowe sprawiło, że otrzymanie analitycznych rozwiązań odpowiednich zagadnień wymagało wykonania skomplikowanych przekształceń matematycznych.

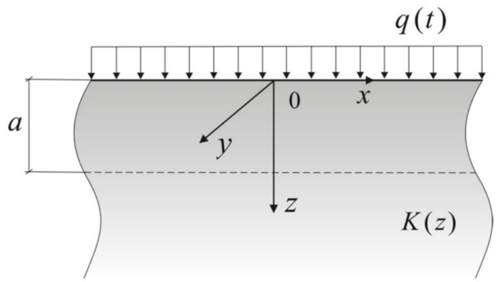
W celu zredukowania tych trudności można do oszacowania temperatury układów ciernych za pomocą rozwiązań odpowiednich zagadnień cieplnych tarcia wykorzystać również inne podejście. Polega ono na wirtualnym rozdzieleniu elementów pary ciernej i nagrzewaniu ich powierzchni roboczych strumieniami ciepła o intensywności odpowiednio: $q_l = \alpha_l q$, $l = 1;2$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 1 - \alpha$, gdzie α oznacza współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła (HPR) [18, 29].

Opracowano przeglądy doświadczalnych, a także teoretycznych, metod wyznaczania HPR w układach hamulcowych [22, 44, 46, 94, 132]. W przypadku metod teoretycznych znalezione za pomocą rozwiązań analitycznych pole temperatury początkowo zawiera nieznany *a priori* współczynnik α, który następnie wyznacza się z warunku równości maksymalnej lub ze średniej temperatury powierzchni ciernych nakładki i tarczy. W rezultacie otrzymuje się wzory do obliczenia α zawierające właściwości termofizyczne pary ciernej oraz parametry operacyjne pracy układu. Podstawiając wyznaczone w ten sposób wartości α z powrotem do otrzymanych wcześniej rozwiązań, oszacowuje się tryb temperaturowy układu hamulcowego.

Należy zaznaczyć, że znane z literatury wzory do wyznaczenia HPR dotyczą materiałów jednorodnych [22, 39, 46, 144]. Celem poniższego podrozdziału jest otrzymanie za pomocą rozwiązań teoretycznych wzorów do oszacowania HPR podczas hamowania elementów pary ciernej wykonanych z FGM.

3.2.1. Nagrzewanie półprzestrzeni strumieniem ciepła o intensywności ze zmiennym profilem czasowym

Niech temperatura T półograniczonego ciała $z \geq 0$ w początkowej chwili $t = 0$ jest stała i wynosi T_0 (rysunek 3.11).



Rysunek 3.11. Schemat nagrzewania półprzestrzeni

Ciało jest wykonane z funkcyjnie gradientowego materiału (FGM) ze współczynnikiem przewodności cieplnej K zwiększającym się eksponencjalnie w dodatnim kierunku osi z:

$$K(z) = K_0 e^{\gamma z}, \; z \geq 0, \; K_0 \equiv K(0), \tag{3.2.1}$$

gdzie $\gamma > 0$ – parametr gradientu materiału, czyli współczynnik charakteryzujący strukturę gradientową. Półprzestrzeń jest nagrzewana na powierzchni $z = 0$ strumieniem ciepła o stałej w czasie intensywności $q(t)$, $t > 0$.

Nieustalonego pola temperatury ciała poszukiwano w postaci:

$$T(z,t) = T_0 + \Theta(z,t), \; z \geq 0, \; t \geq 0, \tag{3.2.2}$$

gdzie przyrost temperatury $\Theta(z,t)$ wyznaczono z rozwiązania następującego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodzenia ciepła:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] = \rho c \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \; z > 0, \; t > 0, \tag{3.2.3}$$

$$K_0 \left. \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0^+} = -q(t), \; t > 0, \tag{3.2.4}$$

$$\Theta(z,t) \to 0, \; z \to \infty, \; t > 0, \tag{3.2.5}$$

$$\Theta(z,0) = 0, \; z \geq 0, \tag{3.2.6}$$

przy czym ρ, c to odpowiednio gęstość i ciepło właściwe materiału.

Wprowadzono następujące bezwymiarowe zmienne i parametry:

$$\zeta = \frac{z}{a}, \; \gamma = \frac{\gamma^*}{a}, \; \tau = \frac{kt}{a^2}, \; k = \frac{K_0}{c\rho}, \; q^* = \frac{q}{q_0}, \; \Theta^* = \frac{\Theta}{\Theta_0}, \; \Theta_0 = \frac{q_0 a}{K_0}, \tag{3.2.7}$$

gdzie q_0 – nominalna wartość intensywności strumienia ciepła.

Z uwzględnieniem oznaczeń (3.2.7) zagadnienie (3.2.3)–(3.2.6) zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2 \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} + \gamma^* \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} - e^{-\gamma^* \zeta} \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau} = 0, \; \zeta > 0, \; \tau > 0, \tag{3.2.8}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0} = -q^*(\tau)\,,\ \tau>0\,, \tag{3.2.9}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\to 0\,,\ \zeta\to\infty\,,\ \tau>0\,, \tag{3.2.10}$$

$$\Theta^*(\zeta,0)=0\,,\ \zeta\geq 0\,. \tag{3.2.11}$$

Stosując do początkowo-brzegowego zagadnienia (3.2.8)–(3.2.11) transformatę całkową Laplace'a (3.1.20), otrzymano:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}+\gamma_1^*\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,\tau)}{d\zeta}-pe^{-\gamma_1^*\zeta}\overline{\Theta}^*(\xi,p)=0\,,\ \zeta>0\,, \tag{3.2.12}$$

$$\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^+} = -\overline{q}^*(p)\,, \tag{3.2.13}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)\to 0\,,\ \zeta\to\infty\,, \tag{3.2.14}$$

gdzie:

$$\overline{q}^*(p)=L[q^*(\tau);p]\,. \tag{3.2.15}$$

Najpierw rozpatrzono przypadek stałego profilu czasowego intensywności strumienia ciepła $q^*(\tau)=1$ ($\overline{q}^*(p)=p^{-1}$). Wówczas rozwiązanie zagadnienia brzegowego (3.2.12)–(3.2.14) ma postać:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=e^{-\gamma_1^*\zeta/2}\frac{\varphi(\zeta,p)}{\Phi(p)}\,,\ \zeta\geq 0\,, \tag{3.2.16}$$

gdzie:

$$\varphi(\zeta,p)=\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma_1^*}\sqrt{p}\,e^{-\gamma_1^*\zeta/2}\right),\ \Phi(p)=p\sqrt{p}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma_1^*}\sqrt{p}\right), \tag{3.2.17}$$

przy czym $\mathrm{I}_k(x)$, $k=0;1$ to zmodyfikowane funkcje Bessela pierwszego rodzaju [2].

Różniczkując funkcję (3.2.17) z uwzględnieniem związku $\mathrm{I}_0'(x) = \mathrm{I}_1(x)$, znaleziono:

$$\Phi'(p) = \frac{3}{2}\sqrt{p}\,\mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma_1^*}\sqrt{p}\right) + \frac{p}{\gamma_1^*}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma_1^*}\sqrt{p}\right). \tag{3.2.18}$$

Stosując szczegółowo opisaną w rozdziale 2 technikę przejścia z przestrzeni transformat do przestrzeni oryginałów w rozwiązaniu (3.2.16)–(3.2.18), otrzymano:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = e^{-\frac{1}{2}\gamma_1^*\zeta}\left[\lim_{p\to 0}\frac{\varphi(\zeta,p)p}{\Phi(p)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(\zeta,p_n)}{\Phi'(p_n)}e^{p_n\tau}\right],\ \zeta \geq 0,\ \tau \geq 0, \tag{3.2.19}$$

gdzie:

$$\mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma_1^*}\sqrt{p_n}\right) \equiv 0,\ n = 1;2;\dots. \tag{3.2.20}$$

Korzystając z rozkładów zmodyfikowanych funkcji Bessela (2.1.49) i ograniczając się w nich pierwszymi składnikami, otrzymano następującą postać funkcji (3.2.17), przy małych wartościach parametru p:

$$\varphi(\zeta,p) \cong \frac{1}{\gamma_1^*}e^{-\gamma_1^*\zeta/2}\sqrt{p}\ ,\ \Phi(p) \cong p\sqrt{p}\,. \tag{3.2.21}$$

Z uwzględnieniem asymptotyk (3.2.21) oraz związków (2.1.57) rozwiązanie (3.2.19), (3.2.20) zapisano w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2}\left[e^{-\gamma^*\zeta/2} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma^*\zeta/2})}{\mu_n^2\mathrm{J}_1(\mu_n)}e^{-\lambda_n\tau}\right],\ \zeta \geq 0,\ \tau \geq 0, \tag{3.2.22}$$

gdzie:

$$\lambda_n = (0{,}5\,\gamma^*\mu_n)^2,\ \mathrm{J}_0(\mu_n) \equiv 0,\ n = 1;2;\dots. \tag{3.2.23}$$

Bezwymiarowy przyrost temperatury nagrzewanej powierzchni półprzestrzeni otrzymano, podstawiając $\zeta = 0$ w rozwiązaniu (3.2.22)–(3.2.23):

$$\Theta^*(\tau) \equiv \Theta^*(0,\tau) = \frac{1}{\gamma^*}\left(1 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n\tau}}{\mu_n^{\ 2}}\right),\ \tau \geq 0\,. \tag{3.2.24}$$

Przeprowadzono weryfikację otrzymanego rozwiązania poprzez sprawdzenie spełniania przez niego warunków brzegowych (3.2.9), (3.2.10) oraz warunku początkowego (3.2.11). W tym celu, różniczkując rozwiązanie (3.2.22) po zmiennej przestrzennej ζ z uwzględnieniem związku (2.1.57), znaleziono:

$$\frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} = -e^{-\gamma^*\zeta}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_0(\mu_n e^{-\gamma^*\zeta/2})}{\mu_n \mathrm{J}_1(\mu_n)} e^{-\lambda_n \tau}\right],\ \zeta \geq 0\,,\ \tau \geq 0\,. \qquad (3.2.25)$$

Przechodząc we wzorze (3.2.25) do granicy $\zeta \to 0$, z uwzględnieniem tego, że μ_n są to pierwiastki równania (3.2.23), otrzymano:

$$\left.\frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0^+} = -1\,, \qquad (3.2.26)$$

co potwierdza spełnienie warunku brzegowego (3.2.9). Jednocześnie, przechodząc w rozwiązaniu (3.2.22) do granicy $\zeta \to \infty$, uzyskujemy potwierdzenie spełnienia warunku (3.2.10) zanikania przyrostu temperatury. Wykonanie warunku początkowego (3.2.11) potwierdzono numerycznie.

Co istotne, jak wynika ze wzoru (3.2.22), na nagrzewanej powierzchni $\zeta = 0$ w początkowej chwili $\tau = 0$ bezwymiarowy przyrost temperatury będzie zerowy, jeżeli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n{}^2} = \frac{1}{4}\,. \qquad (3.2.27)$$

Weryfikacja numeryczna wzoru (3.2.27) wykazała, że suma 70 pierwszych składników szeregu wynosi 0,249.

Pomimo uzyskania dokładnego rozwiązania (3.2.22), otrzymano również odpowiednie asymptotyczne rozwiązania zagadnienia przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera (bezwymiarowego czasu) τ.

Małe wartości τ (duże wartości parametru p)

Uwzględniając we wzorach (3.2.17) i (3.2.18) asymptotyki zmodyfikowanych funkcji Bessela przy dużych wartościach argumentu (2.1.79), transformowane rozwiązanie (3.2.16) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = e^{-\gamma^*\zeta/4}\,\frac{e^{-b\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}\,,\ b = \frac{2}{\gamma^*}\left(1 - e^{-\gamma^*\zeta/2}\right),\ \zeta \geq 0\,. \qquad (3.2.28)$$

Za pomocą związku [8]

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-b\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}};\tau\right]=2\sqrt{\tau}\ \text{ierfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right) \tag{3.2.29}$$

ze wzoru (3.2.28) otrzymano następną postać asymptotyki bezwymiarowego przyrostu temperatury w początkowych chwilach procesu nagrzewania:

$$\Theta^{*}(\zeta,\tau)\cong 2e^{-\gamma^{*}\zeta/4}\sqrt{\tau}\ \text{ierfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \zeta\geq 0,\ 0\leq\tau<<1. \tag{3.2.30}$$

Przy $\zeta=0$ z rozwiązania (3.2.30) dostajemy znany rezultat dla ewolucji temperatury nagrzewanej powierzchni jednorodnej półprzestrzeni [22]:

$$\Theta^{*}(\tau)\cong 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}},\ 0\leq\tau<<1. \tag{3.2.31}$$

Duże wartości τ (małe wartości parametru p)

Z uwzględnieniem dwóch pierwszych składników w rozkładach (2.1.49) ze wzorów (3.2.16)–(3.2.18) otrzymano:

$$\overline{\Theta}^{*}(\zeta,p)\cong\frac{e^{-\gamma^{*}\zeta}}{\gamma^{*}}\left[\frac{1}{p}-\left(1-\frac{1}{2}e^{-\gamma^{*}\zeta}\right)\frac{1}{(\gamma^{*2}+p)}\right],\ \zeta\geq 0. \tag{3.2.32}$$

Korzystając z następujących związków [8]:

$$L^{-1}[p^{-1};\tau]=1,\ L^{-1}[(\gamma^{*2}+p)^{-1};\tau]=e^{-\gamma^{*2}\tau}, \tag{3.2.33}$$

z transformaty (3.2.32) otrzymano asymptotyczne rozwiązanie dla bezwymiarowego przyrostu temperatury przy dużych wartościach czasu:

$$\Theta^{*}(\zeta,\tau)\cong\frac{e^{-\gamma^{*}\zeta}}{\gamma^{*}}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}e^{-\gamma^{*}\zeta}\right)e^{-\gamma^{*}\tau}\right],\ \zeta\geq 0,\ \tau>>1. \tag{3.2.34}$$

Podstawiając we wzorze (3.2.34) $\zeta=0$, wyznaczono przyrost temperatury nagrzewanej powierzchni w czasie:

$$\Theta^{*}(\tau)\cong\frac{1}{\gamma^{*}}\left(1-\frac{1}{2}e^{-\gamma^{*}\tau}\right),\ \tau>>1. \tag{3.2.35}$$

Zaprezentowane powyżej rozwiązania dokładne (3.2.22) oraz asymptotyczne (3.2.30) i (3.2.34) otrzymano przy niezmiennej w czasie intensywności strumienia ciepła. Następnie rozpatrzono nagrzewanie powierzchni półprzestrzeni strumieniem ciepła o liniowo zmniejszającej się z czasem intensywności (3.1.18). Odpowiedni bezwymiarowy przyrost temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ można zaś znaleźć na podstawie twierdzenia Duhamela (3.1.83), w którym $\Theta^*(\zeta,\tau)$ oznacza przyrost bezwymiarowej temperatury (3.2.22), (3.2.23). Podstawiając funkcje $q^*(\tau)$ (3.1.18) oraz $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (3.2.22) pod znak całki w prawej stronie wzoru (3.1.83), otrzymano:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)=\frac{1}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2}\left[q^*(\tau)e^{-\gamma^*\zeta/2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma^*\zeta/2})}{\mu_n^2\mathrm{J}_1(\mu_n)}G_n(\tau)\right],$$

$$\zeta\geq 0,\quad 0\leq\tau\leq\tau_s, \tag{3.2.36}$$

gdzie:

$$G_n(\tau)=e^{-\lambda_n\tau}-\frac{(1-e^{-\lambda_n\tau})}{\lambda_n\tau_s}, \tag{3.2.37}$$

przy czym współczynniki λ_n oraz liczby μ_n, $n=1;2;...$ wyznaczono ze wzoru (3.2.23).

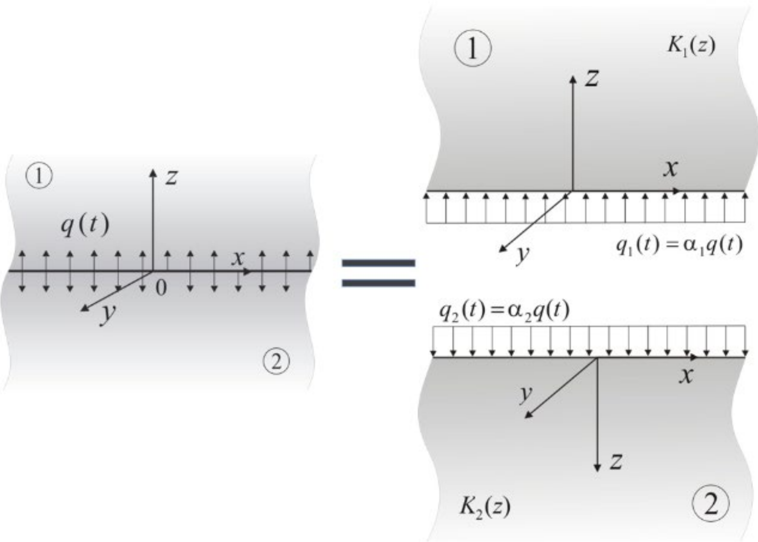
Podstawiając $\zeta=0$ w rozwiązaniu (3.2.36), otrzymano wzór do wyznaczenia ewolucji bezwymiarowego przyrostu temperatury na nagrzewanej powierzchni w postaci:

$$\hat{\Theta}^*(\tau)=\frac{1}{\gamma^*}\left[q^*(\tau)-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(\tau)}{\mu_n^2}\right],\ 0\leq\tau\leq\tau_s. \tag{3.2.38}$$

3.2.2. Współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła

Otrzymane w poprzednim podrozdziale 3.2.1 rezultaty uogólniono na przypadek dwóch (l = 1;2) półprzestrzeni wykonanych z FGM o współczynniku przewodzenia ciepła eksponencjalnie zwiększającym się wraz z oddalaniem od powierzchni z = 0 (rysunek 3.12):

$$K_l(z)=K_{l,0}e^{\gamma_l z},\ z\geq 0,\ K_{l,0}\equiv K_l(0),\ \gamma_l>0,\ l=1;2. \tag{3.2.39}$$



Rysunek 3.12. Schemat rozdzielenia elementów pary ciernej

Powierzchnie z = 0 każdej półprzestrzeni nagrzewano odpowiednio strumieniem ciepła o intensywności:

$$q_l(t)=\alpha_l q(t)\,,\ 0\le t\le t_s\,,\ l=1;2\,, \tag{3.2.40}$$

gdzie:

$$\alpha_1=\alpha\,,\ \alpha_2=1-\alpha\,, \tag{3.2.41}$$

przy czym α to poszukiwany współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła.

Na podstawie rozwiązania (3.2.36), (3.2.37) pole temperatury w każdej półprzestrzeni nagrzewanej odpowiednio strumieniami ciepła o intensywności (3.2.40)–(3.2.41) zapisano w postaci:

$$T_l(z,t)=T_0+\Theta_{l,0}\hat{\Theta}_l^*(\zeta_l,\tau^*)\,,\ z\ge 0\,,\ 0\le t\le t_s\,,\ l=1;2\,, \tag{3.2.42}$$

gdzie:

$$\hat{\Theta}_l^*(\zeta_l,\tau^*)=\frac{1}{\gamma_l^*}e^{-\gamma_l^*\zeta_l/2}\left[(1-\tau^*)e^{-\gamma_l^*\zeta_l/2}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{J}_1(\mu_n e^{-\gamma_l^*\zeta_l/2})}{\mu_n^2\mathrm{J}_1(\mu_n)}G_{l,n}(t^*)\right],$$

$$\zeta_l\ge 0,\ 0\le\tau^*\le 1, \tag{3.2.43}$$

$$G_{l,n}(t^*) = e^{-\lambda_{l,n}t^*} - \frac{(1-e^{-\lambda_{l,n}t^*})}{\lambda_{l,n}\tau_{l,s}}, \tag{3.2.44}$$

$$\lambda_{l,n} = \left(\frac{1}{2}\gamma_l^*\mu_n\right)^2 \tau_{l,s}, \tag{3.2.45}$$

$$\zeta_l = \frac{z}{a_l},\ \tau^* = \frac{t}{t_s},\ \tau_{l,s} = \frac{k_l t_s}{a_l^2},\ \gamma_l = \frac{\gamma_l^*}{a_l},\ k_l = \frac{K_{l,0}}{c_l\rho_l},\ \hat{\Theta}_l^* = \frac{\hat{\Theta}_l}{\Theta_{l,0}},$$

$$\Theta_{l,0} = \frac{\alpha_l q_0 a_l}{K_{l,0}}, \tag{3.2.46}$$

przy czym c_l, ρ_l oznaczają odpowiednio ciepło właściwe i gęstość l-tego materiału, zaś $\mu_n > 0$ – pierwiastki równania (3.2.23).

Podstawiając $z = 0$ ($\zeta_l = 0$) w rozwiązaniu (3.2.42)–(3.2.46), zmianę temperatury nagrzewanej powierzchni w czasie przedstawiono w postaci:

$$T_l(t) = T_0 + \Theta_{l,0}\hat{\Theta}_l^*(\tau^*),\ 0 \le t \le t_s,\ l = 1;2, \tag{3.2.47}$$

gdzie:

$$\hat{\Theta}_l^*(\tau^*) = \frac{1}{\gamma_l^*}\left[1 - \tau^* - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_{l,n}(\tau^*)}{\mu_n^2}\right],\ 0 \le \tau^* \le 1. \tag{3.2.48}$$

Parametry $\Theta_{l,0}$ (3.2.46) we wzorze (3.2.47) zawierają nieznany współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła α. Do jego określenia skorzystano z warunku równości uśrednionej w czasie temperatury nagrzewanych powierzchni:

$$\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2, \tag{3.2.49}$$

gdzie:

$$\tilde{T}_l = \frac{1}{t_s}\int_0^{t_s} T_l(t)dt,\ l = 1;2. \tag{3.2.50}$$

Z uwzględnieniem postaci temperatury powierzchni ciernych (3.2.47) (3.2.48) we wzorze (3.2.50) po całkowaniu znaleziono:

$$\widetilde{T}_l = T_0 + \Theta_{l,0}\widetilde{\Theta}_l^*, \; l = 1;2, \tag{3.2.51}$$

gdzie:

$$\widetilde{\Theta}_l^* = \frac{1}{2\gamma_l^*}\left(1 - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widetilde{G}_{l,n}}{\mu_n^2}\right), \tag{3.2.52}$$

$$\widetilde{G}_{l,n} = \frac{(1 - e^{-\lambda_{l,n}})}{\lambda_{l,n}}\left(1 + \frac{1}{\lambda_{l,n}\tau_{l,s}}\right) - \frac{1}{\lambda_{l,n}\tau_{l,s}}, \tag{3.2.53}$$

przy czym współczynniki $\lambda_{l,n}$ wyznaczono ze wzoru (3.2.45).

Podstawiając uśrednioną temperaturę (3.2.51)–(3.2.53) do równości (3.2.49), otrzymano:

$$\alpha = \frac{K^*}{a^*\widetilde{\Theta}^* + K^*}, \tag{3.2.54}$$

gdzie:

$$a^* = \frac{a_1}{a_2}, \; K^* = \frac{K_{1,0}}{K_{2,0}}, \; \widetilde{\Theta}^* = \frac{\widetilde{\Theta}_1^*}{\widetilde{\Theta}_2^*}. \tag{3.2.55}$$

Jeżeliby efektywne głębokości nagrzewania każdej z półprzestrzeni wyznaczać podobnie jak we wzorze (3.1.10)

$$a_l = \sqrt{3k_l t_s}, \; l = 1;2, \tag{3.2.56}$$

to z oznaczeń (3.2.46) wynika, że bezwymiarowy czas nagrzewania każdej półprzestrzeni wyniósłby $\tau_{l,s} = 3^{-1} \cong 0,333$. Jednocześnie ze wzorów (3.2.54), (3.2.55) otrzymano:

$$\alpha = \frac{K_\varepsilon}{\widetilde{\Theta}^* + K_\varepsilon}, \tag{3.2.57}$$

gdzie:

$$K_\varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}}, \; k^* = \frac{k_1}{k_2}. \tag{3.2.58}$$

Pomijając we wzorze (3.2.52) składnik zawierający szereg, tzn. przyjmując, że:

$$\widetilde{\Theta}_l^* \cong \frac{1}{2\gamma_l^*}, \; l = 1;2, \tag{3.2.59}$$

wzór (3.2.54) zapisano w postaci:

$$\alpha \cong \frac{K^*\gamma^*}{a^* + K^*\gamma^*}, \tag{3.2.60}$$

zaś wzór (3.2.57) jako:

$$\alpha \cong \frac{K_\varepsilon\gamma^*}{1 + K_\varepsilon\gamma^*}, \tag{3.2.61}$$

gdzie:

$$\gamma^* = \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*}. \tag{3.2.62}$$

Przy jednakowych efektywnych głębokościach nagrzewania (a^* = 1) oraz bezwymiarowych gradientach materiałów (γ^* = 1) ze wzoru (3.2.60) otrzymano znany rezultat Bloka [18]:

$$\alpha \cong \frac{K^*}{1 + K^*}, \tag{3.2.63}$$

natomiast ze związku (3.2.61) wzór Charrona:

$$\alpha \cong \frac{K_\varepsilon}{1 + K_\varepsilon}, \tag{3.2.64}$$

który jest często wykorzystywany w modelowaniu procesu nagrzewania ciernego jednorodnych materiałów podczas hamowania [72].

Przy jednakowych materiałach pary ciernej ($K^* = k^* = \gamma^* = a^* = 1$) wszystkie wyżej otrzymane wzory dają wartość współczynnika rozdziału ciepła $\alpha = 0,5$.

3.2.3. Analiza numeryczna

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch półograniczonych elementów wykonanych z dwuskładnikowych FGM. Pierwszy element (l = 1) tworzą tlenek glinu Al_2O_3 (podstawa, m = 0) i miedź Cu (rdzeń, m = 1), zaś drugi (l = 2) dwutlenek cyrkonu ZrO_2 (podstawa, m = 0) i stop tytanu Ti-6Al-4V (rdzeń, m = 1). Właściwości tych materiałów zamieszczono w tabeli 3.3. Pozostałe parametry operacyjne to nominalna intensywność strumienia ciepła $q_0 = 3{,}78\ \mathrm{MW\,m^{-2}}$, czas hamowania t_s = 12,1 s oraz temperatura początkowa T_0 = 20°C. Bezwymiarowe parametry gradientu materiału każdego z elementów obliczono z zależności (2.1.98), otrzymując $\gamma_1^* = 2{,}38$ i $\gamma_2^* = 1{,}26$. Ciepło właściwe oraz gęstość nagrzewanych elementów wyznaczono natomiast zgodnie z prawem mieszanin (2.3.3).

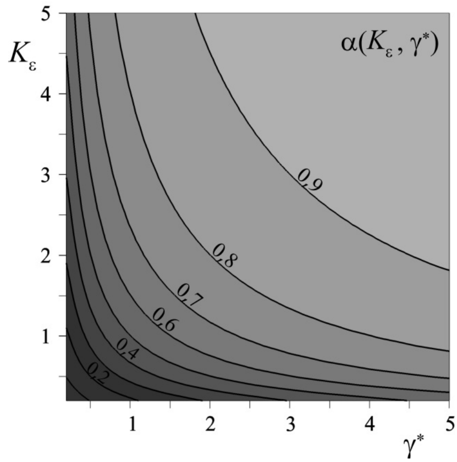
Tabela 3.3. Właściwości materiałów składowych wyznaczone ze wzorów (2.3.31)–(2.3.42)

Numer elementu l	**Numer materiału** m	**Nazwa materiału**	**Przewodność cieplna** $K_{l,m}$, $\mathrm{W\,m^{-1}K^{-1}}$	**Ciepło właściwe** $c_{l,m}$, $\mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$	**Gęstość** $\rho_{l,m}$, $\mathrm{kg\,m^{-3}}$
1	rdzeń, 1	Cu	402,65	147,35	8947,92
	powłoka, 0	Al_2O_3	37,24	727,29	3990,92
2	powłoka, 0	ZrO_2	1,94	452,83	6102,16
	rdzeń, 1	Ti-6Al-4V	6,87	538,08	4431,79

Przy jednakowym udziale objętościowym komponentów podstawy i rdzenia w obu elementach znaleziono:

$$c_1 = 437{,}32\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}},\ \rho_1 = 6469{,}42\,\mathrm{kg\,m^{-3}},\ k_1 = 1{,}32\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^2s^{-1}},$$
$$c_2 = 495{,}46\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}},\ \rho_2 = 5266{,}96\,\mathrm{kg\,m^{-3}},\ k_2 = 7{,}43\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m^2s^{-1}}.$$

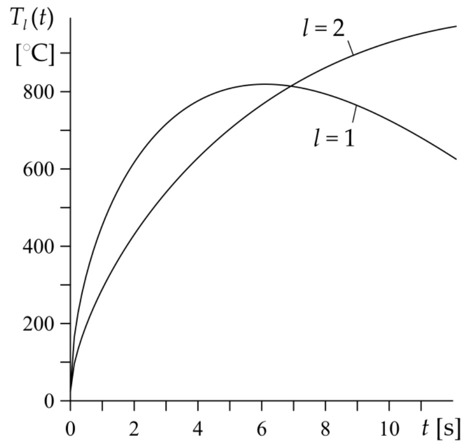
Ze wzoru (3.2.56) wyznaczono efektywne głębokości nagrzewania a_1 = 21,8 mm i a_2 = 5,2 mm, a następnie, za pomocą zależności (3.2.55), (3.2.58) i (3.2.62), obliczono wartości bezwymiarowych parametrów: a^* = 4,192, K^* = 19,196, k^* = 17,706, K_ε = 4,562, γ^* = 1,883. Pozwoliło to na oszacowanie na podstawie wzorów (3.2.52), (3.2.53) bezwymiarowych, uśrednionych w czasie nagrzewania przyrostów temperatury $\tilde{\Theta}_1^*$ = 0,329 i $\tilde{\Theta}_2^*$ = 0,703 oraz ich stosunku $\tilde{\Theta}^*$ = 0,468 (3.2.55). Podstawiając znalezione wartości parametrów kolejno do prawych stron wzorów (3.2.57) i (3.2.61), wyznaczono wartości HPR wynoszące odpowiednio α = 0,907 i α = 0,896. Niewielka różnica (0,011) otrzymanych wartości pozwoliła przeprowadzić analizę wpływu bezwymiarowych parametrów aktywności termicznej K_ε (3.2.58) i względnego gradientu materiału γ^* (3.2.62) na wartość HPR (rysunek 3.13) za pomocą wzoru (3.2.61). Przy ustalonej wartości współczynnika aktywności termicznej K_ε zwiększenie parametru γ^* powoduje wzrost ilości ciepła skierowanego do pierwszego elementu nagrzewanej pary. I odwrotnie, w miarę zwiększania aktywności termicznej nagrzewanej pary przy ustalonej wartości γ^* wzrasta ilość ciepła skierowanego do pierwszego elementu.



Rysunek 3.13. Izolinie współczynnika rozdzielenia ciepła α (3.2.61) w układzie współrzędnych (γ^*, K_ε)

Znając współczynniki α_1 = 0,896 i α_2 = 0,104 (3.2.41), ze wzorów (3.2.46) wyznaczono wartości temperatury skalującej $\Theta_{1,0}$ = 2034°C i $\Theta_{2,0}$ = 1080°C. Następnie, na podstawie rozwiązania (3.2.47), (3.2.48), znaleziono ewolucję temperatury ogrzewanej powierzchni każdego elementu (rysunek 3.14).

Ustalono, że profile czasowe temperatury elementów są różne, zwłaszcza w końcowym etapie procesu nagrzewania. Przebieg czasowy temperatury pierwszego elementu (l = 1, Al_2O_3–Cu) ma charakter typowy dla ewolucji temperatury powierzchni ciernej podczas hamowania ze stałym opóznieniem – szybki wzrost wraz z początkiem hamowania, osiągnięcie wartości maksymalnej w około połowie czasu trwania procesu oraz następnie obniżenie trwające do chwili zatrzymania. W elemencie drugim (l = 2, ZrO_2–Ti-6Al-4V) wzrost temperatury nagrzewanej powierzchni trwa natomiast od początkowej do końcowej chwili procesu. Na takie zachowanie temperatury decydujący wpływ mają właściwości cieplno-fizyczne materiałów składowych każdego elementu. Wynika to z faktu, że materiały obu komponentów elementu pierwszego posiadają znacząco wiekszą zdolność do odprowadzania ciepła z nagrzewanej powierzchni niż materiały elementu drugiego (tabela 3.3). Potwierdzają to również wartości współczyników α_1 = 0896 i α_2 = 0,104 świadczące o tym, że pierwszy element pochłania prawie 90%, zaś drugi tylko nieco ponad 10% całej intensywności strumienia ciepła q. Niskie zdolności odprowadzania ciepła materiałów drugiego elementu, w szczególności dwutlenku cyrkonu, powodują, że nawet przy liniowo zmniejszającej się w czasie intensywności strumienia ciepła temperatura jego nagrzewanej powierzchni wciąż rośnie.



Rysunek 3.14. Ewolucja temperatury T_l, l = 1;2 (3.2.47), (3.2.48) nagrzewanych powierzchni z = 0 półprzestrzeni wykonanych z FGM

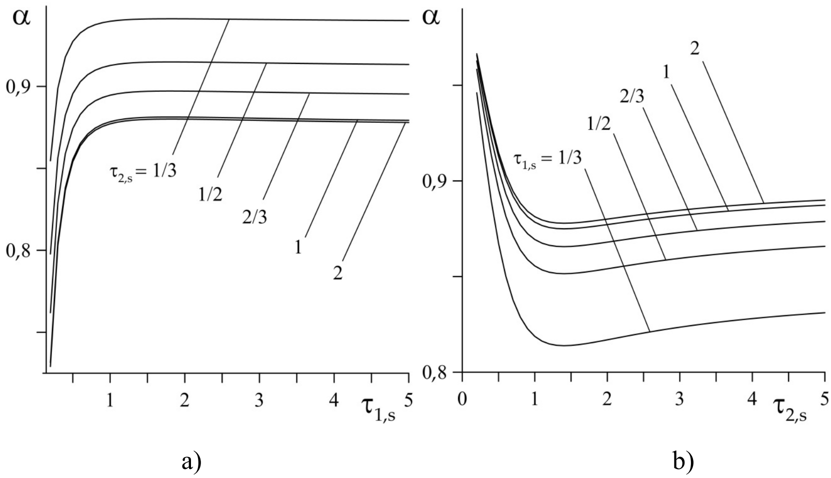
Zaprezentowane na rysunkach 3.13 i 3.14 rezultaty otrzymano z wykorzystaniem wartości HPR α = 0,896, znalezionej ze wzoru (3.2.61). Przybliżony (3.2.61), jak również dokładny, wzór (3.2.57) do obliczenia α otrzymano przy założeniu, że efektywne głębokości nagrzewania a_l elementów wyznaczono z empirycznego wzoru (3.2.56), a odpowiednie wartości liczb Fouriera $\tau_{l,s}$, l = 1;2 (3.2.46) były jednakowe i równe 1/3. Należy zaznaczyć, że stosowanie wzoru (3.2.56) przy wyznaczaniu HPR jest uzasadnione w przypadku, gdy grubość elementu nagrzewanej pary jest większa od odpowiedniej wartości a_l, l = 1;2 [86]. W przypadku ogólnym do wyznaczania trybu temperaturowego hamulca na etapie projektowania w charakterze parametrów wejściowych przyjmowane są liczby Fouriera $\tau_{l,s}$, l = 1;2, zaś efektywne głębokości nagrzewania znajdowane na podstawie związku (3.2.56) w postaci:

$$a_l = \sqrt{\frac{k_l t_s}{\tau_{l,s}}}, \; l = 1;2 . \tag{3.2.65}$$

Przy uwzględnieniu wzoru (3.2.65) dla wybranej pary elementów i ustalonym czasie nagrzewania (hamowania) t_s = 12,1 s względną głębokość nagrzewania a^* (3.2.55) wyznacza się ze wzoru:

$$a^* = \sqrt{\frac{k^*}{\tau_s^*}}, \; \tau_s^* = \frac{\tau_{1,s}}{\tau_{2,s}}, \tag{3.2.66}$$

gdzie k^* to względna dyfuzyjność cieplna materiałów (3.2.58).



Rysunek 3.15. Zależność współczynnika rozdzielenia strumieni ciepła α (3.2.54) od: a) liczby Fouriera $\tau_{1,s}$ dla różnych wartości $\tau_{2,s}$, b) liczby Fouriera $\tau_{2,s}$ dla różnych wartości $\tau_{1,s}$

Traktując liczby Fouriera $\tau_{l,s}$, l = 1;2 (3.2.46) jako niezależne zmienne we wzorze (3.2.53), zbadano ich wpływ na HPR α (3.2.54) przy ustalonych wcześniej dla zadanej pary elementów wartościach bezwymiarowych parametrów K^* = 19,196, k^* = 17,706, γ_1^* = 2,38 i γ_2^* = 1,26. Zawarty we wzorze (3.2.54) bezwymiarowy parametr $\tilde{\Theta}^*$ (3.2.55) wyznaczono ze wzorów (3.2.52), (3.2.53), zaś w celu znalezienia a^* korzystano ze wzoru (3.2.55). Rezultaty obliczeń zaprezentowano na rysunku 3.15.

Przy ustalonej wartości $\tau_{2,s}$ HPR α szybko rośnie wraz ze zwiększaniem $\tau_{1,s}$, osiągając przy $\tau_{1,s} \cong$ 1,5 swoją wartość nominalną (rysunek 3.15a). Największa wartość nominalna α jest osiągana przy $\tau_{1,s}$ = 1/3, tzn. przy wyznaczeniu efektywnej głębokości nagrzewania za pomocą wzoru (3.2.56). Rezultaty otrzymane przy $\tau_{2,s}=1$ i $\tau_{2,s}=2$ praktycznie się pokrywają. Inny charakter zmiany HPR α ma miejsce przy ustalonej wartości liczby Fouriera $\tau_{1,s}$ i zwiększających się wartościach $\tau_{2,s}$ (rysunek 3.15b). Wraz ze zwiększaniem się $\tau_{2,s}$, ilość ciepła absorbowanego przez pierwszy element maleje, osiągając wartość minimalną przy $\tau_{2,s}\cong 1{,}5$. Kolejne zwiększenie $\tau_{2,s}$ powoduje natomiast nieznaczny wzrost α.

3.2.4. Podsumowanie

W podrozdziale zaproponowano metodykę otrzymywania wzorów do wyznaczania współczynnika rozdzielenia ciepła (HPR) w układach hamulcowych, w których na elementy cierne stosowano FGM. Podstawę tej metodyki stanowi dokładne rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego dla półprzestrzeni wykonanej z FGM, nagrzewanej na swojej powierzchni strumieniem ciepła o intensywności liniowo zmniejszającej się z czasem i zawierającej nieznany a *priori* HPR. Do jego wyznaczenia wykorzystano warunek równości uśrednionej w czasie temperatury nagrzewanych powierzchni dwóch różnorodnych półprzestrzeni. W wyniku przeprowadzonej analizy numerycznej ustalono, że:

1. Zwiększenie aktywności termicznej oraz gradientu materiałów nagrzewanej pary powoduje zwiększenie HPR.
2. Decydujący wpływ na ewolucję temperatury w dwuskładnikowej parze Al_2O_3–Cu i ZrO_2–Ti-6Al-4V mają cieplno-fizyczne właściwości materiałów komponentowych.
3. Schemat opracowywania map dla zadanej pary elementów FGM pozwalający na szybkie oszacowanie HPR w zależności od takich parametrów wejściowych, jak ich liczby Fouriera, jest potrzebny w przypadku zastosowania materiałów FGM i wykazuje szerokie zastosowanie w procesie konstruowania tarczowych układów hamulcowych w celu uzyskiwania odpowiednich rezultatów dla materiałów jednorodnych.

Należy zaznaczyć, że otrzymane wzory do wyznaczenia HPR wymagają w przyszłości weryfikacji za pomocą odpowiednich danych doświadczalnych. Pozwoliłoby to na ustalenie granic stosowalności tych wzorów. Natomiast już na tym etapie o możliwości praktycznego wykorzystania otrzymanych wzorów do wyznaczania HPR świadczy to, że po pierwsze, do ich otrzymania stosowano klasyczną metodykę aprobowaną w przypadku materiałów jednorodnych, a po drugie, potwierdzone eksperymentalnie wzory dla materiałów jednorodnych można uzyskać z wyprowadzonych w tym podrozdziale odpowiednich wzorów dla FGM w wyniku odpowiednich przejść granicznych.

Istotnym elementem najbardziej ogólnego wzoru (3.2.54) do wyznaczania HPR są uśrednione w czasie nagrzewania bezwymiarowe przyrosty temperatury

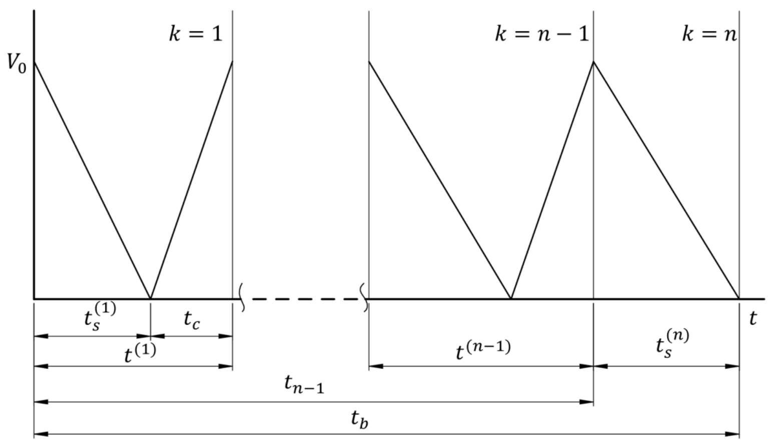
(3.2.52), (3.2.53), otrzymane w przypadku liniowo zmniejszającej się z czasem intensywności strumienia ciepła. Jest to dość często rozpatrywany przypadek przy obliczeniach temperatury w układach hamulcowych pracujących w trybie szybkiego (gwałtownego) zwiększenia ciśnienia kontaktowego od zera do wartości nominalnej. Klasyfikację różnych profili czasowych intensywności strumienia ciepła bez i z uwzględnieniem czasu narastania ciśnienia kontaktowego dla materiałów jednorodnych zawarto w pracach [119, 143].

Wyniki zaprezentowane w podrozdziale 3.2 zostały opublikowane w pracy [156].

3.3. Nagrzewanie tarciowe podczas powtórno--krótkoterminowego trybu pracy hamulca

3.3.1. Schemat hamowania oraz założenia modelowe

Praca układu hamulcowego podczas powtórno-krótkoterminowego (PKT) (ang. *repetitive short-term*, dalej RST) trybu polega na kolejnym wykonaniu n cykli hamowania. Każdy z pełnych cykli $k = 1; 2; \ldots; (n - 1)$ składa się z dwóch etapów – hamowania i rozpędzania, natomiast ostatni niepełny n-ty cykl zawiera tylko etap hamowania [25, 152].



Rysunek 3.16. Schemat hamowania w powtórno-krótkoterminowym trybie hamowania [152]

Podczas etapów hamowania, przy stałym ciśnieniu kontaktowym p_0, prędkość $V^{(k)}$ układu zmniejsza się liniowo od wartości początkowej V_0 do zera w chwili zatrzymania $t = t_s^{(k)}$:

$$V^{(k)}(t) = V_0 V^{*(k)}(t), \; V^{*(k)}(t) = 1 - \frac{t}{t_s^{(k)}}, \; 0 \le t \le t_s^{(k)}, \tag{3.3.1}$$

$$t_s^{(k)} = \frac{2W_0}{q_0^{(k)} A_a}, \; k = 1;2;...;n, \tag{3.3.2}$$

gdzie:

A_a – pole nominalnego kontaktu elementów ciernych,

W_0 – początkowa energia kinetyczna układu,

$q_0^{(k)}$ – nominalna wartość gęstości mocy tarcia.

Po każdym zatrzymaniu następuje etap rozpędzania polegający na ponownym zwiększaniu prędkości do wartości początkowej V_0 w czasie $t = t_c$:

$$V^{(k)}(t) = V_0 V^{*(k)}(t), \; t_s^{(k)} \le t \le t_k = t_s^{(k)} + t_c, \tag{3.3.3}$$

$$V^{*(k)}(t) = \frac{t - t_s^{(k)}}{t_c}, \; k = 1;2;...;(n-1). \tag{3.3.4}$$

Pełny czas trwania PKT trybu pracy hamulca wynosi:

$$t_b = t_s^{(1)} + t_s^{(2)} + ... + t_s^{(n)} + (n-1)t_c. \tag{3.3.5}$$

Etapom hamowania towarzyszy intensywne nagrzewanie tarciowe układów ciernych typu nakładka-tarcza, szczęka-bęben itd. Przed wyznaczeniem powstałego w ten sposób nieustalonego pola temperatury przyjęto następujące założenia upraszczające:

1. Początkowa temperatura pary ciernej w chwili rozpoczęcia kolejnego hamowania równa się średniej objętościowej temperaturze układu.
2. W wyniku oddziaływania sił tarcia w obszarze kontaktu elementów generowane jest ciepło absorbowane przez nie w kierunku normalnym do powierzchni ciernej. Kontakt cieplny tarcia elementów podczas nagrzewania jest doskonały.
3. Niewymuszone chłodzenie konwekcyjne układu na etapach hamowania pomijano.

Przy uwzględnieniu powyższych założeń parę cierną tworzą dwie półprzestrzenie $z \geq 0$ i $z \leq 0$, a poszukiwane nieustalone pole temperatury jest jednowymiarowe, tzn. $T = T(z,t)$. W dalszej części tekstu wszystkie zmienne i parametry odnoszące się do półprzestrzeni $z \geq 0$ będą oznaczane dolnym indeksem $l = 1$, a do półprzestrzeni $z \leq 0$ – dolnym indeksem $l = 2$.

Półprzestrzeń $z \geq 0$ wykonano z dwuskładnikowego (podstawa i rdzeń) FGM. Niech $K_{1,m}$, $c_{1,m}$, $\rho_{1,m}$ będą to odpowiednio przewodność cieplna, ciepło właściwe oraz gęstość materiałów podstawy ($m = 1$) i rdzenia ($m = 2$). Współczynnik przewodności cieplnej FGM zwiększa się eksponencjalnie (z parametrem gradientu $\gamma \geq 0$) w kierunku normalnym do powierzchni roboczej podstawy. Jednorodny materiał półprzestrzeni $z \leq 0$ posiada natomiast przewodność cieplną K_2, ciepło właściwe c_2 i gęstość ρ_2.

Dodatkowo założono, że materiały obu elementów oraz współczynnik tarcia f są wrażliwe termicznie:

$$K_{1,m}(T) = K_{1,m}^{(0)} K_{1,m}^{*}(T), \; c_{1,m}(T) = c_{1,m}^{(0)} c_{1,m}^{*}(T),$$

$$\rho_{1,m}(T) = \rho_{1,m}^{(0)} \rho_{1,m}^{*}(T), \; m = 1;2, \tag{3.3.6}$$

$$K_{1,m}^{(0)} \equiv K_{1,m}(T_0), \; c_{1,m}^{(0)} \equiv c_{1,m}(T_0), \; \rho_{1,m}^{(0)} \equiv \rho_{1,m}(T_0), \; m = 1;2, \tag{3.3.7}$$

$$K_2(T) = K_2^{(0)} K_2^{*}(T), \; c_2(T) = c_2^{(0)} c_2^{*}(T), \; \rho_2(T) = \rho_2^{(0)} \rho_2^{*}(T), \tag{3.3.8}$$

$$K_2^{(0)} \equiv K_2(T_0), \; c_2^{(0)} \equiv c_2(T_0), \; \rho_2^{(0)} \equiv \rho_2(T_0), \tag{3.3.9}$$

$$f(T) = f_0 f^{*}(T), \; f_0 \equiv f(T_0), \tag{3.3.10}$$

przy czym T_0 to początkowa temperatura układu, zaś górnym symbolem '*' oznaczono odpowiednie bezwymiarowe funkcje temperatury. Zależności typu (3.3.6)–(3.3.10) otrzymuje się zwykle w wyniku obróbki odpowiednich danych doświadczalnych [26].

3.3.2. Algorytm wyznaczania ewolucji temperatury powierzchni ciernych

Kluczowym elementem proponowanego modelu matematycznego jest rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia cieplnego tarcia podczas wykonywania poszczególnych hamowań. Na podstawie powyższych założeń w takim przypadku można przyjąć nieliniowe początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia dla dwóch półograniczonych ciał, z których jedno wykonano z FGM, a drugie z materiału jednorodnego. Niestety istotna nieliniowość tego typu zagadnienia, spowodowana wrażliwością termiczną współczynnika tarcia oraz właściwości mechanicznych i cieplnych, skutkuje tym, że jego rozwiązanie otrzymuje się za pomocą metod numerycznych [45, 140].

Znane jest także inne podejście, polegające na adaptacji odpowiedniego rozwiązania zagadnienia liniowego do wyznaczania temperatury wrażliwego termicznie układu hamulcowego [25]. Realizowano je w przypadku pary ciernej wykonanej z materiałów jednorodnych [152]. W niniejszym podrozdziale opracowano odpowiedni algorytm do wyznaczania temperatury wrażliwego termicznie układu hamulcowego, w którym, jak zaznaczono wyżej, jeden element wykonano z FGM, zaś drugi z materiału jednorodnego. Dla takiej pary ciernej w podrozdziale 3.1 otrzymano dokładne rozwiązanie liniowego (przy niezmiennych właściwościach cieplnofizycznych oraz współczynniku tarcia) zagadnienia cieplnego tarcia podczas hamowania pojedynczego ze stałym opóźnieniem. Na podstawie takiego rozwiązania (3.1.52), (3.1.53) ewolucję temperatury powierzchni ciernych układu pracującego w trybie PKT podczas kolejnego k-tego hamowania wyznaczono ze wzorów:

$$T^{(k)}(t) = T + \Theta^{(k)}\Theta^{*(k)}(\tau), \quad 0 \le t \le t_s^{(k)}, \quad k = 1;2;\ldots;n, \tag{3.3.11}$$

gdzie:

$$\Theta^{(k)} = \frac{q_0^{(k)} a^{(k)}}{K_{1,1}^{(k)}}, \tag{3.3.12}$$

$$\Theta^{*(k)}(\tau) = \frac{1}{\gamma^{*(k)}}\left[1 - \frac{4}{\pi}\int_0^\infty G^{(k)}(x)P^{(k)}(\tau,x)dx\right], \quad 0 \le \tau \le \tau_s^{(k)}, \tag{3.3.13}$$

$$G^{(k)}(x) = \frac{K_\varepsilon^{(k)}[\mathrm{J}_1(x)]^2}{x^2\{[\mathrm{J}_0(x)]^2 + [K_\varepsilon^{(k)}\mathrm{J}_1(x)]^2\}}, \tag{3.3.14}$$

$$P^{(k)}(\tau,x) = e^{-X_k\tau} - \frac{(1-e^{-X_k\tau})}{X_k\tau_s^{(k)}}, \quad X_k = \frac{(\gamma^{*(k)}x)^2}{4}, \tag{3.3.15}$$

$$\tau = \frac{k_1^{(k)}t}{(a^{(k)})^2}, \quad \tau_s^{(k)} = \frac{k_1^{(k)}t_s^{(k)}}{(a^{(k)})^2}, \quad k_1^{(k)} = \frac{K_{1,1}^{(k)}}{\rho_1^{(k)}c_1^{(k)}}, \quad k_2^{(k)} = \frac{K_2^{(k)}}{\rho_2^{(k)}c_2^{(k)}}, \tag{3.3.16}$$

$$c_1^{(k)} = \mathrm{V_c}c_{1,1}^{(k)} + (1-\mathrm{V_c})c_{1,2}^{(k)}, \quad \rho_1^{(k)} = \mathrm{V_c}\rho_{1,1}^{(k)} + (1-\mathrm{V_c})\rho_{1,2}^{(k)}, \quad 0 \le \mathrm{V_c} \le 1, \tag{3.3.17}$$

$$K_{\varepsilon}^{(k)} = \frac{K^{*(k)}}{\sqrt{k^{*(k)}}},\ K^{*(k)} = \frac{K_2^{(k)}}{K_{1,1}^{(k)}},\ k^{*(k)} = \frac{k_2^{(k)}}{k_{1,1}^{(k)}},\ \gamma^{*(k)} = \ln\left(\frac{K_{1,2}^{(k)}}{K_{1,1}^{(k)}}\right), \tag{3.3.18}$$

$$K_{1,m}^{(k)} \equiv K_{1,m}(\hat{T}^{(k)}),\ c_{1,m}^{(k)} \equiv c_{1,m}(\hat{T}^{(k)}),\ \rho_{1,m}^{(k)} \equiv \rho_{1,m}(\hat{T}^{(k)}),\ m = 1;2, \tag{3.3.19}$$

$$K_2^{(k)} \equiv K_2(\hat{T}^{(k)}),\ c_2^{(k)} \equiv c_2(\hat{T}^{(k)}),\ \rho_2^{(k)} \equiv \rho_2(\hat{T}^{(k)}), \tag{3.3.20}$$

$$q_0^{(k)} = f^{(k)} p_0 V_0,\ f^{(k)} \equiv f(\hat{T}^{(k)}), \tag{3.3.21}$$

$$a^{(k)} = \max(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}), \tag{3.3.22}$$

$$a_l^{(k)} = \begin{cases} d_l, a_{l,eff}^{(k)} \geq d_l, \\ a_{l,eff}^{(k)}, a_{l,eff}^{(k)} < d_l, \end{cases} \quad a_{l,eff}^{(k)} = \sqrt{3k_l^{(k)} t_s^{(k)}},\ l = 1;2, \tag{3.3.23}$$

przy czym d_l, $l = 0;1$ to grubości elementów ciernych (np. nakładki i tarczy).

Temperaturę objętościową $\hat{T}^{(k)}$ układu ciernego przed rozpoczęciem k-tego hamowania wyznaczono ze wzoru [152]:

$$T_0^{(k)} = 0{,}5(\hat{T}_0^{(k)} + \hat{T}_1^{(k)}),\ k = 1;2;...;n, \tag{3.3.24}$$

gdzie:

$$\hat{T}_i^{(k)} = T_0 + \frac{\alpha_i^{(k)} W_0}{2G_{2,i}^{(k)} c_{2,i}^{(k)}} \left(\frac{e^{-\beta_i^{(k)} t_c} - e^{-k\beta_i^{(k)} t_c}}{1 - e^{-\beta_i^{(k)} t_c}} \right),\ i = 0;\ 1, \tag{3.3.25}$$

$$\beta_i^{(k)} = \frac{hA_{\text{vent}}}{2G_{2,i}^{(k)} c_{2,i}^{(k)}}, \tag{3.3.26}$$

$$G_{2,i}^{(k)} = A_2 d_2 \rho_2^{(i,k)}, \tag{3.3.27}$$

$$c_2^{(0,k)} = c_2^{(0)},\ c_2^{(1,k)} = c_2(\hat{T}_0^{(k)}),\ \rho_2^{(0,k)} = \rho_2^{(0)},\ \rho_2^{(1,k)} = \rho_2(\hat{T}_0^{(k)}), \tag{3.3.28}$$

przy czym:
h – współczynnik konwekcyjnej wymiany ciepła z powierzchni tarczy o polu A_{vent} na etapach rozpędzania pojazdu;
$\alpha_i^{(k)}$ – współczynnik rozdzielenia strumieni ciepła, metodykę wyznaczenia którego dla pary ciernej wykonanej z FGM zaproponowano w podrozdziale 3.2.

Na podstawie wspomnianej metodyki współczynnik rozdzielenia ciepła we wzorze (3.3.25) dla rozpatrywanej pary ciernej (FGM – materiał jednorodny) wyznaczono w postaci:

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\varepsilon_i^{(k)}}{1+\varepsilon_i^{(k)}}, \ \varepsilon_i^{(k)} = 0{,}625\frac{d^* K_i^{*(k)}}{\gamma_i^{*(k)}}\sqrt{\frac{\pi}{\tau_2^{(i,k)}}}, \ k = 1;2;...;n, \ i = 0;1, \tag{3.3.29}$$

gdzie:

$$K_i^{*(k)} = \frac{K_2^{(i,k)}}{K_{1,1}^{(i,k)}}, \ \gamma_i^{*(k)} = \ln\left(\frac{K_{1,2}^{(i,k)}}{K_{1,1}^{(i,k)}}\right), \ d^* = \frac{d_1}{d_2}, \tag{3.3.30}$$

$$\tau_2^{(i,k)} = \frac{k_2^{(i,k)} t_s^{(k)}}{d_2^2}, \ k_2^{(i,k)} = \frac{K_2^{(i,k)}}{\rho_2^{(i,k)} c_2^{(i,k)}}, \tag{3.3.31}$$

$$K_{1,m}^{(0,k)} = K_{1,m}^{(0)}, \ K_{1,m}^{(1,k)} = K_{1,m}(\hat{T}_0^{(k)}), \ m = 1;2,$$

$$K_2^{(0,k)} = K_2^{(0)}, \ K_2^{(1,k)} = K_2(\hat{T}_0^{(k)}). \tag{3.3.32}$$

Należy zaznaczyć, że ze wzorów (3.3.24) i (3.3.25) wynika, iż przed rozpoczęciem pierwszego hamowania (k = 1) temperatura objętościowa $\hat{T}^{(1)}$ równa jest temperaturze początkowej układu T_0. Przed rozpoczęciem kolejnych hamowań do ustalenia temperatury objętościowej $\hat{T}^{(k)}$, k = 2;…;n pierwszą składową $\hat{T}_0^{(k)}$ we wzorze (3.3.24) wyznaczono, również korzystając z właściwości materiałów przy temperaturze początkowej T_0. Za pomocą drugiej składowej $\hat{T}_1^{(k)}$ dokonano natomiast korekty otrzymanego rezultatu poprzez uwzględnienie wrażliwości termicznej stosowanych materiałów.

3.3.3. Analiza numeryczna

Zaproponowano następujący schemat wyznaczania ewolucji temperatury powierzchni roboczych elementów wybranej pary ciernej pracującej w trybie PKT:

1. Znalezienie zależności właściwości materiałów i współczynnika tarcia od temperatury w postaci (3.3.6)–(3.3.10) na podstawie danych doświadczalnych. Ustalenie wartości właściwości materiałów $K_{1,m}^{(0)}$, $c_{1,m}^{(0)}$, $\rho_{1,m}^{(0)}$, m = 1;2 (3.3.7), $K_2^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, $\rho_2^{(0)}$ (3.3.9) oraz współczynnika tarcia f_0 (3.3.10) przy temperaturze początkowej T_0.

2. Zadanie wejściowych parametrów operacyjnych:
   p_0, V_0, T_0, W_0, n, A_a, A_{vent}, d_1, d_2, h, t_c, v.
3. Rozpoczęcie pierwszego hamowania $k = 1$.
4. Wyznaczenie średniej temperatury objętościowej $T_0^{(k)}$ (3.3.24)–(3.3.32).
5. Ustalenie wartości właściwości materiałów $K_{1,m}^{(k)}$, $c_{1,m}^{(k)}$, $\rho_{1,m}^{(k)}$, $m = 1;2$ (3.3.19), $K_2^{(k)}$, $c_2^{(k)}$, $\rho_2^{(k)}$ (3.3.20), współczynnika tarcia $f^{(k)}$ oraz gęstości mocy tarcia $q_0^{(k)}$ (3.3.21) przy temperaturze objętościowej $T_0^{(k)}$, z wykorzystaniem zależności (3.3.6)–(3.3.10).
6. Wyznaczenie czasu zatrzymania $t_s^{(k)}$ (3.3.2) i profilu czasowego prędkości $V^{(k)}(t)$, $0 \le t \le t_s^{(k)}$ (3.3.1).
7. Znalezienie ewolucji temperatury $T^{(k)}(t)$, $0 \le t \le t_s^{(k)}$ (3.3.11)–(3.3.24).
8. Przejście do kolejnego, (k + 1)-ego, etapu hamowania i powtórzenie obliczeń, począwszy od punktu 5, lub zakończenie procesu obliczeniowego po stwierdzeniu równości $k = n$.

Powyższy schemat zrealizowano dla pary ciernej, której pierwszy element wykonano z dwuskładnikowego FGM złożonego z dwutlenku cyrkonu ZrO_2 (podstawa, m = 1) i stopu tytanu Ti-6Al-4V (rdzeń, m = 2), zaś drugi z żeliwa szarego ChNMKh. Właściwości (3.3.7) i (3.3.9) tych materiałów w temperaturze początkowej T_0 = 20°C są następujące [116, 152, 156]:

<u>ZrO_2:</u>

$$K_{1,1}^{(0)} = 1{,}94\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}},\ c_{1,1}^{(0)} = 452{,}83\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}},\ \rho_{1,1}^{(0)} = 6102{,}16\,\mathrm{kg\,m^{-3}}. \tag{3.3.33}$$

<u>Ti-6Al-4V:</u>

$$K_{1,2}^{(0)} = 6{,}87\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}},\ c_{1,2}^{(0)} = 538{,}08\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}},\ \rho_{1,2}^{(0)} = 4431{,}79\,\mathrm{kg\,m^{-3}}. \tag{3.3.34}$$

<u>ChNMKh:</u>

$$K_2^{(0)} = 52{,}17\,\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}},\ c_2^{(0)} = 444{,}6\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}},\ \rho_2^{(0)} = 7100\,\mathrm{kg\,m^{-3}}. \tag{3.3.35}$$

Zmianę właściwości materiałów pod wpływem temperatury zapisano w postaci:

ZrO_2 [56, 88, 116]:

$$K_{1,1}(T) = 1{,}9365 + 0{,}7 \cdot 10^{-4} T + 0{,}5 \cdot 10^{-6} T^2 - 0{,}2 \cdot 10^{-9} T^3 , \tag{3.3.36}$$

$$c_{1,1}(T) = 437{,}96 + 0{,}7767T - 0{,}17 \cdot 10^{-2} T^2 , \tag{3.3.37}$$

$$\rho_{1,1}(T) = 6104{,}6 - 0{,}1212T - 0{,}4 \cdot 10^{-4} T^2 + 0{,}3 \cdot 10^{-7} T^3 - 0{,}1 \cdot 10^{-10} T^4 . \tag{3.3.38}$$

Ti-6Al-4V [23, 30]:

$$K_{1,2}(T) = 6{,}6926 + 8{,}9177 \cdot 10^{-3} T + 6{,}8432 \cdot 10^{-6} T^2 , \tag{3.3.39}$$

$$c_{1,2}(T) = 529{,}9316 + 0{,}4154T - 4{,}01646 \cdot 10^{-4} T^2 + 1{,}6364 \cdot 10^{-7} T^3 , \tag{3.3.40}$$

$$\rho_{1,2}(T) = 4434 - 0{,}1088T - 0{,}8 \cdot 10^{-4} T^2 + 10^{-7} T^3 - 0{,}6 \cdot 10^{-10} T^4 . \tag{3.3.41}$$

ChNMKh [28]:

$$K_2(T) = 53{,}24 - 0{,}028T , \tag{3.3.42}$$

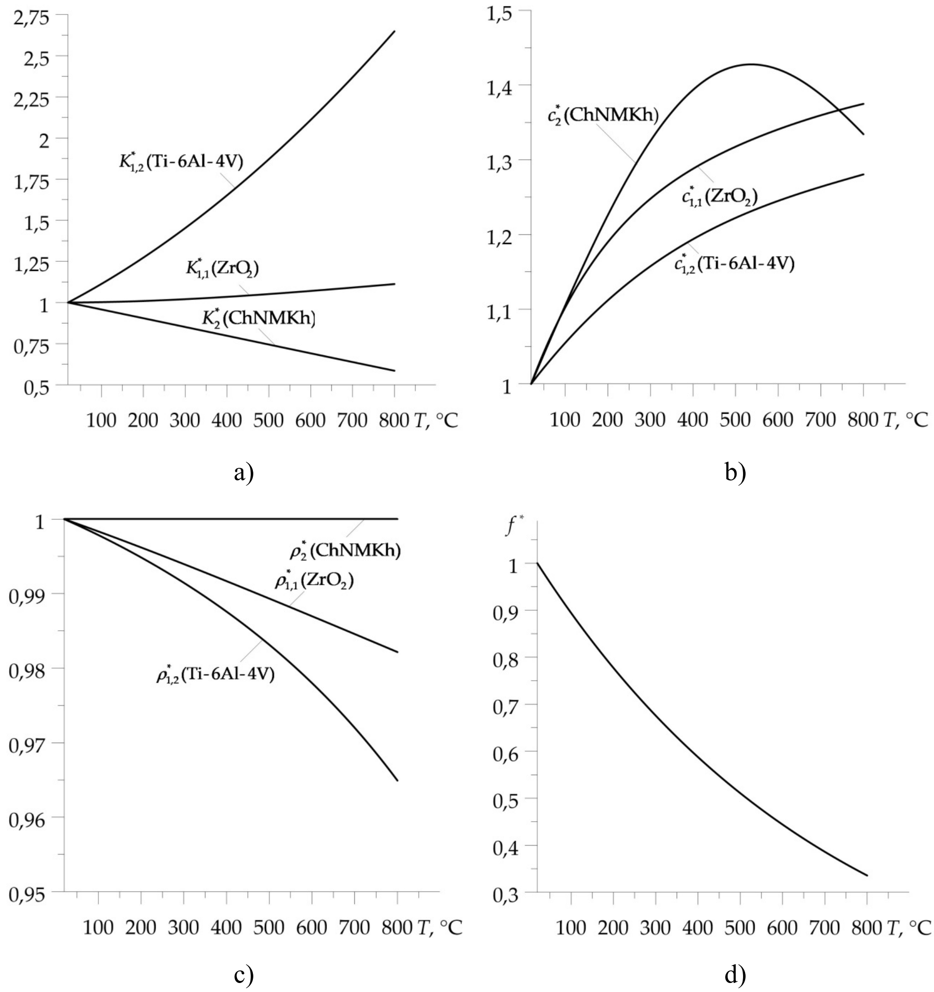
$$c_2(T) = 432{,}43 + 0{,}559T + 2{,}712 \cdot 10^{-4} T^2 + 1{,}657 \cdot 10^{-6} T^3 + 9{,}439 \cdot 10^{-10} T^4 , \tag{3.3.43}$$

$$\rho_2(T) = \rho_2^{(0)} . \tag{3.3.44}$$

Zależność współczynnika tarcia od temperatury dla rozpatrywanej pary ciernej ma postać (3.3.10) [37]:

$$f_0 = 0{,}27 ,\ f^*(T) = e^{-\kappa(T^* - 1)} ,\ T^* = T / T_0 ,\ \kappa = 0{,}7 \cdot 10^{-4} . \tag{3.3.45}$$

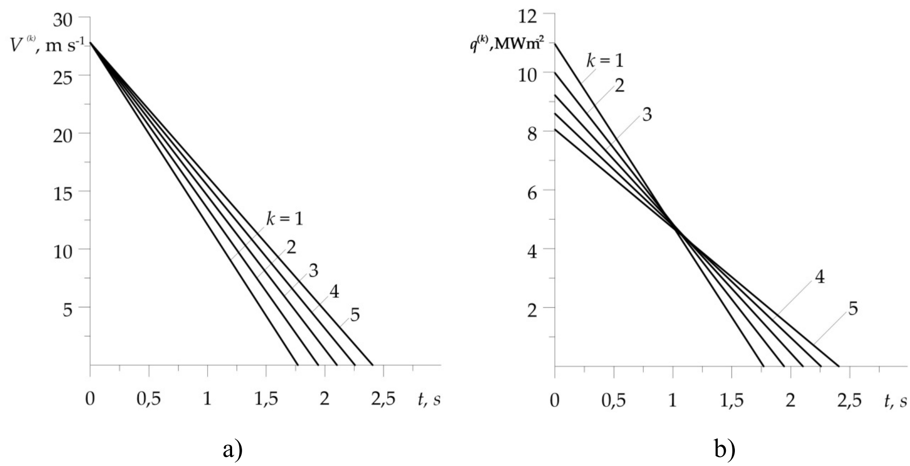
Wykresy odpowiednich bezwymiarowych funkcji: $K^*_{1,m}(T) = K_{1,m}(T) / K^{(0)}_{1,m}$, $c^*_{1,m}(T) = c_{1,m}(T) / c^{(0)}_{1,m}$, $\rho^*_{1,m}(T) = \rho_{1,m}(T) / \rho^{(0)}_{1,m}$, $m = 1; 2$, $K^*_2(T) = K_2(T) / K^{(0)}_2$, $c^*_2(T) = c_2(T) / c^{(0)}_2$, $\rho^*_2(T) = \rho_2(T) / \rho^{(0)}_2$ oraz $f^*(T)$ pokazano na rysunku 3.17.



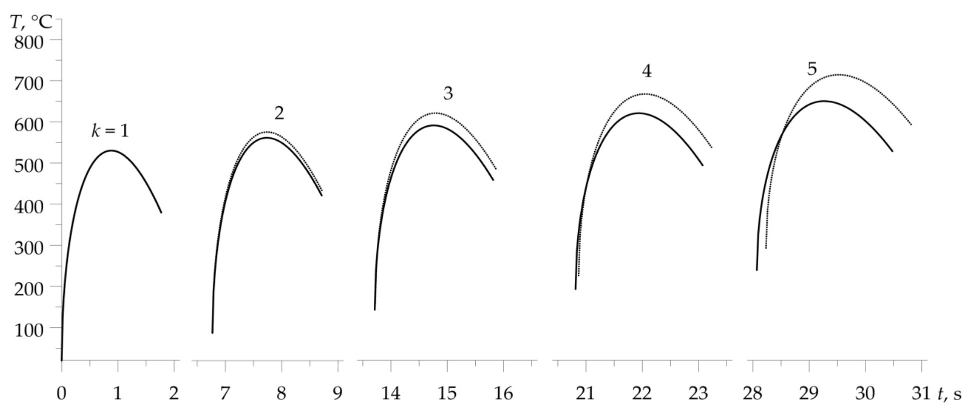
Rysunek 3.17. Zależności od temperatury T bezwymiarowych właściwości materiałów: a) przewodności cieplnej K^*, b) ciepła właściwego c^*, c) gęstości ρ^* oraz d) współczynnika tarcia f^* rozpatrywanej pary ciernej

Obliczenia wykonano przy następujących wartościach parametrów operacyjnych [152]: p_0 = 1,47 MPa, V_0 = 27,78 m s^{-1}, W_0 = 392,1 kJ, n = 5, $A_a = 4{,}05 \cdot 10^{-2}$ m^2, $A_{\text{vent}} = 4{,}44 \cdot 10^{-2}$ m^2, d_1 = 5,5 mm, d_2 = 11 mm, t_c = 5 s, h = 100 Wm^{-1}K^{-1}, V_c = 0,5.

Profile czasowe prędkości $V^{(k)}(t)$ (3.3.1), (3.3.2) oraz gęstości mocy tarcia $q^{(k)}(t) = f^{(k)} p_0 V^{(k)}(t)$, $0 \le t \le t_s^{(k)}$, $k = 1;2;\ldots;5$ zaprezentowano na rysunku 3.18. Zauważalnym efektem jest zwiększenie czasu zatrzymania wraz ze wzrostem liczby hamowań (rysunek 3.18a). Podczas każdego z pięciu hamowań intensywność wykonywanej pracy tarcia (pole pod wykresem) była jednakowa (rysunek 3.18b). Umożliwiło to przeprowadzenie porównania odpowiednich profili czasowych temperatury zaprezentowanych na rysunku 3.19. Przedstawiono na nim zmiany w czasie hamowania temperatury powierzchni ciernych $T^{(k)}(t)$ (3.3.11)–(3.3.23) znalezione z (krzywe ciągłe) i bez (krzywe kropkowane) uwzględnienia zależności (3.3.36)–(3.3.44) właściwości stosowanych materiałów od temperatury. Jednocześnie rezultaty odpowiadające krzywym kropkowanym otrzymano dla właściwości materiałów (3.3.33)–(3.3.35) przy temperaturze początkowej $T_0 = 20°C$. W obu wariantach uwzględniono temperaturowe zmiany współczynnika tarcia w postaci (3.3.45).



Rysunek 3.18. Ewolucje: a) prędkości $V^{(k)}$ oraz b) gęstości mocy tarcia $q^{(k)}$ podczas każdego z pięciu hamowań



Rysunek 3.19. Ewolucje temperatury $T^{(k)}(t)$ powierzchni ciernych podczas każdego z pięciu hamowań z (krzywe ciągłe) i bez (krzywe kropkowane) uwzględnienia wrażliwości termicznej materiałów

Uwzględnienie wrażliwości termicznej materiałów, za wyjątkiem pierwszego hamowania, powoduje obniżenie temperatury powierzchni ciernych. Efekt ten jest najbardziej zauważalny przy ostatnim (piątym) hamowaniu. Wartości współczynnika tarcia $f^{(k)}$ (3.3.21), czasu zatrzymania $t_s^{(k)}$ (3.3.2), temperatury objętościowej $\hat{T}^{(k)}$ (3.3.24)–(3.3.32) oraz maksymalnej temperatury $T_{\max}^{(k)} = \max\limits_{0 \le t \le t_s^{(k)}} T^{(k)}(t)$ podczas każdego z pięciu hamowań, otrzymane z uwzględnieniem wrażliwości termicznej materiałów, pokazano w tabeli 3.4. Odpowiednie dane znalezione przy stałych wartościach właściwości materiałów zebrano natomiast w tabeli 3.5. Dodatkowo zawarte w tabeli 3.4 dane zaprezentowano w postaci graficznej na rysunku 3.20. Z każdym kolejnym hamowaniem współczynnik tarcia $f^{(k)}$ przy temperaturze objętościowej układu $\hat{T}^{(k)}$ zmniejsza się przy jednoczesnym zwiększaniu czasu hamowania $t_s^{(k)}$, temperatury objętościowej $\hat{T}^{(k)}$ i temperatury maksymalnej $\hat{T}_{\max}^{(k)}$. Uwzględnienie w zaproponowanym modelu analitycznym wrażliwości termicznej materiałów skutkuje mniejszym spadkiem wartości współczynnika tarcia, krótszym czasem trwania procesu hamowania, a także niższymi temperaturami objętościową i maksymalną w porównaniu do odpowiednich wartości przy niezmiennych właściwościach materiałów. Różnice wartości temperatury otrzymanej z i bez uwzględnienia wrażliwości termicznej materiałów pary ciernej zwiększają się zaś z każdym następnym hamowaniem.

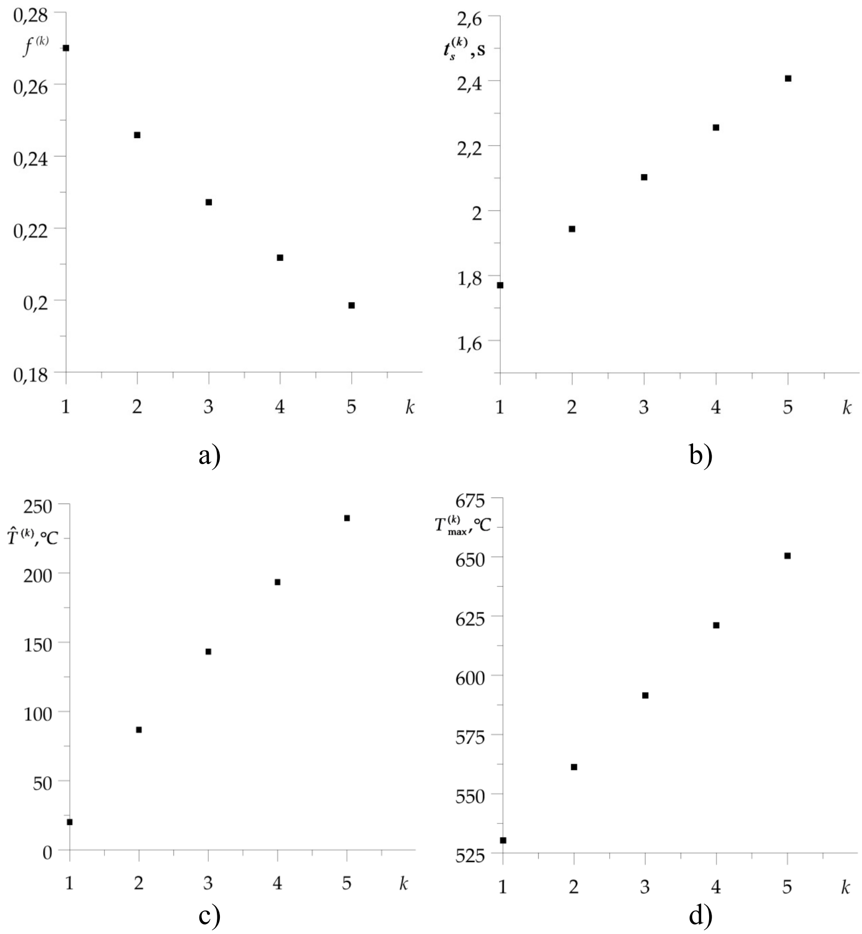
Tabela 3.4. Rezultaty obliczeń otrzymane z uwzględnieniem wrażliwości termicznej materiałów

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f^{(k)}$	0,27	0,25	0,23	0,21	0,20
$t_s^{(k)}$, s	1,77	1,94	2,10	2,26	2,41
$\hat{T}^{(k)}$, °C	20	86,85	143,21	193,48	239,74
$T_{\max}^{(k)}$, °C	530,27	56129	591,46	621,11	650,49

Tabela 3.5. Rezultaty obliczeń otrzymane przy stałych właściwościach materiałów

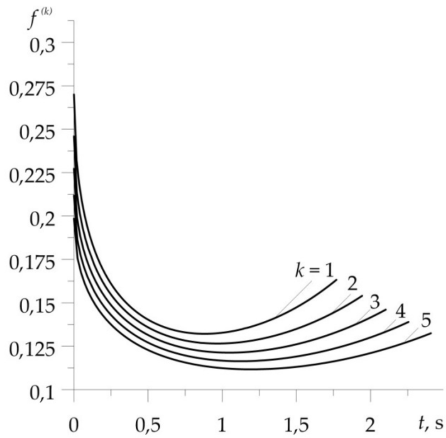
k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f^{(k)}$	0,27	0,24	0,22	0,20	0,18
$t_s^{(k)}$, s	1,77	1,95	2,15	2,36	2,60
$\hat{T}^{(k)}$, °C	20	89,83	158,79	226,89	294,12
$T_{\max}^{(k)}$, °C	530,27	575,76	621,75	668,19	715,04

Ze względu na to, że krzywa stabilności termicznej (rysunek 3.17d) jest monotonicznie zmniejszającą się funkcją temperatury, zmiana w czasie współczynnika tarcia podczas kolejnych hamowań (rysunek 3.21) ma postać odwrotną do ewolucji temperatury zaprezentowanej na rysunku 3.19. W momencie rozpoczęcia każdego hamowania ma miejsce redukcja współczynnika tarcia trwająca do chwili osiągnięcia temperatury maksymalnej $T_{\max}^{(k)}$. W zachodzącym następnie interwale obniżenia temperatury, trwającym aż do chwili zatrzymania $t_s^{(k)}$, współczynnik tarcia nieznacznie się zwiększa. Jednocześnie wraz ze wzrostem ilości hamowań minimalna wartość $f^{(k)}$ maleje (rysunek 3.21).



Rysunek 3.20. Zależności: a) współczynnika tarcia $f^{(k)}$ (3.3.21), b) czasu zatrzymania $t_s^{(k)}$ (3.3.2), c) temperatury objętościowej $\hat{T}^{(k)}$ (3.3.24), d) maksymalnej temperatury powierzchni ciernych $T_{\max}^{(k)}$ od liczby hamowań k

Na podstawie rezultatów zaprezentowanych na rysunku 3.21 ustalono parametry charakteryzujące pracę układu hamulcowego podczas kolejnych hamowań, takie jak: średnia wartość współczynnika tarcia $f_m^{(k)}$, jego stabilność $f_s^{(k)} = f_m^{(k)} / f_{\max}^{(k)}$, fluktuacja $f_f^{(k)} = f_{\min}^{(k)} / f_{\max}^{(k)}$ oraz efektywność hamowania $f_{eff}^{(k)} = f_s^{(k)} / (t_s^{(k)})^2$ (tabela 3.6).



Rysunek 3.21. Ewolucja współczynnika tarcia $f^{(k)}$ (3.3.21) podczas pięciu kolejnych hamowań

Tabela 3.6. Parametry oceny procesu hamowania

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$f_m^{(k)}$	0,149	0,142	0,135	0,129	0,123
$f_s^{(k)}$	0,553	0,576	0,593	0,608	0,620
$f_f^{(k)}$	0,489	0,515	0,534	0,550	0,563
$f_{eff}^{(k)}$, s^{-2}	0,177	0,153	0,134	0,119	0,107

Wszystkie hamowania cechują się dobrą stabilnością, jednak najbardziej efektywne dla wybranej pary ciernej okazało się hamowanie pierwsze. Z każdym kolejnym hamowaniem efektywność bowiem się zmniejsza.

3.3.4. Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale zaproponowano schemat analitycznego wyznaczenia temperatury podczas powtórno-krótkoterminowego (PKT) trybu pracy układu hamulcowego, w którym jeden z elementów ciernych wykonano z funkcyjnie gradientowego materiału (FGM). Opracowany schemat stanowi uogólnienie rezultatów dotyczących pojedynczego hamowania przedstawionych w podrozdziałach 2.3, 3.1 i 3.2. Obliczenia przeprowadzono dla pary ciernej wykonanej z dwuskładnikowego FGM (podstawa ZrO_2, rdzeń Ti-6Al-4V) oraz żeliwa szarego ChNMKh przy pięciu hamowaniach.

Ustalono, że w każdym kolejnym cyklu hamowania czas zatrzymania oraz temperatury objętościowa i maksymalna zwiększają się w sposób zbliżony do liniowego. Uwzględnienie wrażliwości termicznej materiałów powoduje natomiast obniżenie temperatury maksymalnej w stosunku do przypadku materiałów o właściwościach niezależnych od temperatury. Efekt ten staje się bardziej zauważalny wraz ze zwiększeniem liczby hamowań. Podczas każdego hamowania współczynnik tarcia najpierw szybko zmniejsza się do wartości minimalnej, po czym zaczyna się nieznacznie zwiększać, co trwa aż do chwili zatrzymania. Dla rozpatrywanej pary ciernej charakterystyczna jest dobra stabilność hamowań przy dostatecznej ich efektywności, zmniejszającej się jednak z każdym kolejnym hamowaniem.

Rezultaty opisane w powyższym podrozdziale opublikowano w pracy [157].

4. OBNIŻENIE MAKSYMALNEJ TEMPERATURY UKŁADU CIERNEGO ZA POMOCĄ WARSTWY WYKONANEJ Z FGM

Jednym z zastosowań funkcyjnie gradientowych materiałów są ochronne bariery termiczne, czyli warstwy materiałów chroniące elementy robocze przed nadmiernym wpływem temperatury. W celu ochrony par ciernych wykorzystuje się materiały o niskiej przewodności i dyfuzyjności cieplnej, cechujące się wysoką odpornością na ścieranie i wpływ warunków środowiskowych. Zastosowanie warstwy ochronnej pozwala poprawić sprawność oraz trwałość układów.

W związku z powyższym w niniejszym rozdziale zostanie przeanalizowany wpływ zastosowania ochronnej warstwy FGM naniesionej na materiał jednorodny. W pierwszym rozpatrywanym przypadku układ warstwa-półprzestrzeń będzie nagrzewany strumieniem ciepła na wolnej powierzchni bariery termicznej. W dalszej części zostanie natomiast rozpatrzone zagadnienie przewodzenia ciepła z uwzględnieniem jego generacji na skutek tarcia w trzyelementowym układzie ciernym półprzestrzeń jednorodna-warstwa FGM-półprzestrzeń jednorodna.

4.1. Nagrzewanie warstwy gradientowej naniesionej na jednorodne podłoże

4.1.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzono ciało zawierające warstwę $0 \le z \le d$ wykonaną z dwuskładnikowego FGM i naniesioną na powierzchnię $z = d$ jednorodnego podłoża $z \ge d$ (rysunek 4.1). Współczynnik przewodności cieplnej K_1 materiału warstwy zwiększa się eksponencjalnie wzdłuż jej grubości:

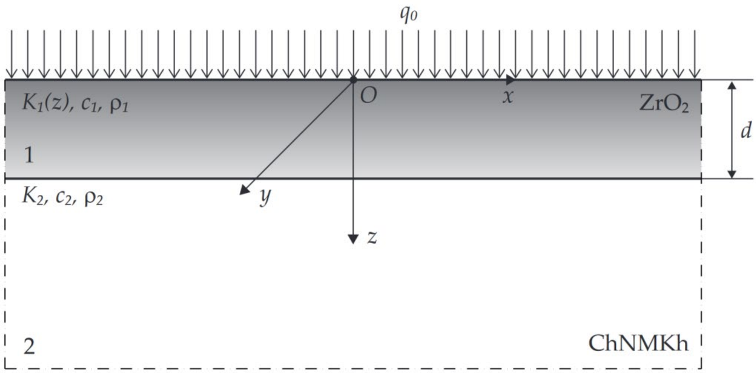
$$K_1(z) = K_{1,1} e^{\gamma^* z/d}, \ 0 \le z \le d, \tag{4.1.1}$$

gdzie:

$\gamma^* \ge 0$ to bezwymiarowy parametr gradientu FGM,

zaś $K_{1,1} \equiv K_1(0)$ oraz $K_{1,2} \equiv K_1(d)$ to współczynniki przewodności cieplnej materiałów składowych FGM.

W początkowej chwili $t = 0$ temperatura T całego układu $z \geq 0$ była stała ($T = T_0$), zaś następnie, w czasie $t > 0$, powierzchnia $z = 0$ warstwy została poddana nagrzewaniu strumieniem ciepła o stałej intensywności q_0.



Rysunek 4.1. Schemat nagrzewania półprzestrzeni z naniesioną warstwą ochronną

Zakładając, że kontakt cieplny pomiędzy warstwą a podłożem jest doskonały, powstałe na skutek nagrzewania nieustalone pole temperatury $T(z,t) = T_0 + \Theta(z,t)$, $z \geq 0$, $t \geq 0$ możemy wyznaczyć z rozwiązania następującego początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] = \rho_1 c_1 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \quad 0 < z < d\ , \ t > 0, \tag{4.1.2}$$

$$K_2 \frac{\partial^2 \Theta(z,t)}{\partial z^2} = \rho_2 c_2 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t}, \quad z > d\ , \ t > 0, \tag{4.1.3}$$

$$K_1(z)\left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^+} = -q_0, \quad t > 0, \tag{4.1.4}$$

$$\Theta(d^+, t) = \Theta(d^-, t), \quad t > 0, \tag{4.1.5}$$

$$K_1(z)\left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=d^+} = K_2 \left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=d^-}, \quad t > 0, \tag{4.1.6}$$

$$\Theta(z,t) \to 0, \quad z \to \infty, \quad t > 0, \tag{4.1.7}$$

$$\Theta(z,0) = 0, \quad z \geq 0, \tag{4.1.8}$$

gdzie K_2 to współczynnik przewodności cieplnej materiału podłoża, zaś ρ_l, c_l to odpowiednio gęstość i ciepło właściwe materiałów warstwy (l = 1) i podłoża ($l = 2$).

Po wprowadzeniu bezwymiarowych zmiennych i parametrów:

$$\zeta = \frac{z}{d}\,,\ \tau = \frac{k_1 t}{d^2}\,,\ K^* = \frac{K_2}{K_{1,1}}\,,\ k^* = \frac{k_2}{k_1}\,,\ \Theta^* = \frac{\Theta}{\Theta_0}\,, \tag{4.1.9}$$

gdzie:

$$\Theta_0 = \frac{q_0 d}{K_{1,1}},\ k_1 = \frac{K_{1,1}}{c_1 \rho_1},\ k_2 = \frac{K_2}{c_2 \rho_2}, \tag{4.1.10}$$

zagadnienie (4.1.2)–(4.1.8) zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2 \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} + \gamma^* \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} - e^{-\gamma^* \zeta} \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau} = 0\,,\ 0 < \zeta < 1\,,\ \tau > 0\,, \tag{4.1.11}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{k^*} \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \tau} = 0\,,\ \zeta > 1\,,\ \tau > 0\,, \tag{4.1.12}$$

$$\left. \frac{\partial \Theta(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta = 0^+} = -1\,,\ \tau > 0\,, \tag{4.1.13}$$

$$\Theta(1^+,\tau) = \Theta(1^-,\tau)\,,\ \tau > 0\,, \tag{4.1.14}$$

$$e^{\gamma^*} \left. \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta = 1^+} = K^* \left. \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta = 1^-}\,,\ \tau > 0\,, \tag{4.1.15}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \to 0\,,\ \zeta \to \infty\,,\ \tau > 0\,, \tag{4.1.16}$$

$$\Theta^*(\zeta,0) = 0\,,\ \zeta \ge 0\,. \tag{4.1.17}$$

4.1.2. Rozwiązanie zagadnienia

W przestrzeni transformaty całkowej Laplace'a (3.1.20) zagadnienie (4.1.11)–(4.1.17) zapisano w postaci:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}+\gamma^*\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,\tau)}{d\zeta}-pe^{-\gamma^*\zeta}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ 0<\zeta<1, \tag{4.1.18}$$

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}-\frac{p}{k^*}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ \zeta>1, \tag{4.1.19}$$

$$\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^+}=-\frac{1}{p}, \tag{4.1.20}$$

$$\overline{\Theta}^*(1^+,p)=\overline{\Theta}^*(1^-,p), \tag{4.1.21}$$

$$e^{\gamma^*}\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=1^+}=K^*\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=1^-}, \tag{4.1.22}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)\to 0,\ \zeta\to\infty. \tag{4.1.23}$$

Rozwiązania ogólne równań różniczkowych (4.1.18) i (4.1.19) mają postać:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=\xi\sqrt{p}[A_1(p)\mathrm{I}_1(\xi\sqrt{p})+B_1(p)\mathrm{K}_1(\xi\sqrt{p})],\ 0\le\zeta\le 1, \tag{4.1.24}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=A_2(p)e^{-\varsigma\sqrt{p}}+B_2(p)e^{\varsigma\sqrt{p}},\ \zeta\ge 1, \tag{4.1.25}$$

gdzie:

$$\xi=\frac{\alpha}{e^{\tilde{\alpha}\zeta}},\ \alpha=\frac{2}{\gamma^*},\ \tilde{\alpha}=\frac{1}{\alpha},\ \varsigma=\frac{\zeta-1}{\sqrt{k^*}}, \tag{4.1.26}$$

przy czym $\mathrm{I}_\mathrm{n}(x)$, $\mathrm{K}_\mathrm{n}(x)$ tu i dalej są to zmodyfikowane funkcje Bessela *n*-tego rzędu odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju [2].

Nieznane funkcje $A_l(p)$ i $B_l(p)$, $l = 1;2$ w rozwiązaniach (4.1.24), (4.1.25) znaleziono z warunków brzegowych (4.1.20)–(4.1.23) w postaci:

$$A_1(p)=\frac{\Delta_{A_1}(p)}{\alpha p^2\Delta(p)},\ B_1(p)=\frac{\Delta_{B_1}(p)}{\alpha p^2\Delta(p)},\ A_2(p)=\frac{e^{-\tilde{\alpha}}\Delta_{A_2}(p)}{p\sqrt{p}\Delta(p)},\ B_2(p)=0, \tag{4.1.27}$$

gdzie:

$$\Delta(p) = \Delta_{A_1}(p)\mathrm{I}_0(\alpha\sqrt{p}) - \Delta_{B_1}(p)\mathrm{K}_0(\alpha\sqrt{p}), \tag{4.1.28}$$

$$\Delta_{A_1}(p) = \mathrm{K}_0(\beta\sqrt{p}) + \varepsilon\, e^{-\tilde{\alpha}}\mathrm{K}_1(\beta\sqrt{p}),\ \Delta_{B_1}(p) = \mathrm{I}_0(\beta\sqrt{p}) - \varepsilon\, e^{-\tilde{\alpha}}\mathrm{I}_1(\beta\sqrt{p}), \tag{4.1.29}$$

$$\Delta_{A_2}(p) = \mathrm{I}_0(\beta\sqrt{p})\mathrm{K}_1(\beta\sqrt{p}) + \mathrm{I}_1(\beta\sqrt{p})\mathrm{K}_0(\beta\sqrt{p}) \equiv (\beta\sqrt{p})^{-1}, \tag{4.1.30}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{e^{\tilde{\alpha}}},\ \varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}}. \tag{4.1.31}$$

Z uwzględnieniem wzorów (4.1.27)–(4.1.31) rozwiązania (4.1.24)–(4.1.26) przyjmą postać:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = e^{-\tilde{\alpha}\zeta}\,\overline{\Theta}_0^*(p)\overline{\Theta}_1^*(\zeta,p),\ 0 \le \zeta \le 1,$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = \tilde{\alpha}\,\overline{\Theta}_0^*(p)\overline{\Theta}_2^*(\zeta,p),\ \zeta \ge 1, \tag{4.1.32}$$

gdzie:

$$\overline{\Theta}_0^*(p) = \frac{1}{\sqrt{p}},\ \overline{\Theta}_1^*(\zeta,p) = \frac{\Delta_1(\zeta,p)}{p\Delta(p)},\ \overline{\Theta}_2^*(\zeta,p) = \frac{e^{-\varsigma\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}\Delta(p)}, \tag{4.1.33}$$

$$\Delta_1(\zeta,p) = \Delta_{A_1}(p)\mathrm{I}_1(\xi\sqrt{p}) + \Delta_{B_1}(p)\mathrm{K}_1(\xi\sqrt{p}). \tag{4.1.34}$$

Wówczas, na podstawie twierdzenia o splocie dwóch funkcji [8], ze wzorów (4.1.32)–(4.1.34) można otrzymać:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = e^{-\tilde{\alpha}\zeta}\int_0^\tau \Theta_0^*(\tau-s)\Theta_1^*(\zeta,s)ds,\ 0 \le \zeta \le 1,\ \tau \ge 0, \tag{4.1.35}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \tilde{\alpha}\int_0^\tau \Theta_0^*(\tau-s)\Theta_2^*(\zeta,s)ds,\ \zeta \ge 1,\ \tau \ge 0, \tag{4.1.36}$$

gdzie [8]:

$$\Theta_0^*(\tau) \equiv L^{-1}[\overline{\Theta}_0^*(p);\tau] = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}, \qquad (4.1.37)$$

$$\Theta_l^*(\zeta,\tau) \equiv L^{-1}[\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p);\tau] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty}\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)e^{p\tau}dp\,,\ l=1;2\,,$$

$$\omega \equiv \operatorname{Re} p > 0\,,\quad i \equiv \sqrt{-1}\,. \qquad (4.1.38)$$

Całkowanie na płaszczyźnie zespolonej (Re p, Im p) we wzorze (4.1.38) przeprowadzono wzdłuż krzywej zamkniętej Γ (rysunek 3.2). Zawiera ona odcinek Γ_ω prostej $\operatorname{Re} p = \omega$, dwa łuki kołowe Γ_R i Γ_δ ze środkiem w punkcie $p = 0$, o promieniach odpowiednio R i δ, oraz rozcięcie wzdłuż osi Re $p < 0$ o brzegach $\Gamma_\pm$. Podczas gdy w obszarze wewnątrz krzywej Γ funkcje podcałkowe $\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)$, l = 1;2 (4.1.33) we wzorze (4.1.38) są jednoznaczne i analityczne, na podstawie twierdzenia Cauchy'ego otrzymujemy [73]:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)e^{p\tau}dp = 0\,,\ l=1;2\,. \qquad (4.1.39)$$

Na skutek spełnienia przez funkcje $\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)$, l = 1;2 (4.1.33) warunków lematu Jordana [105] całki wzdłuż łuku Γ_R zanikają przy $R \to \infty$, zaś ze wzorów (4.1.38), (4.1.39) wynika, że:

$$\Theta_l^*(\zeta,\tau) = -\Theta_{l,+}^*(\zeta,\tau) - \Theta_{l,-}^*(\zeta,\tau) - \Theta_{l,\delta}^*(\zeta,\tau)\,,\ \tau \ge 0\,,\ l=1;2\,, \quad (4.1.40)$$

gdzie:

$$\Theta_{l,\pm}^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\pm}\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)e^{p\tau}dp\,,\ \Theta_{l,\delta}^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)e^{p\tau}dp\,. \qquad (4.1.41)$$

W układzie biegunowym (r,ϕ) z początkiem w punkcie p = 0 parametr transformaty Laplace'a $p = re^{i\phi}$, $r \ge 0$, $|\phi| \le \pi$. Wówczas na brzegach $\Gamma_\pm$ otrzymujemy $p = re^{\pm i\pi} = -r$, $\sqrt{p} = \pm i\sqrt{r}$, natomiast dwie pierwsze całki (4.1.41) przyjmują postać:

$$\Theta_{l,\pm}^*(\zeta,\tau) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \overline{\Theta}_{l,\pm}^*(\zeta,r)e^{-r\tau}dr\,,\ \tau \ge 0\,,\ l=1;2\,, \qquad (4.1.42)$$

gdzie $\overline{\Theta}_{l,\pm}^*(\zeta,r) \equiv \overline{\Theta}_l^*(\zeta,re^{\pm i\pi})$.

Z uwzględnieniem związków [2]:

$$\mathrm{I}_0(\pm ix) = \mathrm{J}_0(x)\,,\ \mathrm{K}_0(\pm ix) = -0{,}5\pi[\mathrm{Y}_0(x) \pm i\mathrm{J}_0(x)]\,, \tag{4.1.43}$$

$$\mathrm{I}_1(\pm ix) = \pm i\mathrm{J}_1(x)\,,\ \mathrm{K}_1(\pm ix) = -0{,}5\pi[\mathrm{J}_1(x) \mp i\mathrm{Y}_1(x)]\,, \tag{4.1.44}$$

przy czym $\mathrm{J}_\mathrm{n}(x)$ i $\mathrm{Y}_\mathrm{n}(x)$ to funkcje Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju n-tego rzędu, ze wzorów (4.1.28)–(4.1.34) znaleziono:

$$\overline{\Theta}^*_{1,\pm}(\zeta,r) = \frac{\Delta_1^\pm(\zeta,r)}{r\,\Delta^\pm(r)}\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,\ \overline{\Theta}^*_{2,\pm}(\zeta,r) = \frac{\Delta_2^\pm(\zeta,r)}{r\sqrt{r}\,\Delta^\pm(r)}\,,\ \zeta \ge 1\,, \tag{4.1.45}$$

gdzie:

$$\Delta^\pm(r) = 0{,}5\pi[\Delta_\mathrm{R}(r) \mp i\varepsilon\, e^{-\tilde{\alpha}}\Delta_\mathrm{I}(r)]\,, \tag{4.1.46}$$

$$\Delta_1^\pm(\zeta,r) = 0{,}5\pi[\varepsilon\, e^{-\tilde{\alpha}}\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta,r) \pm i\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta,r)]\,, \tag{4.1.47}$$

$$\Delta_2^\pm(\zeta,r) = \sin(\varsigma\sqrt{r}) \pm i\cos(\varsigma\sqrt{r})\,, \tag{4.1.48}$$

$$\Delta_\mathrm{R}(r) = \mathrm{Y}_0(\alpha\sqrt{r})\mathrm{J}_0(\beta\sqrt{r}) - \mathrm{J}_0(\alpha\sqrt{r})\mathrm{Y}_0(\beta\sqrt{r})\,, \tag{4.1.49}$$

$$\Delta_\mathrm{I}(r) = \mathrm{Y}_0(\alpha\sqrt{r})\mathrm{J}_1(\beta\sqrt{r}) - \mathrm{J}_0(\alpha\sqrt{r})\mathrm{Y}_1(\beta\sqrt{r})\,, \tag{4.1.50}$$

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta,r) = \mathrm{Y}_1(\beta\sqrt{r})\mathrm{J}_1(\xi\sqrt{r}) - \mathrm{J}_1(\beta\sqrt{r})\mathrm{Y}_1(\xi\sqrt{r})\,, \tag{4.1.51}$$

$$\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta,r) = \mathrm{Y}_0(\beta\sqrt{r})\mathrm{J}_1(\xi\sqrt{r}) - \mathrm{J}_0(\beta\sqrt{r})\mathrm{Y}_1(\xi\sqrt{r})\,. \tag{4.1.52}$$

Należy dodać, że parametry α, $\tilde{\alpha}$, ξ i ς wyznacza się ze wzorów (4.1.26), zaś β i ε ze wzorów (4.1.31).

Na okręgu Γ_δ mamy następujące wartości: $p = \delta e^{i\phi}$, $\sqrt{p} = \sqrt{\delta}e^{0{,}5i\phi}$, $|\phi| \le \pi$. Następnie, przechodząc do granicy $\delta \to 0$, trzecią całkę (4.1.41) zapisujemy w postaci:

$$\Theta^*_{l,\delta}(\zeta,\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\delta\to 0}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\Theta}^*_{l,\delta}(\zeta,\delta e^{i\varphi})e^{\delta e^{i\varphi}\tau}i\delta e^{i\varphi}d\varphi\right),\ \tau \ge 0\,,\ l = 1;2\,, \tag{4.1.53}$$

gdzie, z uwzględnieniem rozwiązań (4.1.33), otrzymujemy:

$$\overline{\Theta}_{1,\delta}^{*}(\zeta,\delta e^{i\varphi}) = \frac{\Delta_1(\zeta,\delta e^{i\varphi})}{\delta e^{i\varphi}\Delta(\delta e^{i\varphi})},\ 0 \le \zeta \le 1,$$

$$\overline{\Theta}_{2,\delta}^{*}(\zeta,\delta e^{i\varphi}) = \frac{e^{-\varsigma\sqrt{\delta}e^{0.5i\varphi}}}{\delta\sqrt{\delta}e^{1.5i\varphi}\Delta(\delta e^{i\varphi})},\ \zeta \ge 1, \tag{4.1.54}$$

przy czym funkcje $\Delta(\delta e^{i\phi})$ i $\Delta_1(\zeta,\delta e^{i\phi})$ wyznaczano odpowiednio ze wzorów (4.1.28)–(4.1.31) i (4.1.34).

Biorąc pod uwagę to, że przy małych wartościach argumentu [2]

$$\mathrm{I}_0(x) \cong 1,\ \mathrm{K}_0(x) \cong -\ln x,\ \mathrm{I}_1(x) \cong 0{,}5x,\ \mathrm{K}_1(x) \cong x^{-1}, \tag{4.1.55}$$

ze wzorów (4.1.28)–(4.1.31) i (4.1.34) znaleziono:

$$\Delta(\delta e^{i\varphi}) \cong \frac{\gamma^*}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}}\right),\ \Delta_1(\zeta,\delta e^{i\varphi}) \cong \frac{\varepsilon}{2}\left(e^{-\gamma^*\zeta/2} - e^{-\gamma^*(1-\zeta/2)}\right) + \frac{\gamma^* e^{\gamma^*\zeta/2}}{2\sqrt{\delta}e^{i\varphi/2}}. \tag{4.1.56}$$

Podstawiając wzory (4.1.54), (4.1.55) oraz (4.1.56) do prawej strony równości (4.1.53) ustalono, że:

$$\Theta_{1,\delta}^{*}(\zeta,\tau) = -\frac{e^{\gamma^*\zeta/2}}{\varepsilon},\ 0 \le \zeta \le 1,\ \Theta_{2,\delta}^{*}(\zeta,\tau) = -\frac{2}{\varepsilon\gamma^*},\ \zeta \ge 1,\ \tau \ge 0. \tag{4.1.57}$$

Wprowadzając funkcje $\Theta_{l,\pm}^{*}(\zeta,\tau)$ (4.1.42), (4.1.45)–(4.1.52) i $\Theta_{l,\delta}^{*}(\zeta,\tau)$ (4.1.57) do równości (4.1.40), z uwzględnieniem oznaczeń $\sqrt{r} = x$, $r = x^2$, otrzymano natomiast:

$$\Theta_1^{*}(\zeta,\tau) = \frac{e^{\gamma^*\zeta/2}}{\varepsilon} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\Delta_1(\zeta,x)}{x\Delta(x)}e^{-x^2\tau}dx,\ 0 \le \zeta \le 1,\ \tau \ge 0, \tag{4.1.58}$$

$$\Theta_2^{*}(\zeta,\tau) = \frac{\alpha}{\varepsilon} - \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\Delta_2(\zeta,x)}{x^2\Delta(x)}e^{-x^2\tau}dx,\ \zeta \ge 1,\ \tau \ge 0, \tag{4.1.59}$$

gdzie:

$$\Delta_1(\zeta,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta,x) + \varepsilon^2 e^{-\gamma^*}\Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta,x), \tag{4.1.60}$$

$$\Delta_2(\zeta,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\cos(\varsigma x) + \varepsilon e^{-\gamma^*/2}\Delta_{\mathrm{I}}(x)\sin(\varsigma x), \tag{4.1.61}$$

$$\Delta(x) = \Delta_{\mathrm{R}}^2(x) + \varepsilon^2 e^{-\gamma^*}\Delta_{\mathrm{I}}^2(x)], \qquad (4.1.62)$$

$$\Delta_{\mathrm{R}}(x) = \mathrm{Y}_0(\alpha x)\mathrm{J}_0(\beta x) - \mathrm{J}_0(\alpha x)\mathrm{Y}_0(\beta x), \qquad (4.1.63)$$

$$\Delta_{\mathrm{I}}(x) = \mathrm{Y}_0(\alpha x)\mathrm{J}_1(\beta x) - \mathrm{J}_0(\alpha x)\mathrm{Y}_1(\beta x), \qquad (4.1.64)$$

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta, x) = \mathrm{J}_1(\beta x)\mathrm{Y}_1(\xi x) - \mathrm{Y}_1(\beta x)\mathrm{J}_1(\xi x), \qquad (4.1.65)$$

$$\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta, x) = \mathrm{J}_0(\beta x)\mathrm{Y}_1(\xi x) - \mathrm{Y}_0(\beta x)\mathrm{J}_1(\xi x). \qquad (4.1.66)$$

Uwzględniając funkcje $\Theta_0^*(\tau)$ (4.1.37) oraz $\Theta_l^*(\zeta,\tau)$, l = 1;2 (4.1.58), (4.1.59) we wzorach (4.1.35) i (4.1.36), po zmianie kolejności i przeprowadzeniu całkowania po τ, poszukiwany bezwymiarowy przyrost temperatury znaleziono w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty \frac{\Delta_1(\zeta,x)}{x\Delta(x)} F(x\sqrt{\tau})dx\right],\ 0 \le \zeta \le 1,\ \tau \ge 0, \qquad (4.1.67)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\gamma^*}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\Delta_2(\zeta,x)}{x^2\Delta(x)} F(x\sqrt{\tau})dx\right],\ \zeta \ge 1,\ \tau \ge 0, \qquad (4.1.68)$$

gdzie:

$$F(x) = \frac{2e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\int_0^x e^{s^2}ds. \qquad (4.1.69)$$

Do obliczenia funkcji $F(x)$ (4.1.69) zastosowano zaś następujące wzory aproksymacyjne [7]:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2x^2)^n}{(2n+1)!!},\ 0 < x < 3,\ F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^{n+1}},\ x \ge 3, \qquad (4.1.70)$$

gdzie $(-1)!! = 1$, $(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)$, przy czym liczbę N w drugim wzorze (4.1.70) dobierano z warunku osiągnięcia zadanej *a priori* dokładności.

4.1.3. Rozwiązania asymptotyczne

Oprócz dokładnego (w kwadraturach) rozwiązania (4.1.67)–(4.1.70) otrzymano również odpowiednie asymptotyczne rozwiązania przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera (bezwymiarowego czasu) τ.

Małe wartości τ (duże wartości parametru p)

Uwzględniając we wzorach (4.1.28), (4.1.29) i (4.1.34) asymptotyki zmodyfikowanych funkcji Bessela przy dużych wartościach argumentu [2],

$$\mathrm{I_n}(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \ \mathrm{K_n}(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}, \ n = 0,1,..., \tag{4.1.71}$$

transformowane rozwiązania (4.1.32) i (4.1.33) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong e^{-\gamma^* \zeta/4} \frac{e^{-(\alpha-\xi)\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}, \ 0 \le \zeta < 1, \tag{4.1.72}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{2e^{-\gamma^*/4}}{(1+\varepsilon e^{-\gamma^*/2})} \frac{e^{-(\alpha-\beta+\varsigma)\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}, \ \zeta \ge 1. \tag{4.1.73}$$

Wówczas, na podstawie definicji (4.1.26) i (4.1.31), otrzymujemy:

$$\alpha - \xi = \frac{2}{\gamma^*}(1 - e^{-\gamma^* \zeta/2}) > 0, \ \alpha - \beta + \varsigma = \frac{2}{\gamma^*}(1 - e^{-\gamma^*/2}) + \frac{\zeta - 1}{\sqrt{k^*}} > 0. \tag{4.1.74}$$

Przechodząc w transformatach (4.1.72) i (4.1.73) do oryginałów [8], asymptotyki bezwymiarowego przyrostu temperatury w początkowych chwilach procesu nagrzewania otrzymano w postaci:

$$\Theta^*(\zeta, \tau) \cong 2\sqrt{\tau}\, e^{-\gamma^* \zeta/4} \ \mathrm{ierfc}\left(\frac{\alpha - \xi}{2\sqrt{\tau}}\right), \ 0 \le \zeta < 1, \ 0 \le \tau << 1, \tag{4.1.75}$$

$$\Theta^*(\zeta, \tau) \cong \frac{4\sqrt{\tau}\, e^{-\gamma^*/4}}{(1+\varepsilon e^{-\gamma^*/2})} \ \mathrm{ierfc}\left(\frac{\alpha - \beta + \varsigma}{2\sqrt{\tau}}\right), \ \zeta \ge 1, \ 0 \le \tau << 1. \tag{4.1.76}$$

Duże wartości τ (małe wartości parametru p)

Przy małych wartościach argumentu zmodyfikowanych funkcji Bessela, z wykorzystaniem wzorów (4.1.55) i (4.1.56), transformaty Laplace'a (4.1.32) i (4.1.33) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{\varepsilon\chi}{p(\sqrt{p}+\varepsilon)} + \frac{1}{p\sqrt{p}(\sqrt{p}+\varepsilon)}, \ 0 \le \zeta < 1, \ \chi = \frac{1}{\gamma^*}(e^{-\gamma^* \zeta} - e^{-\gamma^*}), \tag{4.1.77}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\varsigma\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}(\sqrt{p}+\varepsilon)}, \quad \zeta \geq 1, \tag{4.1.78}$$

gdzie współczynnik ς zdefiniowano we wzorach (4.1.26).

Przechodząc we wzorach (4.1.77), (4.1.78) do przestrzeni oryginałów [8], otrzymano następujące asymptotyki bezwymiarowego przyrostu temperatury przy dużych wartościach liczby Fouriera τ:

$$\Theta^*(\zeta, \tau) \cong \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \left(\chi - \frac{1}{\varepsilon^2}\right)\left[1 - e^{\varepsilon^2\tau}\mathrm{erfc}(\varepsilon\sqrt{\tau})\right], \; 0 \leq \zeta < 1, \; \tau >> 1, \tag{4.1.79}$$

$$\Theta^*(\zeta, \tau) \cong \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, e^{-\frac{\varsigma^2}{4\tau}} - \frac{1}{\varepsilon}\left(\varsigma + \frac{1}{\varepsilon}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\varsigma}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{\varepsilon\varsigma+\varepsilon^2\varsigma}\mathrm{erfc}\left(\frac{\varsigma}{2\sqrt{\tau}} + \varepsilon\sqrt{\tau}\right),$$
$$\zeta \geq 1, \; \tau >> 1. \tag{4.1.80}$$

Na interfejsie $\zeta = 1$ współczynniki $\chi = \varsigma = 0$ otrzymano ze wzorów (4.1.79) i (4.1.80):

$$\Theta^*(1^+, \tau) = \Theta^*(1^-, \tau) \cong \frac{2}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left[1 - e^{\varepsilon^2\tau}\mathrm{erfc}(\varepsilon\sqrt{\tau})\right]. \tag{4.1.81}$$

4.1.4. Weryfikacja rozwiązania dokładnego

W dalszej części podrozdziału zostanie pokazane, że otrzymane rozwiązanie (4.1.67)–(4.1.70) spełnia warunki brzegowe (4.1.13)–(4.1.16) oraz warunek początkowy (4.1.17). Różniczkując rozwiązanie (4.1.67) po zmiennej przestrzennej ζ, otrzymano:

$$\frac{\partial\Theta^*(\zeta, \tau)}{\partial\zeta} = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty \frac{[\Delta_1'(\zeta, x) - 0{,}5\gamma^*\Delta_1(\zeta, x)]}{x\Delta(x)} F(x\sqrt{\tau})dx\right], \; 0 \leq \zeta \leq 1,$$
$$\tau \geq 0, \tag{4.1.82}$$

gdzie pochodna $'$ funkcji $\Delta_1(\zeta, x)$ względem bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ (4.1.60) ma postać:

$$\Delta_1'(\zeta, x) = \Delta_R(x)\Delta_{1,I}'(\zeta, x) + \varepsilon^2 e^{-\gamma^*}\Delta_I(x)\Delta_{1,R}'(\zeta, x). \tag{4.1.83}$$

Z uwzględnieniem związków [2],

$$\mathrm{J}_1'(x) = \mathrm{J}_0(x) - x^{-1}\mathrm{J}_1(x)\,,\;\; \mathrm{Y}_1'(x) = \mathrm{Y}_0(x) - x^{-1}\mathrm{Y}_1(x)\,, \tag{4.1.84}$$

oraz wzorów (4.1.63)–(4.1.66), przy $\zeta = 0$ znaleziono:

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}'(0,x) = 0{,}5\gamma^*\Delta_{1,\mathrm{R}}(0,x) - x\Delta_{\mathrm{I}}(x)\,,$$
$$\Delta_{1,\mathrm{I}}'(0,x) = 0{,}5\gamma^*\Delta_{1,\mathrm{I}}(0,x) - x\Delta_{\mathrm{R}}(x)\,, \tag{4.1.85}$$

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(0,x) = \mathrm{Y}_1(\alpha x)\mathrm{J}_1(\beta x) - \mathrm{J}_1(\alpha x)\mathrm{Y}_1(\beta x)\,,$$
$$\Delta_{1,\mathrm{I}}(0,x) = \mathrm{Y}_1(\alpha x)\mathrm{J}_0(\beta x) - \mathrm{J}_1(\alpha x)\mathrm{Y}_0(\beta x)\,. \tag{4.1.86}$$

Po podstawieniu wzorów (4.1.85) i (4.1.86) do równości (4.1.83) otrzymano:

$$\Delta_1'(0,x) = 0{,}5\gamma^*\Delta_1(0,x) - x\Delta(x)\,, \tag{4.1.87}$$

gdzie funkcje $\Delta_1(0,x)$ i $\Delta(x)$ wyznaczono odpowiednio ze wzorów (4.1.60) i (4.1.62). Następnie, ze wzoru (4.1.82) z uwzględnieniem pochodnej (4.1.87), znaleziono:

$$\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^+} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\int_0^\infty F(x\sqrt{\tau})dx\,,\;\; \tau \ge 0\,, \tag{4.1.88}$$

gdzie funkcja $F(x)$ ma postać (4.1.69), (4.1.70). Biorąc pod uwagę całkę [7]

$$\int_0^\infty F(x)dx = \frac{\pi}{2}\,, \tag{4.1.89}$$

z równości (4.1.88) wywiedziono, że warunek brzegowy (4.1.13) został spełniony.

Porównując postaci rozwiązań (4.1.67) i (4.1.68), ustalono, że warunek brzegowy (4.1.14) zostanie spełniony, gdy:

$$e^{-0{,}5\gamma^*}\Delta_1(1,x) = -\frac{\gamma^*\Delta_2(1,x)}{\pi x}\,. \tag{4.1.90}$$

Przy $\zeta = 1$ ze wzorów (4.1.26) i (4.1.31) wynika, że $\xi = \beta$ oraz $\varsigma = 0$. Wówczas wzory (4.1.60)–(4.1.66) przyjmują postać:

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(1,x) = 0\,,\;\; \Delta_1(1,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{1,\mathrm{I}}(1,x)\,,\;\; \Delta_2(1,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\,. \tag{4.1.91}$$

Przy skorzystaniu ze związku [2]

$$\Delta_{1,\mathrm{I}}(1,x)=\mathrm{J}_0(\beta x)\mathrm{Y}_1(\beta x)-\mathrm{Y}_0(\beta x)\mathrm{J}_1(\beta x)=-\frac{2}{\pi\beta x}, \tag{4.1.92}$$

definicji parametru β (4.1.26), (4.1.31) oraz z uwzględnieniem wzorów (4.1.91) równość (4.1.90) przyjmie postać tożsamości:

$$\frac{\gamma^*}{\pi x}\Delta_\mathrm{R}(x)\equiv\frac{\gamma^*}{\pi x}\Delta_\mathrm{R}(x), \tag{4.1.93}$$

co potwierdza spełnienie warunku brzegowego (4.1.14).

Podstawiając $\zeta=1$ we wzorach (4.1.82) i (4.1.83), otrzymano:

$$\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1^+}=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\gamma^*/2}\int\limits_0^\infty\frac{[\Delta_1'(1,x)-0{,}5\gamma^*\Delta_1(1,x)]}{x\Delta(x)}F(x\sqrt{\tau})dx\right],$$

$$\tau\geq 0, \tag{4.1.94}$$

$$\Delta_1'(1,x)=\Delta_\mathrm{R}(x)\Delta_{1,\mathrm{I}}'(1,x)+\varepsilon^2 e^{-\gamma^*}\Delta_\mathrm{I}(x)\Delta_{1,\mathrm{R}}'(1,x), \tag{4.1.95}$$

gdzie odpowiednie wartości pochodnych funkcji $\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta,x)$ (4.1.65) i $\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta,x)$ (4.1.66) po zmiennej ζ mają postać:

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}'(1,x)=-\frac{\gamma^*}{\pi},\ \Delta_{1,\mathrm{I}}'(1,x)=-\frac{\gamma^*}{\pi\beta x}. \tag{4.1.96}$$

Podstawiając wzory (4.1.96) do prawej strony równości (4.1.95), a następnie uwzględniając otrzymaną w ten sposób pochodną $\Delta_1'(1,x)$ oraz funkcję $\Delta_1(1,x)$ (4.1.91), (4.1.92) pod znakiem całki we wzorze (4.1.94), otrzymano:

$$e^{\gamma^*}\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1^+}=-\frac{2}{\pi^2}\varepsilon^2\gamma^* e^{-\gamma^*/2}\sqrt{\tau}\int\limits_0^\infty\frac{\Delta_\mathrm{I}(x)}{x\Delta(x)}F(x\sqrt{\tau})dx,\ \tau\geq 0. \tag{4.1.97}$$

Z innej strony, różniczkując rozwiązanie (4.1.68) względem zmiennej ζ, dostajemy:

$$K^* \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta}\bigg|_{\zeta=1^-} = -\frac{2}{\pi^2}\gamma^* K^* \sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\Delta_2'(1,x)}{x^2\Delta(x)}F(x\sqrt{\tau})dx\,,\ \tau \geq 0\,, \tag{4.1.98}$$

gdzie wartość pochodnej funkcji $\Delta_2(\zeta,x)$ (4.1.61) przy $\zeta=1$ równa jest:

$$\Delta_2'(1,x) = \frac{\varepsilon\, e^{-\gamma^*/2}}{\sqrt{k^*}} x\Delta_1(x)\,. \tag{4.1.99}$$

Uwzględniając pochodną (4.1.99) oraz definicję (4.1.31) aktywności termicznej ε w prawej stronie równości (4.1.98) ustalono, że jest ona taka sama jak prawa strona we wzorze (4.1.97). W ten sposób udowodniono spełnienie przez otrzymane rozwiązania (4.1.67)–(4.1.69) warunku brzegowego (4.1.15). Spełnienie warunku (4.1.16) zanikania przyrostu temperatury (4.1.68) przy $\zeta \to \infty$ zagwarantowano natomiast poprzez pominięcie funkcji $B_2(p)$ (4.1.27) w rozwiązaniu (4.1.25). Zachowanie go sprawdzano również podczas obliczeń numerycznych. Na koniec łatwo zauważyć, że rozwiązania (4.1.67)–(4.1.69) spełniają także warunek początkowy (4.1.17).

4.1.5. Rozwiązanie dokładne przy liniowo zmniejszającej się z czasem intensywności strumienia ciepła

Zaprezentowane powyżej dokładne rozwiązania (4.1.67)–(4.1.69) otrzymano przy niezmiennej z czasem intensywności strumienia ciepła q_0. W dalszej części rozpatrywane będzie natomiast nagrzewanie strumieniem ciepła o intensywności (2.3.8) powierzchni warstwy wykonanej z FGM i naniesionej na powierzchnię jednorodnej półprzestrzeni. Należy zaznaczyć, że profil czasowy gęstości mocy tarcia jest charakterystyczny dla zagadnień cieplnych tarcia podczas hamowania ze stałym spowolnieniem [143]. Bezwymiarowy przyrost temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$, odpowiadający intensywności strumienia ciepła, znaleziono na podstawie wzoru Duhamela [86]:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau q^*(\tau-s)\Theta^*(\zeta,s)ds\,,\ \zeta\geq 0\,,\ 0\leq\tau\leq\tau_s\,, \tag{4.1.100}$$

gdzie $\Theta^*(\zeta,\tau)$ jest przyrostem bezwymiarowej temperatury (4.1.67)–(4.1.69), a funkcja $q^*(\tau)$ ma postać:

$$q^*(\tau) = 2(1-\tau\tau_s^{-1})\,,\ 0\leq\tau\leq\tau_s\,,\ \tau_s = k_1 t_s d^{-2}\,. \tag{4.1.101}$$

Podstawiając rozwiązanie (4.1.67) i funkcję $q^*(\tau)$ (4.1.100) pod znak całki w prawej stronie wzoru (4.1.101), znaleziono:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi\varepsilon}}Q_1(\tau) + \frac{2}{\pi}e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty \frac{\Delta_1(\zeta,x)}{x\Delta(x)}Q_2(\tau,x)dx\right],$$

$$0 \le \zeta \le 1,\ 0 \le \tau \le \tau_s, \qquad (4.1.102)$$

gdzie:

$$Q_1(\tau) = \int_0^\tau \left(1 - \frac{\tau - s}{\tau_s}\right)\sqrt{s}ds = \frac{2}{3}\tau\sqrt{\tau}\left(1 - \frac{2\tau}{5\tau_s}\right), \qquad (4.1.103)$$

$$Q_2(\tau,x) = \int_0^\tau \left(1 - \frac{\tau - s}{\tau_s}\right)\sqrt{s}F(x\sqrt{s})ds = \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s}\right)Q_{21}(\tau,x) + \frac{1}{\tau_s}Q_{22}(\tau,x), \qquad (4.1.104)$$

$$Q_{21}(\tau,x) = \int_0^\tau \sqrt{s}F(x\sqrt{s})ds,\ Q_{22}(\tau,x) = \int_0^\tau s\sqrt{s}F(x\sqrt{s})ds. \qquad (4.1.105)$$

Przy uwzględnieniu funkcji $F(x)$ (4.1.69) całki (4.1.105) zapisano w postaci:

$$Q_{21}(\tau,x) = \frac{2}{x^2}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2}F(x\sqrt{\tau})\right], \qquad (4.1.106)$$

$$Q_{22}(\tau,x) = \frac{2}{x^4}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[1 + \frac{1}{3}x^2\tau - \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 + x^2\tau)F(x\sqrt{\tau})\right]. \qquad (4.1.107)$$

Po podstawieniu funkcji $Q_{21}(\tau,x)$ (4.1.106) i $Q_{22}(\tau,x)$ (4.1.107) do prawej strony wzoru (4.1.104) otrzymano:

$$Q_2(\tau,x) = \frac{2}{x^2}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[1 - \frac{2\tau}{3\tau_s} + \frac{1}{x^2\tau_s} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2\tau_s}\right)F(x\sqrt{\tau})\right]. \qquad (4.1.108)$$

Następnie, różniczkując funkcje $Q_1(\tau)$ (4.1.103) i $Q_2(\tau, x)$ (4.1.108), znaleziono:

$$P_1(\tau) \equiv \frac{dQ_1(\tau)}{d\tau} = \sqrt{\tau}\, P_1^*(\tau), \quad P_1^*(\tau) = 1 - \frac{2\tau}{3\tau_s}, \tag{4.1.109}$$

$$P_2(\tau, x) \equiv \frac{\partial Q_2(\tau, x)}{\partial \tau} = \sqrt{\tau}\, P_2^*(\tau, x), \quad P_2^*(\tau, x) = \left(1 + \frac{1}{x^2 \tau_s}\right) F(x\sqrt{\tau}) - \frac{2}{\sqrt{\pi} x^2 \tau_s}. \tag{4.1.110}$$

Z uwzględnieniem pochodnych (4.1.109) i (4.1.110) ze wzoru (4.1.102) otrzymano zaś:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left[\frac{1}{\varepsilon} P_1^*(\tau) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\gamma^* \zeta/2} \int_0^\infty \frac{\Delta_1(\zeta, x)}{x \Delta(x)} P_2^*(\tau, x) dx \right],$$

$$0 \le \zeta \le 1, \quad 0 \le \tau \le \tau_s. \tag{4.1.111}$$

Zauważając to, że postać rozwiązania (4.1.111) jest zbliżona, z dokładnością do funkcji $P_1^*(\tau)$ (4.1.109) i $P_2^*(\tau, x)$ (4.1.110), do rozwiązania (4.1.67), na podstawie rozwiązania (4.1.68) możemy od razu zapisać:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta, \tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \left[\frac{1}{\varepsilon} P_1^*(\tau) - \frac{\gamma^*}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\Delta_2(\zeta, x)}{x^2 \Delta(x)} P_2^*(\tau, x) dx \right],$$

$$\zeta \ge 1, \quad 0 \le \tau \le \tau_s. \tag{4.1.112}$$

Należy zaznaczyć, że przy $\tau_s \to \infty$ ze wzorów (4.1.109) i (4.1.110) wynika, iż $P_1^*(\tau) = 1$, $P_2^*(\tau, x) = F(x\sqrt{\tau})$, zaś rozwiązania (4.1.111), (4.1.112) stają się takie same jak otrzymane wcześniej, przy stałej intensywności strumienia ciepła, rozwiązania (4.1.67), (4.1.68).

4.1.6. Analiza numeryczna

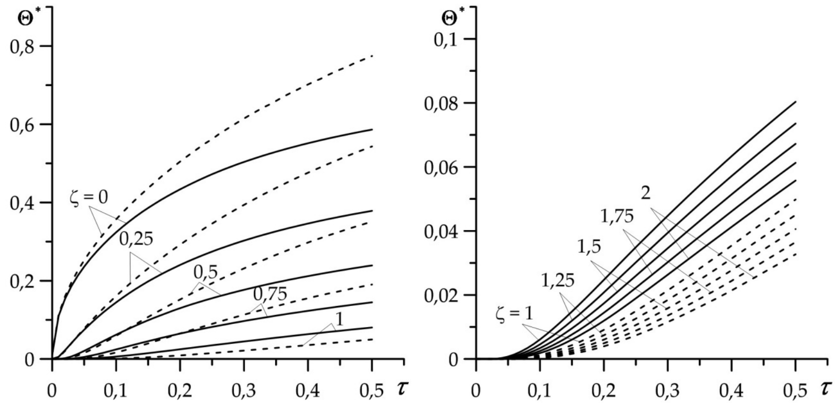
Obliczenia przeprowadzono dla warstwy wykonanej z dwuskładnikowego FGM naniesionej na jednorodne podłoże. Podstawę FGM stanowi dwutlenek cyrkonu ZrO_2, zaś rdzeń elementu wykonano ze stopu tytanu Ti-6Al-4V. Podłoże tworzy zaś żeliwo szare ChNMKh. Niezbędne do obliczeń właściwości tych materiałów przy temperaturze pokojowej T_0 = 20°C zawiera tabela 3.1.

Ciepło właściwe oraz gęstość materiału warstwy wyznaczono według prawa mieszanin (2.3.3). Do obliczeń wykorzystano wartości efektywne ciepła właściwego c_1 = 495,55 J kg^{-1} K^{-1} i gęstości ρ_1 = 5266,98 kg m^{-3} materiału warstwy, takie same jak w podrozdziale 2.3 (tabela 2.7). W celu wyznaczenia bezwymiarowych wartości przewodności $K^* = 26{,}89$ i dyfuzji $k^* = 22{,}23$ cieplnej podobnie skorzystano ze wzorów (4.1.9), a aktywności termicznej $\varepsilon = 5{,}7$ – ze wzoru (4.1.31). Gradient rozpatrywanego FGM $\gamma^* = 1{,}26$ znaleziono natomiast ze wzoru (3.1.19).

Obiektem analizy numerycznej były bezwymiarowe przyrosty temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (4.1.67), (4.1.68) oraz $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ (4.1.111), (4.1.112), inicjowane nagrzewaniem powierzchni warstwy strumieniami ciepła o odpowiednio stałym i liniowo zmniejszającym się profilu czasowym. Całkowanie numeryczne tych wzorów przeprowadzono z wykorzystaniem procedury QAGI pakietu QUADPACK [91].

Zmiany bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (4.1.67), (4.1.68) z czasem nagrzewania (liczbą Fouriera τ) w warstwie i podłożu pokazano na rysunkach 4.2 i 4.3. Naniesienie na jednorodne podłoże warstwy wykonanej z opisanego wyżej FGM powoduje obniżenie temperatury w stosunku do przypadku warstwy wykonanej całkowicie z dwutlenku cyrkonu (rysunek 4.2a). Warto zauważyć, że efekt ten staje się bardziej zauważalny wraz z upływem czasu nagrzewania i, odpowiednio, zwiększeniem temperatury warstwy. W efekcie stop tytanu Ti-6Al-4V, posiadający trzykrotnie większą przewodność cieplną niż dwutlenek cyrkonu ZrO_2, dobrze spełnia nadaną mu *a priori* funkcję przewodnika ciepła od nagrzewanej powierzchni warstwy, a tym samym obniża jej temperaturę. Należy zaznaczyć, że opisany efekt obniżenia temperatury w wyniku zastosowania FGM ogranicza się do wnętrza warstwy ($0 \le \zeta < 1$). Przechodząc natomiast od interfejsu, a następnie dalej w głąb podłoża ($\zeta \ge 1$), obserwujemy przeciwne do wyżej opisanego zachowanie ewolucji temperatury – temperatura podłoża z naniesioną FGM warstwą okazuje się wyższa niż przy zastosowaniu warstwy jednorodnej (rysunek 4.2b). Jest to spowodowane znacznie wyższą zdolnością przewodzenia ciepła przez żeliwo w porównaniu do stopu tytanu. Warto również zaznaczyć, że temperatura podłoża jest przy tym o ponad rząd wielkości niższa niż temperatura warstwy.

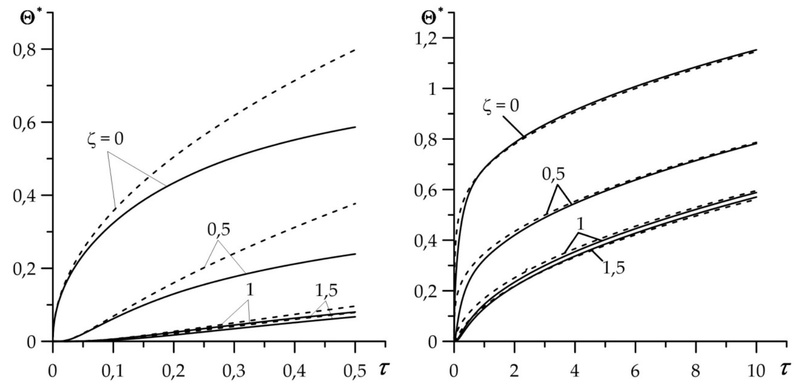
Rezultaty zaprezentowane na rysunku 4.2 otrzymano na podstawie dokładnych rozwiązań dla warstwy (4.1.67) oraz podłoża (4.1.68), natomiast na rysunku 4.3 za pomocą asymptotycznych rozwiązań przy małych – (4.1.75), (4.1.76) – i dużych – (4.1.79), (4.1.80) – wartościach bezwymiarowego czasu (liczby Fouriera) τ. Obliczenia przeprowadzono wyłącznie dla warstwy wykonanej z FGM.



a) b)

Rysunek 4.2. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^{*}(\zeta,\tau)$ dla wybranych wartości bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ w: a) warstwie, b) podłożu. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z ZrO_2

Zadowalająca zgodność rozwiązań dokładnego i asymptotycznego (przy małym τ) ma miejsce w zakresie $0 \leq \tau \leq 0{,}1$ (rysunek 4.3a). Dobra zgodność tychże rezultatów (przy dużym τ) zachodzi natomiast przy $\tau \geq 1$ (rysunek 4.3b). Zaletą korzystania z rozwiązań asymptotycznych jest ich postać analityczna, która eliminuje potrzebę uruchamiania pracochłonnych procedur całkowania numerycznego. Otrzymane rozwiązania asymptotyczne mogą więc posłużyć do ekspresowego oszacowania trybu temperaturowego rozpatrywanego układu warstwa-podłoże.

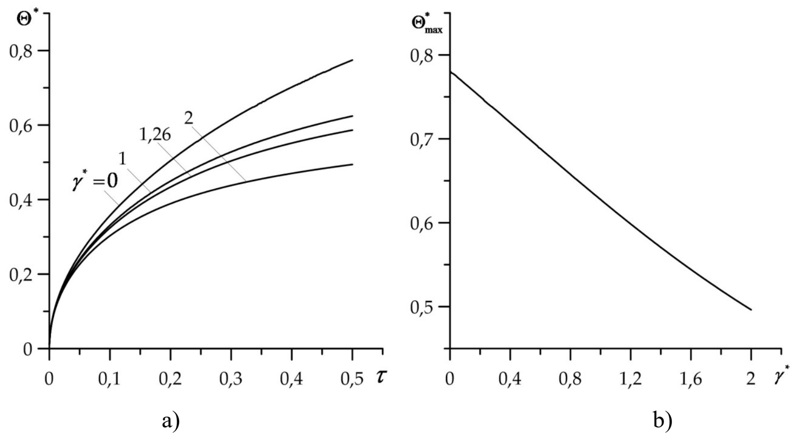


a) b)

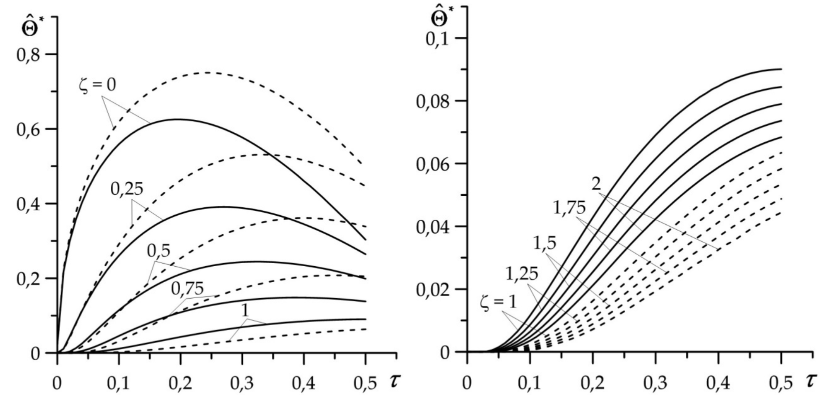
Rysunek 4.3. Porównanie profili czasowych bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^{*}(\zeta,\tau)$ warstwy FGM otrzymanych za pomocą dokładnych (4.1.67), (4.1.68) (krzywe ciągłe) oraz asymptotycznych (krzywe przerywane) rozwiązań przy: a) małych (4.1.75), (4.1.76); b) dużych (4.1.79), (4.1.80) liczbach Fouriera τ dla wybranych wartości bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ

Zaprezentowane na rysunkach 4.2 i 4.3 rezultaty otrzymano dla wartości gradientu γ^* = 1,26 rozpatrywanego FGM. Jednocześnie γ^* można potraktować jako niezależny parametr wejściowy odpowiadający, zgodnie ze wzorem (4.1.1), za szybkość „przejścia” współczynnika przewodności cieplnej K_1 materiału warstwy od wartości $K_{1,1}$ pierwszego składnika do wartości $K_{1,2}$ składnika drugiego. Wpływ wielkości gradientu γ^* na temperaturę nagrzewanej powierzchni warstwy pokazano na rysunku 4.4, gdzie rezultaty otrzymane przy γ^* = 0 odpowiadają przypadkowi warstwy wykonanej w całości z dwutlenku cyrkonu. Zwiększenie gradientu powoduje obniżenie temperatury, które staje się coraz bardziej zauważalne wraz z upływem czasu nagrzewania (rysunek 4.4a). W chwili końcowej τ = 0,5 obniżenie temperatury nagrzewanej powierzchni warstwy ma charakter prawie liniowy (rysunek 4.4b).

Badanie wpływu liniowo zmniejszającego się profilu czasowego intensywności strumienia ciepła (4.1.101) przeprowadzono na podstawie rozwiązań (4.1.111) i (4.1.112) przy τ_s = 0,5 (rysunek 4.5). Jeżeli przy stałej intensywności strumienia ciepła temperatura zarówno warstwy, jak i podłoża zwiększa się monotonicznie wraz z czasem nagrzewania (rysunek 4.3), to w rozpatrywanym przypadku liniowego profilu intensywności strumienia ciepła temperatura warstwy osiąga wartość maksymalną $\hat{\Theta}^*_{\max}$ w chwili $0 < \tau_{\max} < \tau_s$ (rysunek 4.5a). Najszybciej $\hat{\Theta}^*_{\max}$ jest osiągana na nagrzewanej powierzchni ζ = 0 warstwy. Wraz z oddalaniem się od nagrzewanej powierzchni czas osiągnięcia $\hat{\Theta}^*_{\max}$ wydłuża się. Począwszy od interfejsu ζ = 1, a następnie dalej w głąb podłoża ζ > 1, temperatura zwiększa się podczas całego procesu nagrzewania, osiągając najwyższą wartość w chwili $\tau_{\max} = \tau_s$ (rysunek 4.5b).

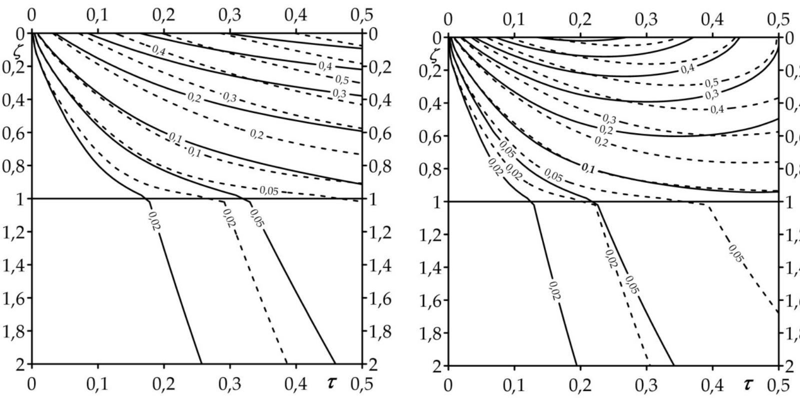


Rysunek 4.4. Wpływ gradientu γ^* warstwy FGM na bezwymiarowy przyrost temperatury: a) ewolucje $\Theta^*(0,\tau)$ (4.1.67), (4.1.68) dla wybranych wartości γ^*; b) zależność $\Theta^*_{\max} \equiv \Theta^*(0;0,5)$ od γ^*



a) b)

Rysunek 4.5. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta, \tau)$ (4.1.111), (4.1.112) dla wybranych wartości bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ w: a) warstwie, b) podłożu. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z ZrO_2



a) b)

Rysunek 4.6. Izolinie bezwymiarowych przyrostów temperatury: a) $\Theta^*(\zeta, \tau)$ (4.1.67), (4.1.68); b) $\hat{\Theta}^*(\zeta, \tau)$ (4.1.111), (4.1.112). Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z ZrO_2

Podobnie jak przy stałej, tak i przy zmieniającej się z czasem intensywności strumienia ciepła uwzględnienie gradientowości materiału warstwy powoduje obniżenie jej temperatury w stosunku do temperatury warstwy wykonanej z materiału jednorodnego. W podłożu sytuacja jest odwrotna – przy ustalonej wartości ζ jego temperatura jest niższa przy naniesieniu warstwy jednorodnej. Jednocześnie niezależnie od materiału warstwy (FGM czy jednorodny) temperatura podłoża jest o rząd wielkości niższa od temperatury warstwy.

Przestrzenno-czasowe rozkłady temperatury przy stałej i zmiennej z czasem intensywności strumienia ciepła zaprezentowano na rysunku 4.6. Wizualne różnice między kształtem odpowiednich izoterm występują tylko w bardziej nagrzanym elemencie układu – warstwie, która przyjmuje główną część obciążenia termicznego. W przypadku stałej intensywności strumienia ciepła izolinie temperatury o ustalonym poziomie wraz z upływem czasu zachodzą na coraz większą głębokość wewnątrz warstwy. Nagrzewanie strumieniem ciepła o liniowo malejącym profilu czasowym intensywności skutkuje natomiast pojawieniem się izotermy maksymalnej na nagrzewanej powierzchni warstwy, na którą dociera ona na chwilę przed zakończeniem procesu nagrzewania.

4.1.7. Podsumowanie

W wyniku przeprowadzonej analizy numerycznej ustalono, że:

1. Naniesienie pokrycia wykonanego z FGM na jednorodne podłoże pozwala na efektywne obniżenie temperatury nagrzewanej powierzchni.
2. Warstwa FGM jest głównym absorbentem ciepła powstałego w wyniku nagrzewania. W rezultacie poziom temperatury podłoża jest znacznie niższy niż warstwy.
3. Profil czasowy intensywności strumienia ciepła ma odczuwalny wpływ na przestrzenno-czasowy rozkład izoterm jedynie w warstwie.
4. W przypadku wybranego układu warstwa-podłoże decydujący wpływ na maksymalną temperaturę ma gradient FGM.
5. Otrzymane asymptotyczne rozwiązania są przydatne przy ekspresowym oszacowaniu temperatury warstwy i podłoża przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera.
6. Zaproponowany model matematyczny może służyć jako efektywne narzędzie do symulacji trybu temperaturowego ciał z naniesionym na ich powierzchnie pokryciem FGM.

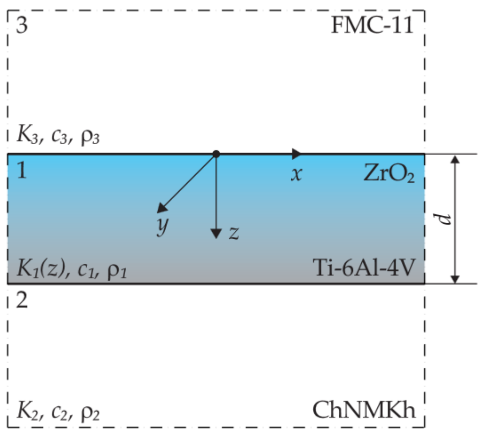
Reasumując, należy zaznaczyć, że opracowana metodyka otrzymywania dokładnych i asymptotycznych rozwiązań z sukcesem może być stosowana również do klasy FGM nie tylko ze zwiększającą się, ale i zmniejszającą po grubości przewodnością ciepła, a także w zagadnieniach przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia na powierzchni kontaktu ochronnej warstwy z przeciwciałem. Przykładowo taką parę mogą tworzyć tarcza z naniesionym na powierzchnię cierną FGM pokryciem w skojarzeniu z nakładką. Odpowiednie zagadnienie cieplne tarcia zostanie rozpatrzone w kolejnym podrozdziale.

Przedstawione w niniejszym podrozdziale rezultaty zostały opublikowane w pracy [158].

4.2. Generacja ciepła w układzie ciernym dwóch jednorodnych półprzestrzeni, z których jedna zawiera warstwę gradientową

4.2.1. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzono kontakt ślizgowy dwóch półograniczonych ciał (półprzestrzeni) z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia (rysunek 4.7). Dolna półprzestrzeń składa się z warstwy ochronnej naniesionej na powierzchnię podstawy, natomiast materiały podstawy i górnej półprzestrzeni (przeciwciało) są jednorodne. Warstwę wykonano zaś z dwuelementowego, funkcyjnie gradientowego materiału (FGM) o współczynniku przewodności cieplnej K_1, zwiększającym się eksponencjalnie po jej grubości zgodnie ze wzorem (4.1.1).



Rysunek 4.7. Schemat nagrzewania trzyelementowego układu ciernego

W początkowej chwili $t = 0$ temperatura T wszystkich ciał układu jest stała i wynosi T_0. Następnie obie półprzestrzenie (jednorodna oraz kawałkami jednorodna), pod wpływem ciśnienia kontaktowego p_0 działającego równolegle do osi Oz, wchodzą w kontakt i jednocześnie zaczynają ślizgać się w dodatnim kierunku osi Ox ze stałą prędkością V_0. Na skutek tarcia na powierzchni kontaktu $z = 0$ generowane jest ciepło i ciała nagrzewają się. Założono, że kontakt cieplny tarcia jest pełny, tzn. że w ustalonej chwili $t > 0$ powierzchnie cierne warstwy i przeciwciała są nagrzane do jednakowej temperatury, a suma intensywności strumieni ciepła skierowanych od powierzchni kontaktu po normalnej do wewnątrz warstwy i przeciwciała równa się gęstości mocy tarcia $q_0 = fp_0 \, q_0 = fp_0 V_0$, gdzie f to współczynnik tarcia.

Połączenie cieplne warstwy z podłożem jest doskonałe, tzn. temperatury i intensywności strumieni ciepła tych elementów na interfejsie $z = d$ są takie same. W tym podrozdziale przedstawiono opracowanie takiego modelu matematycznego, który pozwoli na analityczne wyznaczenie temperatury T rozpatrywanego trzyelementowego układu w ustalonym miejscu $|z| < \infty$ w wybranej chwili $t > 0$. Na podstawie przyjętych wyżej założeń sformułowano następujące początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego względem przyrostu temperatury $\Theta(z,t) = T(z,t) - T_0$:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(z)\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\right] = \rho_1 c_1 \frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial t}, \ 0 < z < d, \ t > 0, \tag{4.2.1}$$

$$K_2 \frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial z^2} = \rho_2 c_2 \frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial t}, \ z > d, \ t > 0, \tag{4.2.2}$$

$$K_3 \frac{\partial^2\Theta(z,t)}{\partial z^2} = \rho_3 c_3 \frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial t}, \ z < 0, \ t > 0, \tag{4.2.3}$$

$$\Theta(0^+,t) = \Theta(0^-,t), \ t > 0, \tag{4.2.4}$$

$$K_1(z)\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^+} - K_3\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0^-} = -q_0, \ t > 0, \tag{4.2.5}$$

$$\Theta(d^+,t) = \Theta(d^-,t), \ t > 0, \tag{4.2.6}$$

$$K_1(z)\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=d^+} = K_2\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=d^-}, \ t > 0, \tag{4.2.7}$$

$$\Theta(z,t) \to 0, \ |z| \to \infty, \ t > 0, \tag{4.2.8}$$

$$\Theta(z,0) = 0, \ |z| < \infty, \tag{4.2.9}$$

przy czym K_2 i K_3 to współczynniki przewodności cieplnej odpowiednio materiałów podłoża i przeciwciała, zaś ρ_l, c_l to odpowiednio gęstość i ciepło właściwe materiałów warstwy ($l = 1$), podłoża ($l = 2$) i przeciwciała ($l = 3$).

Po wprowadzeniu bezwymiarowych zmiennych i parametrów:

$$\zeta = \frac{z}{d}\,,\ \tau = \frac{k_1 t}{d^2}\,,\ K_2^* = \frac{K_2}{K_{1,1}}\,,\ K_3^* = \frac{K_3}{K_{1,1}}\,,\ k_2^* = \frac{k_2}{k_1}\,,\ k_3^* = \frac{k_2}{k_1}\,,\ \Theta^* = \frac{\Theta}{\Theta_0}\,, \tag{4.2.10}$$

gdzie:

$$k_1 = \frac{K_{1,1}}{c_1\rho_1}\,,\ k_2 = \frac{K_2}{c_2\rho_2}\,,\ k_3 = \frac{K_3}{c_3\rho_3}\,,\ \Theta_0 = \frac{q_0 d}{K_{1,1}}\,, \tag{4.2.11}$$

zagadnienie (4.2.1)–(4.2.9) zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta^2} + \gamma^* \frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta} - e^{-\gamma^*\zeta}\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\tau} = 0\,,\ 0<\zeta<1\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.12}$$

$$\frac{\partial^2\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{k_2^*}\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\tau} = 0\,,\ \zeta>1\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.13}$$

$$\frac{\partial^2\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{k_3^*}\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\tau} = 0\,,\ \zeta<0\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.14}$$

$$\Theta^*(0^+,\tau) = \Theta^*(0^-,\tau)\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.15}$$

$$\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^+} - K_3^*\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^-} = -1\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.16}$$

$$\Theta(1^+,\tau) = \Theta(1^-,\tau)\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.17}$$

$$e^{\gamma^*}\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1^+} = K_2^*\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1^-}\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.18}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\to 0\,,\ |\zeta|\to\infty\,,\ \tau>0\,, \tag{4.2.19}$$

$$\Theta^*(\zeta,0) = 0\,,\ |\zeta|<\infty\,, \tag{4.2.20}$$

przy czym γ^* jest bezwymiarowym parametrem gradientu warstwy FGM.

4.2.2. Rozwiązanie dokładne przy stałej gęstości mocy tarcia

Za pomocą transformaty całkowej Laplace'a (3.1.20) początkowo-brzegowe zagadnienie (4.2.12)–(4.2.20) sprowadzono do następującego zagadnienia brzegowego dla układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}+\gamma^*\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,\tau)}{d\zeta}-pe^{-\gamma^*\zeta}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ 0<\zeta<1, \qquad (4.2.21)$$

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}-\frac{p}{k_2^*}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ \zeta>1, \qquad (4.2.22)$$

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}-\frac{p}{k_3^*}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ \zeta<0, \qquad (4.2.23)$$

$$\overline{\Theta}^*(0^+,p)=\overline{\Theta}^*(0^-,p), \qquad (4.2.24)$$

$$\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^+}-K_3^*\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^-}=-\frac{1}{p}, \qquad (4.2.25)$$

$$\overline{\Theta}^*(1^+,p)=\overline{\Theta}^*(1^-,p), \qquad (4.2.26)$$

$$e^{\gamma^*}\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=1^+}=K_2^*\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=1^-}, \qquad (4.2.27)$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)\to 0,\ |\zeta|\to\infty, \qquad (4.2.28)$$

gdzie p jest parametrem transformaty Laplace'a.

Rozwiązanie zagadnienia (4.2.21)–(4.2.28) ma postać:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=e^{-\tilde{\alpha}\zeta}\,\overline{\Theta}_0^*(p)\overline{\Theta}_1^*(\zeta,p),\ 0\le\zeta\le 1, \qquad (4.2.29)$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=\tilde{\alpha}\,\overline{\Theta}_0^*(p)\overline{\Theta}_2^*(\zeta,p),\ \zeta\ge 1, \qquad (4.2.30)$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=\overline{\Theta}_0^*(p)\overline{\Theta}_3^*(\zeta,p),\ \zeta<0, \qquad (4.2.31)$$

gdzie:

$$\overline{\Theta}_0^*(p)=\frac{1}{\sqrt{p}}\,,\ \overline{\Theta}_1^*(\zeta,p)=\frac{\Delta_1(\zeta,p)}{p\Delta(p)}\,,\ \overline{\Theta}_2^*(\zeta,p)=\frac{e^{-\zeta_2\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}\Delta(p)}\,,$$

$$\overline{\Theta}_3^*(\zeta,p)=\frac{\Delta_3(p)e^{-\zeta_3\sqrt{p}}}{p\Delta(p)}\,,\ |\zeta|<\infty\,, \tag{4.2.32}$$

$$\Delta_1(\zeta,p)=A(p)\mathrm{I}_1(\zeta_1\sqrt{p})+B(p)\mathrm{K}_1(\zeta_1\sqrt{p})\,,$$
$$\Delta_3(p)=A(p)\mathrm{I}_1(\alpha\sqrt{p})+B(p)\mathrm{K}_1(\alpha\sqrt{p})\,, \tag{4.2.33}$$

$$\Delta(p)=A(p)[\mathrm{I}_0(\alpha\sqrt{p})+\varepsilon_3\mathrm{I}_1(\alpha\sqrt{p})]-B(p)[\mathrm{K}_0(\alpha\sqrt{p})-\varepsilon_3\mathrm{K}_1(\alpha\sqrt{p})]\,, \tag{4.2.34}$$

$$A(p)=\mathrm{K}_0(\beta\sqrt{p})+\varepsilon_2\,e^{-\tilde{\alpha}}\mathrm{K}_1(\beta\sqrt{p})\,,\ B(p)=\mathrm{I}_0(\beta\sqrt{p})-\varepsilon_2\,e^{-\tilde{\alpha}}\mathrm{I}_1(\beta\sqrt{p})\,, \tag{4.2.35}$$

$$\alpha=\frac{2}{\gamma^*}\,,\ \tilde{\alpha}=\frac{1}{\alpha}\,,\ \beta=\frac{\alpha}{e^{\tilde{\alpha}}}\,,\ \varepsilon_2=\frac{K_2^*}{\sqrt{k_2^*}}\,,\ \varepsilon_3=\frac{K_3^*}{\sqrt{k_3^*}}\,,$$
$$\zeta_1=\frac{\alpha}{e^{\tilde{\alpha}\zeta}}\,,\ \zeta_2=\frac{\zeta-1}{\sqrt{k_2^*}}\,,\ \zeta_3=\frac{|\zeta|}{\sqrt{k_3^*}}\,. \tag{4.2.36}$$

Uwzględniając postaci transformowanych rozwiązań (4.2.29)–(4.2.31), na podstawie twierdzenia o splocie dwóch funkcji [105] bezwymiarowe przyrosty temperatury zapisano w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=e^{-\tilde{\alpha}\zeta}\int_0^\tau\Theta_0^*(\tau-s)\Theta_1^*(\zeta,s)ds\,,\ 0\le\zeta\le1\,,\ \tau\ge0\,, \tag{4.2.37}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=\tilde{\alpha}\int_0^\tau\Theta_0^*(\tau-s)\Theta_2^*(\zeta,s)ds\,,\ \zeta\ge1\,,\ \tau\ge0\,, \tag{4.2.38}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=\int_0^\tau\Theta_0^*(\tau-s)\Theta_3^*(\zeta,s)ds\,,\ \zeta\le0\,,\ \tau\ge0\,, \tag{4.2.39}$$

gdzie [135]:

$$\Theta_0^*(\tau)\equiv L^{-1}[\overline{\Theta}_0^*(p);\tau]=\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\,, \tag{4.2.40}$$

$$\Theta_l^*(\zeta,\tau) \equiv L^{-1}[\overline{\Theta}_l^*(\zeta,p);\tau] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \overline{\Theta}_l^*(\zeta,p)e^{p\tau}dp\ ,\ l=1;2;3\ ,$$

$$\omega \equiv \operatorname{Re} p > 0\ ,\ i \equiv \sqrt{-1}\ . \tag{4.2.41}$$

Całkowanie na płaszczyźnie zespolonej ($\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p$) we wzorze (4.2.41) przeprowadzono według metodyki szczegółowo opisanej w podrozdziale 4.1. W rezultacie otrzymano:

$$\Theta_1^*(\zeta,\tau) = \frac{e^{\tilde{\alpha}\zeta}}{\varepsilon_2+\varepsilon_3} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi_1(\zeta,x)}{x\Psi(x)} e^{-x^2\tau}dx\ ,\ 0 \le \zeta \le 1\ ,\ \tau \ge 0\ , \tag{4.2.42}$$

$$\Theta_2^*(\zeta,\tau) = \frac{\alpha}{\varepsilon_2+\varepsilon_3} - \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi_2(\zeta,x)}{x^2\Psi(x)} e^{-x^2\tau}dx\ ,\ \zeta \ge 1\ ,\ \tau \ge 0\ , \tag{4.2.43}$$

$$\Theta_3^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{\varepsilon_2+\varepsilon_3} + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\Phi_3(\zeta,x)}{x\Psi(x)} e^{-x^2\tau}dx\ ,\ \zeta \le 0\ ,\ \tau \ge 0\ , \tag{4.2.44}$$

gdzie:

$$\Phi_1(\zeta,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta_1,x) - \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta_1,x)\ , \tag{4.2.45}$$

$$\Phi_2(\zeta,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\cos(\zeta_2 x) - \Delta_{\mathrm{I}}(x)\sin(\zeta_2 x)\ , \tag{4.2.46}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(\zeta,x) = {}&[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{3,\mathrm{I}}(x) - \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{3,\mathrm{R}}(x)]\cos(\zeta_3 x) + \\ &-[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{3,\mathrm{R}}(x) + \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{3,\mathrm{I}}(x)]\sin(\zeta_3 x),\end{aligned} \tag{4.2.47}$$

$$\Psi(x) = \Delta_{\mathrm{R}}^2(x) + \Delta_{\mathrm{I}}^2(x)\ , \tag{4.2.48}$$

$$\Delta_{\mathrm{R}}(x) = \mathrm{Y}_0(\alpha x)\mathrm{J}_0(\beta x) - \mathrm{J}_0(\alpha x)\mathrm{Y}_0(\beta x) + \varepsilon_3\Delta_{3,\mathrm{R}}(x)\ , \tag{4.2.49}$$

$$\Delta_{\mathrm{I}}(x) = \varepsilon_3\Delta_{3,\mathrm{I}}(x) - \varepsilon_2 e^{-\tilde{\alpha}}[\mathrm{Y}_0(\alpha x)\mathrm{J}_1(\beta x) - \mathrm{J}_0(\alpha x)\mathrm{Y}_1(\beta x)]\ , \tag{4.2.50}$$

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta,x) = \varepsilon_2 e^{-\tilde{\alpha}}[\mathrm{J}_1(\beta x)\mathrm{Y}_1(\zeta_1 x) - \mathrm{Y}_1(\beta x)\mathrm{J}_1(\zeta_1 x)]\ , \tag{4.2.51}$$

$$\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta,x) = \mathrm{J}_0(\beta x)\mathrm{Y}_1(\zeta_1 x) - \mathrm{Y}_0(\beta x)\mathrm{J}_1(\zeta_1 x)\ , \tag{4.2.52}$$

$$\Delta_{3,\mathrm{R}}(x) = \varepsilon_2 e^{-\tilde{\alpha}}[\mathrm{Y}_1(\alpha x)\mathrm{J}_1(\beta x) - \mathrm{J}_1(\alpha x)\mathrm{Y}_1(\beta x)]\ , \tag{4.2.53}$$

$$\Delta_{3,\mathrm{I}}(x) = \mathrm{Y}_1(\alpha x)\mathrm{J}_0(\beta x) - \mathrm{J}_1(\alpha x)\mathrm{Y}_0(\beta x)\ . \tag{4.2.54}$$

Uwzględniając funkcje $\Theta_0^*(\tau)$ (4.2.40) oraz $\Theta_l^*(\zeta,\tau)$, l = 1;2;3 (4.2.42)–(4.2.44) we wzorach (4.2.37)–(4.2.39), po przeprowadzeniu całkowania poszukiwany bezwymiarowy przyrost temperatury znaleziono w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}+\frac{2}{\pi}e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty\frac{\Phi_1(\zeta,x)}{x\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx\right],$$

$$0\le\zeta\le1,\ \tau\ge0, \tag{4.2.55}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}-\frac{2\gamma^*}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\Phi_2(\zeta,x)}{x^2\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx\right],\ \zeta\ge1,\ \tau\ge0, \tag{4.2.56}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{1}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\Phi_3(\zeta,x)}{x\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx\right],\ \zeta\le0,\ \tau\ge0, \tag{4.2.57}$$

gdzie $F(x)$ to funkcja (4.1.69), (4.1.70).

4.2.3. Weryfikacja rozwiązania

Prawidłowość rozwiązań (4.2.55)–(4.2.57) wykazano, udowadniając że spełniają one warunki brzegowe (4.2.15)–(4.2.19) i warunek początkowy (4.2.20). Z porównania postaci rozwiązań (4.2.55) i (4.2.57) wynika, że warunek (4.2.15) równości temperatury warstwy i przeciwciała na powierzchni kontaktu $\zeta=0$ zostanie spełniony, jeżeli:

$$\Phi_1(0^+,x)=\Phi_3(0^-,x). \tag{4.2.58}$$

Podstawiając we wzorach (4.2.51)–(4.2.54) $\zeta=0$ ($\zeta_1=\alpha$), znaleziono:

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(0,x)=\Delta_{3,\mathrm{R}}(x),\ \Delta_{1,\mathrm{I}}(0,x)=\Delta_{3,\mathrm{I}}(x), \tag{4.2.59}$$

skąd, na podstawie wzorów (4.2.45) i (4.2.47), otrzymujemy równość (4.2.58).

Porównując rozwiązania (4.2.55) i (4.2.56), można zauważyć, że warunek (4.2.17) równości temperatury na interfejsie $\zeta=1$ będzie spełniony, gdy:

$$e^{-\gamma^*/2}\pi x\Phi_1(1^+,x)+\gamma^*\Phi_2(1^-,x)=0. \tag{4.2.60}$$

Przy $\zeta=1$ ze wzorów (4.2.36) wynika, że $\zeta_1=\beta$, a $\zeta_2=0$. Wtedy ze wzorów (4.2.51) i (4.2.52) otrzymujemy [2]:

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}(1,x)=0\,,\ \Delta_{1,\mathrm{I}}(1,x)=\mathrm{J}_0(\beta x)\mathrm{Y}_1(\beta x)-\mathrm{Y}_0(\beta x)\mathrm{J}_1(\beta x)\equiv -2(\pi\beta x)^{-1}\,. \tag{4.2.61}$$

Uwzględniając definicję (4.2.36) parametru β, ze wzorów (4.2.45), (4.2.46) i (4.2.61) znaleziono:

$$\Phi_1(1^+,x)=-\frac{\gamma^* e^{\gamma^*/2}}{\pi x}\Delta_\mathrm{R}(x)\,,\ \Phi_2(1^-,x)=\Delta_\mathrm{R}(x)\,, \tag{4.2.62}$$

co świadczy o wykonaniu równości (4.2.60), a tym samym spełnieniu warunku brzegowego (4.2.17).

Po zróżniczkowaniu rozwiązania (4.2.55) po zmiennej przestrzennej ζ otrzymano:

$$\Theta'^*(\zeta,\tau)=\frac{2}{\pi}e^{-\gamma^*\zeta/2}\sqrt{\tau}\int_0^\infty\frac{[\Phi_1'(\zeta,x)-0{,}5\gamma^*\Phi_1(\zeta,x)]}{x\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx\,,$$
$$0\le\zeta\le 1\,,\ \tau\ge 0\,, \tag{4.2.63}$$

gdzie na podstawie wzoru (4.2.45) wykazano, że:

$$\Phi_1'(\zeta,x)=\Delta_\mathrm{R}(x)\Delta_{1,\mathrm{I}}'(\zeta,x)-\Delta_\mathrm{I}(x)\Delta_{1,\mathrm{R}}'(\zeta,x)\,. \tag{4.2.64}$$

Przy uwzględnieniu pochodnych funkcji Bessela (4.1.84) ze wzorów (4.2.49)–(4.2.52) znaleziono:

$$\Delta_{1,\mathrm{R}}'(\zeta,x)=0{,}5\gamma^*\Delta_{1,\mathrm{R}}(\zeta,x)-xe^{-0{,}5\gamma^*\zeta}\hat{\Delta}_\mathrm{I}(\zeta,x)\,, \tag{4.2.65}$$

$$\Delta_{1,\mathrm{I}}'(\zeta,x)=0{,}5\gamma^*\Delta_{1,\mathrm{I}}(\zeta,x)-xe^{-0{,}5\gamma^*\zeta}\hat{\Delta}_\mathrm{R}(\zeta,x)\,, \tag{4.2.66}$$

gdzie:

$$\hat{\Delta}_\mathrm{R}(\zeta,x)=\mathrm{J}_0(\beta x)\mathrm{Y}_0(\zeta_1 x)-\mathrm{Y}_0(\beta x)\mathrm{J}_0(\zeta_1 x)\,, \tag{4.2.67}$$

$$\hat{\Delta}_\mathrm{I}(\zeta,x)=\varepsilon_2 e^{-\gamma^*/2}[\mathrm{J}_1(\beta x)\mathrm{Y}_0(\zeta_1 x)-\mathrm{Y}_1(\beta x)\mathrm{J}_0(\zeta_1 x)]\,. \tag{4.2.68}$$

Podstawiając pochodne (4.2.65)–(4.2.68) do prawej strony wzoru (4.2.64), znaleziono:

$$\Phi_1'(\zeta,x)=0{,}5\gamma^*\Phi_1(\zeta,x)-xe^{-\gamma^*\zeta/2}\hat{\Phi}_1(\zeta,x)\,, \tag{4.2.69}$$

gdzie:

$$\hat{\Phi}_1(\zeta,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\hat{\Delta}_{\mathrm{R}}(\zeta,x) - \Delta_{\mathrm{I}}(x)\hat{\Delta}_{\mathrm{I}}(\zeta,x)\,. \qquad (4.2.70)$$

Biorąc pod uwagę postaci (4.2.69), (4.2.70) pochodnej funkcji $\Phi_1(\zeta,x)$, we wzorze (4.2.63) otrzymano:

$$\Theta'^{*}(\zeta,\tau) = -\frac{2}{\pi}e^{-\gamma^{*}\zeta}\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\hat{\Phi}_1(\zeta,x)}{\Psi(x)}\mathrm{F}(x\sqrt{\tau})dx\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,\ \tau \ge 0\,, \qquad (4.2.71)$$

a następnie, różniczkując rozwiązania (4.2.56) i (4.2.57), znaleziono:

$$\Theta'^{*}(\zeta,\tau) = -\frac{2\gamma^{*}}{\pi^2}\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\Phi_2'(\zeta,x)}{x^2\Psi(x)}\mathrm{F}(x\sqrt{\tau})dx\,,\ \zeta \ge 1\,,\ \tau \ge 0\,, \qquad (4.2.72)$$

$$\Theta'^{*}(\zeta,\tau) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\Phi_3'(\zeta,x)}{x\Psi(x)}\mathrm{F}(x\sqrt{\tau})dx\,,\ \zeta \le 0\,,\ \tau \ge 0\,, \qquad (4.2.73)$$

gdzie, na podstawie wzorów (4.2.46)–(4.2.50) oraz (4.2.53) i (4.2.54), wyznaczono:

$$\Phi_2'(\zeta,x) = -\frac{x}{\sqrt{k_2^{*}}}[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\sin(\zeta_2 x) + \Delta_{\mathrm{I}}(x)\cos(\zeta_2\, x)]\,, \qquad (4.2.74)$$

$$\begin{aligned}\Phi_3'(\zeta,x) = -\frac{x}{\sqrt{k_3^{*}}}\{&[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{3,\mathrm{I}}(x) - \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{3,\mathrm{R}}(x)]\sin(\zeta_3 x) - \\ &+[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{3,\mathrm{R}}(x) + \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{3,\mathrm{I}}(x)]\cos(\zeta_3 x).\end{aligned} \qquad (4.2.75)$$

Podstawiając pochodne (4.2.71), (4.2.73) i (4.2.74) przy $\zeta = 0$ ($\zeta_1 = \alpha$, $\zeta_3 = 0$) do lewej strony warunku brzegowego (4.2.16), otrzymano:

$$\begin{aligned}&\Theta'^{*}(0^{+},\tau) - K_3^{*}\Theta'^{*}(0^{-},\tau) = \\ &= -\frac{2}{\pi}\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\{\hat{\Phi}_1(0,x) + \varepsilon_3[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{3,\mathrm{R}}(x) + \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{3,\mathrm{I}}(x)]\}}{\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx, \tau \ge 0.\end{aligned} \qquad (4.2.76)$$

Uwzględniając wzór (4.2.70), zapisano:

$$\begin{aligned}&\hat{\Phi}_1(0,x) + \varepsilon_3[\Delta_{\mathrm{R}}(x)\Delta_{3,\mathrm{R}}(x) + \Delta_{\mathrm{I}}(x)\Delta_{3,\mathrm{I}}(x)] = \\ &\quad = \Delta_{\mathrm{R}}(x)[\hat{\Delta}_{\mathrm{R}}(0,x) + \varepsilon_3\Delta_{3,\mathrm{R}}(x)] - \Delta_{\mathrm{I}}(x)[\hat{\Delta}_{\mathrm{I}}(0,x) - \varepsilon_3\Delta_{3,\mathrm{I}}(x)].\end{aligned} \qquad (4.2.77)$$

Następnie, biorąc pod uwagę postaci funkcji $\Delta_{3,\mathrm{R}}(x)$ (4.2.53) i $\Delta_{3,\mathrm{I}}(x)$ (4.2.54) oraz powstałe odpowiednio ze wzorów (4.2.67) i (4.2.68) funkcje

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{R}}(0,x) = \mathrm{Y}_0(\alpha x)\mathrm{J}_0(\beta x) - \mathrm{J}_0(\alpha x)\mathrm{Y}_0(\beta x) \text{ i} \tag{4.2.78}$$

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{I}}(0,x) = \varepsilon_2 e^{-\gamma^*/2}[\mathrm{Y}_0(\alpha x)\mathrm{J}_1(\beta x) - \mathrm{J}_0(\alpha x)\mathrm{Y}_1(\beta x)], \tag{4.2.79}$$

ustalono, że:

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{R}}(0,x) + \varepsilon_3\Delta_{3,\mathrm{R}}(x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x), \; \hat{\Delta}_{\mathrm{I}}(0,x) - \varepsilon_3\Delta_{3,\mathrm{I}}(x) = -\Delta_{\mathrm{I}}(x), \tag{4.2.80}$$

gdzie funkcje $\Delta_{\mathrm{R}}(x)$ i $\Delta_{\mathrm{I}}(x)$ mają odpowiednio postaci (4.2.49) i (4.2.50).

Uwzględniając relacje (4.2.80) w prawej stronie wzoru (4.2.77) oraz postać funkcji $\Psi(x)$ (4.2.48), równość (4.2.76) zapisano w postaci:

$$\Theta'^*(0^+,\tau) - K_3^*\Theta'^*(0^-,\tau) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\tau}\int_0^\infty F(x\sqrt{\tau})dx, \; \tau \ge 0. \tag{4.2.81}$$

Kiedy weźmiemy pod uwagę całkę (4.1.89), z równości (4.2.81) wyniknie, że warunek brzegowy (4.2.16) też został spełniony.

Podstawiając $\zeta = 1$ ($\zeta_1 = \beta, \zeta_2 = 0$) we wzorach (4.2.71) i (4.2.72), otrzymano:

$$e^{\gamma^*}\Theta'^*(1^+,\tau) = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\hat{\Phi}_1(1,x)}{\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx, \; \tau \ge 0, \tag{4.2.82}$$

$$K_2^*\Theta'^*(1^-,\tau) = -\frac{2\gamma^* K_2^*}{\pi^2}\sqrt{\tau}\int_0^\infty \frac{\Phi_2'(1,x)}{x^2\Psi(x)}F(x\sqrt{\tau})dx, \; \tau \ge 0, \tag{4.2.83}$$

gdzie, na podstawie wzorów (4.2.70) i (4.2.74), mamy:

$$\hat{\Phi}_1(1^+,x) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\hat{\Delta}_{\mathrm{R}}(1,x) - \Delta_{\mathrm{I}}(x)\hat{\Delta}_{\mathrm{I}}(1,x), \; K_2^*\Phi_2'(1^-,x) = -\varepsilon_2 x\Delta_{\mathrm{I}}(x). \tag{4.2.84}$$

Ze wzorów (4.2.67) i (4.2.68) wynika, że [122]:

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{R}}(1,x) = 0,$$

$$\hat{\Delta}_{\mathrm{I}}(1,x) = \varepsilon_2 e^{-\gamma^*/2}[\mathrm{J}_1(\beta x)\mathrm{Y}_0(\beta x) - \mathrm{Y}_1(\beta x)\mathrm{J}_0(\beta x)] \equiv \varepsilon_2\gamma^*(\pi x)^{-1}, \tag{4.2.85}$$

przy czym pierwsza równość (4.2.84) przyjmuje postać:

$$\hat{\Phi}_1(1^+, x) = -\varepsilon_2 \gamma^* (\pi x)^{-1} \Delta_{\mathrm{I}}(x) . \tag{4.2.86}$$

Uwzględniając wzory (4.2.84)–(4.2.86) w prawych stronach równości (4.2.82) i (4.2.83), otrzymano:

$$e^{\gamma^*} \Theta'^*(1^+, \tau) = \frac{2}{\pi^2} \varepsilon_2 \gamma^* \sqrt{\tau} \int_0^\infty \frac{\Delta_{\mathrm{I}}(x)}{x \Psi(x)} F(x\sqrt{\tau}) dx = K_2^* \Theta'^*(1^-, \tau) , \tag{4.2.87}$$

co potwierdza spełnienie warunku brzegowego (4.2.18).

Spełnienie warunku (4.2.19) zanikania bezwymiarowych przyrostów temperatury (4.2.56) i (4.2.57) przy $\zeta \to \infty$ zostało natomiast uwzględnione poprzez odrzucenie składników z $e^{\zeta_2 \sqrt{p}}$ i $e^{\zeta_3 \sqrt{p}}$ podczas rozwiązywania zagadnienia brzegowego (4.2.21)–(4.2.31), a także zweryfikowane przy obliczeniach numerycznych. Na koniec zauważono, że rozwiązania (4.2.55)–(4.2.57) spełniają również warunek początkowy (4.2.20).

4.2.4. Rozwiązania asymptotyczne oraz rozwiązanie przy zmiennym profilu czasowym gęstości mocy tarcia

Oprócz dokładnego (w kwadraturach) rozwiązania (4.2.55)–(4.2.58) otrzymano również odpowiednie asymptotyczne rozwiązania przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera (bezwymiarowego czasu) τ (4.2.10).

Małe wartości τ (duże wartości parametru p)

Uwzględniając we wzorach (4.2.32)–(4.2.35) asymptotyki zmodyfikowanych funkcji Bessela przy dużych wartościach argumentu (4.1.71), transformowane rozwiązania (4.2.29)–(4.2.31) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\gamma^* \zeta / 4}}{(1+\varepsilon_3)} \frac{e^{-(\alpha - \zeta_1)\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}, \; 0 \le \zeta < 1, \tag{4.2.88}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{2e^{-\gamma^*/4}}{(1+\varepsilon_2 e^{-\gamma^*/2})(1+\varepsilon_3)} \frac{e^{-(\alpha - \beta + \zeta_2)\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}, \; \zeta \ge 1, \tag{4.2.89}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\zeta_3 \sqrt{p}}}{(1+\varepsilon_3) p\sqrt{p}}, \; \zeta \le 0, \tag{4.2.90}$$

gdzie, jak ustalono na podstawie definicji (4.2.36):

$$\alpha-\zeta_1=\frac{2}{\gamma^*}(1-e^{-\gamma^*\zeta/2})\geq 0,\ \ \alpha-\beta+\zeta_2=\frac{2}{\gamma^*}(1-e^{-\gamma^*/2})+\frac{\zeta-1}{\sqrt{k_2^*}}>0,$$

$$\zeta_3\geq 0. \tag{4.2.91}$$

Przechodząc w transformatach (4.2.88)–(4.2.91) do oryginałów za pomocą związku [8]

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}};\tau\right]=2\sqrt{\tau}\,\mathrm{ierfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \lambda\geq 0\,, \tag{4.2.92}$$

asymptotyki bezwymiarowego przyrostu temperatury w początkowych chwilach procesu nagrzewania znaleziono w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2e^{-\gamma^*\zeta/4}\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon_3)}\mathrm{ierfc}\left(\frac{\alpha-\zeta_1}{2\sqrt{\tau}}\right),\ 0\leq\zeta<1\,,\ 0\leq\tau<<1\,, \tag{4.2.93}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{4e^{-\gamma^*/4}\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon_2e^{-\gamma^*/2})(1+\varepsilon_3)}\mathrm{ierfc}\left(\frac{\alpha-\beta+\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \zeta\geq 1\,,\ 0\leq\tau<<1\,, \tag{4.2.94}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon_3)}\mathrm{ierfc}\left(\frac{\zeta_3}{2\sqrt{\tau}}\right),\ \zeta\leq 0\,,\ 0\leq\tau<<1\,. \tag{4.2.95}$$

Duże wartości τ (małe wartości parametru p)

Przy małych wartościach argumentu zmodyfikowane funkcje Bessela zachowują się następująco [2]:

$$\mathrm{I}_0(x)\cong 1\,,\ \mathrm{I}_1(x)\cong 0{,}5x\,,\ \mathrm{K}_0(x)\cong-\ln(x)\,,\ \mathrm{K}_1(x)\cong x^{-1}\,. \tag{4.2.96}$$

Uwzględniając asymptotyki (4.2.96) we wzorach (4.2.32)–(4.2.35), transformaty Laplace'a (4.2.29)–(4.2.31) zapisano w postaci:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)\cong\frac{1}{b}\left[\frac{1}{p\sqrt{p}(\sqrt{p}+c)}+\frac{\varsigma}{p(\sqrt{p}+c)}\right],\ 0\leq\zeta\leq 1\,, \tag{4.2.97}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p)\cong\frac{e^{-\zeta_2\sqrt{p}}}{b\,p\sqrt{p}(\sqrt{p}+c)},\ \zeta\geq 1\,, \tag{4.2.98}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta, p) \cong \frac{e^{-\zeta_3\sqrt{p}}}{b}\left[\frac{1}{p\sqrt{p}(\sqrt{p}+c)} + \frac{a}{p(\sqrt{p}+c)}\right], \; \zeta \geq 0, \qquad (4.2.99)$$

gdzie:

$$a = \varepsilon_2 \frac{(1-e^{-\gamma^*})}{\gamma^*}, \; b = 1+\varepsilon_3 a, \; c = \frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{b}, \; \varsigma = \varepsilon_2 \frac{(e^{-\gamma^*\zeta} - e^{-\gamma^*})}{\gamma^*}. \qquad (4.2.100)$$

Biorąc pod uwagę związki [8]:

$$L^{-1}\left[\frac{c\, e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p(\sqrt{p}+c)}; \tau\right] = \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{\lambda c + c^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}} + c\sqrt{\tau}\right),$$

$$c > 0, \; \lambda \geq 0, \qquad (4.2.101)$$

$$L^{-1}\left[\frac{c^2 e^{-\lambda\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}(\sqrt{p}+c)}; \tau\right] = 2c\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, e^{-\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} - (1+\lambda c)\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}}\right) +$$

$$+ e^{\lambda c + c^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{\tau}} + c\sqrt{\tau}\right), \qquad (4.2.102)$$

otrzymano następujące asymptotyki bezwymiarowego przyrostu temperatury przy dużych wartościach liczby Fouriera τ:

$$\Theta^*(\zeta, \tau) \cong \frac{1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\left\{2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} - \left(\frac{1}{c} - \varsigma\right)[1 - e^{c^2\tau}\operatorname{erfc}(c\sqrt{\tau})]\right\},$$

$$0 \leq \zeta \leq 1, \; \tau >> 1, \qquad (4.2.103)$$

$$\Theta^*(\zeta, \tau) \cong \frac{1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\left\{2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\, e^{-\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} + \right.$$

$$\left. -\left(\frac{1}{c} + \zeta_2\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{1}{c}e^{c\zeta_2 + c^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}} + c\sqrt{\tau}\right)\right\}, \zeta \geq 1, \; \tau >> 1, \qquad (4.2.104)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\left\{2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,e^{-\left(\frac{\zeta_3}{2\sqrt{\tau}}\right)^2}-\left(\frac{1}{c}-a+\zeta_3\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_3}{2\sqrt{\tau}}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{c}-a\right)e^{c\zeta_3+c^2\tau}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_3}{2\sqrt{\tau}}+c\sqrt{\tau}\right)\right\},\ \zeta\le 0,\tau>>1. \qquad (4.2.105)$$

Na powierzchni ciernej $\zeta=0$, zaś ze wzorów (4.2.36) i (4.2.100) wynika, że $\zeta_3=0$ i $\varsigma=a$. Z rozwiązań (4.2.103) i (4.2.105) otrzymano natomiast:

$$\Theta^*(0^+,\tau)=\Theta^*(0^-,\tau)\cong\frac{1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\left\{2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}-\left(\frac{1}{c}-a\right)[1-e^{c^2\tau}\operatorname{erfc}(c\sqrt{\tau})]\right\},$$

$$\tau>>1. \qquad (4.2.106)$$

W podobny sposób, uwzględniając to, że na interfejsie $\zeta=1$ mamy $\zeta_2=0$, $\varsigma=0$, z rozwiązań (4.2.103) i (4.2.104) znaleziono:

$$\Theta^*(1^+,\tau)=\Theta^*(1^-,\tau)\cong\frac{1}{(\varepsilon_2+\varepsilon_3)}\left\{2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}-\frac{1}{c}[1-e^{c^2\tau}\operatorname{erfc}(c\sqrt{\tau})]\right\},\ \tau>>1. \qquad (4.2.107)$$

Liniowo zmniejszający się profil czasowy gęstości mocy tarcia

Zaprezentowane powyżej dokładne rozwiązania (4.2.55)–(4.2.57) otrzymano przy niezmiennej z czasem gęstości mocy tarcia q_0. Profil czasowy gęstości mocy tarcia, najczęściej używany do modelowania procesu nagrzewania tarciowego w tarczowych układach hamulcowych, ma natomiast postać (2.3.8). Bezwymiarowy przyrost temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$, odpowiadający gęstości mocy tarcia, znaleziono na podstawie wzoru Duhamela (4.1.100), gdzie $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ jest przyrostem bezwymiarowej temperatury (4.2.55)–(4.2.57), a funkcja $q^*(\tau)$ ma postać (4.1.101).

Podstawiając rozwiązania (4.2.55)–(4.2.57) oraz funkcję $q^*(\tau)$ (4.1.101) pod znak całki w prawej stronie wzoru (4.1.100), po wykonaniu całkowania według metodyki z podrozdziału 4.1, znaleziono:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{P(\tau)}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}+\frac{2}{\pi}e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty\frac{\Phi_1(\zeta,x)}{x\Psi(x)}Q(\tau,x)dx\right],$$

$$0\le\zeta\le 1,\ 0\le\tau\le\tau_s, \qquad (4.2.108)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{P(\tau)}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}-\frac{2\gamma^*}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{\Phi_2(\zeta,x)}{x^2\Psi(x)}Q(\tau,x)dx\right],\ \zeta\geq 1,\ 0\leq\tau\leq\tau_s, \quad (4.2.109)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\left[\frac{P(\tau)}{\varepsilon_2+\varepsilon_3}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\Phi_3(\zeta,x)}{x\Psi(x)}Q(\tau,x)dx\right],\ \zeta\leq 0,\ 0\leq\tau\leq\tau_s, \quad (4.2.110)$$

gdzie:

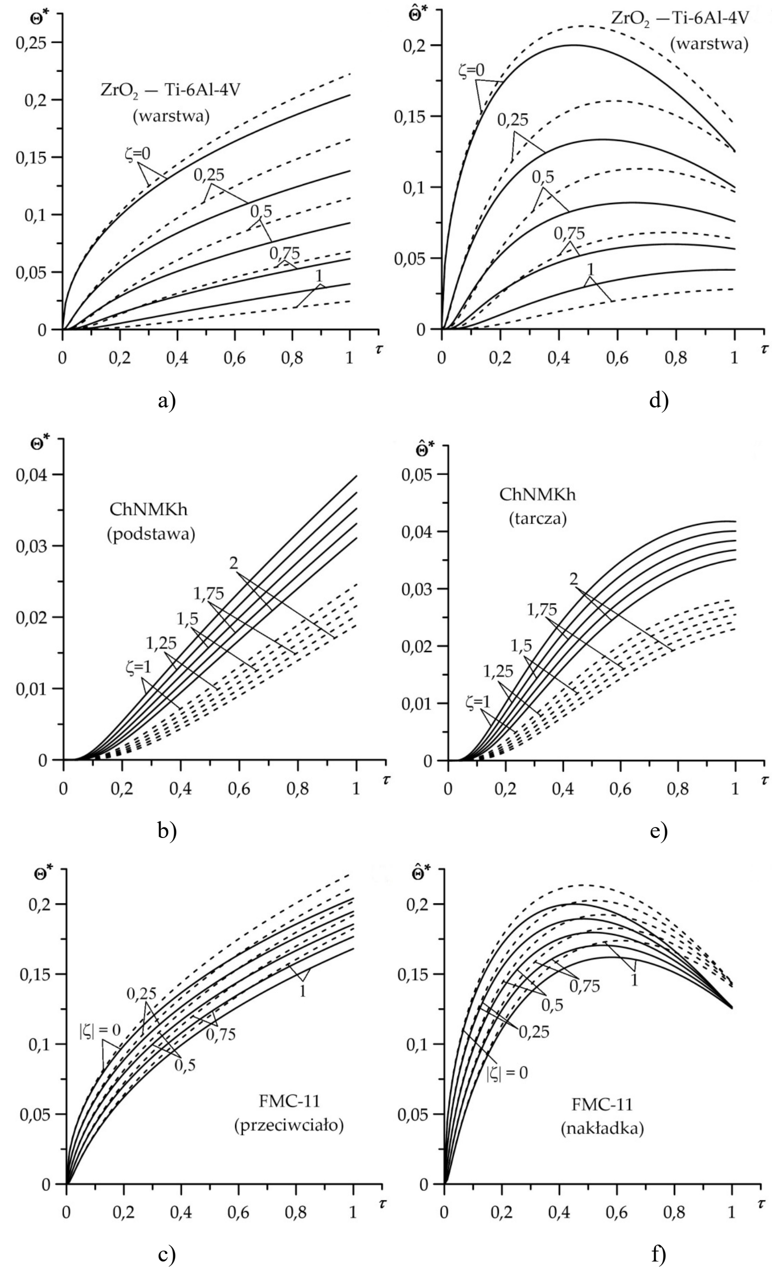
$$P(\tau)=1-\frac{2\tau}{3\tau_s},\ Q(\tau,x)=\left(1+\frac{1}{x^2\tau_s}\right)F(x\sqrt{\tau})-\frac{2}{\sqrt{\pi}x^2\tau_s}, \quad (4.2.111)$$

a funkcje $\Phi_k(\zeta,x)$, k = 1;2;3 dają się wyznaczyć wzorami (4.2.45)–(4.2.47) oraz (4.2.49)–(4.2.54).

4.2.5. Analiza numeryczna

Obliczenia przeprowadzono dla układu ciernego składającego się z dwóch półprzestrzeni. Jedna z nich zawiera dwuskładnikową warstwę FGM naniesioną na podłoże, zaś druga (przeciwciało) ślizga się po roboczej powierzchni warstwy ze stałą lub liniowo zmniejszającą się prędkością. Podstawę i rdzeń FGM stanowią odpowiednio dwutlenek cyrkonu ZrO_2 i tytanu Ti-6Al-4V. Podłoże tworzy żeliwo szare ChNMKh, a przeciwciało – metaloceramika FMC-11. Charakterystykę ZrO_2, Ti-6Al-4V oraz ChNMKh zawarto w tabeli 3.1, natomiast właściwości metaloceramiki FMC-11 wynoszą: K_3 = 35 Wm^{-1} K^{-1}, c_3 = 478,9 Jkg^{-1} K^{-1}, ρ_3 = 4700 kg m^{-3} [133]. Ciepło właściwe oraz gęstość materiału warstwy wyznaczono według prawa mieszanin na podstawie danych dla ZrO_2 i Ti-6Al-4V (tabela 3.1). Przy jednakowym udziale objętościowym tych komponentów ustalono efektywne wartości ciepła właściwego c_1 = 495,55 Jkg^{-1}K^{-1} i gęstości ρ_1 = 5266,98 kgm^{-3} warstwy. Bezwymiarowy parametr gradientu FGM oraz bezwymiarowy czas zatrzymania były równe odpowiednio γ^* = 1,26 i τ_s = 1. Do całkowania numerycznego zaimplementowano procedurę QAGI z pakietu QUADPACK [91].

Rezultaty obliczeń dla bezwymiarowych przyrostów temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (4.2.55)–(4.2.57) przy stałej oraz $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (4.2.108)–(4.2.111) przy liniowo zmniejszającej się gęstości mocy tarcia zaprezentowano na rysunku 4.8 (ewolucję) i rysunku 4.9 (izotermy). Analizę numeryczną przeprowadzono pod kątem porównania rezultatów otrzymanych przy naniesieniu na podłoże warstwy FGM (krzywe ciągłe) z odpowiednimi danymi znalezionymi przy stosowaniu jednorodnej warstwy wykonanej z dwutlenku cyrkonu (krzywe przerywane).

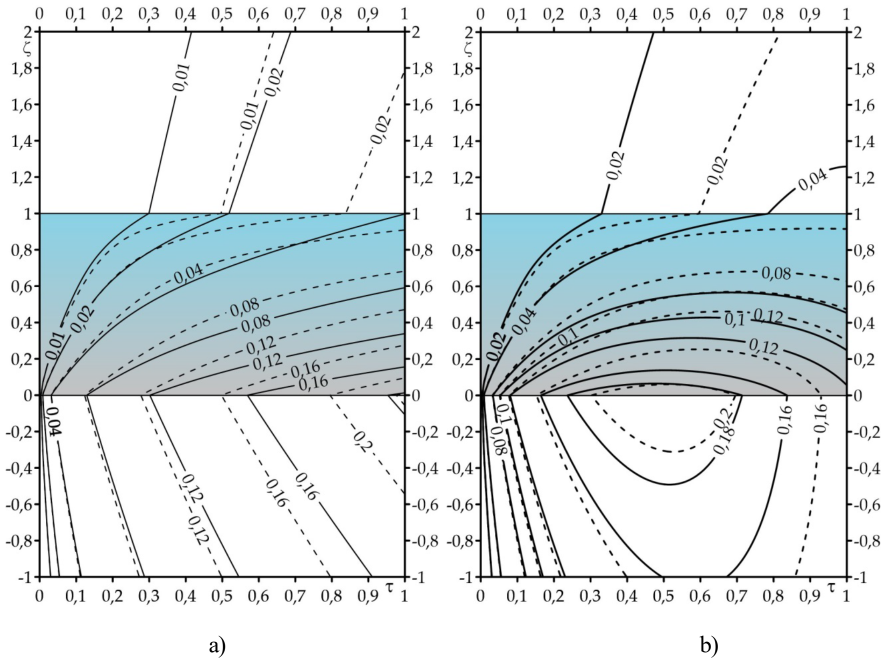


Rysunek 4.8. Ewolucja bezwymiarowych przyrostów temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (4.2.55)–(4.2.57) a), b), c) oraz $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ (4.2.108)–(4.2.111) d), e), f) dla wybranych wartości bezwymiarowej odległości od powierzchni kontaktu ζ w: a), d) warstwie, b), e) podłożu, c) f) przeciwciele. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z ZrO_2

Stop tytanu Ti-6Al-4V, posiadając 3,5 raza większą przewodność cieplną od dwutlenku cyrkonu ZrO_2, dobrze odprowadza ciepło z powierzchni kontaktu. W rezultacie temperatura warstwy wykonanej z FGM jest niższa w porównaniu do temperatury ustalonej przy wykorzystaniu materiału jednorodnego (rysunek 4.8a, d). Taki tryb temperaturowy zmienia się na przeciwny począwszy od interfejsu ($\zeta = 1$), a następnie dalej w głąb podłoża ($\zeta > 1$) (rysunek 4.8b, e). Stosowane na podłoże żeliwo ChNMKh ma znacznie (7,8 raza) wyższą przewodność cieplną niż stop tytanu Ti-6Al-4V. W efekcie temperatura podłoża, przy ustalonej odległości od interfejsu, podczas całego procesu wytwarzania ciepła, jest niższa w przypadku jednorodnej warstwy wykonanej z dwutlenku cyrkonu. Jednocześnie w obu przypadkach temperatura podłoża jest znacznie (o rząd wielkości) niższa od temperatury warstwy.

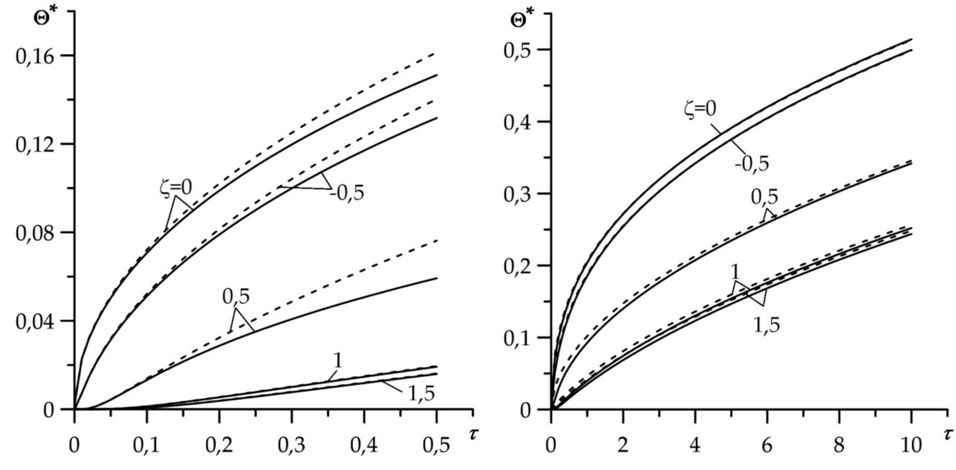
Zmiana temperatury przeciwciała wraz z upływem czasu (FMC-11, rysunek 4.8c, f) pozostaje ilościowo i jakościowo zbliżona do ewolucji temperatury warstwy pokazanej na rysunku 4.8a, d. Występują tu jednak niektóre cechy profili czasowych temperatury przeciwciała różniące je od odpowiadających im przebiegów czasowych temperatury warstwy. Po pierwsze, wpływ FGM na temperaturę przeciwciała jest znacznie mniejszy, niż ma to miejsce w samej warstwie, zaś po drugie, obniżenie temperatury przeciwciała wraz z oddalaniem od powierzchni kontaktu odbywa się znacznie wolniej niż w warstwie.

Przestrzenno-czasowe rozkłady bezwymiarowych przyrostów temperatury przy stałej i zmiennej z czasem intensywności gęstości mocy tarcia zaprezentowano na rysunku 4.9. Potwierdzają one wynik z rysunku 4.8 pokazujący, że efektywnym pochłaniaczem ciepła generowanego na skutek tarcia na powierzchni kontaktu jest właśnie warstwa wykonana z rozpatrywanego dwuskładnikowego FGM. Wyraźnie widać więc, że pełni ona funkcję niejako bariery termicznej, skutecznie chroniącej podstawę przed wysoką temperaturą.



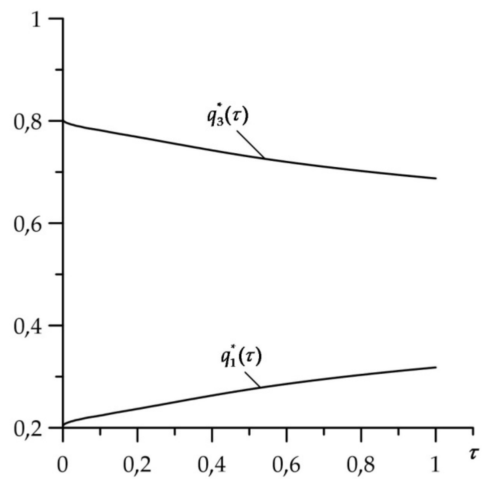
Rysunek 4.9. Izotermy: a) $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (4.2.55)–(4.2.57), b) $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ (4.2.108)–(4.2.111). Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z ZrO_2

Efektywnym narzędziem do oszacowania temperatury rozpatrywanego układu w wypadku stałej gęstości mocy tarcia okazały się również asymptotyczne rozwiązania przy małych, (4.2.93)–(4.2.95), i dużych, (4.2.103)–(4.2.105), wartościach liczby Fouriera τ (4.2.10). Zaprezentowane na rysunku 4.10 rezultaty pokazują, że zadowalająca zgodność rozwiązań dokładnego i asymptotycznego, przy małym τ, ma miejsce w zakresie $0 \le \tau \le 0,5$ (rysunek 4.10a). Zaskakującym jest natomiast to, że rezultaty otrzymane z wykorzystaniem dokładnego i asymptotycznego rozwiązania, przy dużym τ, wykazują bardzo dobrą zgodność praktycznie w całym zakresie zmiany wartości liczby Fouriera (rysunek 4.10b). Jest to tym bardziej istotne, że rozwiązania asymptotyczne, w odróżnieniu od dokładnego, nie wymagają całkowania numerycznego.



a) b)

Rysunek 4.10. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ otrzymane za pomocą dokładnych (4.2.55)–(4.2.57) (krzywe ciągłe) oraz asymptotycznych (krzywe przerywane) rozwiązań: a) przy małych (4.2.93)–(4.2.95), b) przy dużych (4.2.103)–(4.2.105) liczbach Fouriera τ dla wybranych wartości bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ



Rysunek 4.11. Ewolucje bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła $q_l^*(\tau)$, l = 1,3 (4.2.112)

Na podstawie prawa Fouriera bezwymiarowe intensywności strumieni ciepła przy stałej gęstości mocy tarcia, skierowane po normalnej od powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ do wewnątrz warstwy FGM i jednorodnego przeciwciała, zapisano odpowiednio w postaci:

$$q_1^*(\tau) = \Theta'^*(0^+, \tau), \; q_3^*(\tau) = -K_3^* \Theta'^*(0^-, \tau), \; \tau \geq 0, \qquad (4.2.112)$$

gdzie pochodne wyznaczono ze wzorów (4.2.71) i (4.2.73).

Przeprowadzone na podstawie wzorów (4.2.112) obliczenia wykazały, że większa część ciepła generowanego na powierzchni kontaktu jest absorbowana do cermetalowego elementu, który ma znacznie lepsze zdolności odprowadzania ciepła niż ZrO_2 (rysunek 4.11). W początkowych chwilach procesu nagrzewania około 80% ciepła jest wchłaniane przez nakładkę, zaś tylko 20% przez FGM warstwę. W czasie procesu nagrzewania ilość ciepła skierowanego do warstwy zmniejsza (zwiększa) się i przy τ = 1 wynosi 70% (30%).

4.2.6. Podsumowanie

W niniejszym podrozdziale opracowano analityczny model do wyznaczania pola temperatury trzyelementowego układu ciernego. Składa się on z podstawy z naniesioną na jej powierzchnię warstwą ochronną oraz przeciwciała. Materiały podstawy i przeciwciała są jednorodne, natomiast warstwę wykonano z funkcyjnie gradientowego materiału o eksponencjalnie zwiększającym się po grubości współczynniku przewodności cieplnej. Przeciwciało ślizga się po powierzchni warstwy, w wyniku czego generowane jest ciepło i elementy układu nagrzewają się. Układy tego typu służą do symulacji procesu nagrzewania ciernego w parze nakładka (przeciwciało)-tarcza z pokryciem (podstawa z warstwą).

Centralnym elementem modelu jest początkowo-brzegowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia przy stałej oraz liniowo zmniejszającej się gęstości mocy tarcia. Otrzymano dokładne oraz asymptotyczne rozwiązania takiego zagadnienia. Na podstawie tych rozwiązań przeprowadzono analizę numeryczną dla metalowo-ceramicznej (FMK-11) nakładki ślizgającej się po powierzchni FGM warstwy (ZrO_2–Ti-6Al-4V) połączonej idealnie z żeliwną (ChNMKh) tarczą. Ustalono, że:

1. Stosowanie wybranego pokrycia FGM powierzchni ciernej tarczy jest efektywnym narzędziem służącym do obniżania maksymalnej temperatury układu.
2. Profil czasowy gęstości mocy tarcia ma istotny wpływ na przestrzenno-czasowy rozkład izoterm w warstwie i nakładce. Temperatura tarczy jest o rząd wielkości niższa od temperatury warstwy i nakładki.

3. Asymptotyczne rozwiązania przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera mogą być wykorzystywane do szybkiego i wysoce dokładnego oszacowywania temperatury wszystkich elementów układu.
4. Większa ($\approx 3/4$) część ciepła wytwarzanego na skutek tarcia na powierzchni kontaktu jest pochłaniana przez nakładkę, zaś mniejsza ($\approx 1/4$) absorbowana przez warstwę FGM.

Należy zaznaczyć, że stosowanie w układach hamulcowych warstw ochronnych wykonanych z FGM jest spowodowane różnymi czynnikami. Z jednej strony jest to chęć zmniejszenia zużycia powierzchni ciernej tarczy, co umożliwia właśnie zastosowanie w FGM warstwie składnika z wysoką odpornością na zużycie (w analizowanym przypadku konkretnie ZrO_2). Z drugiej jednak materiały te zazwyczaj mają niskie zdolności odprowadzania ciepła generowanego na skutek tarcia na powierzchni kontaktu. Problem konieczności obniżenia nadmiernej temperatury powierzchni ciernej rozwiązuje się poprzez zastosowanie w warstwie FGM składnika ze znacznie większym współczynnikiem przewodzenia cieplnego (w tym wypadku Ti-6Al-4V). Przeprowadzona na podstawie zaproponowanego modelu analitycznego analiza numeryczna wykazała, że warstwy FGM, takie jak wybrana w niniejszym opracowaniu, w pełni realizują to ostatnie zadanie.

Powyższy podrozdział został opublikowany w postaci artykułu [159].

5. WPŁYW CHŁODZENIA KONWEKCYJNEGO I TERMICZNEJ PRZEWODNOŚCI KONTAKTOWEJ NA TEMPERATURĘ UKŁADU CIERNEGO WARSTWA GRADIENTOWA-PÓŁPRZESTRZEŃ JEDNORODNA

W rozdziale 4 otrzymano rozwiązanie początkowo-brzegowego zagadnienia przewodnictwa cieplnego o nagrzewaniu powierzchni warstwy wykonanej z FGM i połączonej idealnie termicznie z powierzchnią jednorodnej półprzestrzeni. Następnie, również tamże, zbadano proces generacji ciepła w układzie ciernym składającym się z jednorodnej półprzestrzeni ślizgającej się po powierzchni FGM warstwy naniesionej na jednorodną półprzestrzeń. W obu tych zagadnieniach warstwa FGM pełniła funkcję termicznej powłoki ochronnej pozwalającej na szybkie odprowadzanie ciepła z nagrzewanej powierzchni. W niniejszym rozdziale warstwa FGM będzie natomiast jednym z elementów pary ciernej pochłaniającym ciepło wytworzone na skutek tarcia na powierzchni kontaktu i chłodzonym konwekcyjnie na powierzchni wolnej. Ten ostatni czynnik nie był dotychczas uwzględniany w analitycznych modelach nagrzewania tarciowego z udziałem FGM. Ponadto po raz pierwszy w niniejszej monografii zostanie rozpatrzona generacja ciepła na skutek tarcia pomiędzy warstwą FGM a jednorodną półprzestrzenią w warunkach niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia.

Reasumując, należy stwierdzić, że wykorzystanie FGM, jak również chłodzenia konwekcyjnego w modelowaniu matematycznym procesu nagrzewania tarciowego, pozwala na efektywne obniżenie temperatury elementów pary ciernej. Należy zaznaczyć, że opracowane dotychczas modele analityczne zakładają doskonały kontakt cieplny tarcia pomiędzy elementami. Jest to w pełni uzasadnione, gdy powierzchnie cierne tych elementów są wystarczająco gładkie, natomiast w rzeczywistości powierzchnie cierne są chropowate, a stopień tej chropowatości zależy od poziomu obróbki i warunków eksploatacji. Powoduje to opór termiczny powierzchni kontaktu, a w efekcie pojawienie się skoku temperatury powierzchni ciernych. Jedno z podejść do rozwiązania tego problemu polega na wprowadzeniu do sformułowania odpowiednich zagadnień warunków niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia [15, 83]. Wyznaczenie rozwiązania takiego zagadnienia w przypadku elementów pary ciernej wykonanych z FGM oraz zbadanie na jego podstawie wpływu oporu termicznego na temperaturę zostanie zrealizowane w tym rozdziale.

5.1. Sformułowanie zagadnienia

Niech warstwa $0 \le z \le d$ w początkowej chwili $t = 0$ zaczyna ślizgać się ze stałą prędkością V_0 w dodatnim kierunku osi Ox po powierzchni półprzestrzeni $z \le 0$ (rysunek 5.1). Warstwę wykonano z dwuskładnikowego, funkcyjnie gradientowego materiału o współczynniku przewodności cieplnej eksponencjalnie zwiększającym się po grubości, natomiast materiał półprzestrzeni jest jednorodny. Na skutek tarcia na powierzchni kontaktu $z = 0$ generowane jest ciepło absorbowane do każdego ciała pary ciernej. Założono, że kontakt cieplny tarcia warstwy z półprzestrzenią jest niepełny (niedoskonały). Oznacza to, że temperatura powierzchni ciernej warstwy i półprzestrzeni nie jest jednakowa (występuje skok temperatury), a suma intensywności strumieni ciepła, skierowanych po normalnej od powierzchni kontaktu do wewnątrz każdego ciała, równa się gęstości mocy tarcia $q_0 = fp_0V_0$, gdzie f to współczynnik tarcia, a p_0 – ciśnienie kontaktowe. Założono, że współczynnik termicznej przewodności kontaktowej h_r przez powierzchnię $z = 0$ jest stały. Powierzchnia wolna warstwy $z = d$ chłodzi się konwekcyjnie ze współczynnikiem wymiany ciepła h_c, zaś temperatura początkowa T_0 rozpatrywanego układu jest stała.

Należy wyznaczyć nieustalone pole temperatury $T(z,t) = \Theta(z,t) + T_0$, $-\infty < z \le d$, $t \ge 0$ warstwy i półprzestrzeni. W tym celu na podstawie powyższych założeń sformułowano następujące zagadnienie cieplne tarcia podczas pojedynczego hamowania względem przyrostu temperatury:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[K_1(z)\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right] - \rho_1 c_1 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t} = 0, \; 0 < z < d, \; t > 0, \tag{5.1}$$

$$K_2 \frac{\partial^2 \Theta(z,t)}{\partial z^2} - \rho_2 c_2 \frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial t} = 0, \; z < 0, \; t > 0, \tag{5.2}$$

$$K_2 \left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^-} - K_1(z) \left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^+} = q_0, \; t > 0, \tag{5.3}$$

$$K_2 \left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^-} + K_1(z) \left.\frac{\partial \Theta(z,t)}{\partial z}\right|_{z=0^+} = h_r[\Theta(0^+,t) - \Theta(0^-,t)], \; t > 0, \tag{5.4}$$

$$K_1(z)\frac{\partial\Theta(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=d} = -h_c\Theta(d,t)\,,\ t>0\,, \tag{5.5}$$

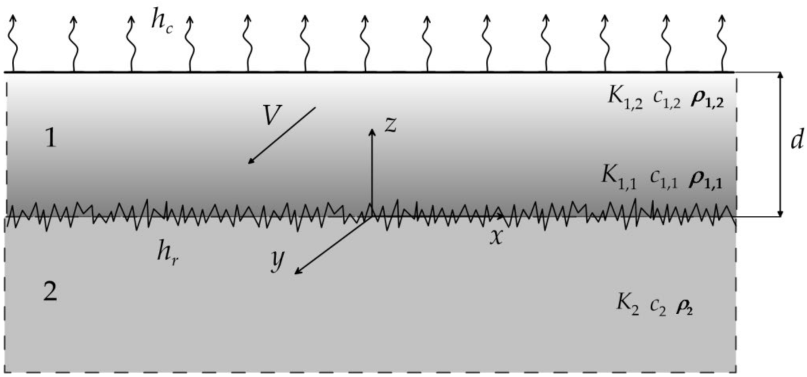
$$\Theta(z,t)\to 0\,,\ z\to-\infty\,,\ t>0\,, \tag{5.6}$$

$$\Theta(z,0)=0\,,\ -\infty<z\le d\,, \tag{5.7}$$

gdzie:

$$K_1(z)=K_{1,1}e^{\gamma^* z/d}\,,\ \gamma^*=\ln(K_{1,2}K_{1,1}^{-1})\,,\ 0\le z\le d\,, \tag{5.8}$$

przy czym $K_{1,1}$, $K_{1,2}$ i K_2 to współczynniki przewodności cieplnej odpowiednio dwóch składowych FGM warstwy i półprzestrzeni, a ρ_l, c_l – odpowiednio gęstość i ciepło właściwe materiałów warstwy ($l = 1$) i półprzestrzeni ($l = 2$).



Rysunek 5.1. Schemat niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia warstwy FGM i jednorodnej półprzestrzeni

Po wprowadzeniu bezwymiarowych zmiennych i parametrów:

$$\zeta=\frac{z}{d}\,,\ \tau=\frac{k_1 t}{d^2}\,,\ K^*=\frac{K_2}{K_{1,1}}\,,\ k^*=\frac{k_2}{k_1}\,,\ \Theta^*=\frac{\Theta}{\Theta_0}\,,\ Bi_c=\frac{h_c d}{K_{1,1}}\,,\ Bi_r=\frac{h_r d}{K_{1,1}}\,, \tag{5.9}$$

$$k_1=\frac{K_{1,1}}{c_1\rho_1}\,,\ k_2=\frac{K_2}{c_2\rho_2}\,,\ \Theta_0=\frac{q_0 d}{K_{1,1}}\,, \tag{5.10}$$

zagadnienie (5.1)–(5.8) zapisano w postaci:

$$\frac{\partial^2\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta^2}+\gamma^*\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}-e^{-\gamma^*\zeta}\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\tau}=0,\ 0<\zeta<1,\ \tau>0, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^2\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta^2}-\frac{1}{k^*}\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\tau}=0,\ \zeta<0,\ \tau>0, \quad (5.12)$$

$$K^*\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^-}-\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^+}=1,\ \tau>0, \quad (5.13)$$

$$K^*\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^-}+\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=0^+}+Bi_r[\Theta^*(0^-,\tau)-\Theta^*(0^+,\tau)]=0,\ \tau>0, \quad (5.14)$$

$$e^{\gamma^*}\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1}+Bi_c\,\Theta^*(1,\tau)=0,\ \tau>0, \quad (5.15)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\to 0,\ \zeta\to-\infty,\ \tau>0, \quad (5.16)$$

$$\Theta^*(\zeta,0)=0,\ |\zeta|<\infty. \quad (5.17)$$

5.2. Rozwiązanie dokładne

Stosując do początkowo-brzegowego zagadnienia (5.11)–(5.17) transformatę całkową Laplace'a (3.1.20), otrzymano następujące zagadnienie brzegowe dla układu dwóch równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}+\gamma^*\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,\tau)}{d\zeta}-pe^{-\gamma^*\zeta}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ 0<\zeta<1, \quad (5.18)$$

$$\frac{d^2\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta^2}-\frac{p}{k^*}\overline{\Theta}^*(\zeta,p)=0,\ \zeta<0, \quad (5.19)$$

$$K^*\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^-}-\left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^+}=\frac{1}{p}, \quad (5.20)$$

$$K^* \left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^-} + \left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=0^+} + Bi_r[\overline{\Theta}^*(0^-,\tau) - \overline{\Theta}^*(0^+,\tau)] = 0\,, \tag{5.21}$$

$$e^{\gamma^*} \left.\frac{d\overline{\Theta}^*(\zeta,p)}{d\zeta}\right|_{\zeta=1} + Bi_c\,\overline{\Theta}^*(1,p) = 0\,, \tag{5.22}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) \to 0\,,\ \zeta \to -\infty\,. \tag{5.23}$$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego (5.18)–(5.23) ma postać:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = \frac{e^{-\gamma^*\zeta/2}}{p\sqrt{p}}\left(\varepsilon + \frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\right)\frac{\Delta_1(\zeta,p)}{\Delta(p)}\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,\ \varepsilon = \frac{K^*}{\sqrt{k^*}}\,, \tag{5.24}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) = \frac{\Delta_2(\zeta,p)}{p\sqrt{p}\,\Delta(p)}\,,\ \zeta \le 0\,, \tag{5.25}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\Delta(p) = A_1(p)&\left[\left(2\varepsilon + \frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\right)\mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right) + \varepsilon\frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right)\right] - \\ + B_1(p)&\left[\left(2\varepsilon + \frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\right)\mathrm{K}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right) - \varepsilon\frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\mathrm{K}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right)\right],\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\Delta_1(\zeta,p) = A_1(p)\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2}\sqrt{p}\right) + B_1(p)\mathrm{K}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2}\sqrt{p}\right), \tag{5.27}$$

$$\Delta_2(\zeta,p) = A_2(p)e^{\sqrt{\frac{p}{k^*}}\zeta}\,,$$

$$A_1(p) = \mathrm{K}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}\sqrt{p}\right) + Bi_c\frac{e^{-\gamma^*/2}}{\sqrt{p}}\mathrm{K}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}\sqrt{p}\right), \tag{5.28}$$

$$B_1(p) = \mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}\sqrt{p}\right) - Bi_c\frac{e^{-\gamma^*/2}}{\sqrt{p}}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}\sqrt{p}\right), \tag{5.29}$$

$$A_2(p) = A_1(p)\left[\mathrm{I}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right) + \frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\mathrm{I}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right)\right] - \\ + B_1(p)\left[\mathrm{K}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right) - \varepsilon\frac{Bi_r}{\sqrt{p}}\mathrm{K}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}\sqrt{p}\right)\right], \tag{5.30}$$

przy czym $\mathrm{I}_\mathrm{n}(x)$ i $\mathrm{K}_\mathrm{n}(x)$ to zmodyfikowane funkcje Bessela rzędu n = 0;1, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju [2].

Stosując do transformowanego rozwiązania (5.24)–(5.30) odwrotne przekształcenie Laplace'a (3.1.29) oraz przeprowadzając całkowanie na płaszczyźnie zmiennej zespolonej (Re p, Im p) według metodyki opisanej w rozdziale 4, z wykorzystaniem związków [2], znaleziono:

$$\mathrm{I}_0(\pm ix) = \mathrm{J}_0(x)\,,\ \mathrm{K}_0(\pm ix) = -0{,}5\pi[\mathrm{Y}_0(x) \pm i\mathrm{J}_0(x)]\,, \tag{5.31}$$

$$\mathrm{I}_1(\pm ix) = \pm i\mathrm{J}_1(x)\,,\ \mathrm{K}_1(\pm ix) = 0{,}5\pi[\mathrm{J}_1(x) \pm i\mathrm{Y}_1(x)]\,, \tag{5.32}$$

przy czym $\mathrm{J}_\mathrm{n}(x)$ i $\mathrm{Y}_\mathrm{n}(x)$ to funkcje Bessela rzędu n = 0;1, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju. Bezwymiarowe przyrosty temperatury warstwy i półprzestrzeni znaleziono natomiast w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \vartheta_1(\zeta) - \frac{2}{\pi}\varepsilon\, e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty F(x)G_1(\zeta,x)e^{-x^2\tau}dx\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.33}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \vartheta_2 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_2(\zeta,x)e^{-x^2\tau}dx\,,\ \zeta \le 0\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.34}$$

gdzie:

$$\vartheta_1(\zeta) = \frac{1}{Bi_c} + \frac{1}{\gamma^*}(e^{-\gamma^*\zeta} - e^{-\gamma^*})\,,\ \vartheta_2 = \frac{1}{Bi_r} + \frac{1}{Bi_c} + \frac{1}{\gamma^*}(1 - e^{-\gamma^*})\,, \tag{5.35}$$

$$F(x) = \frac{[\Psi(x) - x\,Bi_r^{-1}\Phi(x)]}{x^2\{[\Phi(x)]^2 + [\varepsilon\,\Psi(x)]^2\}}\,, \tag{5.36}$$

$$G_1(\zeta,x) = \mathrm{J}(x)\mathrm{Y}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2}x\right) - \mathrm{Y}(x)\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*\zeta/2}x\right), \tag{5.37}$$

$$G_2(\zeta, x) = \varepsilon \Psi(x) \cos\left(\frac{\zeta}{\sqrt{k^*}} x\right) - \Phi(x) \sin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{k^*}} x\right), \tag{5.38}$$

$$\Phi(x) = \mathrm{J}(x) \mathrm{Y}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right) - \mathrm{Y}(x) \mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right), \tag{5.39}$$

$$\Psi(x) = \mathrm{J}(x)\left[\mathrm{Y}_1\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right) + \frac{2x}{Bi_r} \mathrm{Y}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right)\right] - \mathrm{Y}(x)\left[\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right) + \frac{2x}{Bi_r} \mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right)\right], \tag{5.40}$$

$$\mathrm{J}(x) = \mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^*/2} x\right) - Bi_c \frac{e^{-\gamma^*/2}}{x} \mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^*/2} x\right), \tag{5.41}$$

$$\mathrm{Y}(x) = \mathrm{Y}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^*/2} x\right) - Bi_c \frac{e^{-\gamma^*/2}}{x} \mathrm{Y}_1\left(\frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^*/2} x\right), \tag{5.42}$$

Podstawiając $\zeta = 0$ w rozwiązaniach (5.33)–(5.42), otrzymano następujące wzory do oszacowania temperatury powierzchni ciernych warstwy ($z = 0^+$) i półprzestrzeni ($z = 0^-$) przy ich niedoskonałym kontakcie cieplnym tarcia:

$$\Theta^*(0^+, \tau) = \vartheta_0 - \frac{2}{\pi} \varepsilon \int_0^\infty F(x) \Psi_0(x) e^{-x^2 \tau} dx, \ \tau \geq 0, \tag{5.43}$$

$$\Theta^*(0^-, \tau) = (Bi_r^{-1} + \vartheta_0) - \frac{2}{\pi} \varepsilon \int_0^\infty F(x) \Psi(x) e^{-x^2 \tau} dx, \ \tau \geq 0, \tag{5.44}$$

gdzie:

$$\vartheta_0 \equiv \vartheta_1(0) = \frac{1}{Bi_c} + \frac{1}{\gamma^*}(1 - e^{-\gamma^*}), \tag{5.45}$$

$$\Psi_0(x) \equiv G_1(0, x) = \mathrm{J}(x) \mathrm{Y}_1\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right) - \mathrm{Y}(x) \mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*} x\right). \tag{5.46}$$

W przypadku doskonałego kontaktu warstwy FGM z półprzestrzenią ($Bi_r \to \infty$) wzory (5.35) i (5.40) dają $\vartheta_2 = \vartheta_0, \Psi(x) = \Psi_0(x)$, zaś z rozwiązań (5.33) i (5.34) otrzymano:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \vartheta_1(\zeta) - \frac{2}{\pi}\varepsilon e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty F_0(x)G_1(\zeta,x)e^{-x^2\tau}dx\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.47}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \vartheta_0 - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_0(x)G_2(\zeta,x)e^{-x^2\tau}dx\,,\ \zeta \le 0\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.48}$$

gdzie:

$$F_0(x) = \frac{\Psi_0(x)}{x^2\{[\Phi(x)]^2 + [\varepsilon\Psi_0(x)]^2\}}\,. \tag{5.49}$$

Podstawiając $\zeta = 0$ we wzorach (5.47), (5.48), znaleziono:

$$\Theta^*(0^+,\tau) = \Theta^*(0^-,\tau) \equiv \Theta^*(\tau) = \vartheta_0 - \frac{2}{\pi}\varepsilon\int_0^\infty F_0(x)\Psi_0(x)e^{-x^2\tau}dx\,,\ \tau \ge 0\,. \tag{5.50}$$

Rozwiązania (5.33)–(5.42) otrzymano przy stałej wartości gęstości mocy tarcia q_0 w warunku brzegowym (5.3). Postać tych rozwiązań pozwala, z wykorzystaniem twierdzenia Duhamela, bezproblemowo otrzymywać rozwiązania również przy zmiennym profilu czasowym gęstości mocy tarcia. W przypadku gęstości mocy tarcia o profilu liniowo zmniejszającym się od wartości nominalnej $\hat{q}_0 = 2q_0$ w chwili początkowej $t = 0$ do zera w chwili końcowej $t = t_s$ bezwymiarowy przyrost temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ można otrzymać na podstawie wzoru Duhamela (4.1.100), gdzie $q^*(\tau)$ to profil czasowy (4.1.101) gęstości mocy tarcia, a $\Theta^*(\zeta,\tau)$ to bezwymiarowy przyrost temperatury (5.33)–(5.42) otrzymany przy $q^*(\tau) = q_0,\ \tau \ge 0$.

Po podstawieniu pod znak całki w prawej stronie wzoru (4.1.100) funkcji $\Theta^*(\zeta,\tau)$ (5.33), (5.34) oraz $q^*(\tau)$ (4.1.101) znaleziono:

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \vartheta_1(\zeta)q^*(\tau) - \frac{2}{\pi}\varepsilon e^{-\gamma^*\zeta/2}\int_0^\infty F(x)G_1(\zeta,x)P(\tau,x)dx\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,$$
$$0 \le \tau \le \tau_s\,, \tag{5.51}$$

$$\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau) = \vartheta_2 q^*(\tau) - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_2(\zeta,x)P(\tau,x)dx\,,\ \zeta \le 0\,,\ 0 \le \tau \le \tau_s\,, \tag{5.52}$$

gdzie:

$$P(\tau, x) = e^{-x^2\tau} - \frac{1}{x^2\tau_s}(1 - e^{-x^2\tau}), \tag{5.53}$$

a pozostałe funkcje mają postać (5.35)–(5.42).

5.3. Weryfikacja rozwiązania

Weryfikację poprawności otrzymanego rozwiązania dokładnego (5.33)–(5.42) przeprowadzono poprzez sprawdzenie spełnienia warunków brzegowych (5.13)–(5.15). W tym celu, uwzględniając pochodne (4.1.84), z rozwiązań (5.33) i (5.34) znaleziono bezwymiarowe intensywności strumieni ciepła w warstwie i półprzestrzeni:

$$\frac{\partial \Theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = -e^{-\gamma^*\zeta} + \frac{2}{\pi}\varepsilon\, e^{-\gamma^*\zeta} \int_0^\infty xF(x)\hat{G}_1(\zeta, x) e^{-x^2\tau} dx\,,\ 0 \le \zeta \le 1\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.54}$$

$$K^* \frac{\partial \Theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta} = \frac{2}{\pi}\varepsilon \int_0^\infty xF(x)\hat{G}_2(\zeta, x) e^{-x^2\tau} dx\,,\ \zeta \le 0\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.55}$$

gdzie:

$$\hat{G}_1(\zeta, x) = \mathrm{J}(x)\mathrm{Y}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^*\zeta/2} x\right) - \mathrm{Y}(x)\mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^*\zeta/2} x\right), \tag{5.56}$$

$$\hat{G}_2(\zeta, x) = \varepsilon\, \Psi(x) \sin\left(\frac{\zeta}{\sqrt{k^*}} x\right) + \Phi(x)\cos\left(\frac{\zeta}{\sqrt{k^*}} x\right). \tag{5.57}$$

Na powierzchniach ciernych $\zeta = 0^{\pm}$ ze wzorów (5.54)–(5.57) znaleziono bezwymiarowe intensywności strumieni ciepła:

$$q_1^*(\tau) \equiv -\left.\frac{\partial \Theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0^+} = 1 - \frac{2}{\pi}\varepsilon \int_0^\infty xF(x)\Phi(x) e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.58}$$

$$q_2^*(\tau) \equiv K^* \left.\frac{\partial \Theta^*(\zeta, \tau)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0^-} = \frac{2}{\pi}\varepsilon \int_0^\infty xF(x)\Phi(x) e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \ge 0\,, \tag{5.59}$$

gdzie funkcje $F(x)$ i $\Phi(x)$ mają postaci odpowiednio (5.36) i (5.39). Dodawanie wzorów (5.58) i (5.59) potwierdza natomiast spełnienie warunku brzegowego (5.13). Po ich odejmowaniu wyznaczono zaś, że:

$$K^* \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta}\bigg|_{\zeta=0^-} + \frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta}\bigg|_{\zeta=0^+} = -1 + \frac{4}{\pi}\varepsilon \int_0^\infty x F(x)\Phi(x) e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \geq 0\,. \tag{5.60}$$

Jednocześnie, po wykonaniu odejmowania wzorów (5.43) i (5.44), otrzymano:

$$\Theta^*(0^-,\tau) - \Theta^*(0^+,\tau) = \frac{1}{Bi_r} - \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(x)[\Psi(x) - \varepsilon\Psi_0(x)]\, e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \geq 0\,. \tag{5.61}$$

Przy uwzględnieniu postaci funkcji $\Phi(x)$ (5.39), $\Psi(x)$ (5.40) oraz $\Psi_0(x)$ (5.46) ustalono, że:

$$\Psi(x) - \varepsilon\Psi_0(x) = 2\varepsilon\, Bi_r^{-1}\, x\Phi(x)\,. \tag{5.62}$$

Wówczas ze wzorów (5.61) i (5.62) otrzymano:

$$Bi_r[\Theta^*(0^+,\tau) - \Theta^*(0^-,\tau)] = 1 - \frac{4}{\pi}\varepsilon\int_0^\infty xF(x)\Phi(x)\, e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \geq 0\,. \tag{5.63}$$

Po przeprowadzeniu dodawania wzorów (5.60) i (5.63) potwierdzono spełnienie warunku brzegowego (5.14).

Bezwymiarową intensywność strumienia ciepła na powierzchni wolnej $\zeta = 1$ warstwy wyznaczono ze wzorów (5.54) i (5.56) w postaci:

$$\frac{\partial \Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial \zeta}\bigg|_{\zeta=1} = -e^{-\gamma^*} - \varepsilon\, e^{-\gamma^*}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xF(x)\hat{G}_1(1,x)\, e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \geq 0\,, \tag{5.64}$$

gdzie:

$$\hat{G}_1(1,x) = \mathrm{J}(x)\mathrm{Y}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right) - \mathrm{Y}(x)\mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right). \tag{5.65}$$

W kolejnym kroku z rozwiązania (5.33) znaleziono odpowiedni bezwymiarowy przyrost temperatury:

$$\Theta^*(1,\tau) = \frac{1}{Bi_c} - \varepsilon\, e^{-\gamma^*/2}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(x)G_1(1,x)\, e^{-x^2\tau} dx\,,\ \tau \geq 0\,, \tag{5.66}$$

gdzie, na podstawie wzoru (5.37), otrzymano:

$$G_1(1,x) = \mathrm{J}(x)\mathrm{Y}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right) - \mathrm{Y}(x)\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right). \tag{5.67}$$

Ze wzorów (5.64) i (5.66) wynika natomiast, że:

$$e^{\gamma^*}\left.\frac{\partial\Theta^*(\zeta,\tau)}{\partial\zeta}\right|_{\zeta=1} + Bi_c\Theta^*(1,\tau) = \frac{2}{\pi}\varepsilon\int_0^\infty F(x)[x\hat{G}_1(1,x) - Bi_c e^{-\gamma^*/2}G_1(1,x)]e^{-x^2\tau}dx,$$

$$\tau \geq 0. \tag{5.68}$$

Uwzględniając postaci funkcji $\hat{G}_1(1,x)$ (5.65) i $G_1(1,x)$ (5.67), otrzymano:

$$\begin{aligned} x\hat{G}_1(1,x) - Bi_c e^{-\gamma^*/2}G_1(1,x) &= \mathrm{J}(x)\left[x\mathrm{Y}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right) - Bi_c e^{-\frac{1}{2}\gamma^*}\mathrm{Y}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right)\right] - \\ &- \mathrm{Y}(x)\left[x\mathrm{J}_0\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right) - Bi_c e^{-\gamma^*/2}\mathrm{J}_1\left(\frac{2}{\gamma^*}e^{-\gamma^*/2}x\right)\right] = \\ &= x[\mathrm{J}(x)\mathrm{Y}(x) - \mathrm{Y}(x)\mathrm{J}(x)] = 0, \end{aligned} \tag{5.69}$$

co potwierdza spełnienie warunku brzegowego (5.15).

Spełnienie warunków brzegowego (5.16) i początkowego (5.17) zweryfikowano również numerycznie.

5.4. Rozwiązania asymptotyczne

Małe wartości liczby Fouriera τ
(duże wartości parametru p transformaty Laplace'a)

Uwzględniając we wzorach (5.24)–(5.30) asymptotyki zmodyfikowanych funkcji Bessela przy dużych wartościach argumentu (4.1.71), ustalono, że rozwiązanie w przestrzeni transformat Laplace'a ma postać:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) \cong \frac{1}{2}e^{-\gamma^*\zeta/4}\left[\frac{e^{-\zeta_1\sqrt{p}}}{p(\alpha+\sqrt{p})} + \frac{Bi_r}{\varepsilon}\frac{e^{-\zeta_1\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})}\right], \ 0 \leq \zeta < 1, \tag{5.70}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) \cong \frac{1}{2\varepsilon}\left[\frac{e^{-\zeta_2\sqrt{p}}}{p(\alpha+\sqrt{p})} + Bi_r\frac{e^{-\zeta_2\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})}\right], \ \zeta \leq 0, \tag{5.71}$$

gdzie:

$$\alpha=\frac{(1+\varepsilon)}{2\varepsilon}Bi_r\,,\ \zeta_1=\frac{2}{\gamma^*}(1-e^{-\gamma^*\zeta/2}),\ \zeta_2=\frac{|\zeta|}{\sqrt{k^*}}\,. \tag{5.72}$$

Przy wykorzystaniu związków [126]:

$$L^{-1}\left[\frac{\alpha e^{-\zeta_l\sqrt{p}}}{p(\alpha+\sqrt{p})};\tau\right]=\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right)-e^{\alpha^2\tau+\alpha\zeta_l}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}\right),\ l=1;2\,, \tag{5.73}$$

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[\frac{\alpha e^{-\zeta_l\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}(\alpha+\sqrt{p})};\tau\right]&=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,e^{-\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right)^2}-\left(\zeta_l+\frac{1}{\alpha}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}\right)+\\&+\frac{1}{\alpha}e^{\alpha^2\tau+\alpha\zeta_l}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_l}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}\right),\ l=1;\,2\,,\end{aligned} \tag{5.74}$$

ze wzorów (5.70)–(5.72) otrzymano:

$$\begin{aligned}\Theta^*(\zeta,\tau)=\frac{e^{-\gamma^*\zeta/4}}{(1+\varepsilon)}&\left[2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,e^{-\left(\frac{\zeta_1}{2\sqrt{\tau}}\right)^2}-\left(\zeta_1+\frac{1}{\alpha}-\frac{\varepsilon}{Bi_r}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_1}{2\sqrt{\tau}}\right)+\right.\\&\left.+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\varepsilon}{Bi_r}\right)e^{\alpha^2\tau+\alpha\zeta_1}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_1}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}\right)\right],\ 0\le\zeta\le1,\ 0\le\tau<<1,\end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\begin{aligned}\Theta^*(\zeta,\tau)=\frac{1}{(1+\varepsilon)}&\left[2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\,e^{-\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right)^2}-\left(\zeta_2+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{Bi_r}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right)+\right.\\&\left.+\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{Bi_r}\right)e^{\alpha^2\tau+\alpha\zeta_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}+\alpha\sqrt{\tau}\right)\right],\ \zeta\le0\,,\ 0\le\tau<<1.\end{aligned} \tag{5.76}$$

Przechodząc we wzorach (5.75) i (5.76) do granicy $Bi_r\to\infty$, otrzymano asymptotyczne rozwiązanie przy pełnym (doskonałym) kontakcie cieplnym FGM warstwy i jednorodnej półprzestrzeni:

$$\Theta^*(\zeta,\tau)\cong\frac{2\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon)}e^{-\gamma^*\zeta/4}\operatorname{ierfc}\left(\frac{\zeta_1}{2\sqrt{\tau}}\right),\ 0\le\zeta\le1,\ 0\le\tau<<1, \tag{5.77}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{2\sqrt{\tau}}{(1+\varepsilon)} \operatorname{ierfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right), \ \zeta \le 0, \ 0 \le \tau << 1. \tag{5.78}$$

Ze wzorów (5.77) i (5.78) wynika, że temperatura powierzchni ciernych $\zeta = 0^{\pm}$ ($\zeta_1 = \zeta_2 = 0$) jest w tym przypadku jednakowa:

$$\Theta^*(0^+,\tau) = \Theta^*(0^-,\tau) = \Theta^*(\tau) \cong \frac{2}{(1+\varepsilon)}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}. \tag{5.79}$$

W przypadku jednorodnego materiału warstwy ($\gamma^* \to 0$) z drugiego ze wzorów (5.72) wynika, że $\zeta_1 \to \zeta$, zaś rozwiązanie (5.75) przyjęło znaną postać [26]:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) = \frac{1}{(1+\varepsilon)}\left[2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}e^{-\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right)^2} - \left(\zeta + \frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{Bi_r}\right)\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\varepsilon}{Bi_r}\right)e^{\alpha^2\tau + \alpha\zeta}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right)\right], \ 0 \le \zeta \le 1, \ 0 \le \tau << 1, \tag{5.80}$$

przy czym trzeba podkreślić, że rozwiązanie (5.76) dla półprzestrzeni pozostanie bez zmian, tak jak nie zależy ono od parametru γ^*.

Należy zaznaczyć, że postać asymptotycznych rozwiązań (5.75) i (5.76) świadczy o tym, że w początkowych chwilach procesu nagrzewania ciernego wpływ chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy na temperaturę obu elementów jest znikomy, zaś gradientowość materiału ma wpływ tylko na temperaturę warstwy.

Duże wartości liczby Fouriera τ (małe wartości parametru Laplace'a p)

Z uwzględnieniem zachowania zmodyfikowanych funkcji Bessela przy małych wartościach argumentu (4.2.96) we wzorach (5.24)–(5.30) otrzymano:

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) \cong \varphi^*(\zeta)\left[\frac{1}{p(a+\sqrt{p})} + \frac{\varepsilon}{Bi_r}\frac{1}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}\right], \ 0 \le \zeta \le 1, \tag{5.81}$$

$$\overline{\Theta}^*(\zeta,p) \cong \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{a}{Bi_r}\right)\frac{e^{-\zeta_2\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})}, \ \zeta \le 0, \tag{5.82}$$

gdzie:

$$a = \frac{\gamma^* Bi_r Bi_c}{\varepsilon(\varphi_0 Bi_r + 2\gamma^* Bi_c)}, \ \varphi^*(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta) Bi_r}{\varepsilon(\varphi_0 Bi_r + 2\gamma^* Bi_c)}, \tag{5.83}$$

$$\varphi(\zeta) = \gamma^* + Bi_c(e^{-\gamma^*\zeta} - e^{-\gamma^*}), \ \varphi_0 \equiv \varphi(0) = \gamma^* + Bi_c(1 - e^{-\gamma^*}), \tag{5.84}$$

przy czym parametr ζ_2 zdefiniowano w ostatnim ze wzorów (5.72).

Biorąc pod uwagę związek (5.73) oraz następujące relacje [8]:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})};\tau\right] = e^{a^2\tau}\operatorname{erfc}(a\sqrt{\tau}),$$

$$L^{-1}\left[\frac{a}{p(a+\sqrt{p})};\tau\right] = 1 - e^{a^2\tau}\operatorname{erfc}(a\sqrt{\tau}), \tag{5.85}$$

asymptotyki bezwymiarowego przyrostu temperatury przy dużych wartościach liczby Fouriera τ znaleziono w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \varphi^*(\zeta)\left[\frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a} - \frac{\varepsilon}{Bi_r}\right)\right] e^{a^2\tau}\operatorname{erfc}(a\sqrt{\tau}), \ 0 \le \zeta \le 1, \ \tau >> 1, \tag{5.86}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \left(\frac{1}{a\varepsilon} - \frac{1}{Bi_r}\right)\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{a^2\tau + a\zeta_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}} + a\sqrt{\tau}\right)\right],$$

$$\zeta \le 0, \quad \tau >> 1. \tag{5.87}$$

W przypadku doskonałego kontaktu cieplnego tarcia ($Bi_r \to \infty$) ze wzorów (5.83) wynika, że:

$$a = \frac{\gamma^* Bi_c}{\varepsilon\varphi_0}, \ \varphi^*(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\varepsilon\varphi_0}, \tag{5.88}$$

natomiast rozwiązania (5.86) i (5.87) przyjmą wtedy postać:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{\varphi(\zeta)}{\gamma^* Bi_c}[1 - e^{a^2\tau}\operatorname{erfc}(a\sqrt{\tau})], \ 0 \le \zeta \le 1, \ \tau >> 1, \tag{5.89}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{1}{a\varepsilon}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{a^2\tau + a\zeta_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}} + a\sqrt{\tau}\right)\right], \quad \zeta \le 0, \quad \tau >> 1. \qquad (5.90)$$

Biorąc pod uwagę granice

$$\lim_{\gamma^* \to 0}\frac{\gamma^*}{\varphi_0} = \frac{Bi_c}{\varepsilon(1+Bi_c)}, \ \lim_{\gamma^* \to 0}\frac{\varphi(\zeta)}{\gamma^*} = 1 + Bi_c(1-\zeta), \qquad (5.91)$$

ze wzorów (5.89) i (5.90) otrzymano bezwymiarowe przyrosty temperatury przy doskonałym kontakcie cieplnym jednorodnych warstwy i półprzestrzeni w postaci:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \left[\frac{1+Bi_c(1-\zeta)}{Bi_c}\right][1 - e^{a^2\tau}\operatorname{erfc}(a\sqrt{\tau})], \ 0 \le \zeta \le 1, \ \tau >> 1, \qquad (5.92)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{(1+Bi_c)}{Bi_c}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{a^2\tau + a\zeta_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}} + a\sqrt{\tau}\right)\right],$$

$$\zeta \le 0, \quad \tau >> 1, \qquad (5.93)$$

gdzie:

$$a = \frac{Bi_c}{\varepsilon(1+Bi_c)}. \qquad (5.94)$$

Jednocześnie, przechodząc we wzorach (5.83) i (5.84) do granicy $\gamma^* \to 0$, znaleziono:

$$a = \frac{Bi_r Bi_c}{\varepsilon[(1+Bi_c)Bi_r + 2Bi_c]}, \ \varphi^*(\zeta) = \frac{[1+(1-\zeta)Bi_c]Bi_r}{\varepsilon[(1+Bi_c)Bi_r + 2Bi_c]}, \qquad (5.95)$$

zaś z rozwiązań (5.86) i (5.87) otrzymano:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \left[\frac{1+Bi_c(1-\zeta)}{Bi_c}\right]\left\{1 - \left[\frac{(1+Bi_c)Bi_r + Bi_c}{(1+Bi_c)Bi_r + 2Bi_c}\right]e^{a^2\tau}\operatorname{erfc}(a\sqrt{\tau})\right\},$$

$$0 \le \zeta \le 1, \ \tau >> 1, \qquad (5.96)$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \frac{[(1+Bi_c)Bi_r + Bi_c]}{Bi_r Bi_c}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{a^2\tau + a\zeta_2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}} + a\sqrt{\tau}\right)\right], \qquad (5.97)$$

$\zeta \le 0, \ \tau >> 1.$

Dodatkowo, jeżeli przyjmiemy, że $Bi_r \to \infty$, to rozwiązania (5.95)–(5.97) staną się tożsamościowo równe rozwiązaniom (5.92)–(5.94).

Należy zaznaczyć, że asymptotyczne rozwiązania (5.92)–(5.94) dla jednorodnych materiałów warstwy i półprzestrzeni z uwzględnieniem konwekcyjnego chłodzenia na powierzchni wolnej warstwy również są nowe. Dotychczas znane było jedynie odpowiednie rozwiązanie przy podtrzymaniu na tej powierzchni temperatury początkowej [142]. Rozwiązanie to można łatwo otrzymać ze wzorów (5.92)–(5.94), przechodząc w nich do granicy $Bi_c \to \infty$:

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong (1-\zeta)[1-e^{\varepsilon^{-2}\tau}\mathrm{erfc}(\varepsilon^{-1}\sqrt{\tau})],\ 0 \le \zeta \le 1,\ \tau >> 1, \tag{5.98}$$

$$\Theta^*(\zeta,\tau) \cong \mathrm{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}\right) - e^{\varepsilon^{-2}\tau+\varepsilon^{-1}\zeta_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\zeta_2}{2\sqrt{\tau}}+\varepsilon^{-1}\sqrt{\tau}\right),\ \zeta \le 0,\ \tau >> 1. \tag{5.99}$$

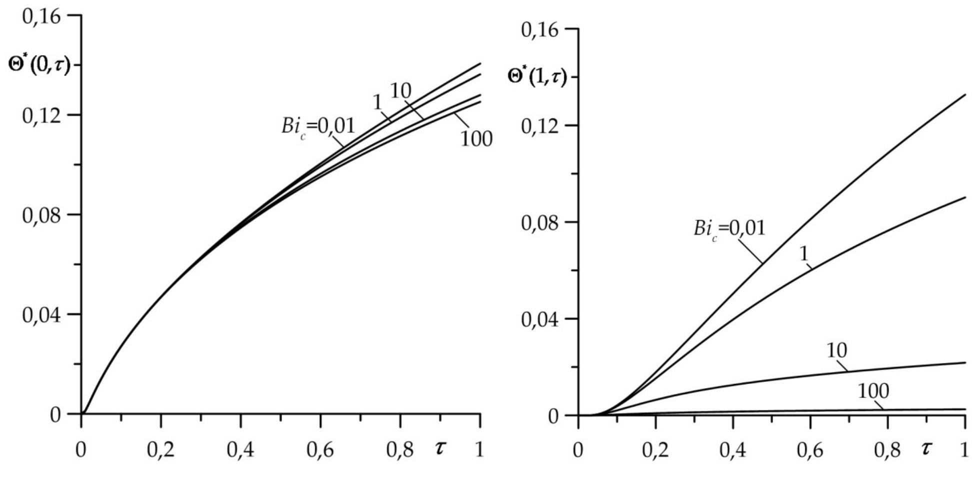
5.5. Analiza numeryczna

Analizę numeryczną przeprowadzono dla przypadku dwuskładnikowej warstwy FGM, w której powierzchnię cierną stanowi dwutlenek cyrkonu ZrO_2, zaś na rdzeń warstwy wybrano stop tytanu Ti-6Al-4V. Za materiał jednorodnej półprzestrzeni posłużyło natomiast żeliwo szare ChNMKh. Niezbędne do wykonania obliczeń właściwości wspomnianych materiałów, przy temperaturze początkowej T_0 = 20°C, znajdują się w tabeli 3.1. Wartość bezwymiarowego parametru gradientu wybranego FGM $\gamma^* = 1{,}26$ wyznaczono ze wzoru (5.8). Pozostałe bezwymiarowe parametry wejściowe są to zdefiniowane za pomocą wzorów (5.9) zmienna przestrzenna ζ, liczba Fouriera τ oraz liczby Biota Bi_c i Bi_r. Całkowanie numeryczne w otrzymanych rozwiązaniach wykonano za pomocą procedury QAGI z pakietu QUADPACK [91], zaś analizę numeryczną przeprowadzono osobno w przypadku doskonałego i niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia.

Doskonały kontakt cieplny tarcia ($Bi_r \to \infty$)

Celem analizy numerycznej było ustalenie jakościowego wpływu intensywności chłodzenia konwekcyjnego (parametru Bi_c) powierzchni wolnej $z = d$ ($\zeta = 1$) FGM warstwy na temperaturę układu ciernego. Należy zaznaczyć, że przypadek $Bi \to 0$ odpowiada izolacji termicznej powierzchi $\zeta = 1$, natomiast w przypadku $Bi \to \infty$ na powierzchni tej w ciągu całego procesu nagrzewania utrzymuje się temperatura początkowa $T(d,t) = T_0$ ($\Theta^*(1,\tau) = 0$). Rezultaty dla bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* (5.47)–(5.49) oraz intensywności strumieni ciepła q^* (5.58), (5.59) zaprezentowano na rysunkach 5.2–5.7.

Największa temperatura obu powierzchni jest osiągana w przypadku adiabatycznej ($Bi_c = 0$) powierzchni wolnej warstwy. Następne zwiększenie Bi_c powoduje ochłodzenie rozpatrywanych powierzchni. Wyraźne zmniejszenie temperatury powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ jest zauważalne przy $0 \leq Bi_c \leq 10$. Dalsze zwiększanie Bi_c praktycznie nie wykazuje wpływu na temperaturę tej powierzchni. W związku z tym w trakcie oszacowywania maksymalnej (osiągalnej na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$) temperatury wybranego układu ciernego chłodzenie powierzchni wolnej warstwy należy uwzględniać przy wartościach liczby Biota z wyżej ustalonego zakresu. Jeżeli $Bi_c > 10$, to warunek brzegowy (5.15) przy formułowaniu zagadnienia cieplnego tarcia należy zastąpić uproszczonym jego wariantem $T(d,t) = T_0$, $t > 0$, przy czym $\Theta^*(1,\tau) = 0$ w warunku (5.15). Zwiększenie Bi_c powoduje obniżenie temperatury powierzchni $\zeta = 1$ do poziomu temperatury początkowej $\Theta^* = 0$, które to jest najbardziej zauważalne w zakresie $0 \leq Bi_c \leq 60$.

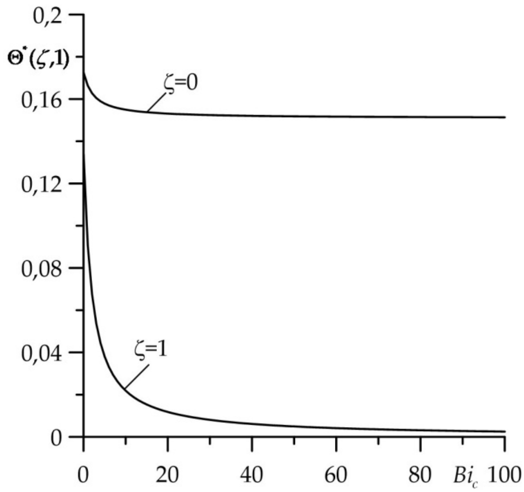


a) b)

Rysunek 5.2. Ewolucja bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* dla wybranych wartości liczby Biota Bi_c: a) na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$, b) na powierzchni swobodnej warstwy $\zeta = 1$

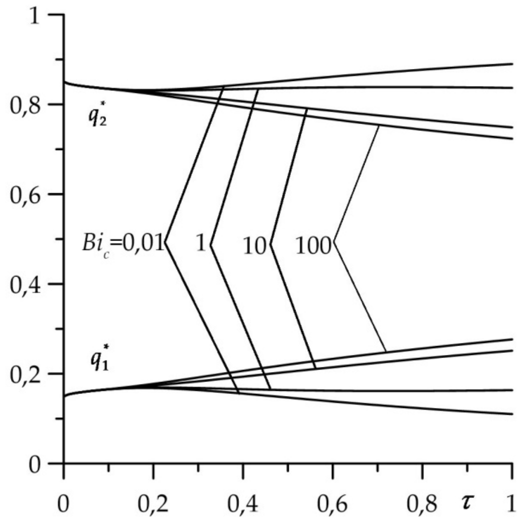
Wpływ wielkości parametru Bi_c na ewolucję $\Theta^*(\zeta,\tau)$ pokazano na rysunku 5.2. Nieznaczne obniżenie temperatury powierzchni ciernej $\zeta = 0$ wraz ze wzrostem Bi_c staje się zauważalne przy $\tau \geq 0{,}6$ (rysunek 5.2a). Powierzchnia wolna $\zeta = 1$ FGM warstwy jest natomiast bardziej wrażliwa na zmiany liczby Biota. Zwiększenie intensywności chłodzenia konwekcyjnego powoduje wyraźne zmniejszenie temperatury tej powierzchni znacznie wcześniej – już przy $\tau > 0{,}1$

(rysunek 5.2b). Przy ustalonej wartości liczby Fouriera τ, wraz ze zwiększeniem parametru Bi_c, temperatura obu powierzchni zmniejsza się. Efekt ten jest najbardziej zauważalny na powierzchni wolnej FGM warstwy $\zeta = 1$. Zmniejszenie temperatury powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ i powierzchni wolnej $\zeta = 1$ warstwy wraz ze wzrostem liczby Biota Bi_c, przy ustalonej wartości τ = 1, pokazano na rysunku 5.3.



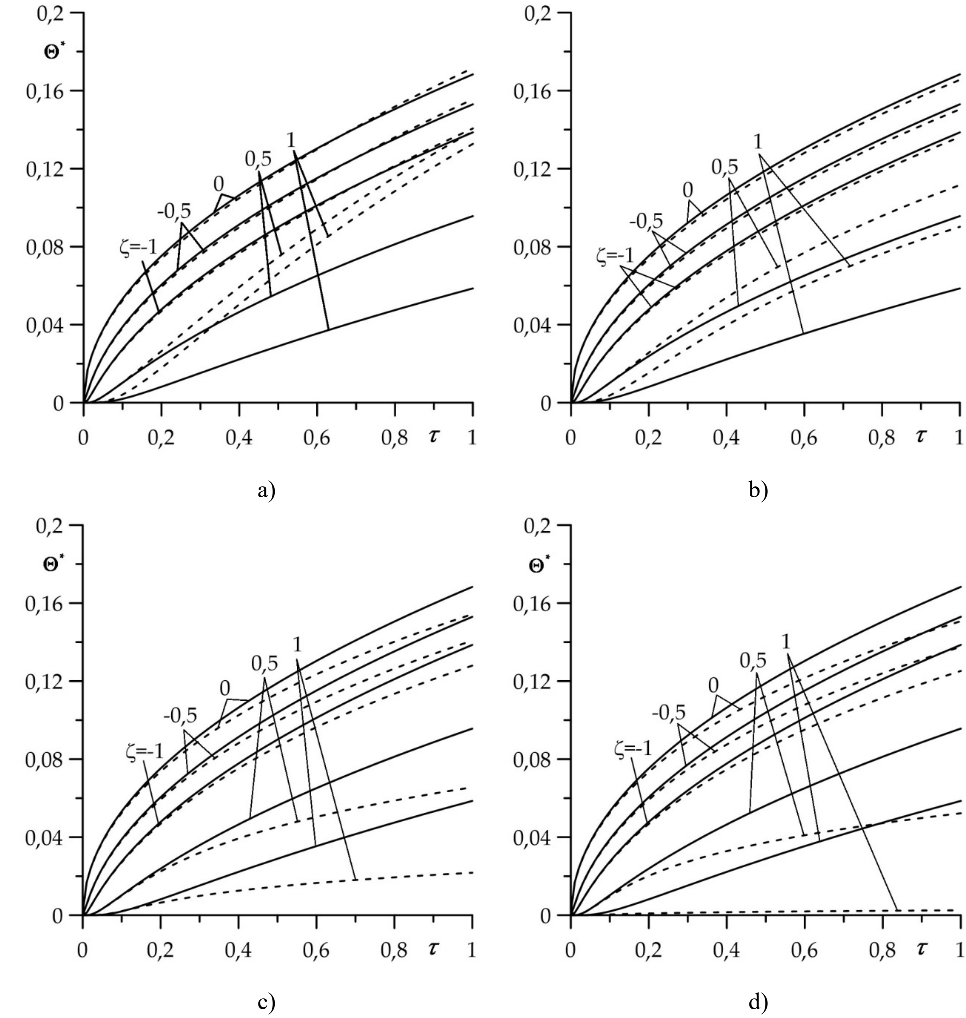
Rysunek 5.3. Zależność bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* od liczby Biota Bi_c na powierzchniach $\zeta = 0$ i $\zeta = 1$ przy $\tau = 1$

Większa część ciepła wygenerowanego na skutek tarcia na powierzchni kontaktu jest pochłaniana do półprzestrzeni (rysunek 5.4). Jest to spowodowane o wiele lepszymi zdolnościami do przewodzenia ciepła przez żeliwo w porównaniu do dwutlenku cyrkonu (tabela 3.1). W początkowym okresie nagrzewania ($0 < \tau \leq 0,2$) warstwa absorbuje $\approx 15\%$, zaś półprzestrzeń pozostałe $\approx 85\%$ ciepła. Proporcje podziału ciepła pomiędzy warstwą a półprzestrzenią zmieniają się z czasem trwania poślizgu w zależności od wartości Bi_c. Przy małych wartościach Bi_c wraz z upływem czasu nagrzewania ilość ciepła wchłanianego przez warstwę nieznacznie się zmniejsza, osiągając przy $\tau = 1$ wartości $\approx 10\%$ i $\approx 13\%$, odpowiednio dla Bi_c = 0,01 i Bi_c = 1. Jednocześnie ilość ciepła skierowanego do półprzestrzeni zwiększa się proporcjonalnie, zaś zwiększenie intensywności chłodzenia powierzchni wolnej warstwy powoduje zwiększenie absorbowanego nią ciepła przy $\tau = 1$ do 20% i 27%, odpowiednio dla Bi_c = 10 i Bi_c = 100.



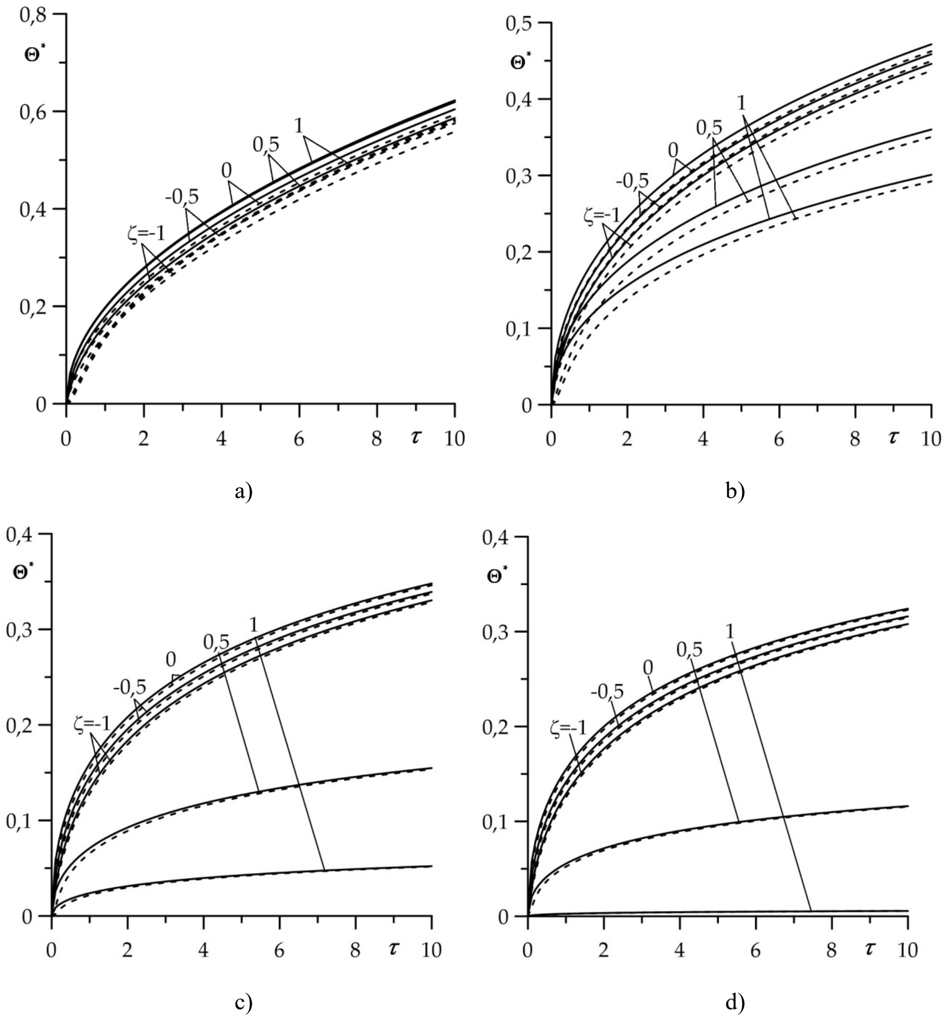
Rysunek 5.4. Ewolucje bezwymiarowych intensywności $q_l^*(\tau)$ strumieni ciepła absorbowanych FGM warstwą (l = 1) i jednorodną półprzestrzenią (l = 2) dla wybranych wartości liczby Biota Bi_c

Porównanie wartości temperatury znalezionych za pomocą dokładnego rozwiązania (5.47)–(5.49) (krzywe ciągłe) i rozwiązań asymptotycznych (5.77), (5.78), przy małych wartościach liczby Fouriera τ (krzywe przerywane), zaprezentowano na rysunku 5.5. Dobra zgodność rezultatów przy $0 \leq \tau \leq 1$, znalezionych na podstawie rozwiązań dokładnego i asymptotycznego, ma miejsce na powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ oraz w półprzestrzeni, przy $\zeta = -0{,}5$, $\zeta = -1$, dla wszystkich czterech wybranych wartości Bi_c. Wewnątrz FGM warstwy wykorzystanie rozwiązania asymptotycznego należy natomiast ograniczyć zakresem $0 \leq \tau \leq 0{,}2$.



Rysunek 5.5. Ewolucja bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* przy różnych wartościach bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ dla: a) Bi_c = 0,01; b) Bi_c = 1; c) Bi_c = 10; d) Bi_c = 100. Krzywe ciągłe – rozwiązanie dokładne (5.47)–(5.49), krzywe przerywane – rozwiązanie asymptotyczne (5.77), (5.78) przy małych wartościach liczby Fouriera τ

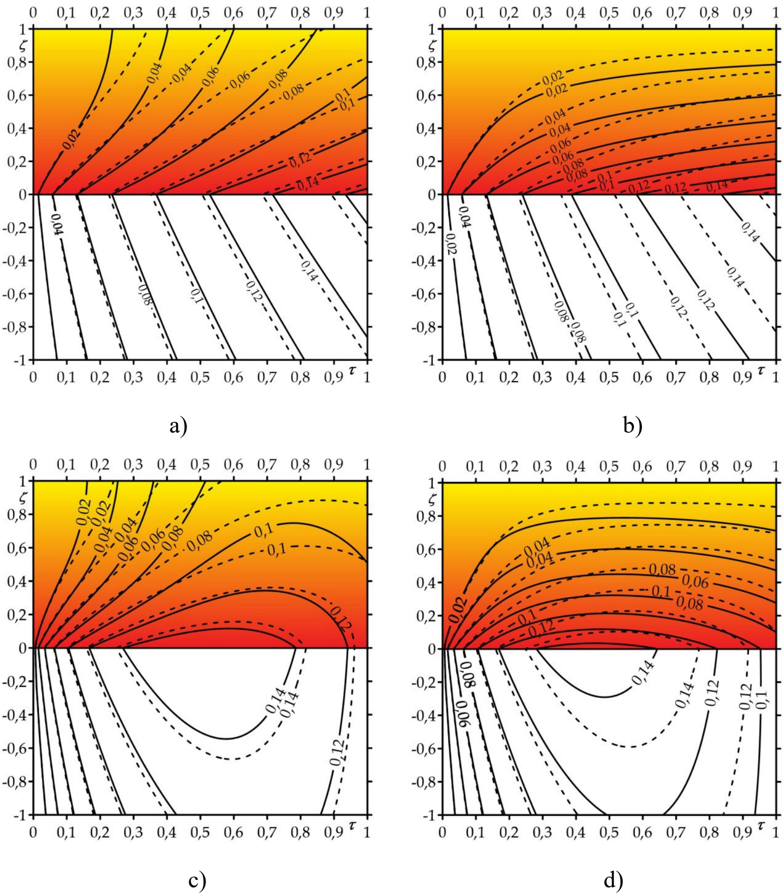
Asymptotyczne rozwiązania (5.92)–(5.94) przy dużych wartościach τ pozwalają na oszacowanie temperatury w zakresie $0 \leq \tau \leq 10$ zarówno w warstwie, jak i półprzestrzeni (rysunek 5.6). Przy czym dokładność takiego oszacowania zwiększa się wraz ze wzrostem intensywności chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy. Tak dobra zgodność profili czasowych temperatury znalezionych z wykorzystaniem dokładnego i asymptotycznego rozwiązania pozwala na wykorzystanie tego ostatniego w obliczeniach inżynierskich trybu temperaturowego wybranej pary ciernej. Zaletą rozwiązania asymptotycznego jest brak całkowania numerycznego, które jest konieczne w przypadku korzystania z rozwiązania dokładnego (5.47)–(5.49).



Rysunek 5.6. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* przy różnych wartościach bezwymiarowej zmiennej przestrzennej ζ dla: a) $Bi_c = 0{,}01$; b) $Bi_c = 1$; c) $Bi_c = 10$; d) $Bi_c = 100$. Krzywe ciągłe – rozwiązanie dokładne (5.47)–(5.49), krzywe przerywane – rozwiązanie asymptotyczne (5.92) – (5.94) przy dużych wartościach liczby Fouriera τ

Wpływ funkcyjnie gradientowego materiału warstwy na pole temperatury układu ciernego pokazano na rysunku 5.7. Obliczenia wykonano na podstawie dokładnych rozwiązań, przy poślizgu ze stałym, (5.47)–(5.49), lub liniowo zmniejszającym się, (5.51)–(5.53) przy $Bi_r \to \infty$, profilem czasowym gęstości mocy tarcia. Widoczne jest nagrzewanie warstwy na całej grubości przy małej intensywności chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy (rysunek 5.7a, c), natomiast przy zwiększeniu liczby Biota do wartości $Bi_c = 100$ w otoczeniu oraz na samej powierzchni wolnej warstwy utrzymuje się temperatura początkowa (rysunek 5.7b, d). Stąd wniosek, że przy wyznaczaniu tak ważnego parametru, jakim jest efektywna głębokość przenikania ciepła, podczas obliczeń trybu temperaturowego węzła ciernego [26] w przypadku $Bi_c = 1$ należy wziąć pod uwagę całą grubość warstwy, zaś przy $Bi_c = 100$ – tylko tę jej cześć, którą określa odległość od powierzchni kontaktu, na której temperatura wynosi 5% wartości maksymalnej.

Obniżenie temperatury układu ciernego w wyniku zastosowania FGM jest najbardziej zauważalne w pobliżu powierzchni kontaktu przy hamowaniu ze stałym spowolnieniem (rysunek 5.7c, d). Podczas poślizgu ze stałą prędkością zarówno temperatura warstwy, jak i półprzestrzeni na ustalonej odległości od powierzchni kontaktu zwiększają się monotonicznie wraz z czasem nagrzewania (rysunek 5.7a, b). W przypadku poślizgu z liniowo zmniejszającą się prędkością temperatura natomiast najpierw szybko zwiększa się do wartości maksymalnej, po osiągnięciu której zaczyna się z kolei etap nieznacznego ochłodzenia, trwający aż do zatrzymania (rysunek 5.7c, d).



Rysunek 5.7. Izotermy bezwymiarowego przyrostu temperatury $\Theta^*(\zeta,\tau)$ podczas poślizgu z gęstością mocy tarcia: a, b) – stałą, c, d) – liniowo zmniejszającą się z czasem dla: a, c) – $Bi_{\mathrm{c}} = 1$; b, d) – $Bi_c = 100$. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM ZrO_2–Ti-6Al-4V, krzywe przerywane – warstwa jednorodna wykonana z ZrO_2

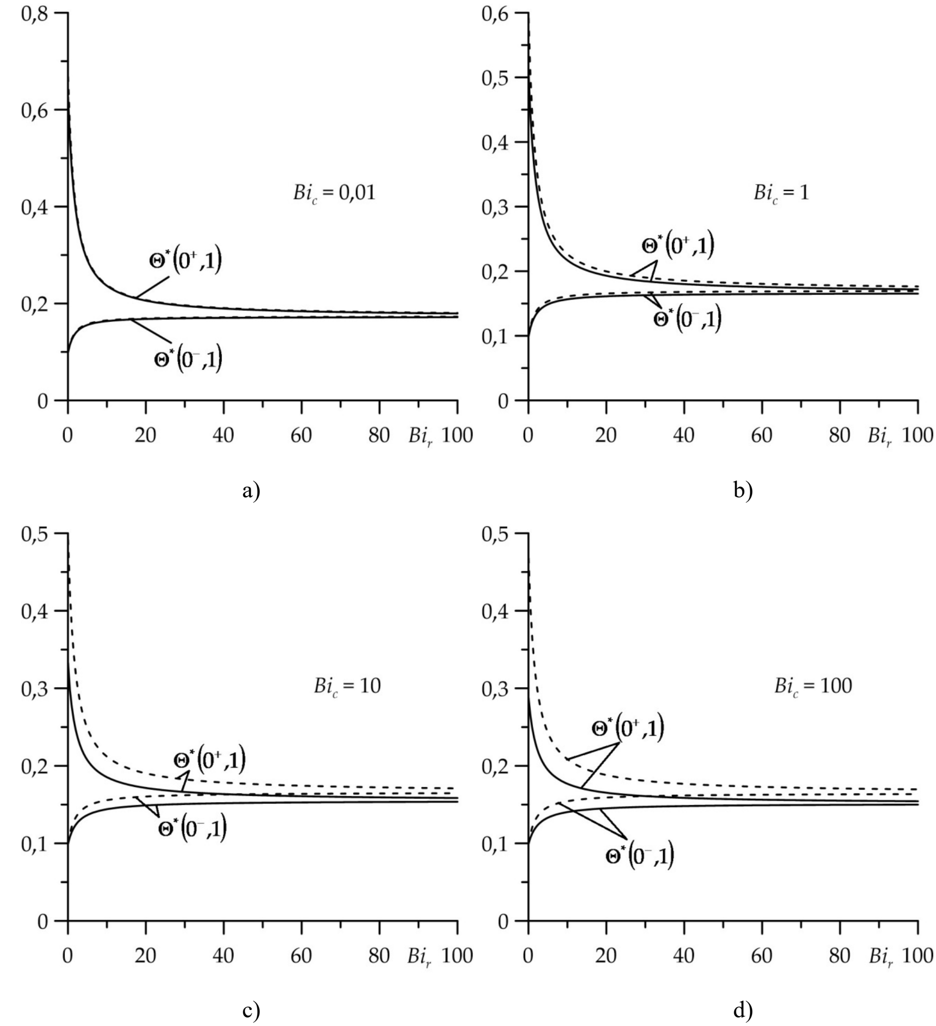
Niedoskonały kontakt cieplny tarcia

Celem dalszej części analizy numerycznej było zbadanie wzajemnego wpływu liczb Biota Bi_c i Bi_r na temperaturę układu ciernego. Należy zaznaczyć, że przy ustalonej wartości liczby Biota Bi_c przypadek $Bi_r \to 0$ odpowiada takiemu trybowi nagrzewania rozpatrywanego układu, przy którym powierzchnie robocze warstwy i półprzestrzeni są nagrzewane osobno strumieniami ciepła o jednakowej intensywności, równej połowie gęstości mocy tarcia, tzn. $0{,}5\,q_0$. Jeżeli $Bi_r \to \infty$, to temperatury powierzchni ciernych warstwy i półprzestrzeni w każdej chwili procesu nagrzewania są sobie równe. Równość temperatury powierzchni ciernych wraz z warunkiem brzegowym (5.3) lub w postaci bezwymiarowej (5.13) tworzą tzw. warunki doskonałego kontaktu cieplnego tarcia, które to są realizowane podczas tarcia gładkich powierzchni.

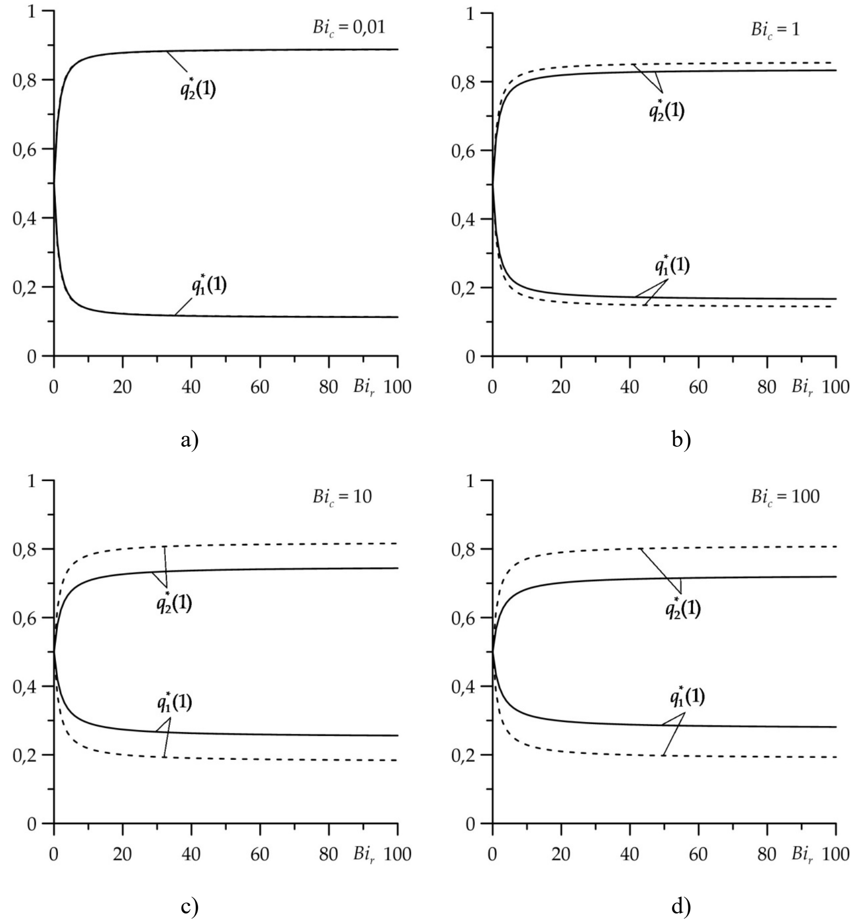
Rezultaty obliczeń zaprezentowano na rysunkach 5.8–5.13, na których krzywe ciągłe odpowiadają rezultatom otrzymanym w przypadku warstwy wykonanej z FGM ZrO_2–Ti-6Al-4V, a krzywe przerywane – w przypadku warstwy wykonanej w całości z ZrO_2.

Wpływ przewodności kontaktowej (liczby Biota Bi_r) na bezwymiarowy przyrost temperatury Θ^* (5.43), (5.44) powierzchni ciernych warstwy ($\zeta = 0^+$) i półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) dla czterech wartości liczby Biota Bi_c przy ustalonej wartości liczby Fouriera $\tau = 1$ pokazano na rysunku 5.8. Największy skok temperatury powierzchni $\zeta = 0^+$ i $\zeta = 0^-$ dla obu rodzajów materiału warstwy ma miejsce przy małej ($Bi_r \to 0$) przewodności kontaktowej (dużym oporze termicznym). Zwiększenie liczby Biota Bi_r powoduje natomiast wyrównanie temperatury powierzchni ciernych warstwy i półprzestrzeni, zaś przy $Bi_r \approx 100$ kontakt cieplny tarcia tych powierzchni można uznać za doskonały. Podczas całego procesu nagrzewania temperatura pary ciernej zawierającej FGM warstwę (krzywe ciągłe) jest niższa niż w przypadku stosowania jednorodnego materiału warstwy (krzywe przerywane). Przy czym efekt ten zwiększa się wraz ze wzrostem intensywności chłodzenia konwekcyjnego (liczby Biota Bi_c) powierzchni wolnej warstwy $\zeta = 1$ (rysunek 5.8c, d).

Odpowiednie rezultaty dla bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła q_l^*, l = 1;2 (5.58), (5.59) pokazano na rysunku 5.9. Zauważono, że największe zmiany intensywności strumieni ciepła skierowanych po normalnej od powierzchni kontaktu do wewnątrz warstwy (q_1^*) i półprzestrzeni (q_2^*) zachodzą w przedziale $0 \le Bi_r \le 10$. Zwiększenie przewodności kontaktowej (zmniejszenie oporu termicznego) skutkuje tym, że ilość ciepła pochłanianego przez FGM warstwę zmniejsza się, a ciepła absorbowanego żeliwną półprzestrzenią – zwiększa się. Przy prawie adiabatycznej powierzchni wolnej warstwy (Bi_c = 0,01) wpływ gradientowości materiału warstwy na q_l^*, l = 1;2 jest znikomy (rysunek 5.9a). W sytuacji zwiększenia intensywności wymiany ciepła (liczby Biota Bi_c) pomiędzy powierzchnią wolną warstwy a środowiskiem otaczającym efekt wpływu FGM warstwy na temperaturę staje się natomiast zauważalny (rysunek 5.9b, c, d).

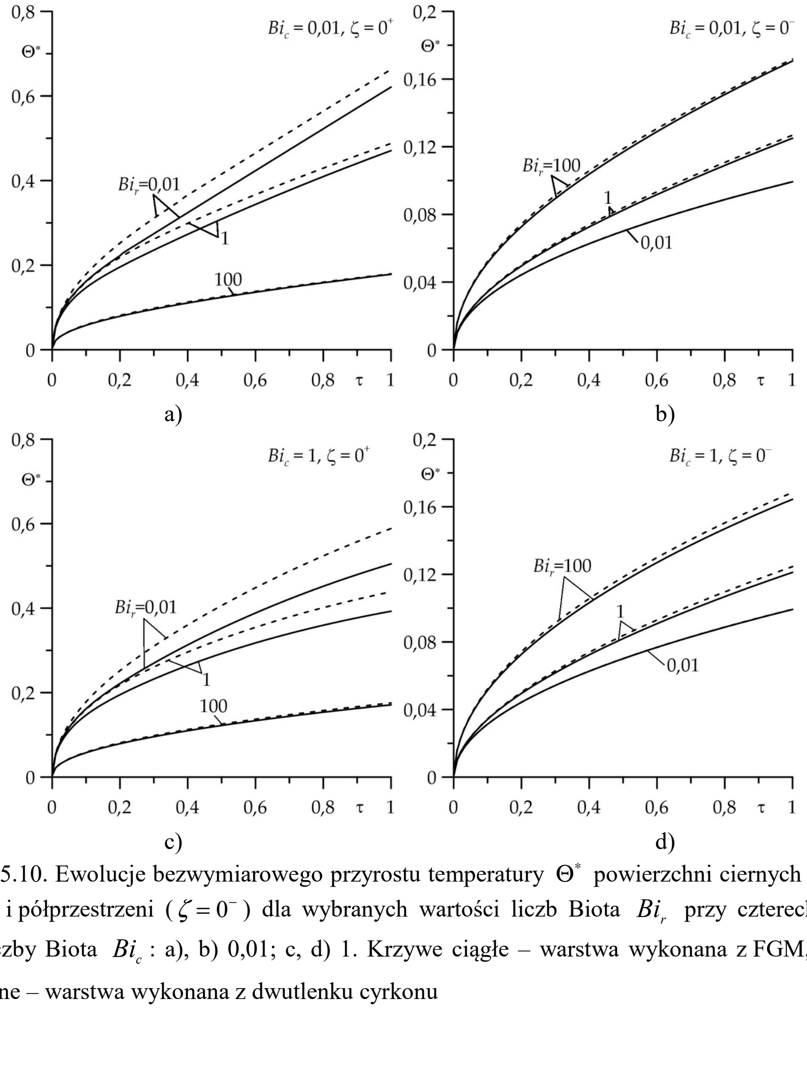


Rysunek 5.8. Zależność bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* powierzchni ciernych warstwy ($\zeta = 0^+$) i półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$), przy $\tau = 1$, od liczby Biota Bi_r dla czterech wartości liczby Biota Bi_c : a) 0,01; b) 1; c) 10; d) 100. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu

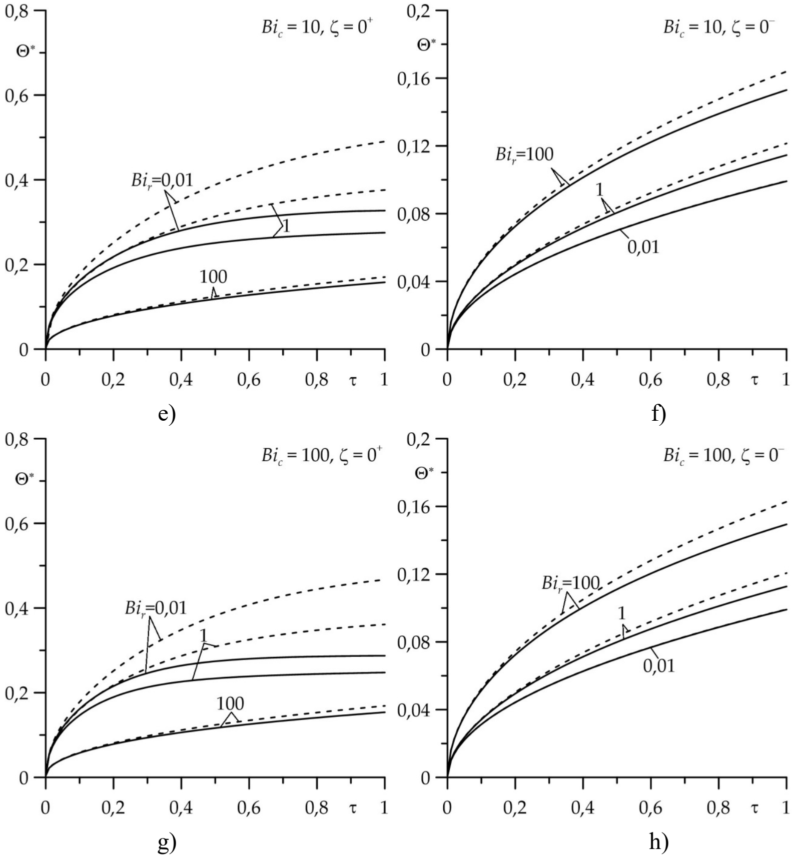


Rysunek 5.9. Zależność bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła q_l^*, l = 1;2, przy $\tau = 1$, od liczby Biota Bi_r dla czterech wartości liczby Biota Bi_c : a) 0,01; b) 1; c) 10; d) 100. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu

Ewolucję bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* (5.43), (5.44) powierzchni ciernych warstwy ($\zeta = 0^+$) i półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) dla różnych wartości liczb Biota Bi_r i Bi_c zaprezentowano na rysunku 5.10. Dodatkowo zauważono, że przy tych samych parametrach wejściowych wykonanie warstwy z FGM powoduje obniżenie temperatury obu elementów w stosunku do temperatury przy jednorodnym materiale warstwy. Najbardziej wyraźnie tę tendencję widać na powierzchni ciernej warstwy $\zeta = 0^+$, przy małych wartościach przewodności kontaktowej ($Bi_r = 0{,}01$) i intensywnym chłodzeniu konwekcyjnym (Bi_c = 100) warstwy. Wpływ gradientowości materiału warstwy na temperaturę powierzchni ciernej półprzestrzeni $\zeta = 0^-$ jest wówczas zdecydowanie mniejszy. Zauważalne różnice temperatury przy stosowaniu FGM warstwy i warstwy jednorodnej występują na tej powierzchni w przypadku doskonałego kontaktu cieplnego tarcia (Bi_r = 100), przy intensywnym (Bi_c = 100) chłodzeniu konwekcyjnym powierzchni wolnej warstwy.

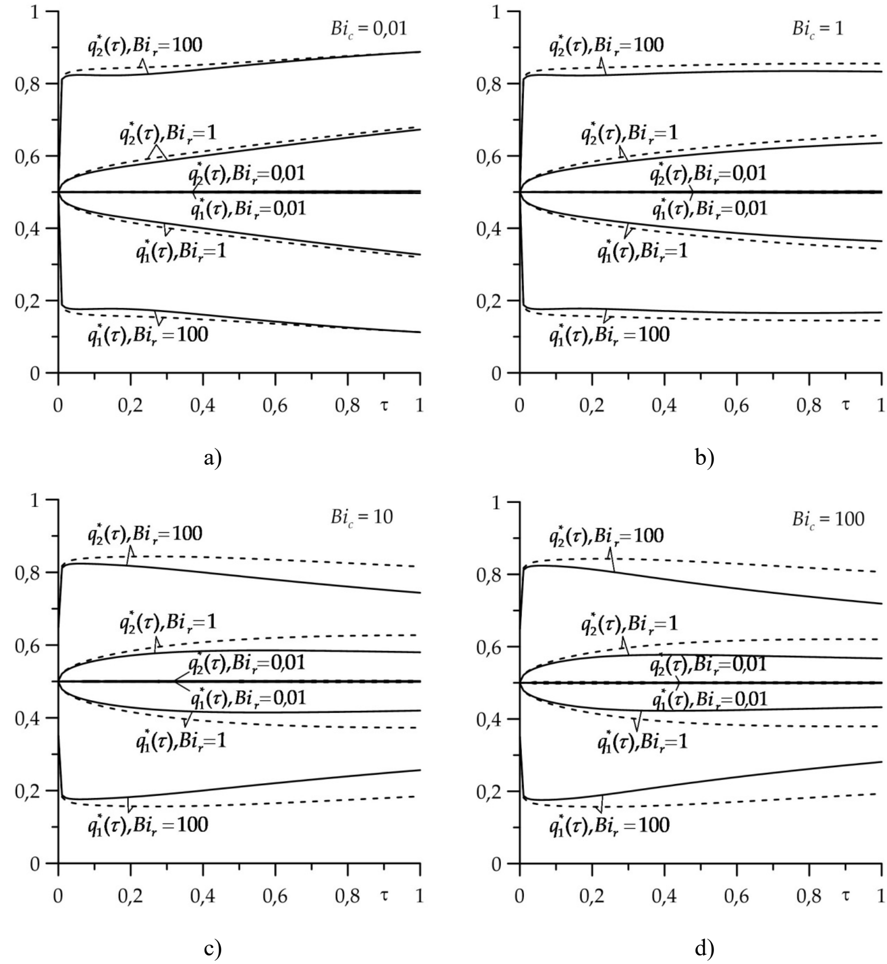


Rysunek 5.10. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* powierzchni ciernych warstwy ($\zeta = 0^+$) i półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) dla wybranych wartości liczb Biota Bi_r przy czterech wartościach liczby Biota Bi_c : a), b) 0,01; c, d) 1. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu



Rysunek 5.10. Ewolucje bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* powierzchni ciernych warstwy ($\zeta = 0^+$) i półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) dla wybranych wartości liczb Biota Bi_r przy czterech wartościach liczby Biota Bi_c : e, f) 10; g) h) 100. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu

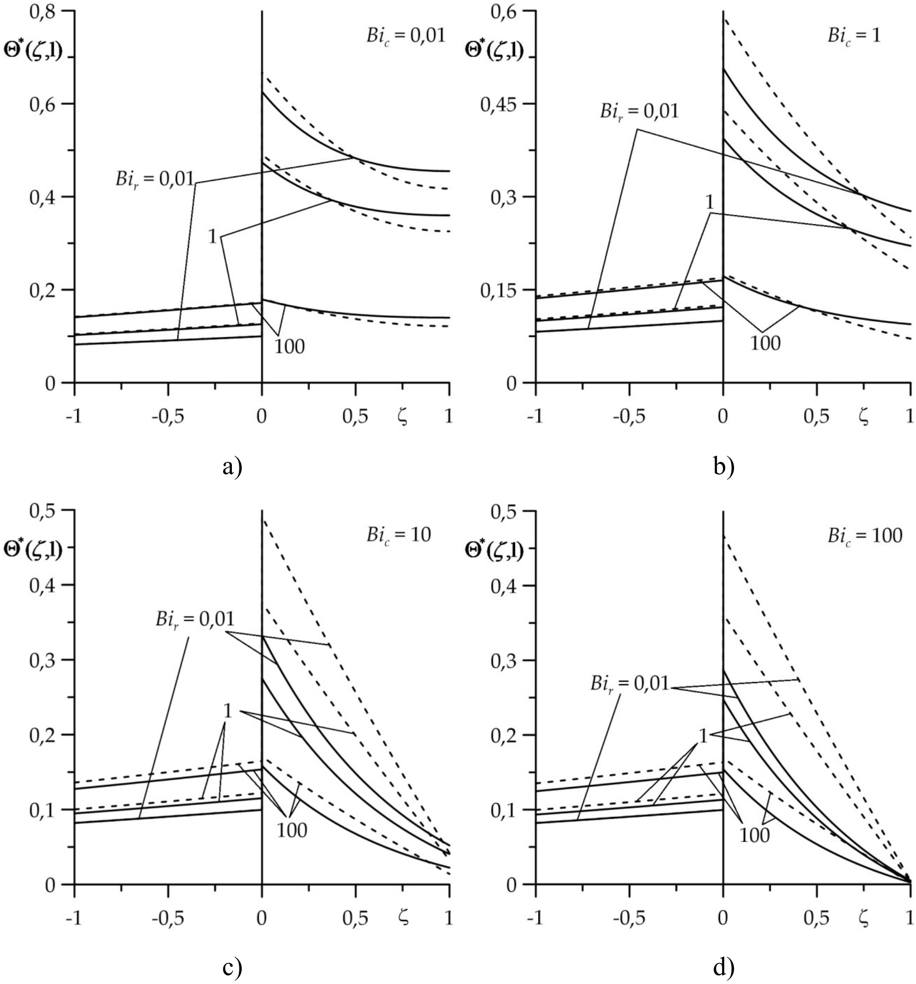
Odpowiednie zmiany bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła q_l^*, l = 1;2 (5.58), (5.59), mające miejsce wraz z upływem czasu (liczbą Fouriera τ), pokazano na rysunku 5.11.



Rysunek 5.11. Ewolucje bezwymiarowych intensywności strumieni ciepła q_l^* absorbowanych przez warstwę ($l = 1$) i półprzestrzeń ($l = 2$) dla wybranych wartości liczb Biota Bi_r przy czterech wartościach liczby Biota Bi_c: a) 0,01; b) 1; c) 10; d) 100. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu

Znacznie większa przewodność cieplna żeliwa ChNMKh w porównaniu z ZrO_2 czy Ti-6Al-4V skutkuje tym, że to półprzestrzeń wchłania większą część ciepła powstałego w czasie tarcia. Przy Bi_r = 0,01, kiedy realizowane są warunki rozdzielnego nagrzewania elementów pary ciernej, rozpatrywane intensywności, zgodnie z oczekiwaniami, utrzymują się na stałym poziomie 0,5 podczas całego procesu nagrzewania, niezależnie od intensywności chłodzenia wolnej powierzchni warstwy. Przy $Bi_r = 1$, wraz z upływem czasu nagrzewania, ilość ciepła skierowanego do warstwy monotonicznie zmniejsza się, przy jednoczesnym zwiększaniu absorpcji ciepła do półprzestrzeni. Nieco inaczej wygląda ewolucja q_l^*, $l = 1;2$ przy doskonałym (pełnym) kontakcie cieplnym tarcia ($Bi_r = 100$). Po pierwsze, wyraźnie widać, że różnica pomiędzy q_2^* a q_1^* dla ustalonej wartości τ jest w tym przypadku największa w porównaniu do odpowiednich rezultatów otrzymanych przy $Bi_r = 0{,}01$ czy $Bi_r = 1$. Po drugie, zauważalna jest znacznie większa wrażliwość q_l^*, $l = 1;2$ na intensywność chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy. Przy utrzymaniu na tej powierzchni temperatury początkowej ($Bi_c = 0{,}01$) zaobserwowano szybkie osiągnięcie przez q_l^*, $l = 1;2$ charakterystycznych wartości: minimalnej przez q_1^* oraz maksymalnej przez q_2^*. Z upływem czasu nagrzewania q_1^* dalej nieznacznie maleje, zaś q_2^* odpowiednio się zwiększa. Przy $Bi_c = 1$, po osiągnięciu przez q_l^*, $l = 1;2$ wspomnianych wyżej wartości charakterystycznych, dalsze nagrzewanie praktycznie nie powoduje ich zmian.

Zwiększenie intensywności konwekcyjnej wymiany ciepła na wolnej powierzchni warstwy ($Bi_c = 10$, a w szczególności $Bi_c = 100$) powoduje, że po szybkim osiągnięciu wartości minimalnej przez q_1^* i maksymalnej przez q_2^*, wraz z upływem czasu, ilość ciepła absorbowanego warstwą zaczyna zwiększać się, a przez półprzestrzeń – zmniejszać. Ten efekt najbardziej zauważalny jest w przypadku warstwy wykonanej z FGM.



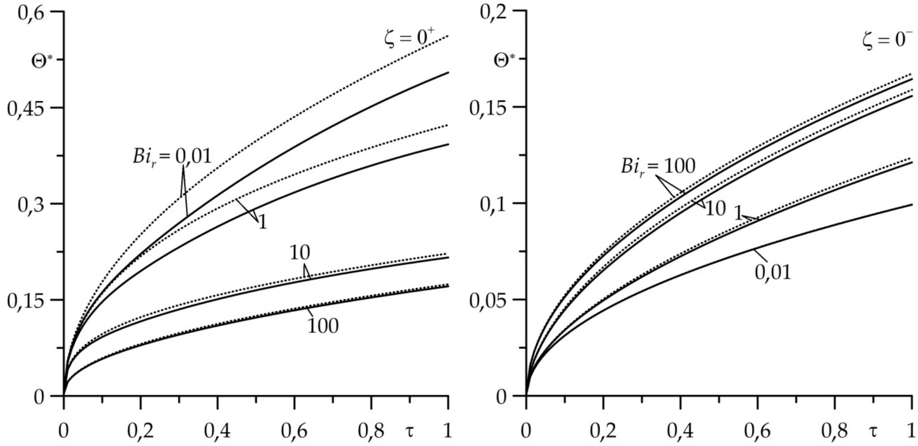
Rysunek 5.12. Zmiany bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* z odległością ζ od powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ w końcowej chwili procesu nagrzewania ($\tau = 1$) dla wybranych wartości liczb Biota Bi_r przy czterech wartościach liczby Biota Bi_c : a) 0,01; b) 1, c) 10; d) 100. Krzywe ciągłe – warstwa wykonana z FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu

Rozkłady bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* (5.33), (5.34) po normalnej od powierzchni kontaktu $\zeta = 0$ w warstwie ($0 \le \zeta \le 1$) i półprzestrzeni ($-1 \le \zeta \le 0$) przy $\tau = 1$ dla różnych wartości liczb Biota Bi_r i Bi_c zaprezentowano na rysunku 5.12. Przy ustalonej wartości Bi_c w przypadku Bi_r = 0,01 wyraźnie widoczny jest skok temperatury podczas przejścia przez powierzchnię kontaktu

$\zeta = 0$. Przy Bi_r = 1 skok ten zmniejsza się, a przy Bi_r = 100 jest praktycznie niezauważalny.

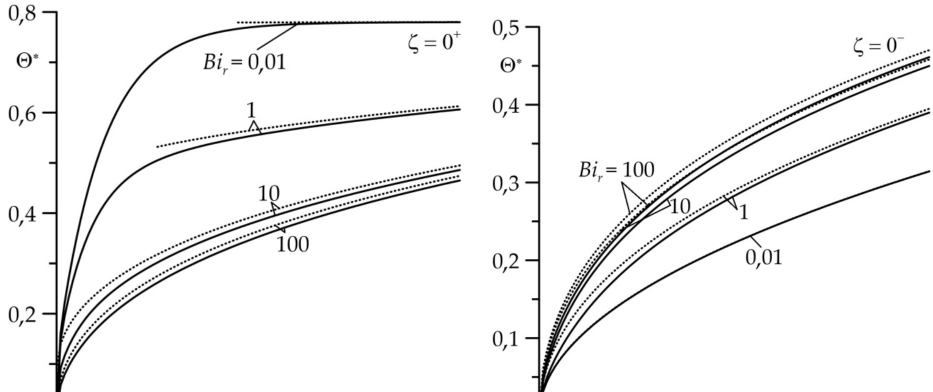
W porównaniu do przypadku warstwy jednorodnej wykonanie warstwy z FGM nie wykazuje znaczącego wpływu na temperaturę półprzestrzeni, która zmniejsza się liniowo wraz z oddalaniem od powierzchni kontaktu, niezależnie od wyboru materiału warstwy. Inny, nieliniowy charakter rozkładu temperatury obserwujemy w warstwie. Stosowanie warstwy FGM powoduje obniżenie jej temperatury w stosunku do temperatury warstwy jednorodnej wykonanej z dwutlenku cyrkonu. Ten efekt jest najbardziej widoczny przy intensywnym (Bi_c = 10 lub Bi_c = 100) chłodzeniu konwekcyjnym powierzchni wolnej warstwy $\zeta = 1$.

Kolejną część analizy numerycznej poświęcono ustaleniu przedziałów czasowych, w których do oszacowania temperatury powierzchni ciernych FGM warstwy ($\zeta = 0^+$) i jednorodnej półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) można zastosować asymptotyczne rozwiązania przy małych (5.75), (5.76) i dużych (5.86), (5.87) wartościach liczby Fouriera τ (rysunki 5.13 i 5.14). Rezultaty otrzymane za pomocą wspomnianych rozwiązań (krzywe przerywane) porównano z odpowiednimi rezultatami znalezionymi z wykorzystaniem rozwiązań dokładnych (5.33), (5.34) (krzywe ciągłe). Ustalono, że przedział przydatności asymptotycznego rozwiązania (5.75) do wyznaczania temperatury powierzchni ciernej warstwy w znacznej mierze zależy od wielkości liczby Biota Bi_r. Rezultaty otrzymane z rozwiązań dokładnego (5.33) i asymptotycznego (5.75) różnią się nieznacznie przy Bi_r = 0,01;1, jeżeli $0 \le \tau \le 0{,}1$, zaś przy Bi_r = 10;100, gdy $0 \le \tau \le 1$ (rysunek 5.13 a). Do oszacowania temperatury powierzchni ciernej półprzestrzeni można natomiast zastosować asymptotyczne rozwiązanie (5.76) w zakresie $0 \le \tau \le 1$ dla wszystkich czterech wybranych wartości parametru Bi_r (rysunek 5.13b).



a) b)

Rysunek 5.13. Ewolucja bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* powierzchni ciernych: a) warstwy ($\zeta = 0^+$), b) półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) przy Bi_c = 1 dla czterech wartości liczby Biota Bi_r = 0,01, 1, 10, 100. Krzywe ciągłe – rozwiązanie dokładne (5.33), (5.34), krzywe kropkowane – rozwiązanie asymptotyczne (5.75), (5.76) przy małych wartościach liczby Fouriera τ

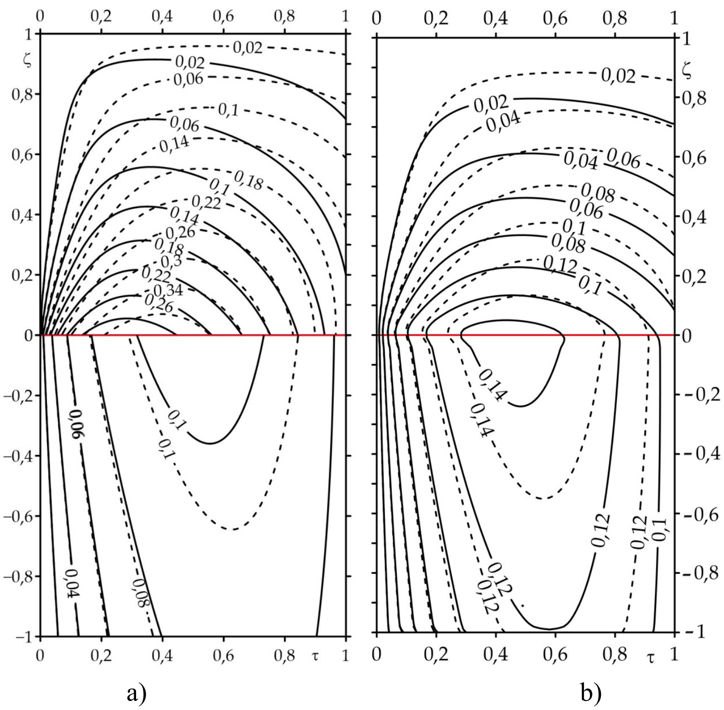


a) b)

Rysunek 5.14. Ewolucja bezwymiarowego przyrostu temperatury Θ^* powierzchni ciernych: a) warstwy ($\zeta = 0^+$); b) półprzestrzeni ($\zeta = 0^-$) dla czterech wartości liczby Biota Bi_r przy $Bi_c = 1$. Krzywe ciągłe – rozwiązanie dokładne (5.33), (5.34), krzywe kropkowane – rozwiązanie asymptotyczne (5.86), (5.87) przy dużych wartościach liczby Fouriera τ

Podobną wrażliwość na wartość liczby Biota Bi_r otrzymano dla warstwy FGM, a związane z tym obserwacje przedstawiono na rysunku 5.14a. Różnica rezultatów otrzymanych za pomocą rozwiązań dokładnego (5.33) i asymptotycznego (5.86) dla $Bi_r = 0{,}01;\ 1$ jest nieznaczna przy $\tau \geq 5$, zaś dla $Bi_r = 10;\ 100$ pozostaje na dopuszczalnym poziomie nie tylko przy dużych, ale i przy małych wartościach τ. Asymptotyczne rozwiązanie (5.87) przy dużych wartościach τ dla półprzestrzeni można zastosować w całym zakresie zmiany parametru Fouriera τ (rysunek 5.14b).

Izolinie bezwymiarowego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ (5.51)–(5.53) w czasie pojedynczego hamowania przy stałym opóźnieniu oraz wymuszonym ($Bi_c = 100$) konwekcyjnym chłodzeniu powierzchni wolnej warstwy dla dwóch wartości liczby Biota Bi_r zaprezentowano na rysunku 5.15. Można zauważyć, że temperatura warstwy FGM jest niższa niż warstwy wykonanej z dwutlenku cyrkonu. Następnie, tak jak w przypadku poślizgu ze stałą gęstością mocy tarcia, podczas hamowania występuje skok temperatury przy przejściu przez powierzchnię kontaktu w przypadku $Bi_r = 1$ (rysunek 5.15a).



Rysunek 5.15. Izolinie bezwymiarowego przyrostu temperatury $\hat{\Theta}^*(\zeta,\tau)$ podczas hamowania przy Bi_c = 100, $\tau_s = 1$ dla dwóch wartości liczby Biota Bi_r: a) 1, b) 100. Krzywe ciągłe – warstwa FGM, krzywe przerywane – warstwa wykonana z dwutlenku cyrkonu

Przy Bi_r = 100 temperatura powierzchni ciernych warstwy i półprzestrzeni pozostaje natomiast jednakowa (rysunek 5.15b), zaś przy małej termicznej przewodności kontaktowej Bi_r = 1 temperatura warstwy jest znacznie wyższa od temperatury półprzestrzeni (rysunek 5.15a). Zwiększenie parametru Bi_r powoduje wyrównanie temperatury obu elementów pary ciernej (rysunek 5.15b). Wpływ liniowo zmniejszającego się profilu czasowego gęstości mocy tarcia polega na osiągnięciu maksymalnej temperatury w obu elementach na ustalonej odległości od powierzchni kontaktu, jednak nie w chwili zatrzymania $\tau = \tau_s = 1$, jak miało to miejsce przy poślizgu ze stałą gęstości mocy tarcia, tylko wewnątrz czasowego przedziału $0 < \tau < \tau_s$

5.6. Podsumowanie

Opracowano model matematyczny do wyznaczenia pola temperatury powstałego w wyniku poślizgu warstwy wykonanej z FGM po powierzchni jednorodnej półprzestrzeni. Zbadano także wpływ na temperaturę takiego układu ciernego dwóch bezwymiarowych parametrów wejściowych, a mianowicie liczb Biota Bi_r i Bi_c, zdefiniowanych wzorami (5.9). Pierwsza z nich (Bi_r) jest wprost proporcjonalna do termicznej przewodności kontaktowej h_r, która z kolei jest odwrotnie proporcjonalna do oporu termicznego powierzchni ciernych warstwy i półprzestrzeni. W związku z tym, przy ustalonej wartości ciśnienia kontaktowego, im wyższa jest chropowatość tych powierzchni, tym większy jest także ich opór termiczny i mniejsza termiczna przewodność kontaktowa h_r.

Uwzględnienie termicznej kontaktowej przewodności w modelowaniu procesu generacji ciepła tarciowego odbywa się za pomocą dwóch warunków brzegowych na powierzchni kontaktu. Jeden z nich zakłada, że suma intensywności strumieni ciepła absorbowanych z powierzchni kontaktu po normalnej do każdego elementu pary ciernej równa jest gęstości mocy tarcia, tzn. iloczynowi współczynnika tarcia, ciśnienia kontaktowego oraz prędkości poślizgu. W drugim warunku stwierdza się natomiast, że różnica wyżej wspomnianych intensywności strumieni ciepła jest proporcjonalna do różnicy temperatur ślizgających się powierzchni ciernych. Jako współczynnik proporcjonalności występuje tu właśnie termiczna kontaktowa przewodność h_r lub, w postaci bezwymiarowej, liczba Biota Bi_r.

Oba te warunki brzegowe znane są jako warunki niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia. Charakterystyczny dla rozwiązań odpowiednich zagadnień cieplnych tarcia, otrzymanych przy takich warunkach brzegowych, jest skok temperatury powierzchni ciernych ślizgających się ciał. Należy zaznaczyć, że podczas poślizgu powierzchni gładkich opór termiczny staje się znikomo mały, a wartość parametru Bi_r znaczna. W przypadku granicznym $Bi_r \to \infty$ różnica temperatur powierzchni ciernych zanika. w takim przypadku mówimy, że generacja ciepła odbywa się w warunkach doskonałego cieplnego kontaktu tarcia.

Liczba Biota Bi_c, za pośrednictwem współczynnika wymiany ciepła h_c, charakteryzuje intensywność chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy. W niniejszym rozdziale osobno zbadano również wpływ parametru Bi_c na temperaturę rozpatrywanego układu pracującego w warunkach doskonałego kontaktu cieplnego tarcia.

Analizę numeryczną przeprowadzono zaś dla FGM (ZrO_2–Ti-6Al-4V) warstwy i jednorodnej (żeliwo szare ChNMKh) półprzestrzeni. Jednocześnie przeanalizowano temperaturę układu składającego się z jednorodnej (ZrO_2) warstwy i żeliwnej (ChNMKh) półprzestrzeni. Ustalono, że:

1. Stosowanie na warstwę funkcyjnie gradientowego materiału powoduje obniżenie jej temperatury w stosunku do warstwy jednorodnej. Takie obniżenie temperatury jest tym większe, im mniejszy jest parametr Bi_r i większy Bi_c. Wpływ gradientowości materiału warstwy na obniżenie temperatury półprzestrzeni pozostaje natomiast nieznaczny.
2. Większa część ciepła generowanego podczas tarcia jest absorbowana do żeliwnej półprzestrzeni. Przy ustalonej wartości liczby Biota Bi_c największe zmiany intensywności strumieni ciepła skierowanych po normalnej do wewnątrz warstwy i półprzestrzeni zachodzą w zakresie $0 \le Bi_r \le 10$. Wraz ze zwiększaniem parametru Bi_c wpływ gradientowości materiału warstwy na intensywność strumieni ciepła staje się bardziej zauważalny.
3. Niezależnie od wartości Bi_c doskonały kontakt cieplny tarcia warstwy z półprzestrzenią następuje, gdy $Bi_r \cong 100$.
4. Chłodzenie konwekcyjne powierzchni wolnej warstwy powoduje obniżenie temperatury powierzchni kontaktu w zakresie $0 \le Bi_c \le 10$ zmiany liczby Biota. Największy spadek temperatury powierzchni wolnej warstwy zachodzi natomiast przy $0 \le Bi_c \le 60$. Konwekcyjne chłodzenie warstwy FGM pozwala zaś zmniejszyć odległość od powierzchni kontaktu, na której temperatura każdego elementu osiąga znaczące wartości (efektywna głębokość nagrzewania).

Otrzymane rozwiązania asymptotyczne przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera τ można stosować z wystarczającą dokładnością do szacowania temperatury rozpatrywanej pary ciernej. Zwiększenie liczby Biota Bi_r powoduje poszerzenie przedziałów zmiany liczby Fouriera τ, w których temperatura warstwy znaleziona z rozwiązań asymptotycznych nieznacznie rożni się od temperatury wyznaczonej za pomocą rozwiązania dokładnego. Takiego efektu nie zaobserwowano natomiast przy wyznaczaniu temperatury powierzchni ciernej półprzestrzeni – odpowiednie asymptotyczne rozwiązania pozwalają jednak na otrzymanie zadowalających rezultatów w całym zakresie zmiany liczby Fouriera.

Należy podkreślić, że przestrzenno-czasowy rozkład izoterm w warstwie i półprzestrzeni zależy od profilu czasowego gęstości mocy tarcia. Przy niezmiennej wartości gęstości mocy tarcia temperatura zwiększa się monotonicznie w czasie nagrzewania (wraz ze wzrostem liczby Fouriera τ). W przypadku hamowania ze stałym opóźnieniem temperatura powierzchni ciernej osiąga natomiast swoją wartość maksymalną około połowy czasu zatrzymania τ_s. Zwiększenie liczby Biota Bi_r powoduje z kolei wyrównanie temperatury warstwy i półprzestrzeni.

Rezultaty zaprezentowane w powyższym rozdziale zostały opublikowane w postaci dwóch artykułów [148, 160].

PODSUMOWANIE KOŃCOWE

W niniejszej publikacji otrzymano dokładne rozwiązania nowej klasy początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia na powierzchni kontaktu ciał (zagadnień cieplnych tarcia) wykonanych z dwuskładnikowych funkcyjnie gradientowych materiałów (FGM). Przyjęto eksponencjalnie zmieniającą się wraz z odległością od powierzchni ciernej przewodność cieplną FGM. Opracowano również ogólną metodykę otrzymywania rozwiązań takich zagadnień, polegającą na wykonaniu kolejno następujących kroków:

1. Wybór schematu nagrzewania tarciowego na podstawie przyjętych założeń.
2. Sformułowanie zagadnienia cieplnego tarcia dla wybranego schematu przy stałej gęstości mocy tarcia.
3. Przejście do odpowiedniego zagadnienia brzegowego w przestrzeni transformaty całkowej Laplace'a, a następnie jego rozwiązanie.
4. Wybór metody (twierdzenie o rozkładzie lub całkowanie w płaszczyźnie zespolonej) i przejście za jej pomocą do przestrzeni oryginałów.
5. Weryfikacja otrzymanego dokładnego rozwiązania poprzez sprawdzenie spełnienia warunków początkowo-brzegowych.
6. Otrzymanie asymptotycznych rozwiązań przy małych i dużych wartościach bezwymiarowego czasu (liczby Fouriera).
7. Uogólnienie otrzymanego dokładnego rozwiązania przy niezmiennej podczas nagrzewania gęstości mocy tarcia na przypadek zmiennego jej profilu czasowego z wykorzystaniem twierdzenia Duhamela.
8. Przeprowadzenie analizy numerycznej dla wybranych materiałów pary ciernej.
9. Opracowanie wniosków.

Na podstawie opisanej powyżej metodyki znaleziono nieustalone pola temperatury dla:

a) dwóch półprzestrzeni wykonanych z różnorodnych FGM przy:
   - poślizgu ze stałą prędkością (podrozdział 2.1),
   - hamowaniu z eksponencjalnie narastającym ciśnieniem kontaktowym (podrozdział 2.2),
   - hamowaniu ze stałym opóźnieniem z uwzględnieniem wrażliwości termicznej składowych FGM (podrozdział 2.3);

b) półprzestrzeni wykonanej z FGM i nagrzewanej strumieniem ciepła o intensywności liniowo zmniejszającej się w czasie, przy czym otrzymanie wzoru do wyznaczenia współczynnika rozdzielenia strumieni ciepła w układzie ciernym składającym się z dwóch różnych półprzestrzeni z FGM zawarto w podrozdziale 3.2;

c) półprzestrzeni wykonanej z FGM ślizgającej się ze stałym opóźnieniem po powierzchni jednorodnej półprzestrzeni w warunkach jednokrotnego lub powtórno-krótkoterminowego (PKT) trybu pracy hamulca (podrozdziały 3.1 i 3.3);
d) dwuelementowego układu złożonego z warstwy FGM naniesionej (doskonały kontakt cieplny) na powierzchnię jednorodnego podłoża, przy czym powierzchnię wolną warstwy nagrzewano strumieniem ciepła o intensywności proporcjonalnej do gęstości mocy tarcia podczas hamowania ze stałym opóźnieniem (rozdział 4);
e) warstwy wykonanej z FGM ślizgającej się z liniowo zmniejszającą się prędkością po powierzchni jednorodnej półprzestrzeni w warunkach doskonałego lub niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia, przy czym należy zaznaczyć, że podczas poślizgu i towarzyszącego mu wytwarzania ciepła na powierzchni wolnej warstwy zachodzi wymiana ciepła ze środowiskiem otaczającym według prawa Newtona (rozdział 5).

Szczegółowe rezultaty wieloparametrycznej analizy numerycznej przeprowadzonej dla wymienionych wyżej układów ciernych zaprezentowano w ostatnich podrozdziałach każdego z czterech rozdziałów roboczych. Dla wybranych materiałów pary ciernej zbadano również wpływ na przyrost temperatury i intensywności absorbowanych strumieni ciepła następujących bezwymiarowych parametrów wejściowych:

- gradientu FGM,
- liczby Fouriera odpowiadającej czasowi narastania ciśnienia kontaktowego,
- profilu temperaturowego właściwości cieplno-fizycznych oraz współczynnika tarcia,
- współczynnika aktywności termicznej,
- liczby Biota charakteryzującej intensywność chłodzenia konwekcyjnego powierzchni wolnej warstwy,
- liczby Biota opisującej kontaktową przewodność termiczną układu ciernego FGM warstwa-jednorodna półprzestrzeń.

Na podstawie szczegółowych wyników zawartych w roboczych rozdziałach monografii ustalono, że dla wybranych układów ciernych:

1. Zastosowanie FGM w elementach ciernych może stanowić efektywne narzędzie do obniżania poziomu temperatury maksymalnej.
2. Czas narastania ciśnienia kontaktowego powoduje wydłużenie czasu hamowania przy jednoczesnym obniżeniu wartości temperatury maksymalnej.
3. Wrażliwość termiczna materiałów składowych FGM może mieć znaczący wpływ na oszacowanie maksymalnej temperatury nawet podczas hamowa-

nia jednokrotnego, w związku z czym uwzględnienie jej podczas pracy hamulca w trybie PKT jest niezbędne.

4. W literaturze naukowej brakuje danych doświadczalnych dotyczących krzywych stabilności termicznej, tzn. zależności współczynnika tarcia od temperatury pary ciernej wykonanej z FGM. Uzyskanie takich danych pozwoliłoby na opracowanie odpowiednich modeli sprzężonych, które łączą zagadnienie ruchu z zagadnieniem cieplnym tarcia.
5. Ewolucje temperatury powierzchni ciernych otrzymane z rozwiązań asymptotycznych wykazały dobrą, a w niektórych przypadkach nawet bardzo dobrą, zgodność z odpowiednimi rezultatami z rozwiązań dokładnych. Oszacowanie temperatury za pomocą tych ostatnich wymaga skorzystania z zaawansowanych algorytmów obliczeniowych, zaś niewątpliwą zaletą otrzymanych rozwiązań asymptotycznych jest ich postać inżynierska.
6. Ustalono graniczne wartości współczynnika wymiany ciepła (liczby Biota), przy przekroczeniu których temperatura powierzchni wolnej FGM warstwy podtrzymywana jest przy swojej wartości początkowej. Przy chłodzeniu konwekcyjnym elementu ciernego z taką intensywnością do oszacowania jego temperatury maksymalnej wystarczy natomiast skorzystać z odpowiednich rozwiązań dla ciał półograniczonych.
7. Wyznaczanie temperatury z zastosowaniem rozwiązań początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego w warunkach doskonałego kontaktu cieplnego tarcia należy wykorzystywać przy stosunkowo gładkich powierzchniach ciernych. Chropowatość powierzchni, spowodowana ich obróbką lub warunkami eksploatacji, powoduje, że oszacowanie trybu temperaturowego układu ciernego trzeba przeprowadzać na podstawie modeli zawierających wyznaczany doświadczalnie współczynnik kontaktowej przewodności termicznej. Związana z tym parametrem liczba Biota pozwoliła zaś ustalić przedziały stosowalności warunków doskonałego i niedoskonałego kontaktu cieplnego tarcia.

Reasumując, rezultaty badań przedstawionych w niniejszej monografii pozwalają stwierdzić, że zastosowanie odpowiednio dobranych funkcyjnie gradientowych materiałów do produkcji elementów pary ciernej układu hamulcowego pozwala znacząco obniżyć temperaturę jego pracy, a tym samym zredukować generowane naprężenia termiczne.

LITERATURA

1. Abbasi, S., Teimourimanesh, S., Vernersson, T., Sellgren, U., Olofsson, U., Lundén, R. (2014). Temperature and thermoelastic instability at tread braking using cast iron friction material. *Wear*, *314*, 171–180. https://doi.org/10.1016/j.wear.2013.11.028i
2. Abramowitz, M., Stegun, I. (red.). (1979). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables* (seria Applied Mathematics, t. 55). National Bureau of Standards.
3. Afsar, A. M., Go, J. (2010). Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk. *Applied Mathematical Modelling*, *34*(11), 3309–3320. https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.02.022
4. Alinia, Y., Beheshti, A., Guler, M. A., El-Borgi, S., Polycarpou, A. A. (2016). Sliding contact analysis of functionally graded coating/substrate system. *Mechanics of Materials*, *94*, 142–155. https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.11.017
5. Archer, D. A. (1993). Thermodynamic properties of synthetic sapphire (α-Al_2O_3), standard reference material 720 and the effect of temperature-scale differences on thermodynamic properties. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, *22*(6), 1441–1453. https://doi.org/10.1063/1.555931
6. Balci, M. N., Dag, S., Yildirim, B. (2017). Subsurface stresses in graded coatings subjected to frictional contact with heat generation. *Journal of Thermal Stresses*, *40*(4), 517–534. https://doi.org/10.1080/01495739.2016.1261261
7. Barber, J. R., Martin-Moran, C. J. (1982). Green's functions for transient thermoelastic contact problems for the half-plane. *Wear*, *79*(1), 11–19. https://doi.org/10.1016/0043-1648(82)90200-9
8. Bateman, H., Erdelyi, A. (1954). *Tables of integrals transforms* (t. 1). McGraw-Hill.
9. Bauzin, J.-G., Keruzore, N., Laraqi, N., Gapin, A., Diebold, J.-F. (2018). Identification of the heat flux generated by friction in an aircraft braking system. *International Journal of Thermal Sciences*, *130*, 449–456. https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.008
10. Bauzin, J.-G., Laraqi, N. (2004). Simultaneous estimation of frictional heat flux and two thermal contact parameters for sliding contacts. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, *45*(4), 313–328. https://doi.org/10.1080/10407780490250355
11. Bauzin, J.-G., Nguyen, M.-N., Laraqi, N., Cherikh, M.-B. (2019). Thermal characterization of frictional interfaces using experiments and inverse heat conduction methods. *International Journal of Thermal Sciences*, *137*, 431–437.

12. Bayat, M., Alarifi, I. M., Khalili, A. A., El-Bagory, T. M., Nguyen, H. M., Asadi, A. (2019). Thermo-mechanical contact problems and elastic behaviour of single and double sides functionally graded brake disks with temperature-dependent material properties. *Scientific Reports*, *9*(1), 15317. https://doi.org/10.1038/s41598-019-51450-z
13. Bayat, Y., Ghannad, M., Torabi, H. (2012). Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading. *Archive of Applied Mechanics*, *82*, 229–242. https://doi.org/10.1007/s00419-011-0552-x
14. Belyakov, N. S., Nosko, A. P. (2009). Mathematical simulation of thermal friction processes under conditions of nonideal contact. *High Temperature*, *47*, 123–130. https://doi.org/10.1134/S0018151X09010167
15. Belyakov, N., Nosko, O. (2016). Analytical solution of non-stationary heat conduction problem for two sliding layers with time-dependent friction conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *98*, 624–630, https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.03.054
16. Berry, G. A., Barber, J. R. (1984). The division of frictional heat: a guide to the nature of sliding contact. *Journal of Tribology*, *106*(3), 405–415. https://doi.org/10.1115/1.3260948
17. Bishnoi, D., Sunil Kumar, K. (2023). Pressure exertion and heat dissipation analysis on uncoated and ceramic (Al_2O_3, TiO_2 and ZrO_2) coated braking pads. *Materials Today: Proceedings*, *74*(14), 774–787. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.11.170
18. Blok, H. (1937). Theoretical study of temperature rise at surfaces of actual contact under oiliness lubricating conditions. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (General discussion on lubrication and lubricants)*, *2*, 222–235.
19. Burghartz, St., Schulz, B. (1994). Thermophysical properties of sapphire, AlN and $MgAl_2O_4$ down to 70 K. *Journal of Nuclear Materials*, *212–215:Part B*, 1065–1068. https://doi.org/10.1016/0022-3115(94)90996-2
20. Burlayenko, V. N., Altenbach, H., Sadowski, T., Dimitrova, S. D., Bhaskar, A. (2017). Modelling functionally graded materials in heat transfer and thermal stress analysis by means of graded finite elements. *Applied Mathematical Modelling*, *45*, 422–438. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.005
21. Buyukkaya, E. (2008). Thermal analysis of functionally graded coating AlSi alloy and steel pistons. *Surface and Coatings Technology*, *202*(16), 3856–3865. https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2008.01.034
22. Carslaw, H. S., Jaeger, J. C. (1959). *Conduction of heat in solids* (wyd. 2). Clarendon Press.
23. Cezairliyan, A., McClure, J. L., Taylor, R. (1977). Thermophysical measurements on 90Ti-6Al-4V alloy above 1450 K using a transient (subsecond) technique.

Journal of Research of the National Bureau of Standards: Section A. Physics and Chemistry, *81A*(2–3), 251–256. https://doi.org/ 10.6028/jres.081A.014

24. Chen, L., Kny, E. (2000). Reaction hot-pressed sub-micro Al_2O_3 + TiC ceramic composite. *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, *18*(2), 163–167. https://doi.org/0.1016/S0263-4368(00)00017-2
25. Chichinadze, A. V., Braun, E. D., Ginzburg, A. G., Ignat'eva, Z. V. (1979). *Calculation, testing, and selection of frictional pairs*. Nauka (in Russian).
26. Chichinadze, A. V. (red.). (1984). *Polymers in friction assemblies of machines and devices: a handbook*. Allerton Press Inc.
27. Chichinadze, A. V., Kozhemyakina, V. D., Suvorov, A. V. (2010). Method of temperature-field calculation in model ring specimens during bilateral friction in multidisc aircraft brakes with the IM-58-T2 new multipurpose friction machine. *Journal of Friction and Wear*, *31*(1), 23–32. https://doi.org/10.3103/S1068366610010034
28. Chichinadze, A. V., Matveevski, R. M., Braun, E. P. (1986). *Materials in tribotechnics non-stationary processes*. Nauka (in Russian).
29. Day, A. J., Newcomb, T. P. (1984). Dissipation of frictional energy from the interface of an annular disc brake. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Transport Engineering*, *198*(3), 201–209. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1984_198_146_02
30. Deem, H. W., Wood, W. D., Lucks, C. F. (1958). The relationship between electrical and thermal conductivities of titanium alloys. *Transactions of the Metallurgical Society of AIME*, *212*.
31. Denape, J. (2015). Third body concept and wear particle behavior in dry friction sliding conditions. *Key Engineering Materials*, *640*, 1–12. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.640.1
32. Ding, S., Wu, C.-P. (2018). Optimization of material composition to minimize the thermal stresses induced in FGM plates with temperature-dependent material properties. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, *14*(4), 527–549. htttps://doi.org/10.1007/s10999-017-9388-z
33. El-Galy, I. M., Saleh, B. I., Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, *1*(11), 1378.
34. Eriksson, M., Bergman, F., Jacobson, S. (2002). On the nature of tribological contact in automotive brakes. *Wear*, *252*(1–2), 26–36. https://doi.org/10.1016/S0043-1648(01)00849-3
35. Evtushenko, O., Kuciej, M., Topczewska, K. (2020). Determination of the maximal temperature of a pad–disk tribosystem during one-time braking. *Materials Science*, *56*(2), 152–159. https://doi.org/10.1007/s11003-020-00409-x

36. Fazekas, G. A. G. (1953). Temperature gradients and heat stresses in brake drums. *SAE Transactions*, *61*, 279–308.
37. Fu, P., Jizhong, Z., Zhang, X., Kang, G., Wang, P., Kan, Q. (2022). Thermo-mechanically coupled sliding contact shakedown analysis of functionally graded coating-substrate structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, *222*(14), 107241. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107241
38. Yapor Genao, F. A., Kim, J., Żur, K. K. (2021). Nonlinear finite element analysis of temperature-dependent functionally graded porous micro-plates under thermal and mechanical loads. *Composite Structures*, *256*(7), 112931. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112931
39. Ginzburg, A. G. (1974). Coefficient of distribution of the heat flows during braking. W: *Calculation and testing of friction couples*. Mechanical Engineering (in Russian).
40. Godet, M. (1984). The third-body approach: a mechanical view of wear. *Wear*, *100*(1–3), 437–452. https://doi.org/10.1016/0043-1648(84)90025-5
41. Godet, M. (1990). Third-bodies in tribology. *Wear*, *136*(1), 29–45. https://doi.org/10.1016/0043-1648(90)90070-Q
42. Gopal, V., Whiting, M. J., Chew, J. W., Mills, S. (2013). Thermal contact conductance and its dependence on load cycling. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *66*, 444–450. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.06.061
43. Govindaraju, M., Megalingam Murugan, A., Murugasan, J., Vignesh, R. V., Kota, P. K., Ram, A. S., Lakshana, P., Kumar, V. N. (2020). Investigations on the tribological behavior of functionally gradient iron-based brake pad material. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, *234*, 2474–2486. https://doi.org/10.1177/0954406220905858
44. Grześ, P. (2011). Partition of heat in 2D finite element model of a disc brake. *Acta Mechanica et Automatica*, *5*(2), 35–41.
45. Grześ, P. (2019). Maximum temperature of the disc during repeated braking applications. *Advances in Mechanical Engineering*, *11*(3), 168781401983782. https://doi.org/10.1177/1687814019837826
46. Hasselgruber, H. (1963). Der Schaltvorgang einer Trockenreibung Kupplung bei kleinster Erwärmung. *Konstruction*, *15*(2), 41–45 (in German).
47. Hosseini, S. M., Akhlaghi, M., Shakeri, M. (2007). Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method. *Heat and Mass Transfer*, *43*(7), 669–675. https://doi.org/10.1007/s00231-006-0158-y
48. Hosseini Tehrani, P., Talebi, M. (2012). Stress and temperature distribution study in a functionally graded brake disk. *Automotive Science and Engineering 2*(3), 172–179.
49. Jabbari, M., Mohazzab, A. H., Bahtui, A., Eslami, M. R. (2007). Analytical solution for three-dimensional stresses in a short length FGM hollow cylin-

der. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, *87*(6), 413–429. https://doi.org/10.1002/zamm.200610325
50. Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami, M. R. (2002). Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, *79*(7), 493–497. https://doi.org/10.1016/S0308-0161(02)00043-1
51. Jang, Y. H., Ahn, S.-H. (2007). Frictionally-excited thermoelastic instability in functionally graded material. *Wear*, *262*, 1102–1112.
52. Jin, Z.-H. (2002). An asymptotic solution of temperature field in a strip of a functionally graded material. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *29*(7), 887–895. https://doi.org/10.1016/S0735-1933(02)00409-8
53. Jojith, R., Sam, M., Radhika, N. (2022). Recent advances in tribological behavior of functionally graded composites: a review. *Engineering Science and Technology, an International Journal*, *25*, 100999. https://doi.org/10.1016/j.jestch.2021.05.003
54. Ke, L.-L., Wang, Y.-S. (2007). Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, *26*(1), 171–188. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007
55. Kim, K.-S., Noda, N. (2002). Green's function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material. *Acta Mechanica*, *156*(3), 145–161. https://doi.org/10.1007/BF01176753
56. Kingery, W. D., Francl, J., Coble, R. L., Vasilos, T. (1954). Thermal conductivity: X, data for several pure oxide materials corrected to zero porosity. *Journal of the American Ceramic Society*, *37*(2), 107–110. https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.1954.tb20109.x
57. Kreith, F., Manglik, R. M. (2016). *Principles of heat transfer*. Cengage Learning.
58. Kuciej, M. (2011). Accounting changes of pressure in time one-dimensional modeling the process of friction heating of disc brake. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *54*(1–3), 468–474. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.09.023
59. Kuciej, M. (2011). The thermal problem of friction during braking for a three-element tribosystem with a composite pad. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *38*(10), 1322–1329. https://doi/org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2011.08.005
60. Kulchytsky-Zhyhailo, R., Bajkowski, A. S. (2012). Analytical and numerical methods of solution of three-dimensional problem of elasticity for functionally graded coated half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, *54*(1), 105–112. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2011.10.001
61. Kulchytsky-Zhyhailo, R., Bajkowski, A. S. (2016). Axisymmetrical problem of thermoelasticity for halfspace with gradient coating. *International Journal of Mechanical Sciences*, *106*(4), 62–71. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.12.002

62. Laraqi, N. (1997). Velocity and relative contact size effects on the thermal constriction resistance in sliding solids. *Journal of Heat Transfer*, *119*(1), 173–177. https://doi.org/10.1115/1.2824083
63. Laraqi, N., Baïri, A., Ségui, L. (2004). Temperature and thermal resistance in frictional devices. *Applied Thermal Engineering*, *24*(17–18), 2567–2581. https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2004.04.003
64. Lee, S. W. Jang, Y. H. (2009a). Effect of functionally graded material on frictionally excited thermoelastic instability. *Wear*, *266*, 139–146. https://doi.org/10.1016/J.WEAR.2008.06.006
65. Lee, S. W., Jang, Y. H. (2009b). Frictionally excited thermoelastic instability in a thin layer of functionally graded material sliding between two half-planes. *Wear*, *267*(9–10), 1715–1722. https://doi.org/10.1016/j.wear.2009.06.037
66. Ling, F. F. (1959). A quasi-iterative method for computing interface temperature distributions. *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, *10*, 461–474.
67. Ling, F. F. (1973). *Surface mechanics*. John Wiley & Sons, Inc.
68. Ling, F. F., Simkins, T. E. (1963). Measurement of pointwise juncture condition of temperature at the interface of two bodies in sliding contact. *Journal of Basic Engineering*, *85*(3), 481–485.
69. Liu, J., Ke, L.-L., Wang, Y.-S. (2011). Two-dimensional thermoelastic contact problem of functionally graded materials involving frictional heating. *International Journal of Solids and Structures*, *48*(18), 2536–2548. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.05.003
70. Liu, J., Ke, L.-L., Wang, Y.-S., Yang, J., Alam, F. (2012). Thermoelastic frictional contact of functionally graded materials with arbitrarily varying properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, *63*(1), 86–98. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.06.016
71. Loizou, A., Qi, H.-S., Day, A. J. (2010, maj). A numerical and experimental study on the factors that influence heat partitioning in disc brakes [prezentacja konferencyjna]. 33rd FISITA World Automotive Congress 2010, Student Congress, Budapeszt, Węgry. FISITA (The International Federation of Automotive Engineering Societies) i GTE (Scientific Society for Mechanical Engineering). http://www.fisita.com/education/congress/sc10/fisita2010scp26.pdf
72. Loizou, A., Qi, H.-S., Day, A. J. (2013). A fundamental study on the heat partition ratio of vehicle disk brakes. *Journal of Heat and Mass Transfer*, *135*(12), 121302. https://doi.org/10.1115/1.4024840
73. Luikov, A. V. (1968). *Analytical heat diffusion theory*. Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-459756-3.X5001-9
74. Majcherczak, D., Dufrenoy, P., Berthier, Y. (2007). Tribological, thermal and mechanical coupling aspects of the dry sliding contact. *Tribology International*, *40*, 834–843.

75. Majcherczak, D., Dufrénoy, P., Naït-Abdelaziz, M. (2005). Third body influence on thermal friction contact problems: Application to braking. *Journal of Tribology*, *127*(1), 89–95. https://doi .org/10.1115/1.1757490
76. Mao, J.-J., Ke, L.-L., Yang, J., Kitipornchai, S., Wang, Y.-S. (2017). Thermoelastic instability of functionally graded coating with arbitrarily varying properties considering contact resistance and frictional heat. *Applied Mathematical Modelling*, *43*, 521–537. https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.11.013
77. Mao, J.-J., Ke, L.-L., Yang, J., Kitipornchai, S., Wang, Y.-S. (2018). The coupled thermoelastic instability of FGM coatings with arbitrarily varying properties: In-plane sliding. *Acta Mechanica*, *229*(4), 2979–2995. https://doi.org/10.1007/s00707-018-2150-2
78. Martínez-Pañeda, E. (2019). On the finite element implementation of functionally graded materials. *Materials*, *12*(2), 287. https://doi.org/10.3390/ma12020287
79. Mohammadi, M., Rajabi, M. Ghadiri, M. (2021). Functionally graded materials (FGMs): A review of classifications, fabrication methods and their applications. *Processing and Application of Ceramics*, *15*(4), 319–343. https://doi.org/10.2298/PAC2104319M
80. Mondal, K., Nuñez III, L., Downey, C. M., van Rooyen, I. J. (2021). Recent advances in the thermal barrier coatings for extreme environments. *Materials Science for Energy Technologies*, *4*(1), 208–210. https://doi.org/10.1016/j.mset.2021.06.006
81. Noda, N. (1999). Thermal stresses in functionally graded materials. *Journal of Thermal Stresses*, *22*(4–5), 477–512. https://doi.org/10.1080/014957399280841
82. Nosko, O. (2013). Partition of friction heat between sliding semispaces due to adhesion-deformational heat generation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *64*, 1189–1195. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.05.056
83. Nosko, O. (2018). Thermal boundary conditions to simulate friction layers and coatings at sliding contacts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *127*, część A, 1128–1137. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.06.027
84. Obata, Y., Noda, N. (1993). Unsteady thermal stresses in a functionally gradient material plate. Analysis of one-dimensional unsteady heat transfer problem. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. A*, *59*(560), 1090–1096. https://doi.org/ 10.1299/kikaia.59.1090
85. Obata, Y., Noda, N. (1994). Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *Journal of Thermal Stresses*, *17*(3), 471–487. https://doi.org/10.1080/01495739408946273
86. Özişik, M. N. (1993). *Heat conduction* (wyd. 2). John Wiley & Sons, Inc.
87. Pakseresht, A. H., Rahimipour, M. R., Alizadeh, M., Hadavi, S. M. M., Shahbazkhan, A. (2016). Concept of advanced thermal barrier functional coatings in high temperature engineering components. W: A. Zuzuarregui, M. C. Morant-Miñana (red.), *Research perspectives on functional micro- and*

nanoscale coatings (s. 396–425). IGI Global. https://doi.org/10.4018/978-1-5225-0066-7.ch015

88. Pankratz, L. B. (1982). *Thermodynamic properties of elements and oxides*. U.S. Department of Interior, Bureau of Mines.
89. Pasupuleti, K. T., Dsouza, S., Thejaraju, R., Venkataraman, S., Ramaswamy, P., Narayana Murty, S. V. S. (2018). Performance and steady state heat transfer analysis of functionally graded thermal barrier coatings systems. *Materials Today: Proceedings*, *5*(14), 27936–27945. https://doi.org/10.1016/J.MATPR.2018.10.033
90. Perkowski, D. M. (2014). On axisymmetric heat conduction problem for FGM layer on homogeneous substrate. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *57*, 157–162. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.07.021
91. Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E., Überhuber, C. W., Kahaner, D. K. (1983). *Quadpack: a subroutine package for automatic integration* (t. 1). Springer-Verlag.
92. Polajnar, M., Kalin, M., Thorbjornsson, I., Thorgrimsson, J. T., Valle, N., Botor-Probierz, A. (2017). Friction and wear performance of functionally graded ductile iron for brake pads. *Wear*, *382–383*, 85–94. https://doi.org/10.1016/j.wear.2017.04.015
93. Qiu, L., Qi, H.-S., Wood, A. S. (2015). A new paradigm for disc-pad interface models in friction brake system. *EuroBrake 2015 Conference Proceedings*. FISITAN.
94. Qiu, L., Qi, H.-S., Wood, A. (2018). Two-dimensional finite element analysis investigation of the heat partition ratio of a friction brake. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, *232*(12), 1489–1501. https://doi.org/10.1177/1350650118757245
95. Rosochowska, M., Balendra, R., Chodnikiewicz, K. (2003). Measurements of thermal contact conductance. *Journal of Materials Processing Technology*, 135(2–3), 204–210. https://doi.org/10.1016/S0924-0136(02)00897-X
96. Rosochowska, M., Chodnikiewicz, K., Balendra, R. (2004). A new method of measuring thermal contact conductance. *Journal of Materials Processing Technology*, *145*(2), 207–214. https://doi.org/10.1016/S0924-0136(03)00671-X
97. Sathish, M., Radhika, N., Saleh, B. (2021). A critical review on functionally graded coatings: Methods, properties, and challenges. *Composities Part B: Engineering*, *225*, 109278. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109278
98. Sazonov, V. S. (2006). Exact solution of the problem of nonstationary heat conduction for two semispaces in nonideal contact. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, *79*(5), 928–930. https://doi.org/10.1007/S10891-006-0186-Y
99. Sazonov, V. S. (2008). Nonideal contact problem of nonstationary heat conduction for two half-spaces. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, *81*(2), 397–408. https://doi.org/10.1007/s10891-008-0048-x

100. Shahzamanian, M. M., Sahari, B. B., Bayat, M., Mustapha, F., Ismarrubie, Z. N. (2010). Finite element analysis of thermoelastic contact problem in functionally graded axisymmetric brake disks. *Composite Structures*, *92*(7), 1591–1602. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.11.022
101. Shahzamanian, M. M., Sahari, B. B., Bayat, M., Ismarrubie, Z. N., Mustapha, F. (2010). Transient and thermal contact analysis for the elastic behavior of functionally graded brake disks due to mechanical and thermal loads. *Materials & Design*, *31*(10), 4655–4665. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2010.05.032
102. Shahzamanian, M. M., Shahrjerdi, A., Sahari, B. B., Wu, P. D. (2022). Steady-state thermal analysis of functionally graded rotating disks using finite element and analytical methods. *Materials*, *15*(16), 5548. https://doi.org/10.3390/ma15165548
103. Simon, N. J., Drexler, E. S., Reed, R. P. (1992). *Properties of copper and copper alloys at cryogenic temperatures*. U.S. Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology.
104. Sladek, J., Sladek, V., Zhang, C. (2003). Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method. *Computational Materials Science*, *28*(3–4), 494–504. https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2003.08.006
105. Sneddon, I. N. (1972). *The use of integral transforms*. McGraw-Hill.
106. Soundararajan, R., Karthik, S., Varthanan, P. A., Devanand, A. A., Balaji, M. V., Nandha, P. S., Sivaraman, S. (2018). Automotive brake pad by using, functionally graded hybrid composites and their behaviour. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*, *9*(9), 318–328.
107. Straffelini, G., Verlinski, S., Verma, P. C., Valota, G., Gialanella, S. (2016). Wear and contact temperature evolution in pin-on-disc tribotesting of low-metallic friction material sliding against pearlitic cast iron. *Tribology Letters*, *62*(3), 1–11. https://doi.org/10.1007/s11249-016-0684-9
108. Strojny-Nędza, A., Pietrzak, K., Gili, F., Chmielewski, M. (2020). FGM based on copper–alumina composites for brake disc applications. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, *20*(3), 83. https://doi.org/10.1007/s43452-020-00079-1
109. Suresh, S., Mortensen, A. (1998). *Fundamentals of functionally graded materials: Processing and thermomechanical behavior of graded metals and metal-ceramic composites.* IOM Communications Ltd.
110. Santare, M. H., Lambros, J. (2000). Use of graded finite elements to model the behavior of nonhomogeneous materials. *Journal of Applied Mechanics*, *67*(4), 819–822. https://doi.org/10.1115/1.1328089
111. Sutradhar, A., Paulino, G. H. (2004). A simple boundary element method for problems of potential in non-homogeneous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, *60*(13), 2203–2230. https://doi.org/10.1002/nme.1046
112. Sutradhar, A., Paulino, G. H. (2004). The simple boundary element method for transient heat conduction in functionally graded materials. *Computer*

Methods in Applied Mechanics and Engineering, *193*(42–44), 4511–4539. https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.02.018
113. Swaminathan, K., Sangeetha, D. M. (2017). Thermal analysis of FGM plates – a critical review of various modeling techniques and solution methods. *Composite Structures*, *160*, 43–60. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047
114. Tanigawa, Y., Akai, T., Kawamura, R., Oka, N. (1996). Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties. *Journal of Thermal Stresses*, *19*(1), 77–102. https://doi.org/10.1080/01495739608946161
115. Tariq, A., Asif, M. (2015). Experimental investigation of thermal contact conductance for nominally flat metallic contact. *Heat and Mass Transfer*, *52*(2), 291–307. https://doi.org/10.1007/s00231-015-1551-1
116. Taylor, D. (1984). Thermal expansion data. *Transactions and Journal of the British Ceramic Society*, *83*(2), 32–37.
117. Tian, J. H., Jiang, K. (2018). Heat conduction investigation of the functionally graded materials plates with variable gradient parameters under exponential heat source load. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *122*, 22–30. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.01.056
118. Topczewska, K. (2018). Analytical model for investigation of the effect of friction power on the thermal stresses in the friction elements of brakes. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, *56*(4), 1017–1027. https://doi.org/10.15632/jtam-pl.56.4.1017
119. Topczewska, K. (2018). Influence of the time of increase in contact pressure in the course of braking on the temperature of a pad-disc tribosystem. *Materials Science*, *54*(2), 250–259. https://doi.org/10.1007/s11003-018-0180-5
120. Topczewska, K., Gerlici, J., Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Kravchenko, K. (2022). Analytical model of the frictional heating in a railway brake disc at single braking with experimental verification. *Materials*, *15*(19), 6821. https://doi.org/10.3390/ma15196821
121. Ueda, S. (2001). Thermoelastic analysis of W-Cu functionally graded materials subjected to a thermal shock using a micromechanical model. *Journal of Thermal Stresses*, *24*(1), 19–46. https://doi.org/10.1080/014957301457383
122. Ungureanu, M., Medan, N., Ungureanu, N. S., Pop, N., Nadolny, K. (2022). Tribological aspects concerning the study of overhead crane brakes. *Materials*, *15*(19), 6549. https://doi.org/10.3390/ma15196549
123. Varecha, D., Bronček, J., Kohár, R., Nový, F., Vicen, M., Radek, N. (2021). Research of friction materials applicable to the multi-disc brake concept. *Journal of Materials Research and Technology*, *14*(2A), 647–661. https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2021.06.061
124. Vashchenko-Zakharchenko, M. E. (1862). *Symbolic calculus and its application to integration of linear differential equations*. University Press.

125. Vernersson, T. (2007). Temperatures at railway tread braking. Part 1: Modelling. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, *221*(2), 167–182. https://doi.org/10.1243/0954409JRRT57
126. Watson, G. N. (1995). *A treatise on the theory of Bessel functions* (wyd. 2). Cambridge University Press.
127. Wong, M. W. (2008). *Complex analysis.* York University. https://doi.org/10.1142/6807
128. Woźniak, C., Nagórko, W. (2007). Modelowanie matematyczne materiałów z funkcjonalną gradacją własności efektywnych – wyniki badań i perspektywy rozwojowe w Polsce, *Acta Scienttiarium Polonorum, Architectura*, *6*(4), 23–32.
129. Xiong, C., Chen, M., Yu, L. (2019). Analytical model and material equivalent methods for steady state heat partition coefficient between two contact discs in multi-disc clutch. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, *234*(2–3), 857–871. https://doi.org/10.1177/0954407019846389
130. Yaghoobi, M. P., Ghannad, M. (2020). An analytical solution for heat conduction of FGM cylinders with varying thickness subjected to non-uniform heat flux using a first-order temperature theory and perturbation technique. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *116*, 104684.
131. Yang, Y.-C., Lee, H.-L., Chen, W.-L., Leon-Salazar, J. L. (2011). Estimation of thermal contact resistance and temperature distributions in the pad/disc tribosystem. *International Communications of Heat and Mass Transfer*, *38*(3), 298–303. https://doi.org/ 10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.11.005
132. Yevtushenko, A. A., Grześ, P. (2011). Finite element analysis of heat partition in a pad/disc brake system. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, *59*(7), 521–542. https://doi.org/ 10.1080/10407782.2011.561098
133. Yevtushenko, A. A., Grześ, P. (2020). Initial selection of disk brake pads material based on the temperature mode. *Materials*, *13*(4), 822. https://doi.org/10.3390/ma13040822
134. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M. (2009). Frictional heating during braking in a three-element tribosystem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *52*(13–14), 2942–2948. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.02.021
135. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M. (2009). Influence of convective cooling on the temperature in a frictionally heated strip and foundation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *36*(2), 129–136. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.10.001
136. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M. (2009). Influence of the pad's material properties on the thermal stresses during braking. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, *56*(12), 931–945. https://doi.org/10.1080/10407780903508138
137. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M. (2009). Influence of the protective strip properties on distribution of the temperature at transient frictional heating.

International Journal of Heat and Mass Transfer, *52*(1–2), 376–384. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.06.013
138. Yevtushenko, A. A. Kuciej, M. (2010). Two heat conduction problems with frictional heating during braking. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, *48*(2), 367–380.
139. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M. (2012). One-dimensional thermal problem of friction during braking: The history of development and actual state. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *55*(15–16), 4148–4153. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.03.056
140. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M. (2020). Calculation of friction characteristics of disc brakes used in repetitive short-term braking mode. *Journal of Friction and Wear*, *41*(6), 509–516. https://doi.org/10.3103/S1068366620060069
141. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Och, E. (2017). Influence of thermal sensitivity of the materials on temperature and thermal stresses of the brake disc with thermal barrier coating. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *87*, 288–294.10.1016/j.icheatmasstransfer.2017.07.021
142. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Różniakowska, M. (2009). The contact heat transfer between the plane-parallel strip and the semi-infinite foundation. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, *36*(8), 787–793. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2009.05.001
143. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2017). Analytical model for investigation of the effect of friction power on temperature in the disk brake. *Advances in Mechanical Engineering*, *9*(12), 168781401774409. https://doi.org/10.1177/1687814017744095
144. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2019). Effect of the temporal profile of the friction power on temperature of a pad-disc brake system. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, *57*(2), 461–473. https://doi.org/10.15632/jtam-pl/105465
145. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2020). Frictional heating during braking of the C/C composite disc. *Materials*, *13*(12), 2691. https://doi.org/0.3390/ma13122691
146. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Topczewska, K. (2020). Some theoretical model for determining the temperature field of a multi–disk brake. *Advances in Mechanical Engineering*, *12*(1), 1–15. https://doi.org/10.1177/1687814020902327
147. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Topczewska, K., Zamojski, P. (2022). Temperature in the friction couple consisting of functionally graded and homogeneous materials. *Materials*, *15*(10), 3600. https://doi.org/10.3390/ma15103600
148. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Topczewska, K., Zamojski, P. (2023). Effect of convective cooling on the temperature in a friction system with functionally graded strip. *Materials*, *16*(15), 5228. https://doi.org/10.3390/ma16155228

149. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. O. (2011). Three-element model of frictional heating during braking with contact thermal resistance and time-dependent pressure. *International Journal of Thermal Sciences*, *50*(6), 1116–1124. https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.11.009
150. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. O. (2014). The asymptotic solutions of heat problem of friction for a three-element tribosystem with generalized boundary conditions on the surface of sliding. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *70*, 128–136. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.10.055
151. Yevtushenko, A. A., Kuciej, M., Yevtushenko, O. O. (2015). Modelling of the frictional heating in brake system with thermal resistance on a contact surface and convective cooling on a free surface of a pad. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, *81*, 915–923. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.11.014
152. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Kuciej, M. (2021). Analytical determination of the brake temperature mode during repetitive short-term braking. *Materials*, *14*(8), 1912. https://doi.org/10.3390/ma14081912
153. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2021). The effect of functionally graded materials on temperature during frictional heating: under uniform sliding. *Materials*, *14*(15), 4285. https://doi.org/10.3390/ma14154285
154. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2021). The effect of functionally graded materials on temperature during frictional heating at single braking. *Materials*, *14*(21). https://doi.org/10.3390/ma14216241
155. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2022). Influence of thermal sensitivity of functionally graded materials on temperature during braking. *Materials*, *15*(3), 963. https://doi.org/10.3390/ma15030963
156. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2022). The heat partition ratio during braking in a functionally graded friction couple. *Materials*, *15*(13), 4623. https://doi.org/10.3390/ma15134623
157. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2023). Temperature during repetitive short-term operation of a brake with functionally graded friction element. *Materials*, *16*(2), 881. https://doi.org/10.3390/ma16020881
158. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2023). Use of functionally graded material to decrease maximum temperature of a coating–substrate system. *Materials*, *16*(6), 2265. https://doi.org/10.3390/ma16062265
159. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2023). Influence of functionally graded protective coating on the temperature in a braking system. *Materials*, *16*(12), 4308. https://doi.org/10.3390/ma16124308
160. Yevtushenko, A. A., Topczewska, K., Zamojski, P. (2023). The mutual influence of thermal contact conductivity and convective cooling on the temperature field in a tribosystem with a functionally graded strip. *Materials*, *16*(22), 7126. https://doi.org/10.3390/ma16227126

161. Zhao, J., Li, Y., Ai, X. (2008). Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings. *Thin Solid Films*, *516*(21), 7581–7587. https://doi.org/10.1016/j.tsf.2008.03.028
162. Zhou, W., Ai, S., Chen, M., Zhang, R., He, R., Pei, Y., Fang, D. (2015). Preparation and thermodynamic analysis of the porous ZrO_2/(ZrO_2 + Ni) functionally graded bolted joint. *Composites Part B: Engineering*, *82*, 13–22. https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.07.018

SPIS TABEL

SPIS RYSUNKÓW

STRESZCZENIE

W monografii zaproponowano metodykę otrzymywania matematycznych modeli procesu nagrzewania ciernego układów wykonanych z dwuskładnikowych funkcyjnie gradientowych materiałów (FGM) o eksponencjalnie zwiększającej się wraz z odległością od powierzchni kontaktu przewodnością cieplną. Kluczowy element modeli stanowią jednowymiarowe początkowo-brzegowe zagadnienia przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem generacji ciepła na skutek tarcia, czyli tzw. zagadnienia cieplne tarcia. Rozpatrzono następujące schematy geometryczne kontaktu ślizgowego: dwie różnorodne półprzestrzenie FGM, dwie jednorodne półprzestrzenie, z których jedna zawiera FGM warstwę ochronną, oraz FGM warstwa-jednorodna półprzestrzeń. Rozwiązania odpowiednich początkowo-brzegowych zagadnień przewodnictwa cieplnego przy stałej gęstości mocy tarcia otrzymano z wykorzystaniem transformacji całkowej Laplace'a i właściwości funkcji Bessela. Znaleziono również rozwiązania asymptotyczne przy małych i dużych wartościach liczby Fouriera. Do zbadania wpływu profilu gęstości mocy tarcia zmiennego w czasie na temperaturę zastosowano twierdzenie Duhamela. Otrzymane rozwiązania zweryfikowano poprzez sprawdzenie spełnienia warunków brzegowych i warunku początkowego oraz za pomocą sprowadzenia ich do znanych w literaturze naukowej rozwiązań dla materiałów jednorodnych. Na podstawie znalezionych rozwiązań dla ciał ze stałymi właściwościami cieplno-fizycznymi podczas nagrzewania opracowano algorytm obliczeniowy pozwalający uwzględnić wrażliwość termiczną składowych FGM.

Analizę numeryczną przeprowadzono pod kątem porównania temperatury wybranego układu ciernego zawierającego elementy wykonane z FGM z podobnymi układami składającymi się z elementów jednorodnych. Zbadano także wpływ na pole temperatury i intensywności absorbowanych strumieni ciepła takich parametrów, jak gradient FGM, czas narastania ciśnienia kontaktowego, zależność od temperatury właściwości materiałów FGM, intensywność chłodzenia konwekcyjnego czy termiczna przewodność kontaktowa.

Pokazano, że otrzymane rozwiązania analityczne mogą służyć do szybkiego oszacowania maksymalnej temperatury tarczowych układów hamulcowych zawierających elementy cierne wykonane z FGM nie tylko podczas pojedynczego hamowania, ale również pracujących w trybie powtórno-krótkoterminowym.

ABSTRACT

Methodology for obtaining mathematical models of the frictional heating process for systems made of functionally gradient materials (FGMs) with thermal conductivity that increases exponentially with distance from the contact surface is proposed. A key element of the models is the one-dimensional boundary-value heat conduction problem including frictional heat generation, in other words, thermal problem of friction. The following geometrical schemes of sliding contact were considered: two heterogeneous FGM half-spaces, two homogeneous half-spaces, one of which contains an FGM protective layer, an FGM layer-homogeneous half-space. Solutions of the corresponding boundary-value heat conduction problems at constant specific friction power were obtained by using the integral Laplace transform and the properties of the Bessel functions. Asymptotic (at small and large values of the Fourier number) solutions were also obtained. Duhamel's theorem was used to investigate the effect of the specific friction power profile varying with time on temperature. The solutions were verified by checking that the boundary and initial conditions were met and by reducing them to solutions for homogeneous materials known in the scientific literature. On the basis of the solutions found for bodies with constant thermophysical properties during heating, a calculation algorithm was developed to consider the thermal sensitivity of the FGM components.

The numerical analysis was carried out to compare the temperature of a selected friction system containing components made of FGM with similar systems consisting of components made of homogeneous materials. The influence of parameters such as the FGM gradient, the time of contact pressure increase, the temperature dependence of FGM material properties, the intensity of convective cooling and the thermal contact conductivity on the temperature field and the intensity of absorbed heat fluxes was investigated.

It is shown that obtained analytical solutions can be used to quickly estimate the maximum temperature of disc brake systems containing friction components made of FGM, not only during single braking process, but also operating in a repetitive short-term mode.

Politechnika
Białostocka