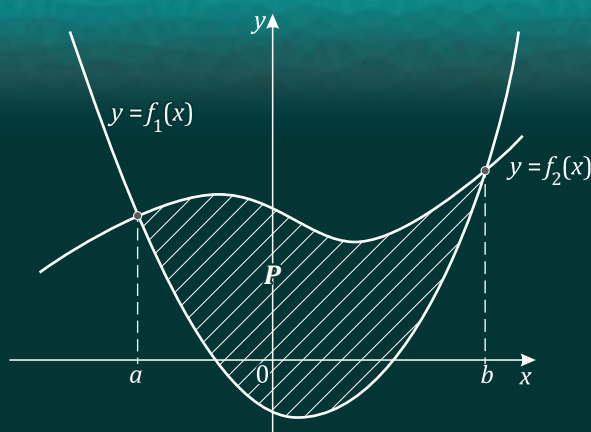


RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Podręcznik dla studentów
studiów licencjackich i inżynierskich



Marta Jarocka
Anna Małgorzata Olszewska
Beata Madras-Kobus

RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

Podręcznik dla studentów
studiów licencjackich i inżynierskich

Marta Jaročka
Anna Małgorzata Olszewska
Beata Madras-Kobus



OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2024

Recenzenci:
dr hab. Beata Rzepka, prof. PRz
dr hab. Ewa Schmeidel, prof. UwB

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Redakcja i korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Skład, grafika i okładka:
Marcin Dominów

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2024

ISBN 978-83-68077-60-5 (e-Book)
DOI: 10.24427/978-83-68077-60-5



Minister
Nauki



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Opracowanie publikacji jest finansowane
ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego,
dotacja celowa Ministra Nauki
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”



POLITECHNICZNA SIEĆ
VIA CARPATIA



POLITECHNIKA
LUBELSKA



POLITECHNIKA
RZESZOWSKA
im. IGNACEGO KURYLSKIEGO



Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.
Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
www.pb.edu.pl

SPIS TREŚCI

Wstęp.....	4
1. Definicja całki nieoznaczonej i jej wyznaczanie.....	5
1.1. Definicja całki nieoznaczonej.....	6
1.2. Podstawowe wzory i reguły rachunku całkowego.....	9
2. Podstawowe metody wyznaczania całek nieoznaczonych.....	14
2.1. Całkowanie przez podstawienie.....	15
2.2. Całkowanie przez części.....	21
3. Całkowanie funkcji wymiernych.....	28
4. Definicja całki oznaczonej i jej zastosowanie	59
5. Całki niewłaściwe	94
6. Powtórzeniowe pytania testowe	106
7. Zadania do samodzielnego rozwiązania.....	117
Literatura.....	126
Skorowidz	127
Spis tabel.....	129
Spis rysunków.....	130

WSTĘP

Niniejszy podręcznik powstał z myślą o studentach Wydziału Inżynierii Zarządzania Politechniki Białostockiej kształcących się na kierunkach: logistyka, zarządzanie, zarządzanie finansami i rachunkowość, zarządzanie i inżynieria produkcji oraz zarządzanie i inżynieria usług. Może on również służyć innym młodym adeptom matematyki – studentom studiów licencjackich i inżynierskich, którzy poznają tajniki rachunku całkowego funkcji jednej zmiennej. Książka zawiera bowiem podstawowe treści, które są zgodne z obowiązującym programem przedmiotu matematyka na wielu kierunkach studiów.

Podręcznik składa się z siedmiu rozdziałów. W pierwszym rozdziale przedstawiono definicję całki nieoznaczonej oraz podstawowe wzory i reguły rachunku całkowego. W rozdziale drugim zaprezentowano podstawowe metody całkowania – przez podstawienie i przez części. Rozdział trzeci poświęcono całkowaniu funkcji wymiernych. W rozdziale czwartym omówiono definicję całki oznaczonej, przedstawiono metody jej liczenia oraz zaprezentowano wybrane obszary zastosowania całki oznaczonej. W rozdziale piątym opisano całki niewłaściwe. W dwóch ostatnich rozdziałach – szóstym i siódmym – zawarto materiał powtórzeniowy w formie testu jednokrotnego wyboru oraz zadań do samodzielnego rozwiązania. Każdy z rozdziałów podręcznika (oprócz ostatnich – powtórzeniowych) zawiera wiele przykładów ze szczegółowym opisem ich rozwiązania oraz zadania do samodzielnej pracy wraz z odpowiedziami.

Podręcznik został napisany przez nauczycieli akademickich, którzy od wielu lat kształcą studentów podlaskich wyższych uczelni, w tym Wydziału Inżynierii Zarządzania Politechniki Białostockiej, w zakresie matematyki i jej zastosowań w naukach ekonomicznych i technicznych. Publikacja jest częścią zaplanowanej serii obejmującej całość materiału z matematyki wykładanego na pierwszym roku wielu studiów technicznych i ekonomicznych. Dotychczas ukazały się trzy podręczniki z zakresu: rachunku macierzowego, granic funkcji jednej zmiennej oraz rachunku różniczkowego.

Życzymy miłej pracy z podręcznikiem.

Autorki

1. DEFINICJA CAŁKI NIEOZNACZONEJ I JEJ WYZNACZANIE

1.1. Definicja całki nieoznaczonej

Symbol całki pochodzi od łacińskiego słowa *Summa* i oznacza sumę.

Całkę oznaczamy następującym symbolem:

$$\int$$

Chcąc przytoczyć definicję całki, należy zdefiniować funkcję pierwotną.

Definicja

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na przedziale (a, b) nazywamy każdą funkcję różniczkowalną $F(x)$ określoną na przedziale (a, b) , taką, że:

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in (a, b).$$

Przykłady funkcji pierwotnych:

- Funkcja $F(x) = x$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 1$, bo $(x)' = 1$.
- Funkcja $F(x) = 2x^2$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = 4x$,
bo $(2x^2)' = 4x$.
- Funkcja $F(x) = e^x + 10$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = e^x$,
bo $(e^x + 10)' = e^x$.
- Funkcja $F(x) = e^x + 3$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = e^x$,
bo $(e^x + 3)' = e^x$.

Dwie różne funkcje pierwotne funkcji $f(x)$ różnią się o stałą.

Znając pojęcie funkcji pierwotnej, można zdefiniować całkę.

Definicja

Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ na przedziale (a, b) nazywamy rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji $f(x)$ na przedziale (a, b) .

Całkę nieoznaczoną funkcji $f(x)$ oznaczamy symbolem $\int f(x) dx$. Zatem mamy:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

gdzie:

$F(x)$ – dowolna funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ na przedziale (a, b) ,

$C \in \mathbb{R}$ – dowolna stała rzeczywista,

Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, x – zmienną całkowania, a zapis dx oznacza, że całkujemy funkcję $f(x)$ po zmiennej x .

1.2. Podstawowe wzory i reguły rachunku całkowego

Obliczanie całek z definicji może sprawiać pewne trudności, dlatego zostały wyprowadzone wzory całek nieoznaczonych dla funkcji elementarnych (tabela 1.1). Obliczając całki w praktyce, korzystamy z podanych wzorów.

Tabela 1.1. Całki nieoznaczone wybranych funkcji elementarnych

Lp.	Wzór
1.	$\int dx = x + C$ oraz $\int a dx = ax + C, a \in R$
2.	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$
3.	$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$ (szczególny przypadek wzoru 2, dla $n = 1$)
4.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$ (szczególny przypadek wzoru 7, dla $a = 1$)
7.	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \in R$
8.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$ (szczególny przypadek wzoru 9, dla $a = 1$)
9.	$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0$
10.	$\int \cos x dx = \sin x + C$ (szczególny przypadek wzoru 11, dla $a = 1$)
11.	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0$
12.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C, \cos x \neq 0$
13.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C, \sin x \neq 0$
14.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \cos x \neq 0$
15.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \sin x \neq 0$
16.	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$ (szczególny przypadek wzoru 17, dla $a = 1$)

Lp.	Wzór
17.	$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$
18.	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a \neq 0$
19.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ (szczególny przypadek wzoru 20, dla $a = 1$)
20.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{ a } + C, a \neq 0$
21.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+q}} = \ln \left x + \sqrt{x^2+q} \right + C$

Tabela 1.2. Podstawowe reguły rachunku całkowego

Lp.	Reguły
1.	$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2.	$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
3.	$\int af(x) dx = a \int f(x) dx$

Przykład 1.1.

Obliczyć całki nieoznaczone:

- $\int 3 dx$
- $\int \left(-\frac{1}{2}\right) dx$
- $\int \frac{dx}{5}$
- $\int x^5 dx$
- $\int x^{-5} dx$
- $\int \frac{1}{x^{10}} dx$
- $\int 5x dx$
- $\int 2x^9 dx$
- $\int (-3x^5) dx$
- $\int (-3x^{-5}) dx$
- $\int \frac{-2}{x^{99}} dx$
- $\int 7^x dx$

Rozwiązania:

Korzystamy ze wzoru $\int a \, dx = ax + C$:

a) $\int 3 \, dx = 3x + C$

b) $\int (-\frac{1}{2} \, dx) = -\frac{1}{2}x + C$

c) $\int \frac{dx}{5} = \frac{1}{5}x + C$

Korzystamy ze wzoru $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$:

a) $\int x^5 \, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

b) $\int x^{-5} \, dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$

c) $\int \frac{1}{x^{10}} \, dx = \int x^{-10} \, dx = \frac{x^{-9}}{-9} + C$

Korzystamy z własności całek $\int af(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$:

a) $\int 5x \, dx = 5 \int x \, dx = 5 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{5}{2}x^2 + C$

b) $\int 2x^9 \, dx = 2 \int x^9 \, dx = 2 \cdot \frac{1}{10}x^{10} + C = \frac{1}{5}x^{10} + C$

c) $\int (-3x^5) \, dx = -3 \int x^5 \, dx = -3 \cdot \frac{1}{6}x^6 + C = -\frac{1}{2}x^6 + C$

d) $\int (-3x^{-5}) \, dx = -3 \int x^{-5} \, dx = -3 \cdot \frac{1}{-4}x^{-4} + C = \frac{3}{4}x^{-4} + C$

e) $\int \frac{-2}{x^{99}} \, dx = -2 \int x^{-99} \, dx = -2 \cdot \frac{1}{-98}x^{-98} + C = \frac{1}{49}x^{-98} + C$

Korzystamy ze wzoru $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$:

a) $\int 7^x \, dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

Przykład 1.2.

Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z reguł rachunku całkowego:

a) $\int (3x + e^x - \sin x) \, dx$

b) $\int \left(-\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + 3x^{-1} + \frac{2}{x} \right) \, dx$

c) $\int \frac{x^4 + 2x^2 - 6x^{-3}}{x^2} \, dx$

d) $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{x^6} \, dx$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

f) $\int (2x + 2^{x+2}) dx$

g) $\int 2^x \cdot e^x dx$

Rozwiązania:

Korzystamy z reguł rachunku całkowego (1, 2 i 3):

a) $\int (3x + e^x - \sin x) dx = \int 3x dx + \int e^x dx - \int \sin x dx =$
 $= 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + e^x - (-\cos x) + C = \frac{3}{2}x^2 + e^x + \cos x + C$

b) $\int \left(-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x + 3x^{-1} + \frac{2}{x}\right) dx = \int \left(-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) dx + \int 3x^{-1} dx + \int \frac{2}{x} dx =$
 $= -\frac{1}{2} \int \operatorname{tg} x dx + 3 \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x} dx =$
 $= -\frac{1}{2} \cdot (-\ln|\cos x|) + 3 \ln|x| + 2 \ln|x| + C =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \ln|\cos x| + 5 \ln|x| + C$

c) $\int \frac{x^4 + 2x^2 - 6x^{-3}}{x^2} dx = \int \left(\frac{x^4}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2} - \frac{6x^{-3}}{x^2}\right) dx =$
 $= \int \frac{x^4}{x^2} dx + \int \frac{2x^2}{x^2} dx - \int \frac{6x^{-3}}{x^2} dx = \int x^2 dx + \int 2 dx - \int 6x^{-5} dx =$
 $= \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{6x^{-4}}{-4} + C = \frac{x^3}{3} + 2x + \frac{3}{2x^4} + C$

d) $\int x^4 \cdot \sqrt[3]{x^6} dx = \int x^4 \cdot x^{\frac{6}{3}} dx = \int x^4 \cdot x^2 dx = \int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C$

e) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \operatorname{tg} x - x + C$

f) $\int (2x + 2^{x+2}) dx = \int 2x dx + \int 2^x \cdot 2^2 dx = \int 2x dx + 4 \int 2^x dx =$
 $= 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + C = x^2 + \frac{4 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$

g) $\int 2^x \cdot e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + C$

Zadania

Obliczyć całki:

a) $\int (-70) dx$

b) $\int \frac{1}{10} dx$

- c) $\int \left(-\frac{dx}{5}\right)$
- d) $\int x^{10} dx$
- e) $\int x^{-2} dx$
- f) $\int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$
- g) $\int (-3x) dx$
- h) $\int 3x^3 dx$
- i) $\int (-3x^{-3}) dx$
- j) $\int (-3x^2) dx$
- k) $\int \frac{-10}{x^{10}} dx$
- l) $\int 2^x dx$
- m) $\int (-x + e^x + \cos x) dx$
- n) $\int \left(-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x + x^{-2} + \frac{3}{x}\right) dx$
- o) $\int \frac{x^6 - 8x^3 - 6x^{-2}}{x^2} dx$
- p) $\int \sqrt[4]{x^{10}} \cdot \sqrt[3]{x^2} dx$
- q) $\int \frac{x^4 - 1}{x + 1} dx$
- r) $\int \frac{\ln 2}{\ln 2x - \ln x} dx$
- s) $\int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$
- t) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
- u) $\int (-2 \sin x - 5^{x-2}) dx$
- v) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot e^x dx$

Odpowiedzi

- a) $\int (-70) dx = -70x + C$
- b) $\int \frac{1}{10} dx = \frac{1}{10}x + C$

- c) $\int \left(-\frac{dx}{5}\right) = -\frac{1}{5}x + C$
- d) $\int x^{10} dx = \frac{x^{11}}{11} + C$
- e) $\int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + C$
- f) $\int \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{x} + C$
- g) $\int (-3x) dx = -\frac{3x^2}{2} + C$
- h) $\int 3x^3 dx = \frac{3x^4}{4} + C$
- i) $\int (-3x^{-3}) dx = \frac{3}{2x^2} + C$
- j) $\int (-3x^2) dx = -x^3 + C$
- k) $\int \frac{-10}{x^{10}} dx = \frac{10}{9x^9} + C$
- l) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$
- m) $\int (-x + e^x + \cos x) dx = -\frac{x^2}{2} + e^x + \sin x + C$
- n) $\int \left(-\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x + x^{-2} + \frac{3}{x}\right) dx = -\frac{1}{3}\ln|\sin x| - \frac{1}{x} + 3\ln|x| + C$
- o) $\int \frac{x^6 - 8x^3 - 6x^{-2}}{x^2} dx = \frac{x^5}{5} - 4x^2 + \frac{2}{x^3} + C$
- p) $\int \sqrt[4]{x^{10}} \cdot \sqrt[3]{x^2} dx = \frac{6}{25} \sqrt[12]{x^{50}} + C$
- q) $\int \frac{x^4 - 1}{x + 1} dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$
- r) $\int \frac{\ln 2}{\ln 2x - \ln x} dx = x + C$
- s) $\int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$
- t) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x - x + C$
- u) $\int (-2 \sin x - 5^{x-2}) dx = 2 \cos x - \frac{5^x}{25 \ln 5} + C$
- v) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot e^x dx = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)} + C$

2. PODSTAWOWE METODY WYZNACZANIA CAŁEK NIEOZNACZONYCH

2.1. Całkowanie przez podstawienie

Metoda całkowania przez podstawienie jest – obok metody całkowania przez części – podstawową techniką całkowania. Stosujemy ją wówczas, gdy nie ma możliwości wyznaczenia całki z wykorzystaniem podstawowych wzorów na całki lub ich elementarnych własności. Metoda całkowania przez podstawienie polega na przekształceniu całki wyjściowej w całkę łatwiejszą do policzenia – w tym celu wykorzystuje się procedurę podstawienia. Ma ona zastosowanie w przypadku całkowania funkcji złożonych. Podstawienie polega na wstawieniu nowej zmiennej za funkcję wewnętrzną.

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeśli dla $x \in \langle a, b \rangle$ funkcja $g(x) = t$ ma ciągłą pochodną oraz $g(x) \in \langle A, B \rangle$, a funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $\langle A, B \rangle$, to:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt.$$

W celu zrozumienia metody całkowania przez podstawienie przeanalizujemy poniższy przykład.

Przykład 2.1.

Oblicz całkę $\int x e^{x^2} dx$, korzystając z metody całkowania przez podstawienie.

$$\int x e^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ \frac{dt}{2} = x dx \end{array} \right| =$$

W pierwszym wierszu dokonujemy podstawienia $t = x^2$.

W drugim wierszu różniczkujemy powyższe równanie, czyli liczymy pochodne: dla lewej strony równania po „ t ”, dla prawej zaś strony równania po „ x ”. Zatem różniczka z t wynosi $1 dt$, a różniczka z x^2 wynosi $2x dx$.

W trzecim wierszu wyznaczamy $x dx$, dzieląc w tym przypadku obie strony równania przez 2.

Następnie dokonujemy podstawienia: za x^2 podstawiamy t oraz za $x dx$ podstawiamy $\frac{dt}{2}$ i otrzymujemy:

$$= \int e^t \cdot \frac{dt}{2} =$$

Zmienna x zostaje zredukowana i całka przyjmuje prostszą postać:

$$= \frac{1}{2} \int e^t dt =$$

Obliczamy całkę:

$$= \frac{1}{2} e^t + C =$$

Wracamy do podstawienia i otrzymujemy ostateczny wynik:

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Zazwyczaj przy obliczaniu całki metodą przez podstawienie zmienna x redukuje się od razu i pod całką zostaje tylko zmienna t . Poniżej przedstawiono przykłady wyznaczania takich całek.

Przykład 2.2.

Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z metody całkowania przez podstawienie:

a) $\int \sin x \cos x dx$

b) $\int \frac{x}{(x^2-2)^5} dx$

c) $\int x\sqrt{5+x^2} dx$

d) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$

e) $\int \frac{1}{\sin^2 5x} dt$

f) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx$

Rozwiązania:

a) $\int \sin x \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{x}{(x^2-2)^5} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 - 2 \\ dt = 2x dx \\ \frac{dt}{2} = x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^5} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-5} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-4}}{-4} + C = \\ &= -\frac{1}{8t^4} + C = -\frac{1}{8(x^2-2)^4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int x\sqrt{5+x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} t = 5 + x^2 \\ dt = 2x dx \\ \frac{dt}{2} = x dx \end{array} \right| = \\ &= \int \sqrt{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{t^3} + C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(5+x^2)^3} + C \end{aligned}$$

$$\text{d) } \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ -dt = \frac{1}{x^2} dx \end{array} \right| = \int e^t \cdot (-dt) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\frac{1}{x}} + C$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int \frac{1}{\sin^2 5x} dt &= \left| \begin{array}{l} t = 5x \\ dt = 5 dx \\ \frac{dt}{5} = dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \frac{1}{\sin^2 t} dt = \\ &= \frac{1}{5} \cdot (-\operatorname{ctg} t) + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx &= \int \frac{2^x}{\sqrt{1-(2^x)^2}} dx = \left| \begin{array}{l} t = 2^x \\ dt = 2^x \ln 2 dx \\ \frac{dt}{\ln 2} = 2^x dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{\ln 2} = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arc} \sin t + C = \frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arc} \sin 2^x + C \end{aligned}$$

Nie zawsze jednak w metodzie całkowania przez podstawienie zmienna x redukuje się od razu. Wówczas należy uzależnić ją od zmiennej t . Poniżej przedstawiono przykład takiego postępowania.

Przykład 2.3.

Obliczyć całkę $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^4} dx$, korzystając z metody całkowania przez podstawienie:

$$\int \frac{x^2-x}{(x+1)^4} dx = \left| \begin{array}{l} t = x + 1 \\ dt = dx \end{array} \right| =$$

Zauważmy, że w funkcji nie ma wyrażenia $x + 1$, więc nie możemy dokonać podstawienia i od razu policzyć całki po dt . Zatem z podstawienia (pierwszy wiersz) wyznaczamy zmienną x , tym samym uzależniając ją od zmiennej t .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x}{(x+1)^4} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x + 1 \\ t - 1 = x \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{(t-1)^2-(t-1)}{t^4} dt = \int \frac{t^2-2t+1-t+1}{t^4} dt = \\ &= \int \frac{t^2-3t+2}{t^4} dt = \int \frac{t^2}{t^4} dt - 3 \int \frac{t}{t^4} dt + 2 \int \frac{1}{t^4} dt = \\ &= \int t^{-2} dt - 3 \int t^{-3} dt + 2 \int t^{-4} dt = \frac{t^{-1}}{-1} - 3 \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + 2 \cdot \frac{t^{-3}}{-3} + C = \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{3}{2t^2} - \frac{2}{3t^3} + C = -\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)^2} - \frac{2}{3(x+1)^3} + C. \end{aligned}$$

Przy obliczaniu całek nieoznaczonych możemy korzystać z poniższego stwierdzenia.

Stwierdzenie

Jeżeli funkcja f jest różna od zera i różniczkowalna na pewnym przedziale P , to:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C.$$

A zatem całka funkcji wyrażonej w postaci ułamka zwykłego, która w liczniku ma pochodną mianownika, równa jest logarytmowi naturalnemu wartości bezwzględnej mianownika. Poniżej zaprezentowano dowód tej reguły, korzystając z metody całkowania przez podstawienie:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Przykład 2.4.

Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z powyższego stwierdzenia:

a) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

b) $\int \frac{6x^2}{x^3+2} \, dx$

Rozwiązania:

a) $\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx = -\ln|\cos x| + C$

b) $\int \frac{6x^2}{x^3+2} \, dx = 2 \int \frac{\frac{1}{2}6x^2}{x^3+2} \, dx = 2 \int \frac{3x^2}{x^3+2} \, dx = 2 \ln|x^3+2| + C$

Zadania

Obliczyć całki metodą całkowania przez podstawienie:

a) $\int (x^2 + 2)^{99} \cdot 2x \, dx$

b) $\int \frac{x}{(x^2-1)^6} \, dx$

c) $\int \frac{-2}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^3} \, dx$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{1+5x^2}} \, dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(4x-3)^2}} \, dx$

f) $\int \frac{1}{1+9x^2} \, dx$

g) $\int e^{-x} \, dx$

h) $\int \frac{1}{e^{3x}} \, dx$

i) $\int e^{2x+3} \, dx$

j) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

k) $\int \sin 4x \, dx$

l) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} \, dx$

m) $\int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx$

n) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} \, dx$

o) $\int \frac{x^3}{\sin^2(x^4+2)} dx$

p) $\int \operatorname{ctg} x \, dx$

q) $\int \frac{x}{3x^2+1} dx$

Odpowiedzi

a) $\frac{(x^2+2)^{100}}{100} + C$

b) $-\frac{1}{10(x^2-1)^5} + C$

c) $\frac{-2}{(1-\sqrt{x})^2} + C$

d) $\frac{1}{5\sqrt{1+5x^2}} + C$

e) $\frac{1}{4} \operatorname{arc} \sin(4x-3) + C$

f) $\frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(3x) + C$

g) $-e^{-x} + C$

h) $-\frac{1}{3e^{3x}} + C$

i) $\frac{1}{2} e^{2x+3} + C$

j) $\frac{1}{2} \ln^2 x + C$

k) $-\frac{1}{4} \cos 4x + C$

l) $e^{\sin x} + C$

m) $-\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

n) $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$

o) $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}(x^4+2) + C$

p) $\ln|\sin x| + C$

q) $\frac{1}{6} \ln(3x^2+1) + C$

2.2. Całkowanie przez części

Metoda całkowania przez części jest kolejną, często stosowaną regułą całkowania. Wykorzystuje się ją zazwyczaj do całkowania iloczynu dwóch funkcji.

Twierdzenie (o całkowaniu przez części)

Jeśli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ mają ciągłe pochodne, to:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx.$$

W praktyce często stosujemy zapis:

$$\begin{aligned} \int f(x) \cdot g'(x) dx &= \left| \begin{array}{cc} f(x) & g'(x) \\ f'(x) & \int g'(x) dx = g(x) \end{array} \right| = \\ &= f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx. \end{aligned}$$

A zatem dla jednej z funkcji liczymy jej pochodną, a dla drugiej – całkę. Następnie mnożymy przez siebie funkcje (po skosie), czyli $f(x)$ i $g(x)$, i na koniec odejmujemy od tego całkę z iloczynu funkcji znajdujących się w drugim wierszu, czyli $f'(x)$ i $g(x)$.

Dla uproszczenia zapisu powyższego wzoru funkcje $f(x)$ i $g(x)$ można zapisać odpowiednio literami u i v . Wtedy wzór na całkowanie przez części przedstawiamy za pomocą uproszczonego schematu:

$$\int u \cdot v' dx = \left| \begin{array}{cc} u & v' \\ u' & \int v' dx = v \end{array} \right| = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

lub:

$$\int u \cdot v' dx = \left| \begin{array}{cc} u & u' \\ v' & \int v' dx = v \end{array} \right| = u \cdot v - \int u' \cdot v dx.$$

Kiedy stosujemy metodę całkowania przez części?

Metodę całkowania przez części stosujemy między innymi w następujących przypadkach:

1. Pod całką występuje iloczyn wielomianu $W(x)$ i funkcji wykładniczej e^x , czyli:

$$\int W(x) \cdot e^x dx,$$

na przykład: a) $\int x^2 \cdot e^x dx$
 b) $\int (x^2 + x - 2) \cdot e^{2x} dx$.

2. Pod całką występuje iloczyn wielomianu $W(x)$ i funkcji sinus lub cosinus, czyli:

$$\int W(x) \cdot \sin x dx \text{ lub } \int W(x) \cdot \cos x dx,$$

na przykład: c) $\int x \cdot \sin x dx$
 d) $\int (2x + 4) \cdot \cos 2x dx$.

3. Pod całką występuje iloczyn wielomianu $W(x)$ i funkcji logarytmicznej $\log_a x$, $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, czyli:

$$\int W(x) \cdot \log_a x dx,$$

na przykład: e) $\int \ln x dx$
 f) $\int (x + 1) \cdot \log_2 x dx$.

4. Pod całką występuje iloczyn funkcji postaci x^{-a} , $a > 0$ i funkcji logarytmicznej $\log_a x$, $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, czyli:

$$\int x^{-a} \cdot \log_a x dx,$$

na przykład: g) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
 h) $\int x^{-3} \cdot \log_5 x dx$.

5. Pod całką występują podstawowe funkcje cyklometryczne,
 na przykład: i) $\int \arctg x dx$.

Poniżej przedstawiono przykłady całek obliczonych metodą całkowania przez części.

Przykład 2.5.

Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z metody całkowania przez części:

- a) $\int x^2 \cdot e^x dx$
- b) $\int (x^2 + x - 2) \cdot e^{2x} dx$
- c) $\int x \cdot \sin x dx$
- d) $\int (2x + 4) \cdot \cos 2x dx$
- e) $\int \ln x dx$
- f) $\int (x + 1) \cdot \log_2 x dx$
- g) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
- h) $\int x^{-3} \cdot \log_5 x dx$
- i) $\int \arctg x dx$

Rozwiązania:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int x^2 \cdot e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & v' = e^x \\ u' = 2x & v = e^x \end{array} \right| = x^2 \cdot e^x - \int 2x \cdot e^x dx = \\
 &= x^2 \cdot e^x - \left| \begin{array}{ll} u = 2x & v' = e^x \\ u' = 2 & v = e^x \end{array} \right| = x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - \int 2 \cdot e^x dx) = \\
 &= x^2 \cdot e^x - (2x \cdot e^x - 2 \int e^x dx) = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x + C = \\
 &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \int (x^2 + x - 2) \cdot e^{2x} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x^2 + x - 2 & v' = e^{2x} \\ u' = 2x + 1 & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| = \\
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int (2x + 1) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx = \\
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \left| \begin{array}{ll} u = 2x + 1 & v' = \frac{1}{2}e^{2x} \\ u' = 2 & v = \frac{1}{4}e^{2x} \end{array} \right| = \\
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \left[(2x + 1) \cdot \frac{1}{4}e^{2x} - \int 2 \cdot \frac{1}{4}e^{2x} dx \right] = \\
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \left[(2x + 1) \cdot \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \left[(2x + 1) \cdot \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} \right] + C = \\
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \left[(2x + 1) \cdot \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} \right] + C = \\
 &= (x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - (2x + 1) \cdot \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \\
 &= \left((x^2 + x - 2) \cdot \frac{1}{2} - (2x + 1) \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C = \\
 &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C = \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) e^{2x} + C
 \end{aligned}$$

$$c) \int x \cdot \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = \sin x \\ u' = 1 \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) dx =$$

$$= x \cdot (-\cos x) + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

$$d) \int (2x + 4) \cdot \cos 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 4 \quad v' = \cos 2x \\ u' = 2 \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| =$$

$$= (2x + 4) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = (2x + 4) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \int \sin 2x \, dx =$$

$$= (2x + 4) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C =$$

$$= (2x + 4) \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C = (x + 2) \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$e) \int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x} \quad v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx =$$

$$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$f) \int (x + 1) \cdot \log_2 x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \log_2 x \quad v' = x + 1 \\ u' = \frac{1}{x \cdot \ln 2} \quad v = \frac{x^2}{2} + x \end{array} \right| =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \cdot \log_2 x - \int \frac{1}{x \cdot \ln 2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \cdot \log_2 x - \frac{1}{\ln 2} \int \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \cdot \log_2 x - \frac{1}{\ln 2} \int \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \cdot \log_2 x - \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{x^2}{4} + x\right) + C$$

$$g) \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & v' = x^{-2} \\ u' = \frac{1}{x} & v = -x^{-1} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x} - \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + (-x^{-1}) + C = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$h) \int x^{-3} \cdot \log_5 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \log_5 x & v' = x^{-3} \\ u' = \frac{1}{x \cdot \ln 5} & v = \frac{x^{-2}}{-2} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{\log_5 x}{2x^2} - \int \frac{1}{x \cdot \ln 5} \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) dx =$$

$$= -\frac{\log_5 x}{2x^2} + \frac{1}{2 \ln 5} \int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{\log_5 x}{2x^2} + \frac{1}{2 \ln 5} \int x^{-3} dx =$$

$$= -\frac{\log_5 x}{2x^2} + \frac{1}{2 \ln 5} \cdot \left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C = -\frac{\log_5 x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2 \cdot \ln 5} + C$$

$$i) \int \arctg x dx = \int 1 \cdot \arctg x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arctg x & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x^2+1} & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \arctg x - \int \frac{1}{x^2+1} \cdot x dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

Przy obliczaniu całki metodą całkowania przez części może zdarzyć się sytuacja, gdy realizując poszczególne kroki tej procedury, dojdziemy w przykładzie do całki, której rozwiązania poszukujemy. Przykład takiej całki i sposób postępowania przedstawiono poniżej.

Przykład 2.6.

Obliczyć całkę $\int \cos^2 x \, dx$, korzystając z metody całkowania przez części.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos x & v' = \cos x \\ u' = -\sin x & v = \sin x \end{array} \right| = \\ &= \sin x \cdot \cos x - \int (-\sin x) \cdot \sin x \, dx = \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx. \end{aligned}$$

W wyniku realizacji poszczególnych etapów metody całkowania przez części otrzymaliśmy całkę, której rozwiązania poszukujemy, czyli:

$$\int \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx.$$

Podstawmy za poszukiwaną całkę literę A:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= A \\ \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_A &= \sin x \cdot \cos x + x - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_A \end{aligned}$$

i otrzymamy równanie z niewiadomą A, czyli:

$$A = \sin x \cdot \cos x + x - A.$$

Rozwiążmy równanie.

$$\begin{aligned} 2A &= \sin x \cdot \cos x + x \\ A &= \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} \end{aligned}$$

Zatem:

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} + C.$$

Zadania

Obliczyć całki metodą całkowania przez części:

- $\int x \cos x \, dx$
- $\int x^2 \sin x \, dx$

- c) $\int x \ln x \, dx$
- d) $\int x^3 \ln x \, dx$
- e) $\int e^x \cos x \, dx$
- f) $\int x e^x \, dx$
- g) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$
- h) $\int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x \, dx$
- i) $\int \sin^2 x \, dx$
- j) $\int \frac{x^2}{e^x} \, dx$
- k) $\int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} x \, dx$
- l) $\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$

Odpowiedzi

- a) $x \sin x + \cos x + C$
- b) $-x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C$
- c) $\frac{1}{2} x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C$
- d) $\frac{1}{4} x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$
- e) $\frac{e^x \sin x}{2} + \frac{e^x \cos x}{2} + C$
- f) $x e^x - e^x + C$
- g) $-x \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x| + C$
- h) $\frac{\ln(x^2+1)}{2} + x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C$
- i) $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$
- j) $-\frac{x^2+2x+2}{e^x} + C$
- k) $\operatorname{tg} x - x + C$
- l) $-\ln |\cos x| + C$

3. CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

Metody opisane w poprzednich rozdziałach nie mają bezpośredniego zastosowania do całkowania funkcji wymiernych, czyli będących ilorazem dwóch wielomianów. Aby obliczyć całkę z funkcji wymiernej, najpierw należy ją rozłożyć na tzw. ułamki proste. Z tego powodu omówimy najpierw sposoby, które można wykorzystać do rozkładania wielomianów na czynniki oraz funkcji wymiernych na ułamki proste. Dopiero w dalszej części rozdziału przedstawione zostaną sposoby całkowania funkcji wymiernych.

Zanim zaczniemy rozkładać wielomiany na czynniki pierwsze, przeanalizujemy rozkłady poniższych wielomianów.

Rozkłady wybranych wielomianów:

1. **Wielomian pierwszego stopnia** przyjmujący postać:

$$ax + b, \quad a \neq 0$$

nazywany będzie *czynnikiem liniowym*.

2. **Wielomian drugiego stopnia** (trójmian kwadratowy) postaci:

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

może być przedstawiony:

- w przypadku, gdy $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, w postaci iloczynu dwóch czynników liniowych: $a(x - x_1)(x - x_2)$, przy czym

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};$$

- w przypadku, gdy $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, w postaci kwadratu czynnika liniowego: $a(x - x_0)^2$, przy czym

$$x_0 = \frac{-b}{2a},$$

- w przypadku, gdy $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, w postaci $a(x - p)^2 + q$, gdzie

$$p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a},$$

nazywanej *czynnikiem kwadratowym nierozkładalnym*.

3. Trójmian dwukwadratowy postaci:

$$x^4 + bx^2 + c,$$

będący superpozycją (złożeniem) trójmianu $u^2 + bu + c$ i funkcji $u = x^2$. Trójmian ten można rozłożyć na czynniki liniowe lub kwadratowe nierozkładalne:

- w przypadku, gdy $b^2 - 4c > 0$, trójmian dwukwadratowy przyjmuje postać:

$$(u - u_1)(u - u_2) = (x^2 - u_1)(x^2 - u_2),$$

przy czym:

$$u_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, u_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2}.$$

Jeżeli $u_1 > 0$, to $x^2 - u_1$ rozkłada się na czynniki liniowe $(x - \sqrt{u_1})(x + \sqrt{u_1})$.

Jeżeli $u_1 < 0$, to $x^2 - u_1$ jest czynnikiem liniowym nierozkładalnym.

Analogicznie sytuacja wygląda w przypadku czynnika $x^2 - u_2$.

- w przypadku, gdy $b^2 - 4c = 0$, trójmian dwukwadratowy przyjmuje postać:

$$(u - u_0)^2 = (x^2 - u_0)^2,$$

przy czym:

$$u_0 = \frac{-b}{2}.$$

Jeżeli $u_0 > 0$, trójmian przyjmuje postać $(x - \sqrt{u_0})^2 (x + \sqrt{u_0})^2$.

Jeżeli $u_0 < 0$, to $x^2 - u_0$ jest czynnikiem liniowym nierozkładalnym.

- w przypadku, gdy $b^2 - 4c < 0$, to trójmian dwukwadratowy jest iloczynem dwóch trójmianów kwadratowych postaci:

$$x^4 + bx^2 + c = (x^2 - \sqrt{2\sqrt{c} - b} \cdot x + \sqrt{c})(x^2 + \sqrt{2\sqrt{c} - b} \cdot x + \sqrt{c}).$$

Poprawność powyższego wzoru można sprawdzić w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & (x^2 - \sqrt{2\sqrt{c} - b} \cdot x + \sqrt{c})(x^2 + \sqrt{2\sqrt{c} - b} \cdot x + \sqrt{c}) = \\ & = x^4 + \cancel{\sqrt{2\sqrt{c} - b} \cdot x^3} + \sqrt{c} \cdot x^2 - \cancel{\sqrt{2\sqrt{c} - b} \cdot x^3} - (2\sqrt{c} - b) \cdot x^2 + \\ & \quad - \cancel{(\sqrt{2\sqrt{c} - b}) \cdot \sqrt{c} \cdot x} + \sqrt{c} \cdot x^2 + \cancel{(\sqrt{2\sqrt{c} - b}) \cdot \sqrt{c} \cdot x} + c = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x^4 + \sqrt{c} \cdot x^2 - (2\sqrt{c} - b) \cdot x^2 + \sqrt{c} \cdot x^2 + c = \\
 &= x^4 + 2\sqrt{c} \cdot x^2 - 2\sqrt{c} \cdot x^2 + bx^2 + c = x^4 + bx^2 + c.
 \end{aligned}$$

4. **Trójmian n -kwadratowy** postaci:

$$x^{2n} + bx^n + c, \quad n = 2^k, k = 0, 1, 2, \dots$$

może być rozłożony na czynniki liniowe lub kwadratowe nierozkładalne.

Uwaga!

Podczas rozkładania wielomianów na czynniki liniowe warto wykorzystywać wzory skróconego mnożenia:

- 1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- 2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- 3) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- 4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- 5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Przykład 3.1.

Zapisać w postaci iloczynu czynników liniowych, kwadratu czynnika liniowego lub czynnika kwadratowego nierozkładalnego następujące wielomiany:

- a) $x^2 + 2x + 1$
- b) $x^2 + 2x - 3$
- c) $x^2 + 2x + 3$
- d) $x^2 - 3x + 2$
- e) $x^4 - 3x^2 + 2$
- f) $x^8 - 3x^4 + 2$
- g) $x^4 + x^2 + 1$

Rozwiązania:

- a) Rozpoczynamy od wyznaczenia wyróżnika kwadratowego dla trójmianu $x^2 + 2x + 1$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0.$$

Ponieważ jest on zerowy, wyznaczamy jeden pierwiastek:

$$x_0 = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1.$$

Trójmian kwadratowy przyjmuje więc postać: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$.

- b) W przypadku trójmianu $x^2 + 2x - 3$ również rozpoczynamy od wyznaczenia wyróżnika kwadratowego:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0.$$

Ponieważ jest on dodatni, wyznaczone zostają pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = -3, \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1.$$

Trójmian kwadratowy przyjmuje więc postać: $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

- c) Rozpoczynamy od policzenia wyróżnika kwadratowego trójmianu $x^2 + 2x + 3$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8 < 0.$$

Ponieważ jest on ujemny, wyznaczone zostają p i q :

$$p = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1, \quad q = \frac{-(-8)}{4 \cdot 1} = 2.$$

Trójmian kwadratowy przyjmuje więc postać: $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$.

- d) W odniesieniu do trójmianu $x^2 - 3x + 2$ również rozpoczynamy od wyznaczenia wyróżnika kwadratowego:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 > 0.$$

Ponieważ jest on dodatni, wyznaczamy następujące pierwiastki:

$$x_1 = \frac{3 - 1}{2 \cdot 1} = 1, \quad x_2 = \frac{3 + 1}{2 \cdot 1} = 2.$$

Trójmian kwadratowy przyjmuje więc postać: $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

- e) Trójmian dwukwadratowy $x^4 - 3x^2 + 2$ zapisujemy w postaci funkcji złożonej $u^2 - 3u + 2$, gdzie $u = x^2$. Następnie, korzystając z rozwiązania poprzedniego przykładu, zapisujemy: $u^2 - 3u + 2 = (u - 1)(u - 2)$. Podstawiając $u = x^2$, otrzymujemy:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2).$$

Wykorzystując wzory skróconego mnożenia (lub rozkładając podane czynniki na czynniki liniowe), otrzymujemy:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 1)(x^2 - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

- f) W przypadku trójmianu czterokwadratowego: $x^8 - 3x^4 + 2$ wyliczenia rozpoczynamy od zapisania go w postaci funkcji złożonej: $u^2 - 3u + 2$, gdzie $u = x^4$. Następnie, analogicznie jak w powyższym przykładzie, zapisujemy: $u^2 - 3u + 2 = (u - 1)(u - 2)$. Podstawiając $u = x^4$, dostajemy:

$$\begin{aligned} x^8 - 3x^4 + 2 &= (x^4 - 1)(x^4 - 2) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x^2 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

- g) W przypadku trójmianu n -kwadratowego $x^4 + x^2 + 1$ zapisanie go w postaci funkcji złożonej $u^2 + u + 1$, gdzie $u = x^2$, nie daje rozwiązania, bo

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -4 < 0.$$

Wielomian ten należy zatem odpowiednio pogrupować:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + x^3 + x^2 - x^3 - x^2 - x + x^2 + x + 1 = \\ &= x^2(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

Uwaga!

Poniżej podane zostały przykłady wielomianów i ich rozkłady:

1. $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$
2. $x^2 + a^2$ to suma nierozkładalnych kwadratów
3. $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$
4. $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
5. $x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$

6. $x^4 + a^4 = x^4 + 2x^2a^2 + a^4 - 2x^2a^2 = (x^2 + a^2)^2 - (\sqrt{2}ax)^2 =$
 $= (x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax)(x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax)$
7. $x^6 - a^6 = (x^3)^2 - (a^3)^2 = (x^3 - a^3)(x^3 + a^3) =$
 $= (x - a)(x^2 + ax + a^2)(x + a)(x^2 - ax + a^2)$
8. $x^6 + a^6 = (x^2)^3 + (a^2)^3 = (x^2 + a^2)(x^4 - a^2x^2 + a^4) =$
 $= (x^2 + a^2) \left(x^2 - \sqrt{2a^2 + a^2} \cdot x + a^2 \right) \left(x^2 + \sqrt{2a^2 + a^2} \cdot x + a^2 \right) =$
 $= (x^2 + a^2) \left(x^2 - \sqrt{3a^2} \cdot x + a^2 \right) \left(x^2 + \sqrt{3a^2} \cdot x + a^2 \right) =$
 $= (x^2 + a^2)(x^2 - \sqrt{3}ax + a^2)(x^2 + \sqrt{3}ax + a^2)$
9. $x^8 - a^8 = (x^4 - a^4)(x^4 + a^4) =$
 $= (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)(x^2 + a^2 - \sqrt{2}ax)(x^2 + a^2 + \sqrt{2}ax)$

Powyższe przykłady dotyczyły wybranych wielomianów. W przypadku dowolnego wielomianu można zastosować poniższe twierdzenie.

Twierdzenie dotyczące rozkładu wielomianu na czynniki rzeczywiste

Dowolny wielomian

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0, n \geq 1$$

można przedstawić w postaci iloczynu współczynnika głównego a_0 oraz czynników liniowych lub nierozkładalnych kwadratowych:

$$f(x) = a_0(x - b_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - b_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$$

gdzie liczby $b_1, \dots, b_k, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r$ są rzeczywiste, wyróżniki $p_1^2 - 4q_1, \dots, p_r^2 - 4q_r$ są ujemne, a wykładniki $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_r$ są liczbami całkowitymi nieujemnymi, przy czym $n_1 + \dots + n_k + 2(m_1 + \dots + m_r) = n$.

Powyższe twierdzenie oznacza, że każdy wielomian można zapisać w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego. Przeanalizujemy poniższy przykład.

Przykład 3.2.

Zapisać w postaci iloczynu współczynnika głównego a_0 oraz czynników liniowych lub nierozkładalnych kwadratowych następującą funkcję:

$$f(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4.$$

Rozwiązanie:

Aby znaleźć dwumian, przez który dzieli się wielomian $f(x)$, można skorzystać z twierdzenia Bézouta¹. Znajdźmy więc najpierw pierwiastki wielomianu wśród podzielników wyrazu wolnego (liczba -4). Dzielnikami tymi będą $-1, 1, -2, 2, -4, 4$. Obliczmy wartości wielomianu dla tych pierwiastków:

$$f(-1) = -1 - 4 - 4 - 1 - 4 - 4 \neq 0,$$

$$f(1) = 1 - 4 + 4 - 1 + 4 - 4 = 0,$$

$$f(-2) = -32 - 64 - 32 - 4 - 8 - 4 \neq 0,$$

$$f(2) = 32 - 64 + 32 - 4 + 8 - 4 = 0,$$

$$f(-4) = -1024 - 1024 - 256 - 16 - 16 - 4 \neq 0,$$

$$f(4) = 1024 - 1024 + 256 - 16 + 16 - 4 \neq 0.$$

Otrzymaliśmy dwa pierwiastki: 1, 2. Najpierw podzielimy analizowany wielomian przez $(x - 1)$, a następnie otrzymany wynik przez $(x - 2)$.

$$(x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4) : (x - 1) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$$

$$\begin{array}{r} -x^5 + x^4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 3x^3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x + 4 \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

¹ Twierdzenie Bézouta: Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu.

oraz

$$(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4) : (x - 2) = x^3 - x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{r} -x^4 + 2x^3 \\ \hline -x^3 + x^2 + 4 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -x^2 + 4 \\ x^2 - 2x \\ \hline -2x + 4 \\ 2x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Możemy również zastosować schemat Hornera do dzielenia wielomianu przez $(x - 1)$:

$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4$	1	-4	4	-1	4	-4
1	1	-3	1	0	4	0

Stąd $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x^4 - 3x^3 + x^2 + 4)(x - 1)$. Użyty wynik dzielenia wielomianu przez $(x - 1)$ dzielimy następnie przez $(x - 2)$, również wykorzystując schemat Hornera:

$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$	1	-3	1	0	4
2	1	-1	-1	-2	0

Podane powyżej dwie metody dzielenia wielomianu przez czynniki liniowe pozwoliły na uzyskanie funkcji: $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x^3 - x^2 - x - 2)$. Sprawdzamy teraz, czy dzielniki wyrazu wolnego wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, czyli $-1, 1, -2, 2$, są pierwiastkami tego wielomianu:

$$W(-1) = -1 - 1 + 1 - 2 \neq 0,$$

$$W(1) = 1 - 1 - 1 - 2 \neq 0,$$

$$W(-2) = -8 - 4 + 2 - 2 \neq 0,$$

$$W(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0.$$

Dalej podzielmy wielomian $W(x)$ przez dwumian $(x - 2)$.

$$(x^3 - x^2 - x - 2) : (x - 2) = x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 - x - 2$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + 2x \\ \hline \end{array}$$

$$x - 2$$

$$\begin{array}{r} -x + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$0$$

Analogicznie zastosowanie schematu Hornera przedstawia się następująco:

$x^3 - x^2 - x - 2$	1	-1	-1	-2
2	1	1	1	0

Zatem wielomian $W(x) = x^3 + x^2 - x - 2 = (x - 2)(x^2 + x + 1)$. Wyrażenie $x^2 + x + 1$ jest trójmianem kwadratowym, dla którego $\Delta < 0$, więc jest czynnikiem nierozkładalnym.

Z powyższych obliczeń wynika, że funkcja $f(x)$ przyjmuje postać:

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)^2(x^2 + x + 1).$$

Zanim przytoczone zostaną zasady całkowania funkcji wymiernych, należy zdefiniować, jaka funkcja nazywana jest funkcją wymierną.

Definicja

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów, przy czym wielomian znajdujący się w mianowniku nie jest wielomianem zerowym. Funkcję tę zapisujemy w postaci:

$$\frac{L(x)}{M(x)}, \quad M(x) \neq 0.$$

Uwaga!

1. Jeżeli $M(x) = \text{const} \neq 0$, czyli jest liczbą rzeczywistą różną od zera, to funkcja wymierna staje się wielomianem. Ponieważ całkowanie wielomianów zostało omówione poprzednio, założmy w dalszych rozważaniach, że $M(x)$ jest wielomianem co najwyżej pierwszego stopnia.

2. Funkcję wymierną dowolnej postaci należy najpierw sprowadzić do postaci ilorazu funkcji wielomianowych wzajemnie pierwszych, czyli takich, które nie mają wspólnego podzielnika różnego od stałej.

Przykład 3.3.

Podaną funkcję wymierną sprowadzić do postaci ilorazu funkcji wielomianowych wzajemnie pierwszych:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 1}.$$

Rozwiązanie:

Stosując wzory skróconego mnożenia i przedstawiony wyżej rozkład wielomianu $x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$, otrzymujemy:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^4 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{x-1}{x^3+x^2+x+1}.$$

Zdefiniujmy teraz pojęcie ułamka właściwego i niewłaściwego.

Definicja

Jeżeli stopień wielomianu $L(x)$ znajdującego się w liczniku funkcji wymiernej $\frac{L(x)}{M(x)}$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $M(x)$ (st. $L(x) < \text{st. } M(x)$), to funkcję nazywamy **ułamkiem właściwym** lub **funkcją wymierną właściwą**.

Jeżeli stopień wielomianu $L(x)$ jest nie mniejszy od stopnia wielomianu $M(x)$ (st. $L(x) \geq \text{st. } M(x)$), to funkcję wymierną nazywamy **ułamkiem niewłaściwym** lub **funkcją wymierną niewłaściwą**.

Każdy ułamek niewłaściwy można przedstawić w postaci sumy wielomianu $W(x)$ (nazywanego częścią całkowitą niewłaściwej funkcji wymiernej) i ułamka właściwego:

$$\frac{L(x)}{M(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{M(x)},$$

przy czym $R(x)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $L(x)$ przez $M(x)$.

Przeanalizujmy poniższy przykład.

Przykład 3.4.

Podane funkcje wymierne sprowadzić do sum wielomianu i ułamka właściwego:

a) $\frac{x^3+x^2+x+1}{x-1}$

b) $\frac{x^5-1}{x^2+2x+1}$

c) $\frac{x^4+2x^2+x-1}{x^3+2x+1}$

Rozwiązania:

Najpierw należy wykonać dzielenie wielomianów:

$$(x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1) = x^2 + 2x + 3 = W(x)$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$2x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{r} -2x^2 + 2x \\ \hline \end{array}$$

$$3x + 1$$

$$\begin{array}{r} -3x + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$4 = R(x)$$

Zatem podana funkcja wymierna przyjmuje postać:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x-1} = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x-1}.$$

Możemy też wykorzystać schemat Hornera (bo mianownik jest wielomianem stopnia pierwszego):

$x^3 + x^2 + x + 1$	1	1	1	1
1	1	2	3	4

Stąd $x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 2x + 3)(x - 1) + 4$, a następnie:

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x-1} = \frac{(x^2+2x+3)(x-1)+4}{x-1} = x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x-1}.$$

- a) Analogicznie jak poprzednio, najpierw wykonujemy dzielenie wielomianów:

$$(x^5 - 1) : (x^2 + 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = W(x)$$

$$\begin{array}{r} -x^5 - 2x^4 - x^3 \\ \hline -2x^4 - x^3 - 1 \\ 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 \\ \hline 3x^3 + 2x^2 - 1 \\ -3x^3 - 6x^2 - 3x \\ \hline -4x^2 - 3x - 1 \\ 4x^2 + 8x + 4 \\ \hline 5x + 3 = R(x) \end{array}$$

Zatem podana funkcja wymierna przyjmuje postać:

$$\frac{x^5-1}{x^2+2x+1} = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + \frac{5x+3}{x^2+2x+1}.$$

- b) Ponownie zacznijmy od pisemnego dzielenia wielomianu z licznika przez wielomian z mianownika:

$$(x^4 + 2x^2 + x - 1) : (x^3 + x + 1) = x = W(x)$$

$$\begin{array}{r} -x^4 - x^2 - x \\ \hline x^2 - 1 = R(x) \end{array}$$

Zatem podana funkcja wymierna przyjmuje postać:

$$\frac{x^4+2x^2+x-1}{x^3+2x+1} = x + \frac{x^2-1}{x^3+2x+1}.$$

Pojęciami, które należy znać, przystępując do wyznaczania całek z funkcji wymiernych, są ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju.

Definicja

Rozróżnia się dwa typy ułamków prostych:

- 1) **typ I (pierwszego rodzaju)** – licznik jest stałą, a mianownik jest czynnikiem liniowym w dowolnej potęgze naturalnej:

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

- 2) **typ II (drugiego rodzaju)** – licznik jest czynnikiem liniowym, a mianownik jest czynnikiem kwadratowym w dowolnej potęgze naturalnej:

$$\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}, \quad p^2 - 4q < 0$$

gdzie a, A, B, C, p, q są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, a n, m są liczbami naturalnymi.

Wyznaczając całki wymierne, należy zapisać funkcję jako sumę ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. Podczas tego procesu wykorzystuje się poniższe twierdzenie.

Twierdzenie o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste

Dowolny ułamek właściwy $\frac{R(x)}{M(x)}$, którego mianownik ma rozkład na czynniki liniowe i kwadratowe postaci:

$$M(x) = a_0(x - a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{n_k} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r},$$

można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju, przy czym:

- każdemu czynnikowi $(x - a_i)^{n_i}$ odpowiada następująca suma ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$\frac{A_{i1}}{x - a_i} + \frac{A_{i2}}{(x - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{in_i}}{(x - a_i)^{n_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in_i}$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dla $1 \leq i \leq k$;

- każdemu czynnikowi $(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}$ odpowiada następująca suma ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$\frac{B_{j1}x + C_{j1}}{x^2 + p_jx + q_j} + \frac{B_{j2}x + C_{j2}}{(x^2 + p_jx + q_j)^2} + \dots + \frac{B_{jm_j}x + C_{jm_j}}{(x^2 + p_jx + q_j)^{m_j}},$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \dots, B_{jm_j}, C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jm_j}$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dla $1 \leq j \leq r$.

Zatem dowolny ułamek właściwy można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{M(x)} = & \frac{A_{11}}{x - a_1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x - a_1)^{n_1}} + \\ & + \dots + \dots + \dots + \\ & + \frac{A_{k1}}{x - a_k} + \frac{A_{k2}}{(x - a_k)^2} + \dots + \frac{A_{kn_k}}{(x - a_k)^{n_k}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{12}x+C_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \\
 & + \dots + \\
 & + \frac{B_{r1}x+C_{mr1}}{x^2+p_rx+q_r} + \frac{B_{r2}x+C_{r2}}{(x^2+p_rx+q_r)^2} + \dots + \frac{B_{rm_r}x+C_{rm_r}}{(x^2+p_rx+q_r)^{m_r}}.
 \end{aligned}$$

Przykład 3.5.

Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju:

- a) $\frac{5x^2+3x+7}{(x+2)(x^2+3)}$
 b) $\frac{3x^3-8x^2+9x+8}{(x-1)^2(x^2-2x+3)}$
 c) $\frac{2x^4+2x^2-7x-1}{(x+3)(x^2+1)^2}$

Rozwiązania:

- a) Licznik i mianownik nie mają wspólnego dzielnika (są wzajemnie pierwsze), czyli tworzą ułamek właściwy. Funkcję wymierną, zgodnie z powyższym twierdzeniem o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju, można zapisać:

$$\frac{5x^2+3x+7}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3},$$

gdzie A, B, C są liczbami rzeczywistymi.

Aby wyznaczyć liczby A, B, C , należy sprowadzić prawą stronę równania do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned}
 \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3} &= \frac{A(x^2+3) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+3)} = \\
 &= \frac{Ax^2+3A+Bx^2+2Bx+Cx+2C}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+3A+2C}{(x+2)(x^2+3)}.
 \end{aligned}$$

Przyrównując otrzymane wyrażenie do funkcji wyjściowej, otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ 2B + C = 3 \\ 3A + 2C = 7 \end{cases}$$

Rozwiązując go, dostajemy: $A = 3, B = 2, C = -1$

Zatem:

$$\frac{5x^2+3x+7}{(x+2)(x^2+3)} = \frac{3}{x+2} + \frac{2x-1}{x^2+3}.$$

- b) Ponieważ licznik i mianownik nie mają wspólnego dzielnika oraz tworzą ułamek właściwy, więc rozkład ułamka będzie miał postać:

$$\frac{3x^3-8x^2+9x+8}{(x-1)^2(x^2-2x+3)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+3},$$

gdzie A_1, A_2, B, C są liczbami rzeczywistymi. Aby wyznaczyć liczby A_1, A_2, B, C , powyższe ułamki należy sprowadzić do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned} & \frac{A_1(x-1)(x^2-2x+3)+A_2(x^2-2x+3)+(Bx+C)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2-2x+3)} = \\ & = \frac{A_1(x^3-2x^2+3x-x^2+2x-3)+A_2(x^2-2x+3)+(Bx+C)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2-2x+3)} = \\ & = \frac{A_1x^3-3A_1x^2+5A_1x-3A_1+A_2x^2-2A_2x+3A_2+Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx+C}{(x-1)^2(x^2-2x+3)} = \\ & = \frac{(A_1+B)x^3+(-3A_1+A_2-2B+C)x^2+(5A_1-2A_2+B-2C)x-3A_1+3A_2+C}{(x-1)^2(x^2-2x+3)}. \end{aligned}$$

Rozkładana funkcja wymierna będzie równa wyznaczonemu powyżej wyrażeniu, gdy:

$$\begin{cases} A_1 + B = 3 \\ -3A_1 + A_2 - 2B + C = -8 \\ 5A_1 - 2A_2 + B - 2C = 9 \\ -3A_1 + 3A_2 + C = 8 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy: $A_1 = 1, A_2 = 6, B = 2, C = -7$.

Zatem:

$$\frac{3x^3-8x^2+9x+8}{(x-1)^2(x^2-2x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{2x-7}{x^2-2x+3}.$$

- c) Ponieważ licznik i mianownik nie mają wspólnego dzielnika oraz tworzą ułamek właściwy, więc rozkład ułamka będzie miał postać:

$$\frac{2x^4+2x^2-7x-1}{(x+3)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2},$$

gdzie A, B_1, B_2, C_1, C_2 są liczbami rzeczywistymi. Aby wyznaczyć liczby A, B_1, B_2, C_1, C_2 , powyższe ułamki należy sprowadzić do wspólnego mianownika:

$$\begin{aligned}
 & \frac{A(x^2+1)^2 + (B_1x+C_1)(x+3)(x^2+1) + (B_2x+C_2)(x+3)}{(x+3)(x^2+1)^2} = \\
 & = \frac{A(x^4+2x^2+1) + (B_1x+C_1)(x^3+3x^2+x+3) + (B_2x+C_2)(x+3)}{(x+3)(x^2+1)^2} = \\
 & = \frac{Ax^4+2Ax^2+A+B_1x^4+3B_1x^3+B_1x^2+3B_1x+C_1x^3+3C_1x^2+C_1x+3C_1+B_2x^2+3B_2x+C_2x+3C_2}{(x+3)(x^2+1)^2} = \\
 & = \frac{(A+B_1)x^4+(3B_1+C_1)x^3+(2A+B_1+3C_1+B_2)x^2+(3B_1+C_1+3B_2+C_2)x+A+3C_1+3C_2}{(x-1)^2(x^2-2x+3)}
 \end{aligned}$$

Rozkładana funkcja wymierna będzie równa wyznaczonemu powyżej wyrażeniu, gdy:

$$\begin{cases} A + B_1 = 2 \\ 3B_1 + C_1 = 0 \\ 2A + B_1 + 3C_1 + B_2 = 2 \\ 3B_1 + C_1 + 3B_2 + C_2 = -7 \\ A + 3C_1 + 3C_2 = -1 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, otrzymujemy: $A = 2$, $B_1 = 0$, $B_2 = -2$, $C_1 = 0$, $C_2 = -1$.

Zatem:

$$\frac{2x^4+2x^2-7x-1}{(x+3)(x^2+1)^2} = \frac{2}{x+3} + \frac{0x+0}{x^2+1} + \frac{-2x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x+3} - \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

W odniesieniu do ułamków pierwszego rodzaju do obliczania całki należy zastosować podane poniżej wzory:

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju:

- 1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$
- 2) $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$ dla $n = 2, 3, \dots$

Wyprowadzenie wzorów:

- 1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \int \frac{1}{x-a} dx = \left| \frac{t = x-a}{dt = dx} \right| = A \cdot \int \frac{1}{t} dt =$
 $= A \cdot \ln|t| + C = A \cdot \ln|x-a| = A \cdot \ln|x-a| + C$
- 2) $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A \cdot \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \left| \frac{t = x-a}{dt = dx} \right| = A \cdot \int \frac{1}{t^n} dt = A \cdot \int t^{-n} dt =$
 $= A \cdot \frac{1}{-n+1} t^{-n+1} + C = \frac{-A}{(n-1)t^{n-1}} + C = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$

Przykład 3.6.

Obliczyć podane całki:

a) $\int \frac{3x}{(x+1)(x-2)} dx$

b) $\int \frac{3x^2+x+1}{x(x+1)^2} dx$

c) $\int \frac{x^2+3}{(x-1)^3} dx$

d) $\int \frac{x^2-x}{(x+1)^4} dx$

Rozwiązania:

- a) W pierwszym kroku należy rozłożyć wyrażenie podcałkowe na ułamki proste pierwszego rodzaju:

$$\frac{3x}{(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-2},$$

gdzie A_1, A_2 są liczbami rzeczywistymi. Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy:

$$\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{A_1x-2A_1+A_2x+A_2}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A_1+A_2)x-2A_1+A_2}{(x+1)(x-2)}.$$

Uzyskujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ -2A_1 + A_2 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy: $A_1 = 1, A_2 = 2$.

Zatem:

$$\frac{3x}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}.$$

Można teraz przystąpić do wyznaczania całki i rozbicia jej na dwie całki i wyznaczenia zgodnie ze wzorem $\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C$:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{(x+1)(x-2)} dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2} \right) dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = \\ &= \ln|x+1| + 2 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

- b) W pierwszym kroku należy rozłożyć wyrażenie podcałkowe na ułamki proste pierwszego rodzaju:

$$\frac{3x^2+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2},$$

gdzie A_1, A_2, A_3 są liczbami rzeczywistymi. Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy:

$$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2} = \frac{A_1(x+1)^2 + A_2x(x+1) + A_3x}{x(x+1)^2} = \frac{(A_1+A_2)x^2 + (2A_1+A_2+A_3)x + A_1}{x(x+1)^2}.$$

Uzyskujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 3 \\ 2A_1 + A_2 + A_3 = 1. \\ A_1 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy: $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = -3$.

Zatem:

$$\frac{3x^2+x+1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}.$$

Można teraz przystąpić do wyznaczania całki i rozbicia jej na trzy całki i wyznaczenia zgodnie ze wzorami:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{x-a} dx &= A \cdot \ln|x-a| + C \quad \text{ i } \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C: \\ \int \frac{3x^2+x+1}{x(x+1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{x+1} dx - \int \frac{3}{(x+1)^2} dx = \\ &= \ln|x| + 2 \ln|x+1| - \frac{-3}{x+1} + C = \ln|x| + 2 \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C. \end{aligned}$$

- c) Najpierw należy rozłożyć wyrażenie podcałkowe na ułamki proste pierwszego rodzaju:

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^3} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3},$$

gdzie A_1, A_2, A_3 są liczbami rzeczywistymi. Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy:

$$\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1) + A_3}{(x-1)^3} = \frac{A_1x^2 + (-2A_1+A_2)x + A_1-A_2+A_3}{(x-1)^3}.$$

Uzyskujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ -2A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 - A_2 + A_3 = 3 \end{cases}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy: $A_1 = 1, A_2 = 2, A_3 = 4$.

Zatem:

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Można teraz przystąpić do wyznaczania całki i rozbicia jej na trzy całki i wyznaczenia zgodnie ze wzorami:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C \quad \text{ i } \quad \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C:$$

$$\int \frac{x^2+3}{(x-1)^3} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{4}{(x-1)^3} dx =$$

$$= \ln|x-1| + \frac{-2}{x-1} + \frac{-4}{2(x-1)^2} + C = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + C.$$

- d) Przykład ten został rozwiązany metodą całkowania przez podstawienie w przykładzie 2.3. Można go również rozwiązać, wykorzystując wzory na całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju. Najpierw należy rozłożyć wyrażenie podcałkowe:

$$\frac{x^2-x}{(x+1)^4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{(x+1)^4},$$

gdzie A_1, A_2, A_3, A_4 są liczbami rzeczywistymi. Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{(x+1)^4} &= \frac{A_1(x+1)^3 + A_2(x+1)^2 + A_3(x+1) + A_4}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{A_1x^3 + (3A_1 + A_2)x^2 + (3A_1 + 2A_2 + A_3)x + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{(x+1)^4}. \end{aligned}$$

Uzyskujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ 3A_1 + A_2 = 1 \\ 3A_1 + 2A_2 + A_3 = -1 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązując go, otrzymujemy: $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = -3, A_4 = 2$.

Zatem:

$$\frac{x^2-x}{(x+1)^4} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^4}.$$

Można teraz przystąpić do wyznaczania całki i rozbicia jej na trzy całki i wyznaczenia zgodnie ze wzorem $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x}{(x+1)^4} dx &= \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^4} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{3}{(x+1)^3} dx + \int \frac{2}{(x+1)^4} dx = -\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2(x+1)^2} - \frac{2}{3(x+1)^3} + C. \end{aligned}$$

W przypadku ułamków prostych drugiego rodzaju należy zastosować wzory podane poniżej.

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$\int \frac{(Gx+H)dx}{(x^2+px+q)^n},$$

1. W przypadku $n = 1$ należy zastosować podstawienie $s = x + \frac{p}{2}$, sprowadzając mianownik do postaci $s^2 + r^2$, gdzie $r^2 = -\frac{\Delta}{4}$. Wówczas licznik przybiera postać $Gs + D$, gdzie $K = H - \frac{Gp}{2}$:

$$\int \frac{(Gx+H)dx}{x^2+px+q} = \int \frac{(Gs+K)ds}{s^2+r^2} = \frac{G}{2} \int \frac{2sds}{s^2+r^2} + K \int \frac{ds}{s^2+r^2} = \frac{G}{2} \ln(s^2 + r^2) + \frac{K}{r} \arctg \frac{s}{r} + C$$

2. Dla $n = 2, 3, \dots$, podstawiając $s = x + \frac{p}{2}$, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{(Gx+H)dx}{(x^2+px+q)^n} &= \int \frac{(Gs+K)ds}{(s^2+r^2)^n} = \frac{G}{2} \int \frac{2sds}{(s^2+r^2)^n} + K \int \frac{ds}{(s^2+r^2)^n} = \\ &= \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} + K \int \frac{ds}{(s^2+r^2)^n} \end{aligned}$$

Ostatnią całkę możemy obliczyć za pomocą następującego wzoru:

$$\int \frac{ds}{(s^2+r^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{s}{r^2(s^2+r^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{r^2} \int \frac{ds}{(s^2+r^2)^{n-1}}, \text{ dla } n = 2, 3, 4, \dots$$

Wprowadzenie wzoru:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(s^2+r^2)^n} ds &= \frac{1}{r^2} \int \frac{r^2}{(s^2+r^2)^n} ds = \frac{1}{r^2} \int \frac{s^2+r^2-s^2}{(s^2+r^2)^n} ds = \\ &= \frac{1}{r^2} \int \frac{(s^2+r^2)ds}{(s^2+r^2)^n} - \frac{1}{r^2} \int \frac{s^2 ds}{(s^2+r^2)^n} = \frac{1}{r^2} \int \frac{ds}{(s^2+r^2)^{n-1}} - \frac{1}{r^2} \int \frac{s^2 ds}{(s^2+r^2)^n} \end{aligned}$$

Poniżej wyznaczony został odjemnik:

$$\begin{aligned} \int \frac{s^2 ds}{(s^2+r^2)^n} &= \frac{1}{2} \int s \cdot \frac{2s}{(s^2+r^2)^n} ds = \left| \begin{array}{ll} u = s & v' = \frac{2s}{(s^2+r^2)^n} \\ u' = 1 & v = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{s}{(s^2+r^2)^{n-1}} - \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} \right) ds = \\ &= -\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{s}{(s^2+r^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} ds, \end{aligned}$$

przy czym

$$\int \frac{2s ds}{(s^2+r^2)^n} = \left| \begin{matrix} t = s^2 + r^2 \\ dt = 2s ds \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{t^{n-1}} + C = \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} + C.$$

Podstawiając uzyskany odjemnik do wzoru, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(s^2+r^2)^n} ds &= \frac{1}{r^2} \int \frac{ds}{(s^2+r^2)^{n-1}} - \frac{1}{r^2} \left(-\frac{1}{2n-2} \cdot \frac{s}{(s^2+r^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} ds \right) = \\ &= \frac{1}{r^2} \int \frac{ds}{(s^2+r^2)^{n-1}} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{s}{(s^2+r^2)^{n-1}} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2n-2} \int \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} ds = \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{s}{(s^2+r^2)^{n-1}} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{1}{(s^2+r^2)^{n-1}} ds. \end{aligned}$$

Przykład 3.7.

Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

a) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5} dx$

b) $\int \frac{3x+1}{(x^2+2)^3} dx$

c) $\int \frac{4x-3}{(x^2+2x+3)^2} dx$

Rozwiązania:

a) $\int \frac{3x-1}{x^2-2x+5} dx$

Dla trójmianu kwadratowego w mianowniku $\Delta = 4 - 20 = -16$, więc podstawiamy

$$s = x + \frac{-2}{2} = x - 1, \text{ więc } x = s + 1 \text{ oraz } r^2 = \frac{-\Delta}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-2x+5} dx &= \int \frac{3(s+1)-1}{s^2+4} ds = \frac{3}{2} \int \frac{2s}{s^2+4} ds + 2 \int \frac{1}{s^2+4} ds = \\ &= \frac{3}{2} \ln(s^2+4) + \frac{2}{2} \arctg \frac{s}{\sqrt{4}} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2-2x+5) + \arctg \frac{x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

b) $\int \frac{3x+1}{(x^2+2)^3} dx$

Podstawiając do podanych powyżej wzorów $s = x$ i $r^2 = 2$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{(x^2+2)^3} dx &= \int \frac{3x}{(x^2+2)^3} dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^3} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2+2)^3} dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^3} dx = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-3} \cdot \frac{1}{(x^2+2)^2} + \int \frac{1}{(x^2+2)^3} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{2 \cdot 3 - 2} \cdot \frac{x}{2(x^2+2)^2} + \frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \\
 &= \frac{-3}{4(x^2+2)^2} + \frac{x}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{x}{x^2+2} \right) + C = \\
 &= \frac{x-6}{8(x^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3x}{32(x^2+2)} + C = \\
 &= \frac{4x-24}{32(x^2+2)^2} + \frac{3x(x^2+2)}{32(x^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \\
 &= \frac{4x-24+3x^3+6x}{32(x^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{3x^3+10x-24}{32(x^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

c) $\int \frac{4x-3}{(x^2+2x+3)^2} dx$

Dla trójkątniku kwadratowego w mianowniku $\Delta = 4 - 12 = -8$. Dokonując podstawienia $s = x + \frac{2}{2} = x + 1$, $r^2 = \frac{-\Delta}{4} = \frac{8}{4} = 2$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4x-3}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{4(s-1)-3}{(s^2+2)^2} ds = \int \frac{4s-7}{(s^2+2)^2} ds = 2 \int \frac{2s}{(s^2+2)^2} ds - 7 \int \frac{ds}{(s^2+2)^2} = \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{1-2} \cdot \frac{1}{(s^2+2)^{2-1}} - 7 \left(\frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{s}{s^2+2} \right) + C = \\
 &= \frac{-2}{s^2+2} - \frac{7}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \frac{7s}{4(s^2+2)} + C = \frac{-8-7s}{4(s^2+2)} - \frac{7}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + C = \\
 &= \frac{-8-7x-7}{4(x^2+2x+3)} - \frac{7}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{-7x-15}{4(x^2+2x+3)} - \frac{7}{4\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C.
 \end{aligned}$$

Proces wyznaczania całki nieoznaczonej funkcji wymiernej powinien być realizowany etapami, które zostały opisane w podanym poniżej algorytmie całkowania funkcji wymiernych:

1. Funkcję wymierną niewłaściwą zapisujemy w postaci sumy wielomianu (może być on zerowy) i funkcji wymiernej właściwej

2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe nierozkładalne

3. Rozkładamy funkcję wymierną właściwą na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju

4. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu funkcji wymiernej

Powyższy algorytm obliczania całki zastosowano w przykładzie 3.8.

Przykład 3.8.

Obliczyć podane całki:

a) $\int \frac{3x^3-1}{x^2-x+1} dx,$

b) $\int \frac{6x^3+5x^2-x+3}{2x^2+x-4} dx,$

c) $\int \frac{x^5-6x^4+10x^3-3x^2+x+1}{x^4-3x^3+x^2+4} dx,$

d) $\int \frac{x^3+2x^2-4x+1}{x^4+x^2+1} dx.$

Rozwiązania:

a) $\int \frac{3x^3-1}{x^2-x+1} dx$

W pierwszym kroku dzielimy wielomian z licznika przez wielomian z mianownika, ponieważ stopień wielomianu w liczniku jest wyższy niż stopień wielomianu w mianowniku:

$$\begin{array}{r} (3x^3 - 1) : (x^2 - x + 1) = 3x + 3 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2 - 3x} \\ 3x^2 - 3x - 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x - 3} \\ -4 \end{array}$$

Możemy zatem zapisać:

$$3x^3 - 1 = (x^2 - x + 1)(3x + 3) - 4.$$

Podstawiamy do całki i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3-1}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{(x^2-x+1)(3x+3)-4}{x^2-x+1} dx = \int (3x+3) dx - \int \frac{4}{x^2-x+1} dx = \\ &= 3\frac{x^2}{2} + 3x - 4 \int \frac{1}{x^2-x+1} dx = \left| s = x - \frac{1}{2} \quad r^2 = \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \int \frac{ds}{s^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{8s}{\sqrt{3}} \right) + C = \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2s}{\sqrt{3}} \right) + C = \\ &= \frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$b) \int \frac{6x^3 + 5x^2 - x + 3}{2x^2 + x - 1} dx$$

Podzielmy najpierw wielomian z licznika przez wielomian z mianownika:

$$\begin{array}{r} (6x^3 + 5x^2 - x + 3) : (2x^2 + x - 1) = 3x + 1 \\ \underline{-6x^3 - 3x^2 + 3x} \\ 2x^2 + 2x + 3 \\ \underline{-2x^2 - x + 1} \\ x + 4 \end{array}$$

$$\text{Zatem } 6x^3 + 5x^2 - x + 3 = (2x^2 + x - 1)(3x + 1) + (x + 4).$$

Podstawiając do całki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 + 5x^2 - x + 3}{2x^2 + x - 1} dx &= \int \frac{(2x^2 + x - 1)(3x + 1) + (x + 4)}{2x^2 + x - 1} dx = \int (3x + 1) dx + \int \frac{x + 4}{2x^2 + x - 1} dx = \\ &= \frac{3}{2}x^2 + x + \int \frac{x + 4}{2x^2 + x - 1} dx \end{aligned}$$

Należy teraz mianownik $2x^2 + x - 1$ rozłożyć na czynniki liniowe. Ponieważ jego wyróżnik jest dodatni ($\Delta = 9$), więc pierwiastki wynoszą: $x_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot 2} = -1$, $x_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}$. Mianownik przyjmuje postać: $2x^2 + x - 1 = 2(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

Rozłóżmy teraz podcałkową funkcję wymierną na ułamki proste pierwszego rodzaju:

$$\frac{x+4}{2x^2+x-1} = \frac{x+4}{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+4}{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x-\frac{1}{2}} \right).$$

Sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, uzyskujemy następujący licznik:

$$\begin{aligned} A_1 \left(x - \frac{1}{2} \right) + A_2 (x + 1) &= A_1 x - \frac{1}{2} A_1 + A_2 x + A_2 = \\ &= (A_1 + A_2)x + \left(-\frac{1}{2} A_1 + A_2 \right). \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ -\frac{1}{2} A_1 + A_2 = 4 \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = 3 \end{cases}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{2x^2+x-1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x+4}{(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \left(\int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-\frac{1}{2}} dx \right) = \\ &= -\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-\frac{1}{2}} dx = -\ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

Szukana całka przyjmuje postać:

$$\int \frac{6x^3+5x^2-x+3}{2x^2+x-1} dx = \frac{3}{2}x^2 + x - \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| + C.$$

c) $\int \frac{x^5-6x^4+10x^3-3x^2+x+1}{x^4-3x^3+x^2+4} dx$

Podzielmy najpierw wielomian z licznika przez wielomian z mianownika:

$$\begin{array}{r} (x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 3x^2 + x + 1) : (x^4 - 3x^3 + x^2 + 4) = x - 3 \\ \underline{-x^5 + 3x^4 - x^3 - 4x} \\ -3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \\ \underline{3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 12} \\ -3x + 13 \end{array}$$

Zatem

$$x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 3x^2 + x + 1 = (x^4 - 3x^3 + x^2 + 4)(x - 3) + (-3x + 13).$$

Podstawiając do całki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5-6x^4+10x^3-3x^2+x+1}{x^4-3x^3+x^2+4} dx &= \int \frac{(x^4-3x^3+x^2+4)(x-3)+(-3x+13)}{x^4-3x^3+x^2+4} dx = \\ &= \int (x-3) dx + \int \frac{-3x+13}{x^4-3x^3+x^2+4} dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \int \frac{-3x+13}{x^4-3x^3+x^2+4} dx.\end{aligned}$$

Należy teraz mianownik rozłożyć na czynniki liniowe i kwadratowe nierozkładalne. Sprawdźmy, czy dzielniki wyrażu wolnego są pierwiastkami wielomianu $W_1(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$:

$$W_1(1) = 1 - 3 + 1 + 4 = 3 \neq 0$$

$$W_1(-1) = 1 + 3 + 1 + 4 = 9 \neq 0$$

$$W_1(2) = 16 - 24 + 4 + 4 = 0$$

$$W_1(-2) = 16 + 24 + 4 + 4 = 48 \neq 0$$

$$W_1(4) = 256 - 192 + 16 + 4 = 84 \neq 0$$

$$W_1(-4) = 256 + 192 + 16 + 4 = 468 \neq 0.$$

Podzielmy wielomian $W_1(x)$ przez dwumian $(x - 2)$.

Korzystając ze schematu Hornera, podzielmy wielomian $W_1(x)$ przez dwumian $(x - 2)$:

$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4$	1	-3	1	0	4
2	1	-1	-1	-2	0

Stąd $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = (x^3 - x^2 - x - 2)(x - 2)$.

Sprawdźmy teraz, czy wielomian $W_2(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ ma pierwiastki będące dzielnikami wyrazu wolnego:

$$W_2(1) = 1 - 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$W_2(-1) = 1 - 1 + 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$W_2(2) = 8 - 4 - 2 - 2 = 0$$

$$W_2(-2) = -8 - 4 + 2 - 2 = -12 \neq 0.$$

Następnie podzielmy wielomian $W_2(x)$ przez dwumian $(x - 2)$, stosując schemat Hornera:

$x^3 - x^2 - x - 2$	1	-1	-1	-2
2	1	1	1	0

Stąd $x^3 - x^2 - x - 2 = (x^2 + x + 1)(x - 2)$.

Ponieważ wielomian kwadratowy $W_3(x) = x^2 + x + 1$ nie ma pierwiastków (bo $\Delta = -3$), mianownik całki przyjmuje postać:

$$x^4 - 3x^3 + x^2 + 4 = (x - 2)^2(x^2 + x + 1).$$

Rozłóżmy teraz podcałkową funkcję wymierną na ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju:

$$\frac{-3x+13}{x^4-3x^3+x^2+4} = \frac{-3x+13}{(x-2)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Sprowadzając prawą stronę do wspólnego mianownika, uzyskujemy następujący licznik:

$$\begin{aligned} & A_1(x-2)(x^2+x+1) + A_2(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-2)^2 = \\ & = (A_1x - 2A_1)(x^2+x+1) + A_2x^2 + A_2x + A_2 + (Bx+C)(x^2-4x+4) = \\ & = A_1x^3 + A_1x^2 + A_1x - 2A_1x^2 - 2A_1x - 2A_1 + \\ & + A_2x^2 + A_2x + A_2 + Bx^3 - 4Bx^2 + 4Bx + Cx^2 - 4Cx + 4C = \end{aligned}$$

$$= (A_1 + B)x^3 + (-A_1 + A_2 - 4B + C)x^2 + (-A_1 + A_2 + 4B - 4C)x + (-2A_1 + A_2 + 4C).$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ -A_1 + A_2 - 4B + C = 0 \\ -A_1 + A_2 + 4B - 4C = -3 \\ -2A_1 + A_2 + 4C = 13 \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{8}{7} \\ A_2 = 1 \\ B = \frac{8}{7} \\ C = \frac{17}{7} \end{cases}.$$

Zatem:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3x+13}{(x-2)^2(x^2+x+1)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{8}{7}}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{\frac{8}{7}x+\frac{17}{7}}{x^2+x+1} \right) dx = \\ &= -\frac{8}{7} \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{1}{(x-2)^2} dx + \frac{1}{7} \int \frac{8x+17}{x^2+x+1} dx = \\ &= -\frac{8}{7} \ln|x-2| + \frac{-1}{(2-1)(x-2)^{2-1}} + \frac{1}{7} \int \frac{8x+17}{x^2+x+1} dx = \\ &= -\frac{8}{7} \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{7} \int \frac{8x+17}{x^2+x+1} dx. \end{aligned}$$

Obliczamy oddzielnie ostatnią całkę, wykorzystując podstawienie $s = x + \frac{1}{2}$ i $r^2 = \frac{3}{4}$ oraz $x = s - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{8x+17}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{8(s-\frac{1}{2})+17}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \int \frac{8s+13}{s^2+\frac{3}{4}} ds = 4 \int \frac{2s}{s^2+\frac{3}{4}} ds + 13 \int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \\ &= 4 \ln\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{26}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right) + C = 4 \ln(x^2 + x + 1) + \frac{26}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Podstawiając uzyskany wynik do całki, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{-3x+13}{(x-2)^2(x^2+x+1)} dx &= \\ &= -\frac{8}{7} \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{7} \ln(x^2 + x + 1) + \frac{26}{7\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Zatem szukana całka przyjmuje postać:

$$\int \frac{x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 3x^2 + x + 1}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 4} dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{8}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + \frac{4}{7}\ln(x^2+x+1) + \frac{26}{7\sqrt{3}}\arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

d) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

Rozkładając mianownik na czynniki kwadratowe nierozkładalne (patrz przykład 3.1 g), otrzymujemy:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1).$$

Rozłożmy teraz podcałkową funkcję wymierną na ułamki proste drugiego rodzaju:

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 - x + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + x + 1}.$$

Przekształćmy prawą stronę równania, sprowadzając do wspólnego mianownika, dla którego licznik wyniesie:

$$(B_1x + C_1)(x^2 + x + 1) + (B_2x + C_2)(x^2 - x + 1) =$$

$$= B_1x^3 + B_1x^2 + B_1x + C_1x^2 + C_1x + C_1 + B_2x^3 - B_2x^2 + B_2x +$$

$$+ C_2x^2 - C_2x + C_2 =$$

$$= (B_1 + B_2)x^3 + (B_1 + C_1 - B_2 + C_2)x^2 + (B_1 + C_1 + B_2 - C_2)x + (C_1 + C_2).$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = 1 \\ B_1 + C_1 - B_2 + C_2 = 2 \\ B_1 + C_1 + B_2 - C_2 = -4 \\ C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

dostajemy:

$$\begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = 0 \\ C_1 = -2 \\ C_2 = 3 \end{cases}.$$

Zatem:

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx + \int \frac{3}{x^2+x+1} dx = \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx + 3 \int \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

Obliczamy oddzielnie pierwszą całkę, wykorzystując podstawienie $s = x - \frac{1}{2}$ i $r^2 = \frac{3}{4}$ oraz $x = s + \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx &= \int \frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)-2}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \int \frac{s-\frac{3}{2}}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \frac{1}{2} \int \frac{2s}{s^2+\frac{3}{4}} ds - \frac{3}{2} \int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(s^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \arctg\left(\frac{2s}{\sqrt{3}}\right) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \sqrt{3} \cdot \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Następnie wyznaczamy drugą całkę, podstawiając $s = x + \frac{1}{2}$ i $r^2 = \frac{3}{4}$ oraz $x = s - \frac{1}{2}$:

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}} ds = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Podstawiając uzyskane wyniki do całki, uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+2x^2-4x+1}{x^4+x^2+1} dx &= \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - x + 1) - \sqrt{3} \cdot \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + 2\sqrt{3} \cdot \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

Zadania

Obliczyć całki:

- $\int \frac{1}{3x+5} dx$
- $\int (4x-7)^5 dx$
- $\int \frac{2x-5}{5x+4} dx$
- $\int \frac{10x+2}{5x^2+2x-7} dx$
- $\int \frac{x-3}{x^2-6x+5} dx$
- $\int \frac{dx}{2x^2+9x-5}$
- $\int \frac{11x-1}{3x^2-5x-2} dx$
- $\int \frac{dx}{6x^2-13x+6}$
- $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+9} dx$
- $\int \frac{dx}{x^2+25}$

- k) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$
 l) $\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x - 1}{x^3 + x^2} dx$
 m) $\int \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$
 n) $\int \frac{x^4 + 2x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - x^2} dx$
 o) $\int \frac{x^4 + x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 + x^2} dx$

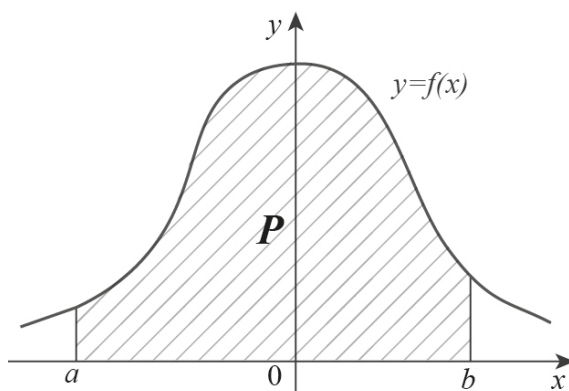
Odpowiedzi

- a) $\frac{1}{3} \ln|3x + 5| + C$
 b) $\frac{(4x-7)^6}{24} + C$
 c) $\frac{2}{5}x + \frac{33}{25} \ln|5x + 4| + C$
 d) $\ln|5x^2 + 2x - 7| + C$
 e) $\frac{1}{2} \ln|x^2 - 6x + 5| + C$
 f) $\frac{1}{11} \ln \left| \frac{2x-1}{x+5} \right| + C$
 g) $\frac{2}{3} \ln|3x + 1| + 3 \ln|x - 2| + C$
 h) $\frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x-3}{3x-2} \right| + C$
 i) $2 \ln|x - 3| - \frac{5}{x-3} + C$
 j) $\frac{1}{5} \arctg \frac{x}{5} + C$
 k) $\frac{1}{2} \arctg \frac{x-2}{2} + C$
 l) $-\ln|x + 1| + 2 \ln|x| + \frac{x^3+2}{2x} + C$
 m) $\frac{x^2}{2} + 2x + 2 \ln|x - 1| + C$
 n) $2 \ln|x + 1| - \ln|x| + \ln|x - 1| + \frac{x^2-1}{x} + C$
 o) $\frac{1}{2} \ln|x^2 - x + 1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{x^2-1}{x} + C$

4. DEFINICJA CAŁKI OZNACZONEJ I JEJ ZASTOSOWANIE

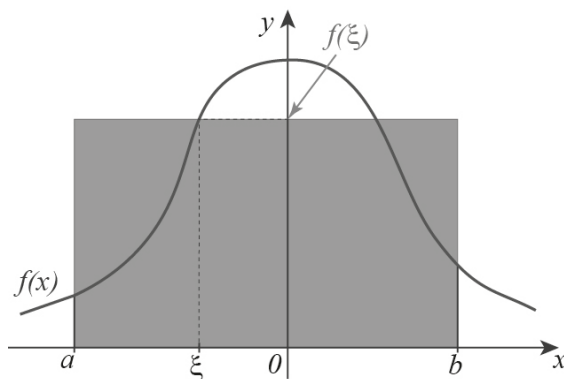
Zanim zdefiniujemy całkę oznaczoną, rozważmy poniższy problem.

Dany jest wykres funkcji $f(x)$ takiej, że $\bigwedge_{x \in D} f(x) \geq 0$ i ograniczonej na przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$. Spróbujmy obliczyć pole powierzchni P zawartej między wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Obszar, którego pole powierzchni chcemy policzyć za pomocą całki

W celu obliczenia pola P będziemy je przybliżać prostokątami, których pola umiemy obliczyć. Obierzmy dowolny punkt $\xi \in \langle a, b \rangle$ i utwórzmy prostokąt o bokach $\langle a, b \rangle$ i $f(\xi)$ (rys. 4.2).



Rys. 4.2. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pola prostokąta

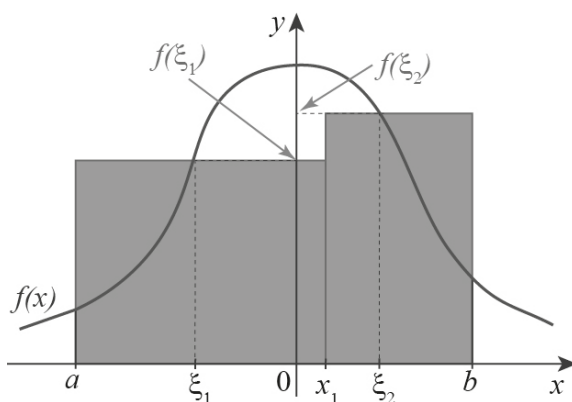
Pole tego prostokąta jest równe iloczynowi długości obu jego boków, czyli:

$$(b - a) \cdot (f(\xi) - 0).$$

Zatem pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ możemy przybliżyć polem utworzonego prostokąta σ_1 :

$$P \approx \sigma_1 = f(\xi)(b - a).$$

Podane przybliżenie jest jednak zbyt duże. Dlatego w kolejnym kroku dzielimy odcinek $\langle a, b \rangle$ na dwa odcinki w punkcie x_1 i dla każdego z nowo utworzonych odcinków powtarzamy poprzednią procedurę (rys. 4.3).

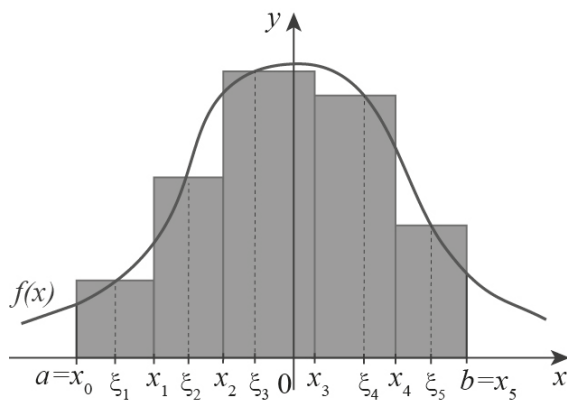


Rys. 4.3. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pól dwóch prostokątów

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ możemy zatem przybliżyć sumą pól obu prostokątów, co zapiszemy:

$$P \approx \sigma_2 = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(b - x_1).$$

Podane przybliżenie nadal jest zbyt duże, więc teraz podzielimy odcinek $\langle a, b \rangle$ na pięć części i dla każdego powtórzmy poprzednią procedurę (rys. 4.4).



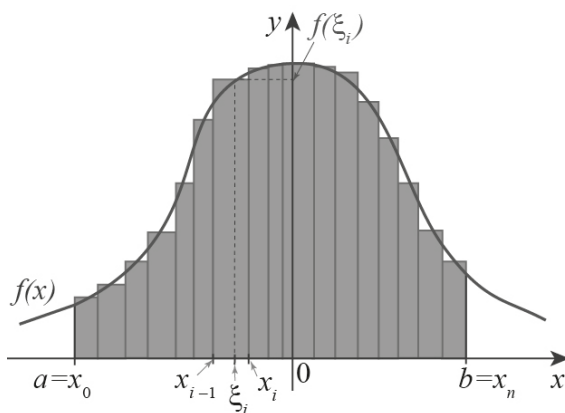
Rys 4.4. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pół pięciu prostokątów

Poszukiwane pole obszaru P możemy zatem przybliżyć sumą pól pięciu prostokątów wyznaczoną następująco:

$$P \approx \sigma_5 = \sum_{i=1}^5 f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

przy czym $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ dla każdego i .

Analizując rysunek 4.4, można zauważyć, że obliczenie pola analizowanego obszaru za pomocą pięciu prostokątów jest nadal niedokładne. Zatem podzielmy ostatecznie odcinek $\langle a, b \rangle$ nie na pięć, ale na n części i dla każdej powtórzmy poprzednią procedurę (rys. 4.5).



Rys 4.5. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pół n prostokątów

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ możemy zatem przybliżyć sumą pól n prostokątów, co wyrazimy następującym wzorem:

$$P \approx \sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

przy czym $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ dla każdego i .

Definicja całki oznaczonej w sensie Riemanna

Niech funkcja $f(x)$ będzie ograniczona na przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$. Jeżeli dla każdego ciągu podziałów odcinka $\langle a, b \rangle$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

takiego, że $(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, (czyli biorąc coraz węższe prostokąty, których szerokość jest tak mała, że dąży do zera) oraz dla dowolnych liczb $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ liczba przybliżona sumą pól tych prostokątów:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

dąży do tej samej liczby σ , to tę liczbę nazywamy **całką oznaczoną w sensie Riemanna funkcji $f(x)$ na przedziale $\langle a, b \rangle$** i oznaczamy ją następująco:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

O funkcji $f(x)$ mówimy, że jest całkowna w sensie Riemanna, a liczby a i b nazywamy odpowiednio dolną i górną granicą całkowania.

Przykłady całek oznaczonych:

a) $\int_0^2 x dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

c) $\int_{-2}^2 3e^x dx$

Własności całki oznaczonej (Riemanna) wynikające bezpośrednio z definicji:

1. Wartość całki oznaczonej o identycznej dolnej i górnej granicy całkowania wynosi zero:

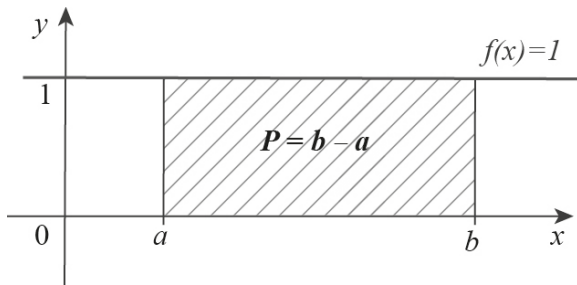
$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

2. Zamiana granic całkowania dolnej z górną zmienia znak przed całką na przeciwny:

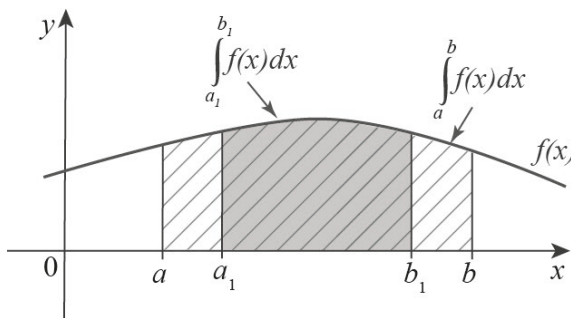
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Pozostałe własności całki oznaczonej

1. Całka oznaczona z funkcji $f(x) = 1$ wynosi $\int_a^b 1dx = b - a$.

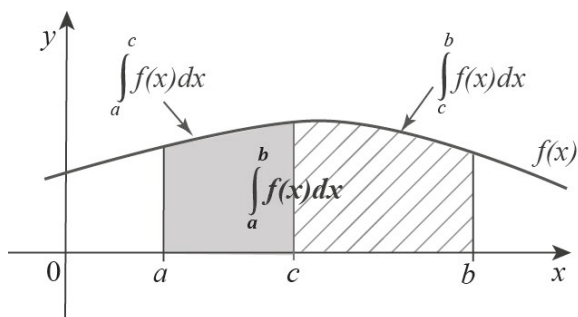


2. Jeżeli $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, to jest również całkowalna w przedziale $\langle a_1, b_1 \rangle$ zawartym w przedziale $\langle a, b \rangle$.



3. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$, wówczas dla dowolnego punktu $c \in \langle a, b \rangle$ zachodzi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$



4. Jeżeli funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowlne w przedziale $\langle a, b \rangle$, to suma (różnica) funkcji $f(x) + g(x)$ ($f(x) - g(x)$) jest również całkowlna w przedziale $\langle a, b \rangle$, przy czym:

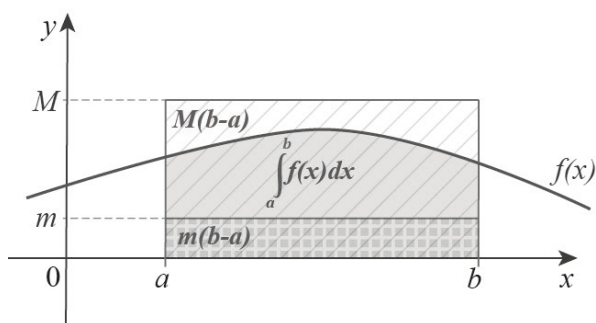
$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

5. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowlna w przedziale $\langle a, b \rangle$, k – stała, to funkcja $kf(x)$ jest również całkowlna w przedziale $\langle a, b \rangle$, przy czym:

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx.$$

6. Jeżeli istnieje całka oznaczona z funkcji $f(x)$ na przedziale $\langle a, b \rangle$ i jeżeli dla dowolnego x należącego do przedziału $\langle a, b \rangle$ istnieją stałe m i M , które ograniczają wartości funkcji $f(x)$, czyli $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, to wówczas zachodzi nierówność:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$



7. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w $\langle a, b \rangle$, to istnieje $c \in (a, b)$, dla którego zachodzi równanie:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Powyższy wzór można zapisać również następująco:

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$$

Wartość $f(c)$ nazywamy wartością średnią funkcji $f(x)$ w danym przedziale $\langle a, b \rangle$.

Obliczanie całek oznaczonych

Liczenie całek oznaczonych nie jest trudne, jeśli znane są zasady liczenia całek nieoznaczonych. W praktyce, aby policzyć całkę oznaczoną, można najpierw obliczyć całkę nieoznaczoną z podanej funkcji (czyli wyznaczyć funkcję pierwotną), a następnie zastosować wzór Newtona–Leibniza.

Wzór Newtona–Leibniza

(I główne twierdzenie rachunku całkowego)

Twierdzenie

Jeżeli $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji ciągłej $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, to:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Rozważmy poniższy przykład obrazujący sposób liczenia całki oznaczonej z wykorzystaniem wzoru Newtona–Leibniza.

Przykład 4.1.

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^3 2x^2 dx$.

Rozwiązanie:

$$\int_0^3 2x^2 dx =$$

Najpierw liczymy całkę nieoznaczoną $\int 2x^2 dx$. Otrzymany wynik wstawiamy do całki oznaczonej, umieszczając go w nawiasie kwadratowym [...] i pomijając stałą C . Granice całkowania przenosimy za nawias kwadratowy.

$$= \left[\frac{2x^3}{3} \right]_0^3 =$$

Za zmienną x podstawiamy najpierw górną granicę całkowania (w tym przypadku liczbę 3) i od tego wyrażenia odejmujemy wyrażenie, w którym zamiast x wstawiamy dolną granicę całkowania (w tym przypadku 0).

$$= \frac{2 \cdot 3^3}{3} - \frac{2 \cdot 0^3}{3} = 18 - 0 = 18.$$

Przeanalizujemy inne przykłady liczenia całek oznaczonych.

Przykład 4.2.

Obliczyć całki oznaczone:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$

b) $\int_0^1 (2^x + x - 1) dx$

c) $\int_0^\pi \cos x dx$

d) $\int_3^5 1 dx$

e) $\int_1^e \ln x dx$

f) $\int_2^5 5^x dx$

Rozwiązania:

a) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \frac{2^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2} - (-1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

b) $\int_0^1 (2^x + x - 1) dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left(\frac{2^1}{\ln 2} + \frac{1^2}{2} - 1 \right) - \left(\frac{2^0}{\ln 2} + \frac{0^2}{2} - 0 \right) =$
 $= \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2}$

c) $\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = \sin \pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

d) Możemy skorzystać z 1. własności całki oznaczonej:

$$\int_3^5 1 dx = 5 - 3 = 2$$

lub skorzystać ze wzorów na całkowanie i wzoru Newtona–Leibniza:

$$\int_3^5 1 dx = [x]_3^5 = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \int_1^e \ln x \, dx &= [x \ln x - x]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = \\ &= (e - e) - (1 \cdot 0 - 1) = 1 \end{aligned}$$

f) Możemy skorzystać z 1. własności całki oznaczonej (Riemanna) wynikającej bezpośrednio z definicji:

$$\int_2^2 5^x dx = 0$$

lub skorzystać ze wzorów na całkowanie i wzoru Newtona–Leibniza:

$$\int_2^2 5^x dx = \left[\frac{5^x}{\ln 5} \right]_2^2 = \frac{5^2}{\ln 5} - \frac{5^2}{\ln 5} = 0$$

Całki oznaczone rozwiązuje się również metodami całkowania przez części oraz podstawiania.

Wzór na całkowanie przez części (całki oznaczone)

Twierdzenie (o całkowaniu przez części całki oznaczonej)

Jeżeli funkcje $u(x)$, $v(x)$ są funkcjami mającymi ciągłe pochodne $u'(x)$, $v'(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, to:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x)dx &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx, \\ \text{gdzie: } [u(x)v(x)]_a^b &= u(b)v(b) - u(a)v(a). \end{aligned}$$

Aby zrozumieć powyższe twierdzenie, przeanalizujmy poniższy przykład.

Przykład 4.3.

Obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^1 x e^x dx$, wykorzystując wzór na całkowanie przez części.

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & v' = e^x \\ u' = 1 & v = e^x \end{array} \right| = \\ &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - [e^x]_0^1 = \\ &= e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

Wzór na całkowanie przez podstawienie (całki oznaczone)**Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie całki oznaczonej)**

Jeżeli funkcja $g(x)$ ma ciągłą pochodną $g'(x)$ w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, funkcja $f(x)$ jest ciągła w zbiorze wszystkich wartości, jakie przyjmuje funkcja $g(x)$ w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, to:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx,$$

gdzie: $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$.

W celu zrozumienia wzoru na wyznaczenie całki oznaczonej przez podstawienie przeanalizujemy poniższy przykład.

Przykład 4.4.

Oblicz całkę oznaczoną $\int_0^1 xe^{x^2+2}dx$.

Całkę oznaczoną można wyliczyć na dwa sposoby.

Sposób 1.

Licząc najpierw całkę nieoznaczoną metodą przez podstawienie, a następnie stosując wzór Newtona–Leibniza.

Sposób 2.

Wykorzystując pokazany w powyższym twierdzeniu wzór na wyliczanie całek oznaczonych przez podstawienie.

Rozwiązanie sposobem 1.

Najpierw liczymy całkę nieoznaczoną $\int xe^{x^2+2}dx$:

$$\int xe^{x^2+2}dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2 + 2 \\ dt = 2xdx \\ \frac{dt}{2} = xdx \end{array} \right| = \int \frac{e^t}{2} dt = \frac{e^t}{2} + C = \frac{e^{x^2+2}}{2} + C.$$

Następnie stosujemy wzór Newtona–Leibniza.

$$\int_0^1 xe^{x^2+2}dx = \left[\frac{e^{x^2+2}}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{e^{1^2+2}}{2} - \frac{e^{0+2}}{2} \right) = \frac{e^3}{2} - \frac{e^2}{2}.$$

Rozwiązanie sposobem 2.

Jeśli $t = x^2 + 2$, to $dt = 2x dx$.

Ponadto, gdy $x = 0$, to $t = 0^2 + 2 = 2$; gdy zaś $x = 1$, to $t = 1^2 + 2 = 3$.

Zatem zgodnie ze wzorem podanym w powyższym twierdzeniu otrzymujemy:

$$\int_0^1 x e^{x^2+2} dx = \int_2^3 \frac{e^t}{2} dt = \left[\frac{e^t}{2} \right]_2^3 = \frac{e^3}{2} - \frac{e^2}{2}.$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

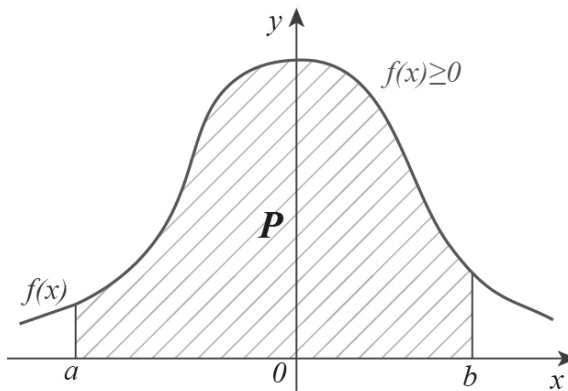
Całki oznaczone mają zastosowanie w geometrii, między innymi do obliczania:

- pól figur,
- długości krzywej,
- objętości brył,
- powierzchni brył.

Zanim jednak przedstawimy przykłady ich zastosowania, przeanalizujemy geometryczną interpretację całki oznaczonej.

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła i ograniczona w przedziale $\langle a, b \rangle$ i przyjmuje w nim wartości nieujemne, czyli $f(x) \geq 0$ (rys. 4.6), to pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ wyznaczmy ze wzoru:

$$P = \int_a^b f(x) dx$$



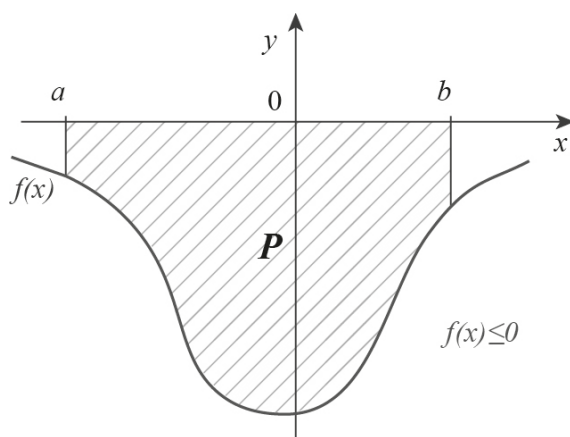
Rys. 4.6. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej ($f(x) \geq 0$)

Jeżeli zaś funkcja $f(x)$ jest ciągła i ograniczona w przedziale $\langle a, b \rangle$ i przyjmuje w nim wartości niedodatnie, czyli $f(x) \leq 0$ (rys. 4.7), to pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ wyznaczymy ze wzoru:

$$P = -\int_a^b f(x)dx.$$

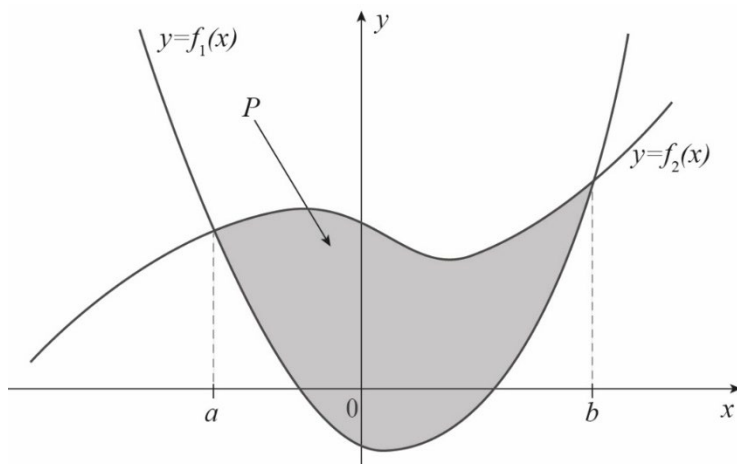
Zatem pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostymi $x = a$ oraz $x = b$ zawsze można obliczyć ze wzoru:

$$P = \int_a^b |f(x)|dx.$$



Rys. 4.7. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej ($f(x) \leq 0$)

Z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej wynika również możliwość wyliczenia pola obszaru ograniczonego wykresami dwóch funkcji. Przeanalizujemy rysunek 4.8.



Rys 4.8. Obszar ograniczony wykresami dwóch funkcji $y = f_1(x)$ oraz $y = f_2(x)$

Założmy, że P jest obszarem ograniczonym wykresami funkcji $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$, przy czym funkcje $f_1(x)$, $f_2(x)$ są ciągłe i ograniczone na przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz $\bigwedge_{x \in \langle a, b \rangle} f_2(x) \geq f_1(x)$. Ponadto wykres funkcji $f_2(x)$ ogranicza obszar P od góry, a funkcji $f_1(x)$ od dołu. Wykresy te przecinają się w punktach, których pierwsze współrzędne wynoszą $x = a$ oraz $x = b$. Wówczas pole obszaru P można wyliczyć z następującego wzoru:

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

Zastosowanie całek oznaczonych do liczenia pól figur.

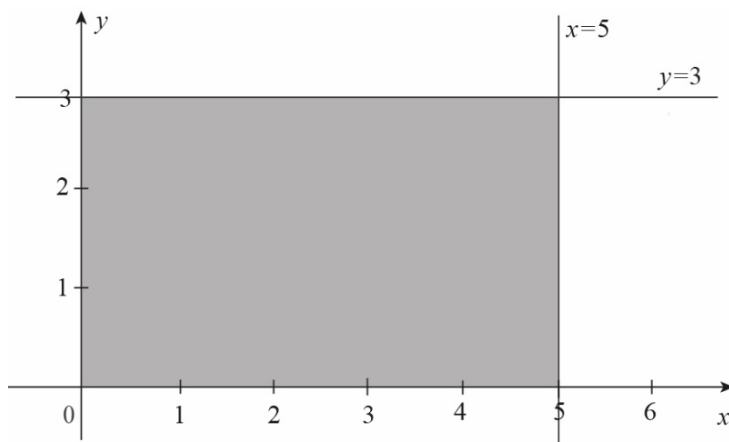
Przeanalizujmy poniższe przykłady liczenia pól figur z wykorzystaniem całek oznaczonych.

Przykład 4.5.

Obliczyć pole prostokąta ograniczonego prostymi $y = 3$ i $x = 5$ oraz osiami układu współrzędnych.

Rozwiązanie:

Liczenie pól zadanych obszarów należy zacząć od przygotowania rysunku (rys. 4.9), na podstawie którego łatwo będzie ustalić wzór całki.



Rys. 4.9. Prostokąt ograniczony prostymi $y = 3$ i $x = 5$ oraz osiami układu współrzędnych

Następnie zapisujemy wzór na pole prostokąta, pamiętając o interpretacji geometrycznej całki oznaczonej. Zatem:

$$P = \int_0^5 3 \, dx = [3x]_0^5 = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 0 = 15 \, j^2.$$

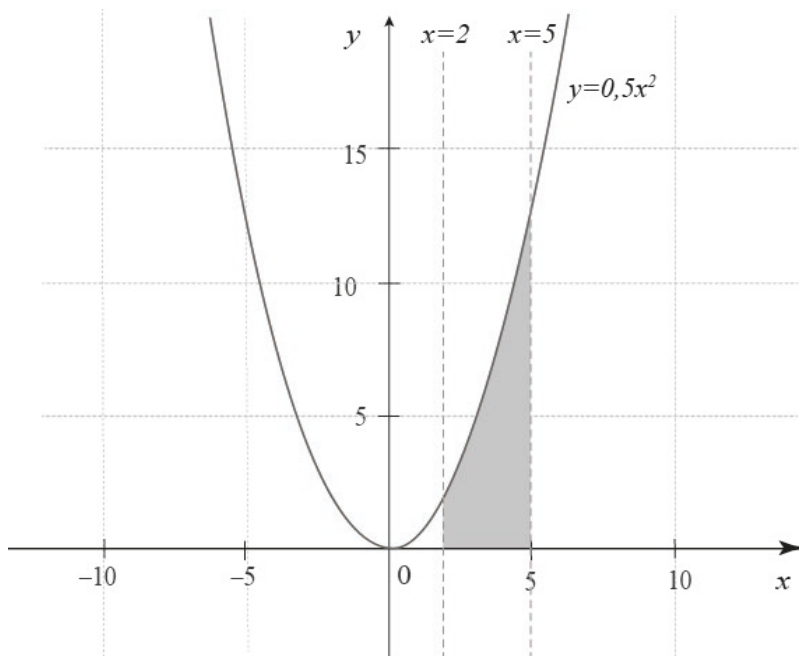
Odpowiedź: Pole prostokąta wynosi $15 \, j^2$.

Przykład 4.6.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego prostymi $x = 2$ i $x = 5$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = 0,5x^2$.

Rozwiązanie:

W celu zobrazowania przykładu należy narysować obszar, którego pola szukamy. W układzie współrzędnych rysujemy proste oraz wykres funkcji kwadratowej, a następnie zamalowujemy poszukiwany obszar (rys. 4.10).



Rys. 4.10. Obszar ograniczony prostymi $x = 2$ i $x = 5$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = 0,5x^2$

Liczmy pole:

$$\begin{aligned} P &= \int_2^5 0,5x^2 dx = \left[0,5 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_2^5 = \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_2^5 = \frac{1}{6} \cdot 5^3 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \\ &= \frac{1}{6} \cdot 125 - \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{125}{6} - \frac{8}{6} = \frac{117}{6} = 19,5 j^2. \end{aligned}$$

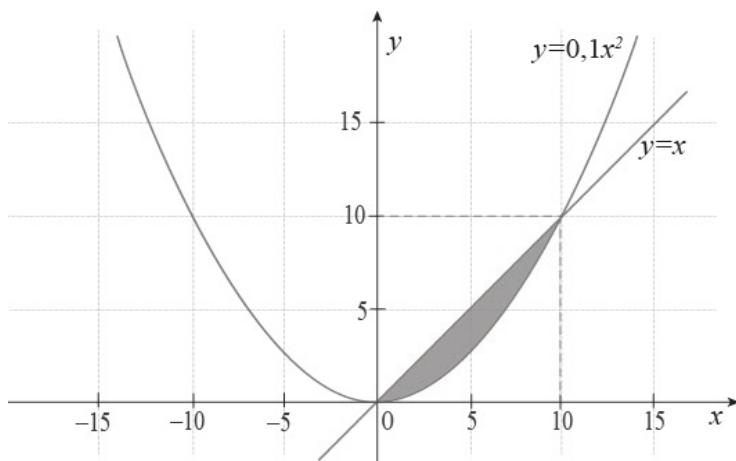
Odpowiedź: Pole obszaru wynosi $19,5 j^2$.

Przykład 4.7.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = 0,1x^2$ oraz prostą $y = x$.

Rozwiązanie:

Rysujemy wykres funkcji $y = 0,1x^2$ oraz prostą $y = x$ w układzie współrzędnych (rys. 4.11) i szukamy obszaru, którego pole mamy policzyć.



Rys. 4.11. Obszar ograniczony wykresem funkcji $y = 0,1x^2$ oraz prostą $y = x$

Zanim zaczniemy liczyć pole zamalowanego obszaru, trzeba wyznaczyć dolną i górną granicę całkowania. Należy zauważyć, że wartości te będą równe pierwszym współrzędnym punktów przecięcia się dwóch danych wykresów funkcji. Aby je znaleźć, musimy rozwiązać układ równań składający się ze wzorów analizowanych funkcji, czyli:

$$\begin{cases} y = 0,1x^2 \\ x = y \end{cases}.$$

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania:

$$\begin{cases} y = 0,1y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1y^2 - y = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0,1y - 1) = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 0,1y - 1 = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,1y = 1 \\ x = y \end{cases}$$

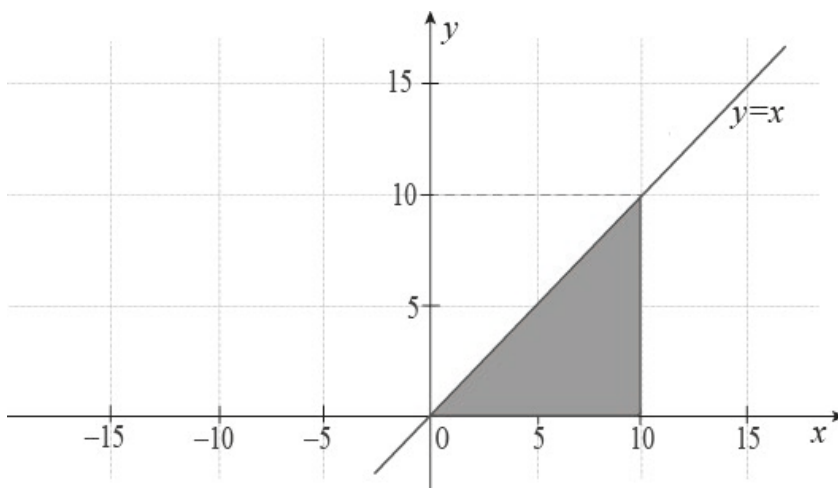
$$\begin{cases} y = 10 \\ x = 10 \end{cases}$$

Punkty przecięcia się wykresów funkcji to $(0,0)$ oraz $(10,10)$. Zatem obszar, którego pola szukamy, mieści się między $x = 0$ a $x = 10$. I stąd dolna granica całkowania wynosi 0, górna zaś 10.

Możemy przejść do liczenia pola.

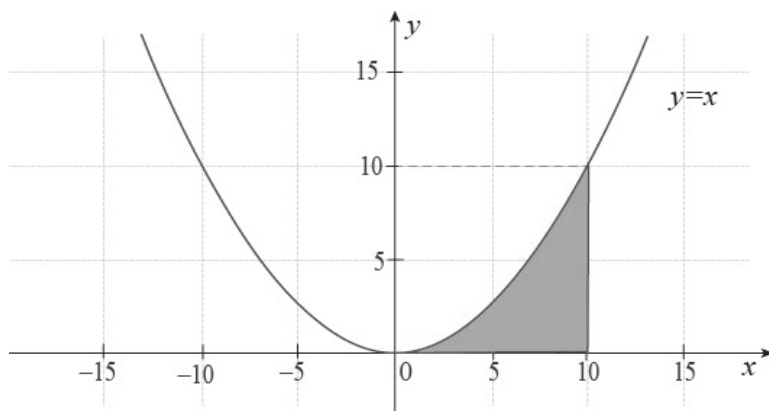
W przypadku tego przykładu można zauważyć, że obszar jest ograniczony wykresami dwóch funkcji. Przeanalizujmy więc dwie całki, $\int_0^{10} x \, dx$ oraz $\int_0^{10} 0,1x^2 \, dx$, i zobaczmy, które pola obszarów możemy policzyć z ich wykorzystaniem (rys. 4.12 i rys. 4.13).

Licząc całkę $\int_0^{10} x \, dx$, otrzymamy pole następującej figury (trójkąta):



Rys. 4.12. Obszar ograniczony prostymi $x = 0$ i $x = 10$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = x$

Licząc zaś całkę $\int_0^{10} 0,1x^2 \, dx$, otrzymamy pole następującej figury:



Rys 4.13. Obszar ograniczony prostymi $x = 0$ i $x = 10$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = 0,1x^2$

Można zauważyć, że pole obszaru szukanego jest różnicą pól figury z rysunku 4.12 i figury z rysunku 4.13. Zatem jeśli od $\int_0^{10} x \, dx$ odejmiemy $\int_0^{10} 0,1x^2 \, dx$, otrzymamy pole figury szukaney.

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{10} x \, dx - \int_0^{10} 0,1x^2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{10} - \left[0,1 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \\ &= \left(\frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) - \left(\frac{10^3}{30} - \frac{0^3}{30} \right) = \\ &= 50 - 33\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Pole analizowanego w przykładzie obszaru można policzyć również za pomocą jednej całki (porównaj rys. 4.8):

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{10} (x - 0,1x^2) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - 0,1 \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^{10} = \\ &= \left(\frac{10^2}{2} - 0,1 \cdot \frac{10^3}{3} \right) - \left(\frac{0^2}{2} - 0,1 \cdot \frac{0^3}{3} \right) = \\ &= 50 - 33\frac{1}{3} = 16\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

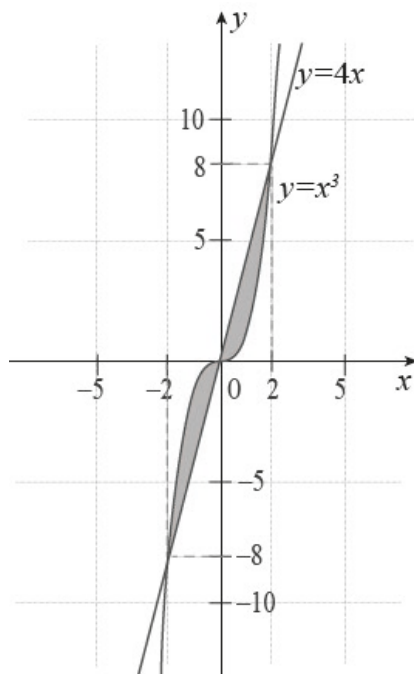
Odpowiedź: Pole obszaru wynosi $16\frac{2}{3} \, j^2$.

Przykład 4.8.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^3$ oraz $y = 4x$.

Rozwiązanie:

Zaczynamy od sporządzenia wykresów funkcji $y = x^3$ oraz $y = 4x$ (rys. 4.14).



Rys. 4.14. Obszar ograniczony wykresami funkcji $y = x^3$ oraz $y = 4x$

W celu określenia dolnej i górnej granicy całki szukamy współrzędnych punktów przecięcia się wykresów funkcji, czyli budujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}.$$

Rozwiązujemy układ równań metodą podstawiania:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4x = x^3 \\ y = 4x \end{cases} \\ &\begin{cases} x^3 - 4x = 0 \\ y = 4x \end{cases} \\ &\begin{cases} x(x^2 - 4) = 0 \\ y = 4x \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ y = x \end{cases} \\ &\begin{cases} x^2 = 4 \\ y = 4x \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -8 \end{cases} \end{aligned}$$

Punkty przecięcia się wykresów funkcji są następujące: $(-2, -8)$, $(0, 0)$ oraz $(2, 8)$. Pierwsze ich współrzędne będą stanowiły odpowiednio dolne i górne granice całkowania.

Przechodzimy do liczenia pola otrzymanego obszaru.

Analizując rysunek 4.14, można zauważyć, że dwie części zaznaczonego obszaru są sobie równe, ponieważ wykresy obu funkcji są symetryczne względem punktu $(0, 0)$. Zatem szukane pole zaznaczonego obszaru można policzyć jako podwojone pole jednego z obszarów:

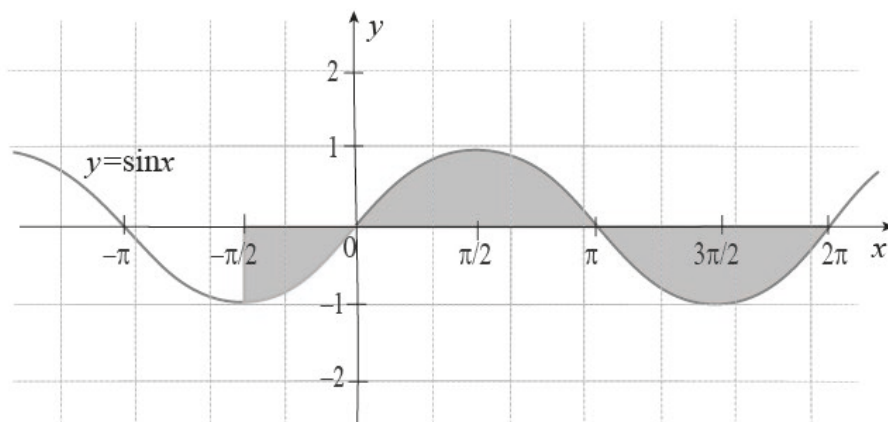
$$\begin{aligned} P &= 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \cdot \left[4 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 2 \cdot \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \\ &= 2 \cdot \left[\left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) - \left(2 \cdot 0^2 - \frac{0^4}{4} \right) \right] = 2 \cdot [(8 - 4) - 0] = 2 \cdot 4 = 8 j^2. \end{aligned}$$

Odpowiedź: Pole obszaru wynosi $8 j^2$.

Przykład 4.9.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, 2\pi \rangle$ oraz osią OX .

Rozwiązanie:



Rys. 4.15. Obszar ograniczony wykresem funkcji $y = \sin x$ w przedziale $\langle -\frac{\pi}{2}, 2\pi \rangle$ oraz osią OX

Analizując rysunek 4.15, można też zauważyć, że pole zaznaczonego obszaru jest równe sumie 2,5 pól obszarów ograniczonych prostymi $x = 0$ oraz $x = \pi$. Zatem szukane pole liczymy następująco:

$$\begin{aligned} P &= 2,5 \cdot \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2,5 \cdot [-\cos x]_0^{\pi} = \\ &= 2,5 \cdot (-\cos \pi - (-\cos 0)) = 2,5 \cdot (-(-1) - (-1)) = 5 \, j^2. \end{aligned}$$

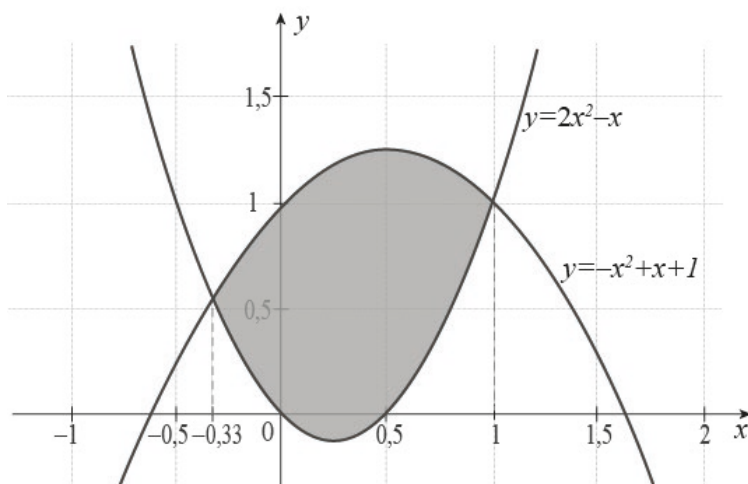
Odpowiedź: Pole obszaru wynosi $5 \, j^2$.

Przykład 4.10.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = 2x^2 - x$ oraz $y = -x^2 + x + 1$.

Rozwiązanie:

Na początku ilustrujemy przykład w układzie współrzędnych (rys. 4.16).



Rys. 4.16. Obszar ograniczony wykresami funkcji: $y = 2x^2 - x$ oraz $y = -x^2 + x + 1$

Następnie wyliczamy punkty przecięcia się wykresów funkcji, aby znaleźć dolną i górną granicę całkowania. W tym celu rozwiązujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x \\ y = -x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x \\ 2x^2 - x = -x^2 + x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x \\ 2x^2 - x + x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - x \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Zatem dolna granica całkowania wynosi $-\frac{1}{3}$, górna zaś 1.

Liczmy pole obszaru:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 ((-x^2 + x + 1) - (2x^2 - x)) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^1 (-x^2 + x + 1 - 2x^2 + x) dx = \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx = \left[-3 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right]_{-\frac{1}{3}}^1 = [-x^3 + x^2 + x]_{-\frac{1}{3}}^1 = \\ &= -1^3 + 1^2 + 1 - \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{27} - \frac{3}{27} + \frac{9}{27} = \frac{32}{27} j^2 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Pole obszaru wynosi $\frac{32}{27} j^2$.

Zastosowanie całek oznaczonych do liczenia długości krzywej.

Niech funkcja $f(x)$ będzie ciągła i ograniczona w przedziale $\langle a, b \rangle$.

Z wykorzystaniem całki oznaczonej można wyliczyć również **długość krzywej**. Długość krzywej Γ o równaniu $y = f(x)$, gdzie $x \in \langle a, b \rangle$, oblicza się z następującego wzoru:

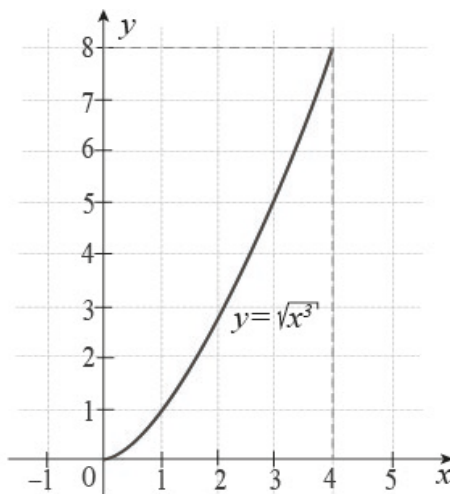
$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Przykład 4.11.

Obliczyć długość krzywej $y = \sqrt{x^3}$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$.

Rozwiązanie:

Przykład krzywej zilustrowano na rysunku 4.17.



Rys. 4.17. Wykres krzywej $y = \sqrt{x^3}$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$

Skorzystamy ze wzoru $|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Liczymy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x^3}$.

$$f'(x) = (\sqrt{x^3})' = (x^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Podstawiamy do wzoru:

$$|\Gamma| = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right]^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1 + \frac{9}{4}x \\ dt = \frac{9}{4}dx \\ \frac{4}{9}dt = dx \end{array} \right].$$

Skorzystamy z twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie. Gdy $x = 0$, to $t = 1 + \frac{9}{4} \cdot 0 = 1$; a gdy $x = 4$, to $t = 1 + \frac{9}{4} \cdot 4 = 10$. Zatem:

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \left[\frac{8}{27} \cdot t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{8}{27} \cdot 10^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} \cdot 1^{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{1000}}{27} - \frac{8}{27} = \\ &= \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

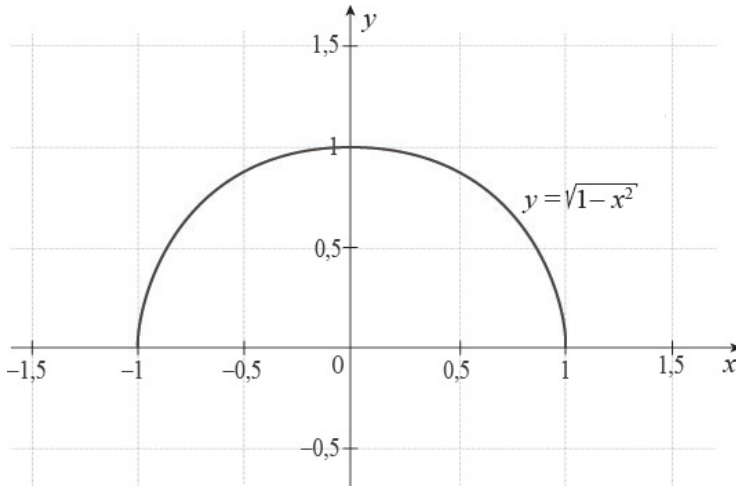
Odpowiedź: Długość krzywej wynosi $\frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) j$.

Przykład 4.12.

Obliczyć długość krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Rozwiązanie:

Analizowaną krzywą zilustrowano na rysunku 4.18.



Rys. 4.18. Wykres krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -1, 1 \rangle$

Skorzystamy ze wzoru $|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

Liczymy pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

i podstawiamy do wzoru:

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right]^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \end{aligned}$$

Otrzymana całka $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ jest całką niewymierną. Sposób jej obliczenia zaprezentowano w rozdziale 5, w przykładzie 5.3, w podpunkcie e.

Odpowiedź: Długość krzywej wynosi π .

Zastosowanie całek oznaczonych do liczenia objętości i pola powierzchni bryły obrotowej.

Całka oznaczona jest również wykorzystana do obliczania **objętości bryły obrotowej** oraz **pola jej powierzchni**.

Rozważmy bryłę, która jest ograniczona:

- powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $y = f(x)$, gdzie $x \in \langle a, b \rangle$, wokół osi OX

oraz

- płaszczyznami $x = a$ i $x = b$.

Objętość $|V|$ takiej bryły można policzyć ze wzoru:

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Pole powierzchni $|S|$ takiej bryły można zaś policzyć ze wzoru:

$$|S| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Przeanalizujemy poniższy przykład, który jest kontynuacją przykładu 3.12.

Przykład 4.13.

Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -1, 1 \rangle$ (z przykładu 4.12), wokół osi OX oraz jej pole powierzchni.

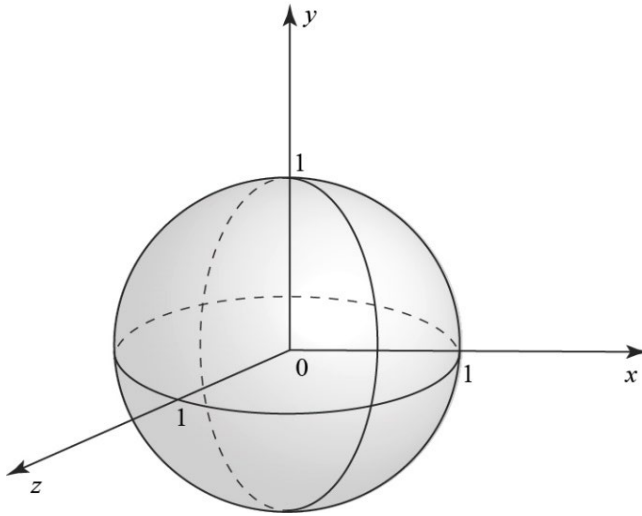
Rozwiązanie:

Na rysunku 4.19 zobrazowano analizowaną bryłę.

W pierwszej kolejności obliczmy objętość bryły ze wzoru $|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx$:

$$\begin{aligned} |V| &= \pi \int_{-1}^1 (\sqrt{1 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \pi \cdot \left[\left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right] = \pi \cdot \left[\frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Następnie obliczymy pole powierzchni bryły ze wzoru $|S| = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. Pochodna funkcji $y = \sqrt{1 - x^2}$ została policzona w poprzednim przykładzie.



Rys. 4.19. Wykres bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -1, 1 \rangle$

$$\begin{aligned}
 |S| &= 2\pi \int_{-1}^1 |\sqrt{1 - x^2}| \sqrt{1 + \left[(\sqrt{1 - x^2})' \right]^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \right]^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \sqrt{\frac{1 - x^2 + x^2}{1 - x^2}} dx = \\
 &= 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-1}^1 1 dx = 2\pi \cdot [x]_{-1}^1 = 2\pi \cdot (1 - (-1)) = 4\pi.
 \end{aligned}$$

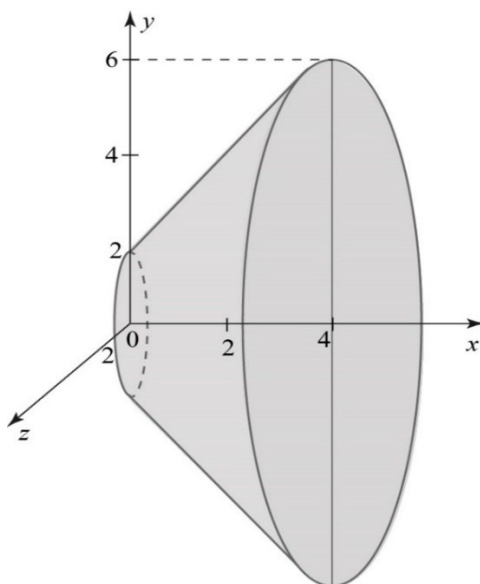
Odpowiedź: Objętość bryły wynosi $\frac{4\pi}{3} j^3$, a jej pole powierzchni wynosi $4\pi j^2$.

Przykład 4.14.

Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = x + 2$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$, wokół osi OX oraz jej pole powierzchni.

Rozwiązanie:

Bryłę powstałą w wyniku obrotu krzywej $y = x + 2$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$, wokół osi OX przedstawiono na rysunku 4.20.



Rys. 4.20. Wykres bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = x + 2$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$, wokół osi OX

Obliczamy objętość bryły:

$$\begin{aligned}
 |V| &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (x+2)^2 dx = \pi \int_0^4 (x^2 + 4x + 4) dx = \\
 &= \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 4x \right]_0^4 = \pi \cdot \left[\frac{4^3}{3} + \frac{4 \cdot 4^2}{2} + 4 \cdot 4 - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{4 \cdot 0^2}{2} + 4 \cdot 0 \right) \right] = \\
 &= \pi \cdot \left[\frac{64}{3} + 32 + 16 - 0 \right] = 69\frac{1}{3}\pi.
 \end{aligned}$$

Obliczamy pole powierzchni bryły:

$$\begin{aligned}
 |S| &= 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^4 |x+2| \sqrt{1 + [(x+2)']^2} dx = \\
 &= 2\pi \int_0^4 (x+2) \sqrt{1 + 1^2} dx = 2\pi \int_0^4 (x+2) \sqrt{2} dx = \\
 &= 2\pi \int_0^4 (\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}) dx = 2\pi \cdot \left[\frac{\sqrt{2}x^2}{2} + 2\sqrt{2}x \right]_0^4 = \\
 &= 2\pi \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2} \cdot 4^2}{2} + 2\sqrt{2} \cdot 4 \right) - \left(\frac{\sqrt{2} \cdot 0^2}{2} + 2\sqrt{2} \cdot 0 \right) \right] = \\
 &= 2\pi \cdot [(8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}) - 0] = 32\sqrt{2}\pi.
 \end{aligned}$$

Odpowiedź: Objętość bryły wynosi $69\frac{1}{3}\pi j^3$, a jej pole powierzchni wynosi $32\sqrt{2}\pi j^2$.

Zadania

1. Obliczyć całki oznaczone:

a) $\int_1^3 x^5 dx$

b) $\int_{-1}^2 e^x dx$

c) $\int_0^2 5^x dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$

e) $\int_{-1}^1 (x^2 + x - 2) dx$

f) $\int_1^2 x \cdot \sqrt{x^4} dx$

g) $\int_1^2 2x \cdot e^x dx$

h) $\int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx$

2. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^3$ i $y = 3x$.

3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = 3x$ i $y = x^2$.

4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^3$ i $y = x^2$.

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2 + 2x$ i $y = x + 2$.

6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2 - x - 4$ i $y = -x$.

7. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2 + 2x$ i $y = -x^2 + 4x$.

8. Obliczyć długości podanych krzywych:

a) $y = \ln x$, gdzie $x \in \langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$,

b) $y = \ln(1 - x^2)$, gdzie $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$.

9. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sin x$, gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$, wokół osi OX.

10. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y^2 = 4x$, gdzie $x \in \langle 0, 2 \rangle$, wokół osi OX oraz pole jej powierzchni.

Odpowiedzi

1.

a) $\frac{364}{3}$

b) $-\frac{1}{e} + e^2$

c) $\frac{24}{\ln 5}$

d) 0

e) $-\frac{10}{3}$

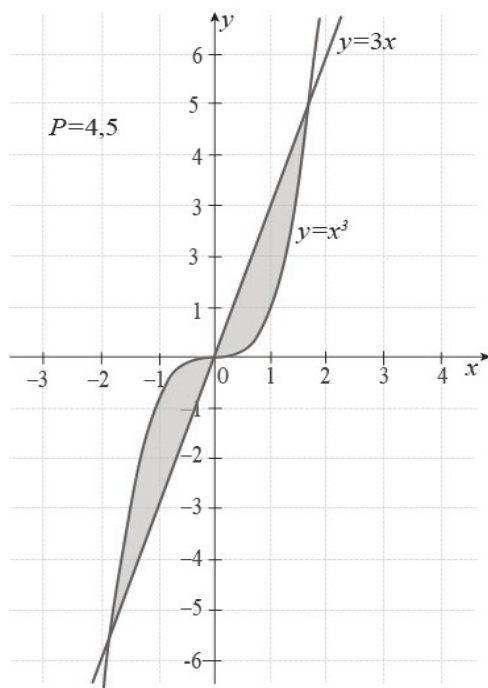
f) $\frac{15}{4}$

g) $2e^2$

h) $-\frac{1}{2} + \frac{e}{2}$

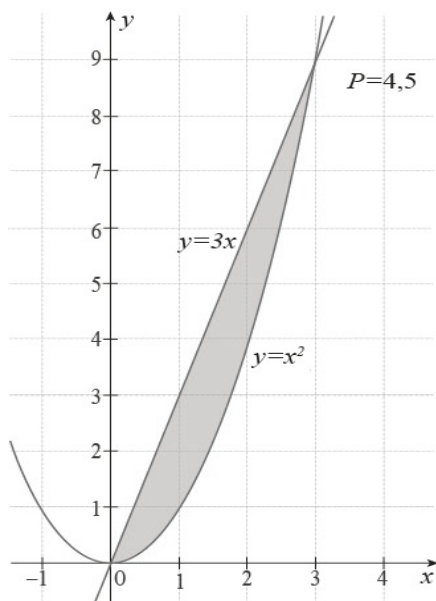
2.

4,5



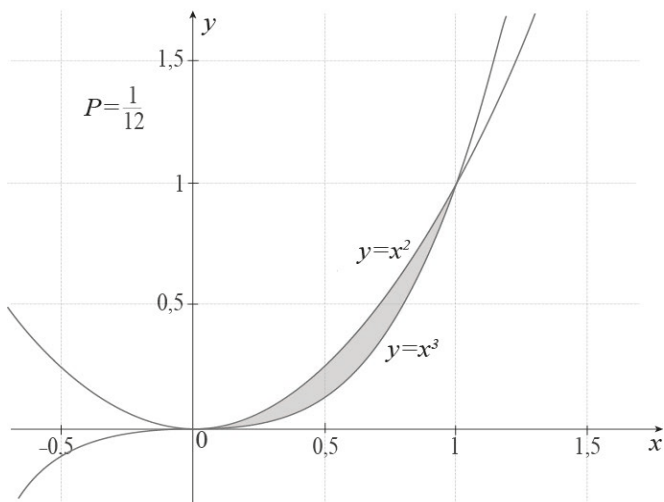
3.

4,5



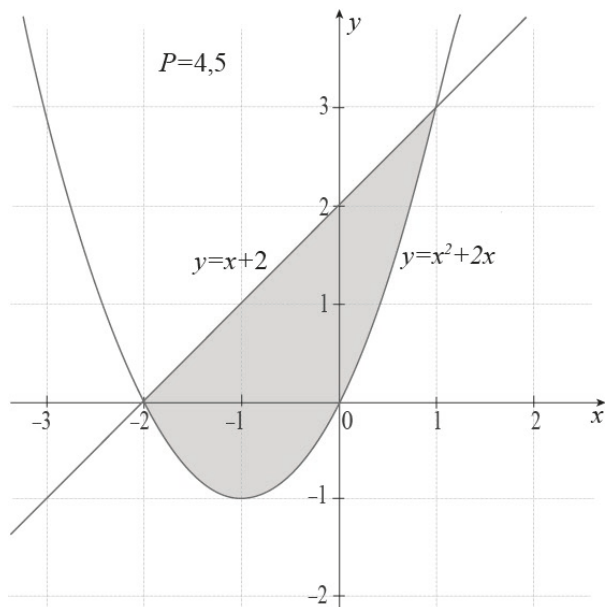
4.

$\frac{1}{12}$



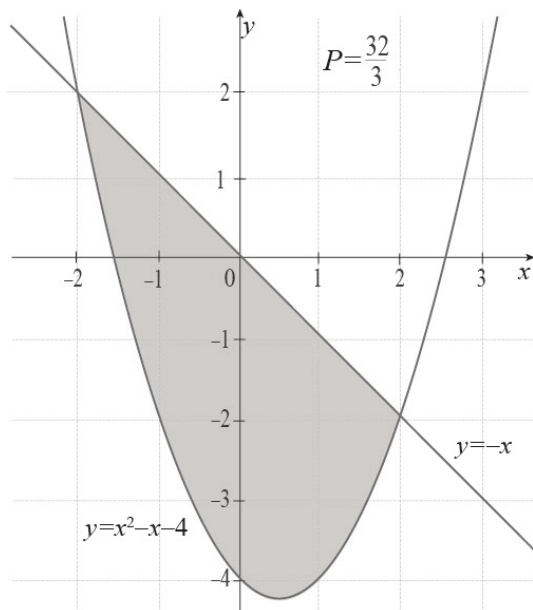
5.

4,5



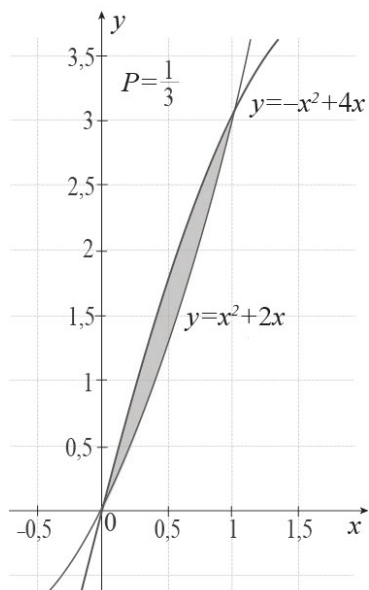
6.

$\frac{32}{3}$



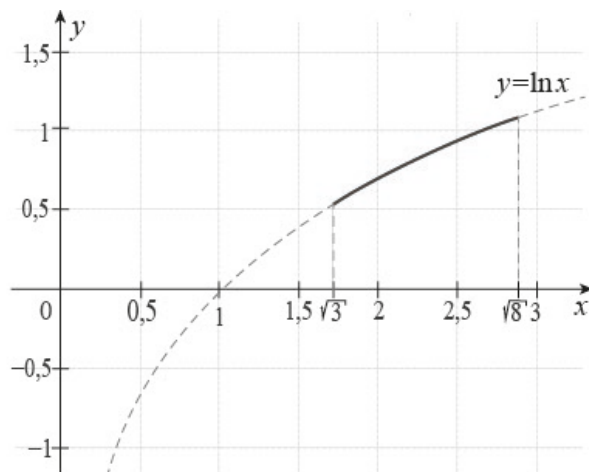
7.

$$\frac{1}{3}$$

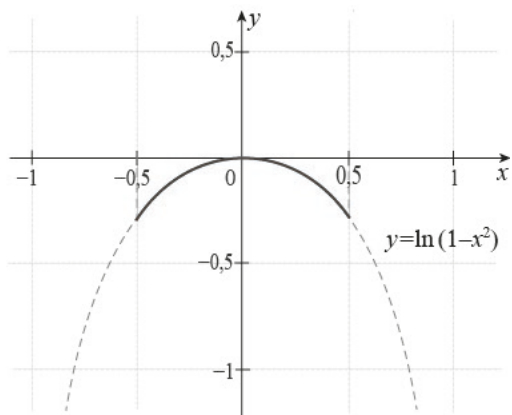


8.

a) $1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

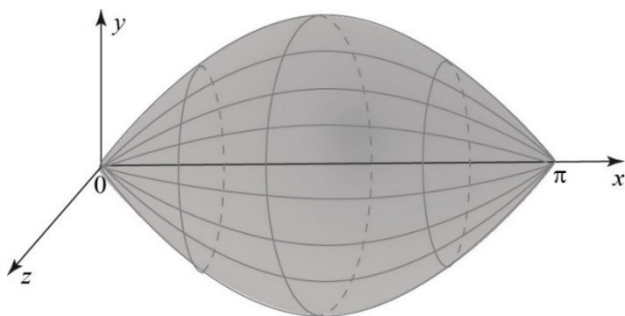


b) $2 \ln 3 - 1$



9.

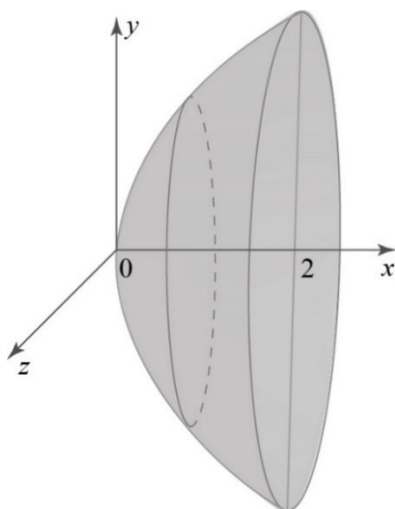
$$\frac{\pi^2}{2}$$



10.

$$|V| = 8\pi$$

$$|S| = 35,1536$$



5. CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

W definicji całki oznaczonej zakładano, że funkcja podcałkowa jest ograniczona w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$. Może się jednak zdarzyć, że funkcja jest nieograniczona w przedziale $\langle a, b \rangle$ lub przedział jest nieskończony. Mówimy wtedy, że mamy do czynienia z całką niewłaściwą.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $\langle a, \infty \rangle$ i całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ dla każdej liczby $b \in \langle a, \infty \rangle$.

Definicja całki niewłaściwej (w przedziale $\langle a, \infty \rangle$)

Całką niewłaściwą I rodzaju nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

i oznaczamy symbolem $\int_a^\infty f(x) dx$.

Można więc zapisać:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Uwaga!

Jeżeli powyższa granica jest skończona, to całkę niewłaściwą nazywamy **zbieżną**².

Jeżeli powyższa granica jest nieskończona, to całkę niewłaściwą nazywamy **rozbieżną**.

Jeżeli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa **nie istnieje**.

Analogicznie definiujemy całkę niewłaściwą dla nieskończonego przedziału całkowania $(-\infty, b)$.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, b)$ i całkowalna w przedziale $\langle a, b \rangle$ dla każdej liczby $a \in (-\infty, b)$.

² W literaturze można też spotkać stwierdzenie, że w takim wypadku całka niewłaściwa istnieje.

Definicja całki niewłaściwej (w przedziale $(-\infty, b)$)

Całką niewłaściwą I rodzaju nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

i oznaczamy symbolem $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

Można więc zapisać:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Uwaga!

Jeżeli powyższa granica istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ jest zbieżna i że jej wartość jest równa tej granicy.

Podobnie całkę niewłaściwą definiujemy na przedziale nieskończonym $(-\infty, \infty)$.

Definicja całki niewłaściwej (w przedziale $(-\infty, \infty)$)

Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w przedziale $(-\infty, \infty)$, wtedy całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ jest równa sumie całek $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ i $\int_c^{\infty} f(x) dx$, gdzie $c \in (-\infty, \infty)$, czyli:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx.$$

Uwaga!

Całka $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna, gdy całki $\int_{-\infty}^c f(x) dx$ i $\int_c^{\infty} f(x) dx$ są zbieżne, a jej wartość równa jest sumie wartości tych całek.

Przykład 5.1.

Obliczyć całki niewłaściwe (o ile istnieją):

a) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$

b) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

$$c) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)^2} dx$$

$$d) \int_{-\infty}^0 x e^x dx$$

Rozwiązania:

$$a) \int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln|x|]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|b| - \ln|2| = \infty,$$

czyli całka $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$ jest rozbieżna (nie istnieje)

$$b) \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \\ = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} - (-e^0) = 0 + 1 = 1,$$

czyli całka $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ jest zbieżna (istnieje),

całkę nieoznaczoną $\int e^{-x} dx$ obliczamy, stosując wzór nr 7 z tabeli 1.1:

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C, \text{ zaś } \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} = 0$$

$$c) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{(x-3)^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x-3} \right]_a^0 = -\frac{1}{-3} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{a-3} = \frac{1}{3},$$

czyli całka $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-3)^2} dx$ jest zbieżna (istnieje),

całkę nieoznaczoną $\int \frac{1}{(x-3)^2} dx$ obliczamy, stosując wzór na całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju wyprowadzony w rozdziale 3: $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$, czyli $\int \frac{1}{(x-3)^2} dx = -\frac{1}{x-3} + C$, zaś $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{a-3} = 0$

$$d) \int_{-\infty}^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x(x-1)]_a^0 = \\ = e^0 \cdot (-1) - \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a(a-1) =$$

$$= -1 - 0 = -1,$$

czyli całka $\int_{-\infty}^0 x e^x dx$ jest zbieżna (istnieje),

całkę nieoznaczoną $\int x e^x dx$ obliczamy, stosując wzór na całkowanie przez części:

$$\int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad v' = e^x \\ u' = 1 \quad v = e^x \end{array} \right| = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C =$$

$$= e^x(x - 1) + C, \text{ a } \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a(a - 1) = [0 \cdot (-\infty)] = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{a-1}{\frac{1}{e^a}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right]$$

i stosując regułę de l'Hospitala, granicę liczymy następująco: $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-a}} = 0$

Przykład 5.2.

Obliczyć całki niewłaściwe:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Rozwiązania:

Niech $c \in (-\infty, \infty)$, wtedy:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx &= \int_{-\infty}^c \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx + \int_c^{\infty} \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx + \\ &+ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{1+x^2} \right]_a^c + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1+x^2} \right]_c^b = \\ &= \cancel{\frac{1}{1+c^2}} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+a^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1+b^2} - \cancel{\frac{1}{1+c^2}} = 0 \end{aligned}$$

całkę nieoznaczoną $\int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx$ obliczamy, stosując wzór na całkowanie przez podstawienie:

$$\int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} dx = \left| \frac{1+x^2 = t}{2x dx = dt} \right| = - \int \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{1+x^2} + C,$$

$$\text{a) } \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+a^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1+b^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^c \frac{1}{1+x^2} dx + \int_c^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c \frac{1}{1+x^2} dx + \\ &+ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [\arctg x]_a^c + \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctg x]_c^b = \\ &= \cancel{\arctg c} - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg a + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg b - \cancel{\arctg c} = \\ &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Z całką niewłaściwą mamy również do czynienia, gdy funkcja f jest nieograniczona w pewnym otoczeniu punktu $c \in \langle a, b \rangle$ i ciągła w każdym punkcie tego przedziału, z wyjątkiem punktu $x = c$.

Niech funkcja f będzie nieograniczona w pewnym otoczeniu punktu $c \in \langle a, b \rangle$ i ciągła w każdym punkcie tego przedziału, z wyjątkiem punktu $x = c$.

Definicja całki niewłaściwej (w przedziale $\langle a, b \rangle$)

Całką niewłaściwą II rodzaju nazywamy sumę granic (o ile te granice istnieją):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Jeżeli $c = a$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,$$

gdy zaś $c = b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Przykład 5.3.

Obliczyć całki niewłaściwe:

- a) $\int_0^5 \frac{1}{x} dx$
- b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- c) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} dx$
- d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$
- e) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Rozwiązania:

Najpierw należy wyznaczyć dziedziny funkcji podcałkowych, aby znaleźć punkty, w których wartość funkcji nie istnieje.

- a) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$ i $0 \in \langle 0, 5 \rangle$, więc:

$$\int_0^5 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^5 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\ln|x|]_{\varepsilon}^5 = \ln 5 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln|\varepsilon| = \infty,$$

$$\text{gd} \ddot{y} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln|\varepsilon| = -\infty$$

b) $D_f = \mathbf{R}_+$ i $0 \in \langle 0, 4 \rangle$, więc:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^4 = \\ &= 2 \cdot \sqrt{4} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4\end{aligned}$$

c) $D_f = \mathbf{R} - \{1\}$ i $1 \in \langle 0, 9 \rangle$, więc:

$$\begin{aligned}\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \int_1^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{1+\varepsilon}^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_{1+\varepsilon}^9 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\varepsilon^2} - \frac{3}{2} \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \cdot 4 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\varepsilon^2} \right) = -\frac{3}{2} + 6 = 4\frac{1}{2}\end{aligned}$$

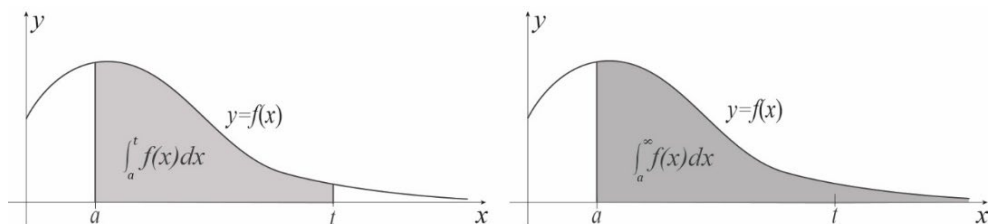
d) $D_f = \mathbf{R} - \{0\}$ i $0 \in \langle -1, 1 \rangle$, więc:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty\end{aligned}$$

e) $D_f = (-1, 1)$ i $-1 \in \langle -1, 1 \rangle$ oraz $1 \in \langle -1, 1 \rangle$, więc:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\arcsin (1 - \varepsilon) - \arcsin (-1 + \varepsilon)) = \\ &= \arcsin 1 - \arcsin -1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi\end{aligned}$$

Całki niewłaściwe jako całki oznaczone można stosować do obliczania pól obszarów ograniczonych osią OX oraz wykresem funkcji $y = f(x)$. Niech funkcja f będzie określona w przedziale $\langle a, \infty \rangle$ i całkowalna w przedziale $\langle a, t \rangle$ dla każdej liczby $t \in \langle a, \infty \rangle$. Aby obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $f(x)$, osią OX i prostą $x = a$ dla $x \rightarrow \infty$ (rys. 5.1), wyznaczamy całkę oznaczoną $\int_a^t f(x) dx$ dla $t \in \langle a, \infty \rangle$, a następnie liczymy jej granicę przy $t \rightarrow \infty$. Ostatecznie szukane pole obliczamy ze wzoru $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx$.



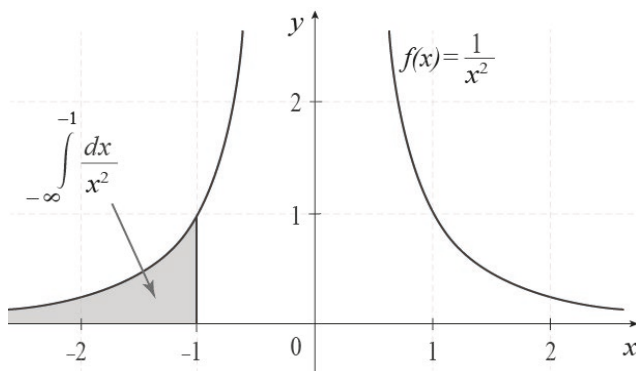
Rys. 5.1. Graficzna interpretacja całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x)dx$

Przykład 5.4.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na odcinku $(-\infty, -1)$.

Rozwiązanie:

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i zaznaczmy obszar, którego pole należy obliczyć (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Obszar ograniczony osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na odcinku $(-\infty, -1)$

Aby policzyć pole obszaru, należy obliczyć całkę:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx.$$

Jest to całka niewłaściwa, więc należy obliczyć granicę $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x^2} dx$.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-1} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{-1} = 1 + \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{1}{a} = 1.$$

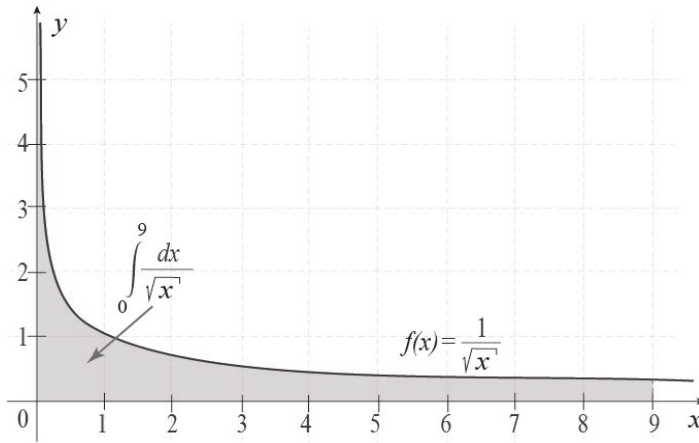
Odpowiedź: Pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na odcinku $(-\infty, -1)$ wynosi 1 j².

Przykład 5.5.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na odcinku $(0, 9)$.

Rozwiązanie:

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i zaznaczmy obszar, którego pole należy obliczyć (rys. 5.3).



Rys. 5.3. Obszar ograniczony osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Aby policzyć pole zaznaczonego obszaru, należy obliczyć całkę:

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Jest to całka niewłaściwa, więc należy obliczyć granicę $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^9 = \\ &= 2 \cdot \sqrt{9} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{\varepsilon} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 6. \end{aligned}$$

Całka nieoznaczona $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ wynosi:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

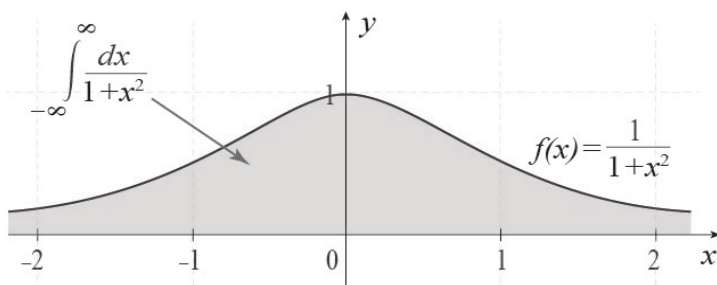
Odpowiedź: Pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na odcinku $(0, 9)$ wynosi 6 j^2 .

Przykład 5.6.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Rozwiązanie:

Rysujemy wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ i zaznaczmy obszar, którego pole należy obliczyć (rys. 5.4).



Rys. 5.4. Obszar ograniczony osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

Z wykresu wynika, że aby policzyć pole zaznaczonego obszaru, należy obliczyć całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Wykorzystując rozwiązanie przykładu 5.2 pkt b niniejszego rozdziału, można stwierdzić, że pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ wynosi π .

Zadania

1. Obliczyć całki (o ile istnieją):

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

b) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^3} dx$

c) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

d) $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

e) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$

f) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

g) $\int_4^{\infty} \frac{1}{(x-3)^2} dx$

2. Obliczyć całki (o ile istnieją):

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx$

c) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

3. Obliczyć całki (o ile istnieją):

a) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$

c) $\int_2^5 \frac{x dx}{4-x^2}$

d) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx$

e) $\int_0^1 x^{-\frac{1}{4}} dx$

f) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx$

g) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

h) $\int_0^1 x \ln x dx$

4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osią OX oraz wykresem funkcji:

a) $f(x) = e^x$ i prostą o równaniu $x = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ i prostą o równaniu $x = 1$

c) $f(x) = tg x$ i prostymi o równaniach $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Odpowiedzi

1.

a) ∞ , całka rozbieżna

b) $-\frac{1}{2}$

c) $\frac{\pi}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) ∞ , całka rozbieżna

f) ∞ , całka rozbieżna

g) 1

2.

a) całka nie istnieje

b) całka nie istnieje

c) 0

3.

a) 1

b) ∞ , całka rozbieżna

c) $-\infty$, całka rozbieżna

d) $-\infty$, całka rozbieżna

e) $\frac{4}{3}$

f) $-\infty$, całka rozbieżna

g) $\frac{1}{\ln 2}$

h) $-\frac{1}{4}$

4.

a) $P = e$

b) $P = \frac{1}{2}$

c) $P = \infty$

d) $P = \infty$

6. POWTÓRZENIOWE PYTANIA TESTOWE

1. W definicji całki nieoznaczonej:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

funkcję $F(x)$ nazywamy:

- a) funkcją podcałkową,
- b) funkcją pierwotną,
- c) stałą całkowania,
- d) zmienną całkowania.

2. W definicji całki nieoznaczonej:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

funkcję $f(x)$ nazywamy:

- a) funkcją podcałkową,
- b) funkcją pierwotną,
- c) stałą całkowania,
- d) zmienną całkowania.

3. Czy wykresy funkcji pierwotnych dla danej funkcji podcałkowej mogą się przecinać?

- a) tak,
- b) nie,
- c) to zależy od wzoru funkcji podcałkowej,
- d) to zależy od wzoru funkcji pierwotnych.

4. Który z poniższych wzorów jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^2$?

- a) $2x$,
- b) $3x^3$,
- c) $\frac{x^3}{3}$,
- d) $\frac{x^3}{2}$.

5. Który z poniższych wzorów jest funkcją pierwotną funkcji $f(x) = \sin x$?

- a) $\cos x$,
- b) $-\cos x$,
- c) $-\sin x$,
- d) $\frac{\sin^2 x}{2}$.

6. Który wzór jest prawdziwy?

- a) $\int x^3 dx = 3x^2 + C,$
- b) $\int x^3 dx = x^4 + C,$
- c) $\int x^3 dx = 3x^4 + C,$
- d) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C.$

7. Który wzór jest prawdziwy?

- a) $\int e^x dx = -e^x + C,$
- b) $\int \cos x dx = -\sin x + C,$
- c) $\int \ln x dx = x + C,$
- d) $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. Który wzór jest prawdziwy?

- a) $\int \sin(x+1)dx = \sin(x+1) + C,$
- b) $\int \sin(x+1)dx = -x \cos(x+1) + C,$
- c) $\int \sin(x+1)dx = -\cos(x+1) + C,$
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

9. Całka $\int \frac{x}{x^2+3} dx$ wynosi:

- a) $\frac{1}{2} \ln|x^2+3| + C,$
- b) $\ln|x^2+3| + C,$
- c) $2 \ln|x^2+3| + C,$
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

10. Całka $\int x \cos x dx$ wynosi:

- a) $x^2 \sin x + C,$
- b) $\sin x + \cos x + C,$
- c) $x \sin x - \sin x + C,$
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

11. Całka $\int_0^2 2x dx$ wynosi:

- a) 0,
- b) 2,
- c) 4,
- d) $\infty.$

12. Całka $\int_0^2 2x^3 dx$ wynosi:

- a) 8,
- b) 4,
- c) 2,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

13. Całka $\int_0^1 e^x dx$ wynosi:

- a) e ,
- b) 0,
- c) $e - 1$,
- d) 1.

14. Całka $\int_0^1 -e^x dx$ wynosi:

- a) $-e$,
- b) 0,
- c) $-e + 1$,
- d) -1 .

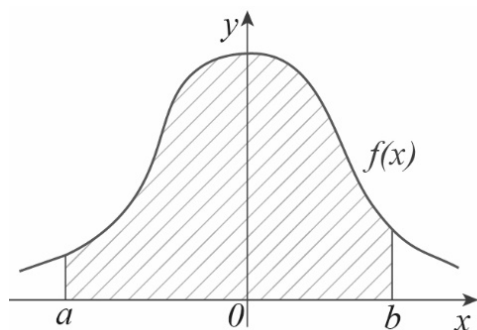
15. Całka $\int_0^\pi \sin x dx$ wynosi:

- a) 0,
- b) -1 ,
- c) 2,
- d) -2 .

16. Całka $\int_0^\pi \cos x dx$ wynosi:

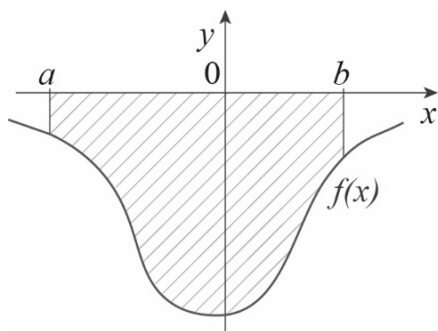
- a) -1 ,
- b) 0,
- c) 1,
- d) ∞ .

17. Pole zakreskowanej figury wyraża się wzorem:



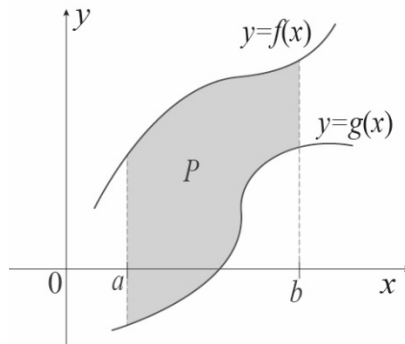
- a) $P = 1$,
- b) $P = -\int_a^b f(x)dx$,
- c) $P = \int_a^b f(x)dx$,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

18. Pole zakreskowanej figury wyraża się wzorem:

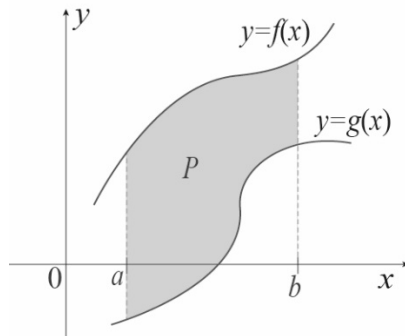


- a) $P = 1$,
- b) $P = -\int_a^b f(x)dx$,
- c) $P = \int_a^b f(x)dx$,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

19. Pole P figury ograniczonej krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:



- a) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$,
 - b) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$,
 - c) $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx$,
 - d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.
20. Pole P figury ograniczonej krzywymi $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz prostymi $x = a$, $x = b$ wyraża się wzorem:

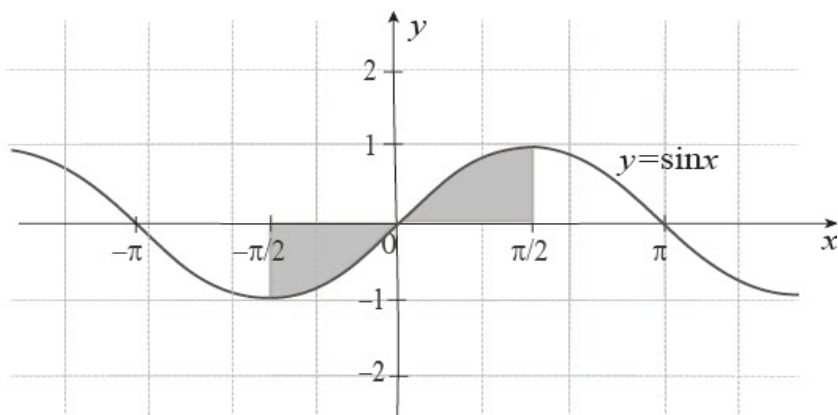


- a) $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$,
- b) $\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$,
- c) $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

21. Pole obszaru ograniczonego parabolą $y = x^2$ i prostą $y = x$ wyraża się wzorem:

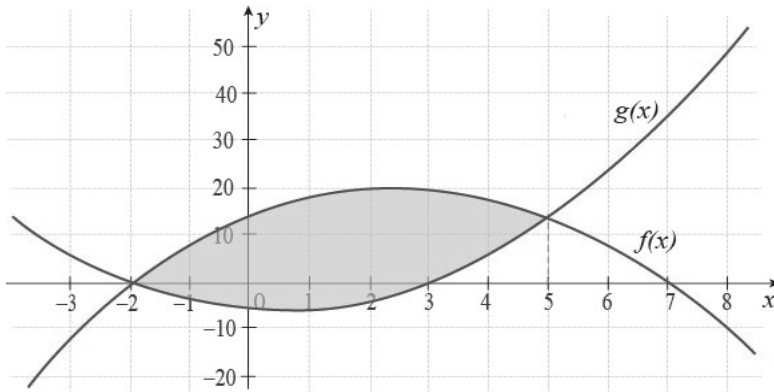
- a) $\int_0^1 (x^2 + x) dx$,
- b) $\int_0^1 (x^2 - x) dx$,
- c) $\int_0^1 (x - x^2) dx$,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

22. Do obliczenia pola obszaru zamalowanego na rysunku nie zastosujemy wzoru:



- a) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$,
- b) $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$,
- c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx$,
- d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\sin x| dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$.

23. Pole obszaru zakreskowanego na rysunku ($f(x) = -x^2 + 5x + 14$, $g(x) = x^2 - x - 6$) obliczymy ze wzoru:



- $\int_{-2}^5 (-x^2 + 5x + 14 - x^2 - x - 6) dx,$
 - $\int_{-2}^5 ((x^2 - x - 6) - (-x^2 + 5x + 14)) dx,$
 - $\int_{-2}^5 (x^2 - x - 6 - x^2 + 5x + 14) dx,$
 - $\int_{-2}^5 ((-x^2 + 5x + 14) - (x^2 - x - 6)) dx.$
24. Za pomocą którego wzoru obliczymy długość krzywej $y = f(x)$ ograniczonej dwiema prostymi $x = a$ oraz $x = b$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in \mathbb{R}$?
- $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$
 - $\int_a^b |f(x)| dx,$
 - $\pi \int_a^b f^2(x) dx,$
 - $2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$
25. Za pomocą którego wzoru obliczymy pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = f(x)$, osią OX i dwiema prostymi $x = a$ oraz $x = b$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in \mathbb{R}$?
- $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$
 - $\int_a^b |f(x)| dx,$

- c) $\pi \int_a^b f^2(x) dx$,
 d) $2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

26. Za pomocą którego wzoru obliczymy objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX w granicach od a do b , gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in \mathbb{R}$?

- a) $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$,
 b) $\int_a^b |f(x)| dx$,
 c) $\pi \int_a^b f^2(x) dx$,
 d) $2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

27. Za pomocą którego wzoru obliczymy pole powierzchni bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX w granicach od a do b , gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in \mathbb{R}$?

- a) $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$,
 b) $\int_a^b |f(x)| dx$,
 c) $\pi \int_a^b f^2(x) dx$,
 d) $2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.

28. Za pomocą którego wzoru nie obliczymy długości krzywej $y = \ln x$ ograniczonej dwiema prostymi $x = a$ oraz $x = b$, gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in \mathbb{R}$?

- a) $\int_a^b \sqrt{1 + [(\ln x)']^2} dx$,
 b) $\int_a^b \sqrt{1 + (\ln x)^2} dx$,
 c) $\int_a^b \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} dx$,
 d) $\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx$.

29. Za pomocą którego wzoru obliczymy objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = e^x$ wokół osi OX w granicach od a do b , gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in R$?

a) $\int_a^b \sqrt{1 + [e^x]^2} dx$,

b) $\int_a^b \sqrt{1 + e^{2x}} dx$,

c) $\pi \int_a^b (e^x)^2 dx$,

d) $\pi \int_a^b \sqrt{e^x} dx$.

30. Za pomocą którego wzoru obliczymy pole powierzchni bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \ln x$ wokół osi OX w granicach od a do b , gdzie $f(x)$ jest funkcją ciągłą i różniczkowalną na przedziale $\langle a, b \rangle$ i $a, b \in R$?

a) $2\pi \int_a^b |\ln x| \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx$,

b) $2\pi \int_a^b |\ln x| \sqrt{1 + (\ln x)^2} dx$,

c) $2\pi \int_a^b (\ln x)' \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx$,

d) $2\pi \int_a^b \left|\frac{1}{x}\right| \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx$.

31. Które z poniższych sformułowań jest fałszywe?

a) Wyrażenie $F(x) + C$ będące ogólną postacią funkcji pierwotnej $f(x)$ oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)dx$ i nazywamy całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$.

b) $\int A \cdot f(x)dx = A \cdot \int f(x)dx$, gdzie $A \in R$.

c) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, gdzie $a, b \in R$.

d) Jeśli funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $\langle a, b \rangle$, to całka $\int_a^b f(x)dx$ jest miarą pola obszaru stanowiącego zbiór punktów płaski (x, y) , których współrzędne spełniają warunki $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

32. Które z poniższych sformułowań jest prawdziwe?

a) $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$.

b) $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$.

- c) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- d) Jeśli funkcja $f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $\langle a, b \rangle$, to całka $\int_a^b f(x)dx$ jest miarą pola obszaru stanowiącego zbiór punktów płaszczyzny (x, y) , których współrzędne spełniają warunki $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$.

33. Niech funkcja $f(x)$ będzie określona w przedziale $(-\infty, \infty)$, wtedy:

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$, gdzie $c \in (-\infty, \infty)$,
- b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$, gdzie $c \in (-\infty, \infty)$,
- c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \cdot \int_{-\infty}^c f(x)dx$, gdzie $c \in (-\infty, \infty)$,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

34. $\int_0^5 \frac{1}{x} dx$ jest:

- a) zbieżna,
- b) rozbieżna,
- c) skończona,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

35. Niech funkcja f będzie nieograniczona w pewnym otoczeniu punktu $c \in \langle a, b \rangle$ i ciągła w każdym punkcie tego przedziału z wyjątkiem punktu $x = c$. Wtedy całkę $\int_a^b f(x)dx$ nazywamy:

- a) nieoznaczoną,
- b) właściwą,
- c) niewłaściwą,
- d) żadna z powyższych odpowiedzi nie jest prawdziwa.

7. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

1. Obliczyć całki nieoznaczone:

a) $\int 10 \, dx$

b) $\int -\frac{1}{3} \, dx$

c) $\int \frac{dx}{10}$

d) $\int (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \, dx$

e) $\int x^{100} \, dx$

f) $\int x^{-50} \, dx$

g) $\int \frac{1}{x^{-2}} \, dx$

h) $\int 2x \, dx$

i) $\int 5x^5 \, dx$

j) $\int -x^2 \, dx$

k) $\int -2x^{-10} \, dx$

l) $\int \frac{-1}{x^{100}} \, dx$

m) $\int \frac{-10}{x^{-10}} \, dx$

n) $\int \frac{10}{2x^{10}} \, dx$

o) $\int 3^x \, dx$

p) $\int 3 \cdot 3^x \, dx$

q) $\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$

r) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

2. Obliczyć całki nieoznaczone, korzystając z reguł rachunku całkowego:

a) $\int (-2x - e^x + \cos x) \, dx$

b) $\int (e^x + \sin x) \, dx$

- c) $\int \left(-\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + 5x^{-2} + \frac{1}{x} \right) dx$
- d) $\int \frac{2x^{-5} + x^3}{x} dx$
- e) $\int \left(\frac{x^5 - 3x^4}{x} + 3x - 4e^x - \sin x \right) dx$
- f) $\int \left(\frac{-3x^2 + x^3}{\sqrt{x}} + 3x \right) dx$
- g) $\int 12 \cdot \sqrt[4]{x^{10}} dx$
- h) $\int 2x^3 \cdot \sqrt[4]{x^8} dx$
- i) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{-3} dx$
- j) $\int \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x dx$
- k) $\int (-2x + 2^{-x-2}) dx$
- l) $\int 3^x \cdot e^x dx$
- m) $\int (-3) \cdot 3^x \cdot e^x dx$
- n) $\int \frac{4x^3}{x^4} dx$
- o) $\int \frac{-4x^3}{x^4} dx$
- p) $\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$
- q) $\int (x - 2x^3) \cdot \sqrt{x} dx$

3. Obliczyć całki metodą całkowania przez podstawienie:

- a) $\int (x^2 - 3)^3 \cdot 2x dx$
- b) $\int \frac{-2x}{(x^2 - 1)^6} dx$
- c) $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$
- d) $\int \frac{1}{\sqrt{4x - 1}} dx$

$$\text{e)} \int \frac{1}{1+4x^2} dx$$

$$\text{f)} \int -e^{-x} dx$$

$$\text{g)} \int \frac{1}{e^{2x}} dx$$

$$\text{h)} \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\text{i)} \int x^{-2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$\text{j)} \int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$$

$$\text{k)} \int e^{3x+33} dx$$

$$\text{l)} \int e^{10x^2+2} \cdot x dx$$

$$\text{m)} \int \frac{\ln x}{2x} dx$$

$$\text{n)} \int \cos 4x dx$$

$$\text{o)} \int \sin x \cdot e^{\cos x} dx$$

$$\text{p)} \int 2 \cos x \cdot e^{\sin x} dx$$

$$\text{q)} \int \cos x \cdot \sin^2 x dx$$

$$\text{r)} \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx$$

$$\text{s)} \int \frac{1}{\cos^2(2x+2)} dx$$

$$\text{t)} \int \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x dx$$

$$\text{u)} \int \frac{x}{2x^2-1} dx$$

$$\text{v)} \int \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^4 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\text{w)} \int \frac{(2+\ln x)^4}{x} dx$$

$$\text{x)} \int \frac{x^2}{\cos^2(x^3+1)} dx$$

$$\text{y)} \int \frac{dx}{x \cdot (\ln x - 2)}$$

z) $\int x e^{(x^2+5)} dx$

aa) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x - 2}} dx$

bb) $\int \frac{e^x + 1}{\sqrt[3]{x + e^x}} dx$

cc) $\int \frac{2}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$

dd) $\int \frac{\sqrt{\arctg x}}{1+x^2} dx$

4. Obliczyć całki metodą całkowania przez części:

a) $\int x \sin x dx$

b) $\int x^2 \cos x dx$

c) $\int x^2 \cos 4x dx$

d) $\int 2x \ln x dx$

e) $\int x^2 \ln x dx$

f) $\int e^x \sin x dx$

g) $\int e^{3x} \sin 6x dx$

h) $\int x e^{5x} dx$

i) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

j) $\int -\arctg x dx$

k) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

l) $\int \frac{2x^2}{e^x} dx$

m) $\int \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} x dx$

n) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

o) $\int \frac{-\cos x}{\sin x} dx$

p) $\int x^5 \cdot \ln x dx$

q) $\int \ln^2 x \, dx$

r) $\int x \cdot \ln(1 + x^2) \, dx$

s) $\int (2x - 1) \cdot e^x \, dx$

t) $\int x^2 \cdot \ln(x + 5) \, dx$

u) $\int (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x \, dx$

v) $\int \frac{3 \ln x}{2x^2} \, dx$

w) $\int (2x + 1) \cdot \sin x \, dx$

x) $\int x^4 \ln x \, dx$

y) $\int 2x^2 \cdot \cos x \, dx$

z) $\int \sqrt[3]{x} \cdot \ln x \, dx$

aa) $\int \sqrt{x} \cdot (\ln x)^2 \, dx$

bb) $\int x \cdot \ln(x^2 + 2) \, dx$

cc) $\int (x + 2) \cdot 2^x \, dx$

dd) $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} \, dx$

5. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{32}{x^4 - 16} \, dx$

b) $\int \frac{x-1}{x^2-3x+2} \, dx$

c) $\int \frac{x-1}{x^4+3x^2+2} \, dx$

d) $\int \frac{x^3+2x^2-3x+1}{x^4+3x^3} \, dx$

e) $\int \frac{5x^5+4x^4-3x^3+2x^2+1}{x^4+x^2} \, dx$

f) $\int \frac{x^4+x^3+2x^2+x-1}{x^3+x^2+x} \, dx$

g) $\int \frac{x^2+2x+1}{x^3+2x^2+2x+1} dx$

h) $\int \frac{x^4-1}{x^3-x^2-x+1} dx$

i) $\int \frac{x^3+5}{2x^2-3x+1} dx$

6. Obliczyć całki oznaczone:

a) $\int_1^2 2dx$

b) $\int_1^2 2x dx$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$

d) $\int_0^1 (-3^x + 2x) dx$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$

g) $\int_{-3}^3 \sqrt{2} dx$

h) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\cos x} dx$

i) $\int_1^e -\ln x dx$

j) $\int_1^2 3^x dx$

k) $\int_{10}^{10} 3^x dx$

l) $\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx$

m) $\int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx$

n) $\int_0^1 2 \ln x dx$

o) $\int_1^e x^3 \ln x dx$

p) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2} dx$

$$q) \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}} dx$$

$$r) \int_{-1}^2 e^{2x+2} dx$$

$$s) \int_0^1 2x \cdot (x^2 - 1)^2 dx$$

$$t) \int_{-1}^1 2x \cdot (x^2 - 1)^3 dx$$

$$u) \int_0^2 x e^{2x^2} dx$$

$$v) \int_1^2 x^4 \cdot (1 - \sqrt{x}) dx$$

$$w) \int_1^2 (x^3 + x) \cdot \sqrt{x} dx$$

$$x) \int_0^1 \frac{x^4 - 16}{x - 2} dx$$

$$y) \int_0^1 \frac{\sqrt{x^5 - x^2} e^x + 2x^3}{x^2} dx$$

$$z) \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} dx$$

$$aa) \int_1^8 e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$$

$$bb) \int_{-1}^1 e^x (1 - \sqrt[3]{x} \cdot e^{-x}) dx$$

$$cc) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx$$

7. Obliczyć całki (o ile istnieją):

$$a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$$b) \int_3^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$c) \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$d) \int_1^{\infty} e^{-x} \sin x dx$$

$$e) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$f) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$$

g) $\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x+x^2}$

h) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$

i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

8. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^3$ i $y = 2x$.
9. Obliczyć pole obszaru ograniczonego parabolą $y = x^2 + 4x$ i prostą $y = x$.
10. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = 2x^3$ i prostą $y = 8x$.
11. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = \sqrt{x}$ i prostymi $x = 4$ oraz $y = 0$.
12. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2 - 3x$ i $y = -x$.
13. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji $y = x^2 + 2x$ i $y = 3x$.
14. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \sqrt{x}$ i prostą $y = x$.
15. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y = \sqrt{3x}$ i prostą $y = x$.
16. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = \sin x$,
gdzie $x \in \langle 0, \pi \rangle$.
17. Obliczyć długości podanych krzywych:
 - a) $y = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})$, gdzie $x \in \langle 0, 1 \rangle$,
 - b) $y = \ln x$, gdzie $x \in \langle 1, e \rangle$.
18. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \cos x$ wokół osi OX, gdzie $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.
19. Obliczyć objętość bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sqrt{x+2}$, gdzie $x \in \langle 1, 2 \rangle$, wokół osi OX oraz jej pole powierzchni.

LITERATURA

1. Antoniewicz R., Misztal A., *Matematyka dla studentów ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
2. Bartosiewicz Z., Mozyrska D., Pawłuszewicz E., *Matematyka dla studentów kierunku zarządzanie i marketing*, Politechnika Białostocka, Białystok 1998.
3. Batóg B., Bieszk-Stolorz B., Foryś I., Guzowska M., Heberlein K., *Matematyka dla kierunków ekonomicznych. Teoria, przykłady, zadania*, Difin, Warszawa 2016.
4. Bażańska T., Nykowska M., *Matematyka w zadaniach dla wyższych zawodowych uczelni ekonomicznych*, Oficyna Wydawnicza Branta, Bydgoszcz 2007.
5. Grzegorzczak J., *Matematyka. Część 1*, Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.
6. Gurgul H., Suder M., *Matematyka dla kierunków ekonomicznych*, Wolters Kluwer Polska, Warszawa 2012.
7. Kryszczyński W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach. Część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004.
8. Małkowska M. (red.), *Matematyka dla ekonomistów. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań 2009.
9. Ostoja-Ostaszewski A., *Matematyka w ekonomii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
10. Piśarczyk J., *Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 2008.
11. Piśarczyk J., *Matematyka i jej zastosowania w naukach ekonomicznych. Ćwiczenia*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań 1997.
12. Roszkowska E., *Zadania z analizy matematycznej dla ekonomistów*, Wydawnictwo Uniwersytetu w Białymstoku, Białystok 2006.
13. Sokołowska D., Dębkowska K., *Matematyka dla studiujących nauki ekonomiczne*, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Finansów i Zarządzania, Białystok 2008.
14. Stankiewicz W., *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych. Część B*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
15. Wrona W., *Matematyka. Podstawowy wykład politechniczny. Część II*, PWN, Warszawa 1969.

SKOROWIDZ

A

algorytm całkowania funkcji wymiernych 50

C

całka nieoznaczona 6

 niewłaściwa 95

 (w przedziale (a, ∞)) 95

 (w przedziale $(-\infty, \infty)$) 96

 (w przedziale $(-\infty, b)$) 96

 (w przedziale (a, b)) 99

 rozbieżna 95

 zbieżna 95

 oznaczona w sensie Riemanna ... 63

całkowanie przez części 21

 przez podstawienie 15

 ułamków prostych

 drugiego rodzaju 48

 ułamków prostych

 pierwszego rodzaju 44

czynnik kwadratowy

 nierozkładalny 31

 liniowy 31

D

dolna granica całkowania 63

F

funkcja pierwotna 6

 podcałkowa 7

 wymierna 37

G

górną granicę całkowania 63

I

interpretacja geometryczna

całki oznaczonej 70

O

objętość bryły obrotowej 85

P

pierwsze główne twierdzenie

rachunku całkowego 66

pole powierzchni

bryły obrotowej 85

R

reguły rachunku całkowego 9

rozkład funkcji wymiernej

na ułamki proste 41

 wielomianu na czynniki

 rzeczywiste 34

rozkłady wybranych

wielomianów 29

T

trójmian dwukwadratowy 30

 kwadratowy 29

n -kwadratowy 31

typy ułamków prostych 40

U

ułamek prosty drugiego rodzaju 40

 I typu 40

 II typu 40

 niewłaściwy 38

 prosty pierwszego rodzaju 40

 właściwy 38

W

wielomian drugiego stopnia.....	29
pierwszego stopnia	29
wzór na całkowanie przez części	
dla całek oznaczonych	68
na całkowanie	
przez podstawienie	
dla całek oznaczonych.....	69
Newtona–Leibniza.....	66

Z

zastosowanie całek oznaczonych	
do liczenia długości krzywej	82
do liczenia objętości	
bryły obrotowej.....	85
do liczenia pola powierzchni	
bryły obrotowej.....	85
do liczenia pól figur.....	70
zmienna całkowania.....	7

SPIS TABEL

Tabela 1.1. Całki nieoznaczone wybranych funkcji elementarnych	8
Tabela 1.2. Podstawowe reguły rachunku całkowego	9

SPIS RYSUNKÓW

Rys. 4.1. Obszar, którego pole powierzchni chcemy policzyć za pomocą całki	60
Rys. 4.2. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pola prostokąta.....	60
Rys. 4.3. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pól dwóch prostokątów.....	61
Rys 4.4. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pól pięciu prostokątów.....	62
Rys 4.5. Przybliżenie pola powierzchni między wykresem funkcji, osią OX i prostymi $x = a$ i $x = b$ za pomocą pól n prostokątów.....	62
Rys. 4.6. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej ($f(x) \geq 0$)	70
Rys. 4.7. Geometryczna interpretacja całki oznaczonej ($f(x) \leq 0$)	71
Rys 4.8. Obszar ograniczony wykresami dwóch funkcji $y = f_1(x)$ oraz $y = f_2(x)$	72
Rys. 4.9. Prostokąt ograniczony prostymi $y = 3$ i $x = 5$ oraz osiami układu współrzędnych.....	73
Rys. 4.10. Obszar ograniczony prostymi $x = 2$ i $x = 5$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = 0,5x^2$	74
Rys. 4.11. Obszar ograniczony wykresem funkcji $y = 0,1x^2$ oraz prostą $y = x$	75
Rys. 4.12. Obszar ograniczony prostymi $x = 0$ i $x = 10$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = x$	76
Rys 4.13. Obszar ograniczony prostymi $x = 0$ i $x = 10$, osią OX oraz wykresem funkcji $y = 0,1x^2$	77
Rys. 4.14. Obszar ograniczony wykresami funkcji $y = x^3$ oraz $y = 4x$	78
Rys. 4.15. Obszar ograniczony wykresem funkcji $y = \sin x$ w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ oraz osią OX.....	80
Rys. 4.16. Obszar ograniczony wykresami funkcji: $y = 2x^2 - x$ oraz $y = -x^2 + x + 1$	81

Rys. 4.17. Wykres krzywej $y = \sqrt{x^3}$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$	83
Rys. 4.18. Wykres krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -1, 1 \rangle$	84
Rys. 4.19. Wykres bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = \sqrt{1 - x^2}$, gdzie $x \in \langle -1, 1 \rangle$	86
Rys. 4.20. Wykres bryły powstałej w wyniku obrotu krzywej $y = x + 2$, gdzie $x \in \langle 0, 4 \rangle$, wokół osi OX	87
Rys. 5.1. Graficzna interpretacja całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x)dx$	101
Rys. 5.2. Obszar ograniczony osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$ na odcinku $(-\infty, -1)$	101
Rys. 5.3. Obszar ograniczony osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	102
Rys. 5.4. Obszar ograniczony osią OX oraz wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$	103



Minister
Nauki



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Opracowanie publikacji jest finansowane
ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego,
dotacja celowa Ministra Nauki
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”



POLITECHNICZNA SIEĆ
VIA CARPATIA



POLITECHNIKA
LUBELSKA



POLITECHNIKA
RZESZOWSKA
im. IGNACEGO KRASIEWICZA