

Ewa Pawłuszewicz
Małgorzata Zdrodowska
Anna Kasperczuk

MATEMATYKA⁺

między szkołą średnią a studiami

CZĘŚĆ I FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI

MATEMATYKA+ **MIĘDZY SZKOŁĄ ŚREDNIĄ A STUDIAMI** **CZĘŚĆ I: FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI**

Skrypt dla studentów I semestru studiów inżynierskich

Ewa Pawłuszewicz
Małgorzata Zdrodowska
Anna Kasperczuk



**Politechnika
Białostocka**

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2024

Recenzent:
dr Bartosz Przysucha

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Okładka:
Marcin Dominów

Zdjęcie na okładce:
satheeshsankaran, <https://pixabay.com/pl/illustrations/ai-generowane-%C5%BCar%C3%B3wka-energia-lampa-8710045/>
<https://pixabay.com/pl/photos/kolej-%C5%BCelazna-godziny-szczytu-2377054/>

Skład i łamanie:
Małgorzata Zdrodowska

© Copyright by Białystok University of Technology, Białystok 2024

ISBN 978-83-68077-58-2 (e-Book)

DOI: 10.24427/978-83-68077-58-2



Opracowanie publikacji jest finansowane ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, dotacja celowa Ministra Nauki „Politechniczna Sieć VIA CARPATIA im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”



Minister
Nauki



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
e-mail: oficina.wydawnicza@pb.edu.pl
www.pb.edu.pl

Spis treści

1. Zbiory liczbowe	9
1.1. Zbiór liczb rzeczywistych	9
1.2. Wartość bezwzględna	10
1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	11
2. Działania na potęgach	13
2.1. Wzory skróconego mnożenia	13
2.2. Potęga o wykładniku całkowitym i o wykładniku wymiernym	17
2.3. Działania na potęgach i pierwiastkach	17
2.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania	20
3. Silnia. Symbol Newtona	23
3.1. Silnia	23
3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania	27
4. Przegląd funkcji elementarnych	29
4.1. Pojęcie funkcji i jej własności	29
4.2. Funkcja liniowa	39
4.3. Funkcja kwadratowa	40
4.4. Funkcja wielomianowa	46
4.5. Funkcja wymierna	53
4.6. Funkcja potęgowa	61
4.7. Funkcja wykładnicza	61
4.8. Funkcja logarytmiczna	63
4.9. Funkcje trygonometryczne	70
4.10. Funkcje cyklometryczne	78
4.11. Zadania do samodzielnego rozwiązania	84
5. Ciągi	87
5.1. Pojęcie ciągu	87
5.2. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny	89
5.3. Granica ciągu	90
5.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania	97

6. Liczba e i logarytm naturalny	100
6.1. Liczba e	100
6.2. Funkcje $f(x) = e^x$ i $f(x) = \ln x$	104
6.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	111

Wstęp

Inspiracją do powstania skryptu *Matematyka + między szkołą średnią a studiami. Część I: Funkcje i ich własności* były zajęcia uzupełniające z zakresu matematyki dla studentów I semestru prowadzone na Wydziale Mechanicznym Politechniki Białostockiej w ramach Politechnicznej Sieci Via Carpatia im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego. Jak wskazuje już sam tytuł, zakres oddawanego do rąk osób zainteresowanych skryptu obejmuje podstawowe własności funkcji, przegląd funkcji elementarnych oraz ciągi. Jest to też próba zmierzenia się z problemem, z jakim borykają się osoby prowadzące zajęcia w I semestrze z matematyki na wielu kierunkach studiów technicznych, ekonomicznych i innych.

Materiał prezentowany w skrypcie ma na celu z jednej strony usystematyzowanie wiedzy studentów po szkole średniej, a z drugiej – jej poszerzenie. Mając na uwadze, że nie wszyscy studenci zdają maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym, w rozdziale pierwszym podajemy podstawowe wiadomości dotyczące między innymi wartości bezwzględnej, w rozdziale drugim – działań na potęgach. W rozdziale trzecim wprowadzamy pojęcie silni i symbolu Newtona. Rozdział czwarty jest dedykowany przeglądowi funkcji elementarnych. Rozpoczynamy go od przypomnienia pojęcia funkcji i jej podstawowych własności, przypomnienia własności funkcji liniowej i kwadratowej, ale też rozszerzamy pojęcie sinusa i cosinusa kąta ostrego, wprowadzamy pojęcie miary łukowej kąta. Omawiamy także własności funkcji trygonometrycznych i cyklometrycznych, wykładniczych i logarytmicznych. W rozdziale piątym omawiamy podstawowe własności ciągów liczbowych oraz sposoby wyznaczania ich granic. W rozdziale szóstym wprowadzamy funkcje e^x oraz $\ln x$. Przedstawiane treści ilustrowane są przykładami z pełnymi rozwiązaniami, a na końcu każdego z rozdziałów zamieszczone zostały zadania do samodzielnego rozwiązania wraz z odpowiedziami.

Bibliografia obejmuje pozycje, z których, poza własnymi notatkami powstałymi w ciągu wielu lat prowadzenia zajęć z matematyki na kierunkach automatyka i robotyka, mechatronika, inżynieria biomedyczna oraz mechanika i budowa maszyn na Wydziale Mechanicznym Politechniki Białostockiej, korzystałyśmy w trakcie przygotowywania skryptu. Są to też pozycje warte

polecenia zarówno pracownikom, jak i studentom I semestru studiów technicznych i ekonomicznych, zainteresowanych prezentowaną tematyką lub uzupełnieniem wiedzy.

Korzystając z okazji, składamy serdeczne podziękowania naszym studentom, w szczególności wspomnianych już kierunków automatyka i robotyka oraz mechatronika Politechniki Białostockiej, którzy zainspirowali nas wnikliwością, pytaniami, a także swoją postawą do napisania tego skryptu. Dziękujemy też dziekanom Wydziału Mechanicznego Politechniki Białostockiej za okazywane wsparcie i studentom, i nam. Szczególne podziękowanie składamy Grzegorzowi Pawłuszewiczowi – studentowi III roku AGH – za wykonane rysunki.

Autorki

Wykaz oznaczeń

$\mathbb{R}$	– zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_+$	– zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
$\mathbb{Z}$	– zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{N}$	– zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_0$	– zbiór liczb naturalnych z zerem, tzn. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	– zbiór liczb wymiernych
D_f	– dziedziła funkcji
$f : X \rightarrow Y$	– funkcja f odwzorowująca zbiór X w zbiór Y
$ x $	– wartość bezwzględna liczby x
$[a, b]$	– przedział obustronnie domknięty
(a, b)	– przedział obustronnie otwarty
$[a, b)$	– przedział lewostronnie domknięty i prawostronnie otwarty
$(a, b]$	– przedział lewostronnie otwarty i prawostronnie domknięty
$a \in B$	– element a należy do zbioru B
$a \notin B$	– element a nie należy do zbioru B
$A \subseteq B$	– zbiór A zawiera się w zbiorze B
$A \not\subseteq B$	– zbiór A nie zawiera się w zbiorze B
$A \cup B$	– suma zbiorów A oraz B
$A \setminus B$	– różnica zbiorów A i B
$A \cap B$	– część wspólna zbiorów A i B
(a_n)	– ciąg o wyrazie ogólnym a_n
$p \iff q$	– p zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi q
$p \Rightarrow q$	– jeżeli zachodzi p , to zachodzi też q

1. Zbiory liczbowe

1.1. Zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

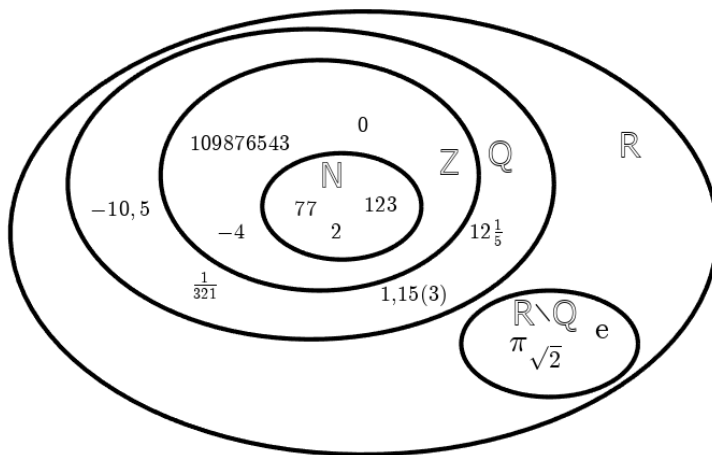
Zbiór liczb naturalnych z zerem: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Zbiór liczb całkowitych: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Zbiór liczb wymiernych: $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$, czyli liczb, które można przedstawić w postaci ułamka zwykłego

Zbiór liczb niewymiernych: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, czyli liczb, których nie można przedstawić w postaci ułamka zwykłego, np. $\sqrt{2}$, π

Zbiór liczb rzeczywistych: $\mathbb{R}$, czyli suma wszystkich liczb wymiernych i niewymiernych



Rysunek 1.1. Relacje między zbiorami liczbowymi

1.2. Wartość bezwzględna

Definicja 1.2.1. Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x określamy jako

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x, & \text{gdy } x < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Własności wartości bezwzględnej:

$$|x| \geq 0 \quad (1.2)$$

$$|-x| = |x| \quad (1.3)$$

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (1.4)$$

$$|x - y| \leq |x| + |y| \quad (1.5)$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad (1.6)$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad \text{gdy } y \neq 0 \quad (1.7)$$

$$|x| = 0, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad (1.8)$$

$$|x| = a, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = a \text{ lub } x = -a \quad (1.9)$$

$$|x| \leq a, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } -a \leq x \leq a \quad (1.10)$$

$$|x| > a, \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x > a \text{ lub } x < -a \quad (1.11)$$

Uwaga:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad (1.12)$$

Przykład 1.2.2. Rozwiązać równanie:

a) $|x + 1| = 10$ b) $|x + 1| = x + 10$

Rozwiązanie:

a) Z własności (1.9) wynika, że

$$x + 1 = 10 \quad \text{lub} \quad x + 1 = -10$$

$$x = 9 \quad \text{lub} \quad x = -11.$$

b) Zgodnie ze wzorem (1.1)

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, & \text{gdy } x + 1 \geq 0, \text{ czyli gdy } x \geq -1 \\ -(x + 1), & \text{gdy } x + 1 < 0, \text{ czyli gdy } x < -1 \end{cases}.$$

Wynika stąd, że musimy rozwiązać dane równanie oddzielnie dla $x \in (-\infty, -1)$ i oddzielnie dla $x \in [-1, +\infty)$:

I. $x \in (-\infty, -1)$. Wtedy $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$, czyli

$$-x - 1 = x + 10$$

$$x = -\frac{11}{2}.$$

Łatwo zauważyć, że $x = -\frac{11}{2} \in (-\infty, -1)$, czyli jest rozwiązaniem równania.

II. $x \in [-1, +\infty)$. Wtedy $|x + 1| = x + 1$, czyli

$$x + 1 = x + 10$$

$$1 \neq 10.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc na przedziale $x \in [-1, +\infty)$ równanie $|x + 1| = x + 10$ nie ma rozwiązania.

Oznacza to, że istnieje tylko jedno rozwiązanie równania $|x + 1| = 10$: $x = -\frac{11}{2}$.

1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozwiązać poniższe równania i nierówności:

1) $|2x + 1| = x$

2) $|4 - 2x| < |x|$

3) $|3x - 3| = 7$

4) $|4x - 10| \leq 0$

5) $|2x - 4| \leq x + 6$

6) $|x| + |x + 2| - |x + 3| \geq 10$

7) $|1 - x| + 2x = -4$

8) $|-2x + 7| \geq 9$

9) $|5x - 10| < 12$

10) $|6 - x| - 2|x - 4| = 2x + 3$

11) $|x| + |2x + 1| = 5 - x$

12) $|2x + 3| - |3x - 1| < x + 5$

13) $6 \leq |x + 5| < 8$

14) $2|x - 3| - |x + 1| < 1$

15) $|4 - 2x| < |x|$

Odpowiedzi:

1) brak rozwiązań (równanie sprzeczne)

2) $x \in (\frac{4}{3}, 4)$

3) $x = -\frac{4}{3}, x = \frac{10}{3}$

4) $x = \frac{5}{2}$

5) $x \in [-\frac{2}{3}, 10]$

6) $x \in (-\infty, -9] \cup [11, \infty)$

7) $x = -5$

8) $x \in (-\infty, -1] \cup [8, \infty)$

9) $x \in (-\frac{2}{5}, \frac{22}{5})$

10) $x = -5$

11) $x = -3, x = 1$

12) $x \in \mathbb{R}$

13) $x \in (-13, -11] \cup [1, 3)$

14) $x \in (\frac{4}{3}, 8)$

15) $x \in (\frac{4}{3}, 4)$

2. Działania na potęgach

2.1. Wzory skróconego mnożenia

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2.1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2.2)$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad (2.3)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (2.4)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (2.5)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad (2.6)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (2.7)$$

Przykład 2.1.1. Rozwiązać nierówność:

a) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} \leq 10$ b) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq x + 10$

c) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \geq x$ d) $|x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}| \leq 0$

Rozwiązanie:

a) Wiemy, że wartość pod pierwiastkiem powinna być nieujemna. Zauważmy, że wyrażenie pod pierwiastkiem, zgodnie ze wzorem (2.1), możemy zapisać jako $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Rozwiązujemy więc nierówność

$$\sqrt{(x + 2)^2} \leq 10,$$

co, zgodnie ze wzorem (1.12), prowadzi do

$$|x + 2| \leq 10.$$

Na podstawie (1.10) otrzymujemy

$$-10 \leq x + 2 \leq 10$$

$$-12 \leq x \leq 8.$$

Czyli rozwiązaniem danej nierówności jest przedział $[-12, 8]$.

b) Zauważmy, że zgodnie ze wzorem (2.2): $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, czyli daną nierówność możemy zapisać jako

$$\begin{aligned}\sqrt{(x - 3)^2} &\leq x + 10 \\ |x - 3| &\leq x + 10.\end{aligned}$$

Zgodnie ze wzorem (1.1)

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{gdy } x - 3 \geq 0, \text{ czyli gdy } x \geq 3 \\ -(x - 3), & \text{gdy } x - 3 < 0, \text{ czyli gdy } x < 3 \end{cases}.$$

Rozpatrujemy więc daną nierówność na dwóch przedziałach $(-\infty, 3)$ i $[3, +\infty)$ oddzielnie:

I. $x \in (-\infty, 3)$. Wtedy $|x - 3| = -(x - 3) = -x + 3$, czyli

$$\begin{aligned}-x + 3 &\leq x + 10 \\ -2x &\leq 7 \\ x &\geq -\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że $x \in (-\infty, 3)$, rozwiązaniem nierówności $-x + 3 \leq x + 10$ jest przedział $[-\frac{7}{2}, 3)$.

II. $x \in [3, \infty)$. Wtedy $|x - 3| = x - 3$, czyli

$$\begin{aligned}x - 3 &\leq x + 10 \\ -3 &\leq 10.\end{aligned}$$

Widzimy, że nierówność spełniona jest dla wszystkich liczb z przedziału $[3, \infty)$, czyli rozwiązaniem nierówności $x - 3 \leq x + 10$ w tym przypadku jest przedział $[3, \infty)$.

Ostatnim krokiem prowadzącym do rozwiązania nierówności jest zsumowanie zbiorów $[-\frac{7}{2}, 3)$ i $[3, \infty)$ otrzymanych jako rozwiązanie nierówności $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq x + 10$, czyli: $x \in [-\frac{7}{2}, 3) \cup [3, \infty)$, więc $x \in [-\frac{7}{2}, \infty)$.

c) Zauważmy, że nierówność $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} \geq x$ możemy zapisać jako

$$|x - 3| + |2x + 1| \geq x. \quad (2.8)$$

Zgodnie ze wzorem (1.1)

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & \text{gdy } x - 3 \geq 0, \text{ czyli gdy } x \geq 3 \\ -(x - 3), & \text{gdy } x - 3 < 0, \text{ czyli gdy } x < 3 \end{cases}$$

oraz

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1, & \text{gdy } 2x + 1 \geq 0, \text{ czyli gdy } x \geq -\frac{1}{2} \\ -(2x + 1), & \text{gdy } 2x + 1 < 0, \text{ czyli gdy } x < -\frac{1}{2} \end{cases},$$

więc nierówność (2.8) powinniśmy rozpatrzyć oddzielnie w każdym z przedziałów: $(-\infty, -\frac{1}{2})$, $[-\frac{1}{2}, 3)$, $[3, \infty)$. Zatem mamy:

I. $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$:

$$\begin{aligned} -x + 3 - (2x + 1) &\geq x \\ -4x &\geq -2 \\ x &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, otrzymujemy rozwiązanie $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$.

II. $x \in [-\frac{1}{2}, 3)$:

$$\begin{aligned} -x + 3 + 2x + 1 &\geq x \\ 0 &\geq -4. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nierówność (2.9) jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $[-\frac{1}{2}, 3)$, czyli $x \in [-\frac{1}{2}, 3)$.

III. $x \in [3, \infty)$:

$$\begin{aligned} x - 3 + 2x + 1 &\geq x \\ 2x &\geq 2 \\ x &\geq 1. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że $x \in [3, \infty)$, otrzymujemy, że $x \in [3, \infty)$.

Sumując wyniki otrzymane w przypadkach I, II i III, otrzymujemy rozwiązanie danej nierówności: $x \in \mathbb{R}$.

d) Zgodnie z własnością (1.2) wartość bezwzględna jest zawsze wartością nieujemną, zatem aby rozwiązać daną nierówność, wystarczy rozwiązać równanie

$$x - \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0.$$

Zauważmy, że $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, więc

$$x - \sqrt{(x - 1)^2} = 0$$

$$x - |x - 1| = 0.$$

Równanie to rozpatrujemy oddzielnie na każdym z przedziałów $(-\infty, 1)$ oraz $[1, \infty)$:

I. $x \in (-\infty, 1)$:

$$x + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $x = \frac{1}{2} \in (-\infty, 1)$, więc jest rozwiązaniem równania.

II. $x \in [1, \infty)$:

$$x - x + 1 = 0$$

$$1 \neq 0.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, a więc na przedziale $x \in [1, +\infty)$ nierówność $|x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}| \leq 0$ nie ma rozwiązania. Oznacza to, że istnieje tylko jedno rozwiązanie nierówności $|x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}| \leq 0$: $x = \frac{1}{2}$.

2.2. Potęga o wykładniku całkowitym i o wykładniku wymiernym

Niech $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad \text{dla } a \neq 0. \quad (2.10)$$

Niech $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ oraz niech $n \in \mathbb{N}, n > 1$ i $m \in \mathbb{Z}$. Wtedy:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (2.11)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (2.12)$$

2.3. Działania na potęgach i pierwiastkach

Niech $a, b \in \mathbb{R}_+, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$. Wtedy:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (2.13)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (2.14)$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (2.15)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (2.16)$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (2.17)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad (2.18)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (2.19)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (2.20)$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \quad (2.21)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}. \quad (2.22)$$

Przykład 2.3.1. Podane wyrażenie przedstawić w najprostszej postaci:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} - \frac{1}{a} \quad \text{b) } \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} \right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} \right)^{-2}$$

Rozwiązanie:

a) Wykorzystując własność (2.19), przekształcamy dane wyrażenie

$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} - \frac{1}{a} = \frac{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}}{\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}} - \frac{1}{a}$$

i upraszczamy je

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1+a} + \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}}{\frac{\sqrt{1+a} \cdot \sqrt{1+a} - \sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}} - \frac{1}{a} &= \frac{\frac{1+a+1-a}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}}{\frac{1+a-(1-a)}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}} - \frac{1}{a} = \frac{\frac{2}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}}{\frac{2a}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}} - \frac{1}{a} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}} \cdot \frac{\sqrt{1-a} \cdot \sqrt{1+a}}{2a} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0. \end{aligned}$$

b) Korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} &= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2 - (\sqrt{a+x})^2}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{a + 2\sqrt{ax} + x - (a+x)}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 - (\sqrt{a+x})^2}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})} = \\ &= \frac{a - 2\sqrt{ax} + x - (a+x)}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})} = \frac{-2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Czyli, korzystając z (2.10), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} \right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} \right)^{-2} = \\
 & \left(\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \right)^{-2} - \left(\frac{-2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})} \right)^{-2} = \\
 & \left(\frac{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})}{2\sqrt{ax}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})}{-2\sqrt{ax}} \right)^2 = \\
 & \frac{(a+x)(a+2\sqrt{ax}+x)}{4ax} - \frac{(a+x)(a-2\sqrt{ax}+x)}{4ax} = \\
 & \frac{(a+x)(a+2\sqrt{ax}+x) - (a+x)(a-2\sqrt{ax}+x)}{4ax} = \\
 & \frac{4(a+x)\sqrt{ax}}{4ax} = \frac{a\sqrt{ax}}{ax} + \frac{x\sqrt{ax}}{ax} = \frac{\sqrt{ax}}{x} + \frac{\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{\frac{x}{a}}.
 \end{aligned}$$

Przykład 2.3.2. Wyznaczyć wartość wyrażenia

$$\frac{xy - \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}}$$

dla

$$x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right), \quad a \geq 1, b \geq 1.$$

Rozwiązanie: Aby uprościć obliczenia, obliczamy najpierw jego części składowe, korzystając ze wzorów skróconego mnożenia. Z racji, że $a \geq 1$, $b \geq 1$, mamy $|a - \frac{1}{a}| = a - \frac{1}{a}$ oraz $|b - \frac{1}{b}| = b - \frac{1}{b}$ (wzór (1.1)). Zatem

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \left(\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) \\
 y^2 &= \left(\frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) \right)^2 = \frac{1}{4} \left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} \right) \\
 x^2 - 1 &= \frac{1}{4} \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) - 1 = \frac{a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - 4}{4} = \frac{a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}}{4} \\
 y^2 - 1 &= \frac{1}{4} \left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} \right) - 1 = \frac{b^2 + 2 + \frac{1}{b^2} - 4}{4} = \frac{b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}}{4}} = \frac{\sqrt{(a - \frac{1}{a})^2}}{2} = \frac{|a - \frac{1}{a}|}{2} = \frac{a - \frac{1}{a}}{2}$$

$$\sqrt{y^2 - 1} = \sqrt{\frac{b^2 - 2 + \frac{1}{b^2}}{4}} = \frac{\sqrt{(b - \frac{1}{b})^2}}{2} = \frac{|b - \frac{1}{b}|}{2} = \frac{b - \frac{1}{b}}{2}$$

$$xy = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{4} \left(ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \right).$$

Tak więc

$$\begin{aligned} & \frac{xy - \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1}\sqrt{y^2 - 1}} = \\ & \frac{\frac{1}{4} \left(ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \right) - \frac{(a - \frac{1}{a})}{2} \frac{(b - \frac{1}{b})}{2}}{\frac{1}{4} \left(ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} \right) + \frac{(a - \frac{1}{a})}{2} \frac{(b - \frac{1}{b})}{2}} = \frac{\frac{ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab}}{4} - \frac{(a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b})}{4}}{\frac{ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab}}{4} + \frac{(a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b})}{4}} = \\ & \frac{ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} - (a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b})}{ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} + (a - \frac{1}{a})(b - \frac{1}{b})} = \\ & \frac{ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} - (ab - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{1}{ab})}{ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{1}{ab} + (ab - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + \frac{1}{ab})} = \\ & \frac{2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}{2ab + \frac{2}{ab}} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{ab + \frac{1}{ab}} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{ab}}{\frac{a^2 b^2 + 1}{ab}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 + 1}. \end{aligned}$$

2.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Poniższe wyrażenia przedstawić w najprostszej postaci:

1) $(x - 2\sqrt{7})^2 + (x - 2\sqrt{7}) \cdot (x + 2\sqrt{7}) + 4x\sqrt{7}$

2) $\frac{(m+x)^{\frac{1}{3}} + (m-x)^{\frac{1}{2}}}{(m+x)^{\frac{1}{3}} - (m-x)^{\frac{1}{2}}}$ dla $x = \frac{2mn}{n^2+1}$, $m > 0$ i $0 < n < 1$

3) $\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}-1}}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}$ dla $x = 2k^{\frac{1}{2}}(1+k)^{-1}$, $k > 1$

4) $\frac{2a}{a^2-4x^2} + \frac{1}{2x^2+6x-ax-3a} \left(x + \frac{3x-6}{x-2} \right)$

$$5) \left(\frac{2a+10}{3a-1} + \frac{130-a}{1-3a} + \frac{30}{a-3} \right) \frac{3a^3+8a^2-3a}{1-\frac{1}{4}a^2}$$

$$6) \frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

$$7) \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$$

$$8) \frac{2}{3} \left[\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right]$$

$$9) \left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11)$$

$$10) \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right)$$

Rozwiązać poniższe nierówności:

$$11) \sqrt{4x^2+12x+9} \geq x+7$$

$$12) |x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}| \geq 1$$

$$13) \sqrt{9x^2 - 12x + 4} \leq 2x + 5$$

$$14) \sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq x - 1$$

$$15) \sqrt{x^2 + 2x + 1} \leq x + 3$$

$$16) |x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}| \leq x + 1$$

Odpowiedzi:

$$1) 2x^2$$

$$2) \frac{1}{n}$$

$$3) \sqrt{k-1} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$$

$$4) \frac{1}{a+2x}$$

$$5) \frac{12(2a+5)(a+3)}{a-2}$$

$$6) \frac{ab}{a+b}$$

$$7) \frac{1}{x+y}$$

$$8) \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$$

$$9) -115$$

10) $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$

11) $x \in (-\infty, -\frac{10}{3}] \cup [4, \infty)$

12) $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

13) $x \in [-\frac{3}{5}, 7]$

14) $x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$

15) $x \in [-2, \infty]$

16) $x \in [\frac{1}{3}, \infty)$

3. Silnia. Symbol Newtona

3.1. Silnia

Definicja 3.1.1. Silnią liczby naturalnej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do n włącznie, czyli

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad (3.1)$$

przy czym przyjmujemy, że

$$0! = 1. \quad (3.2)$$

Dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 0$ zachodzi

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1). \quad (3.3)$$

Definicja 3.1.2. Niech $n, k \in \mathbb{N}_0$ oraz $k \leq n$. Symbolem Newtona, oznaczanym $\binom{n}{k}$, nazywamy liczbę określoną za pomocą wzoru

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (3.4)$$

Własności symbolu Newtona:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad (3.5)$$

$$\binom{n}{1} = n \quad (3.6)$$

$$\binom{n}{n} = 1 \quad (3.7)$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \binom{n}{k} \quad (3.8)$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad (3.9)$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad (3.10)$$

Symbol Newtona można wyznaczyć, posługując się **trójkątem Pascala** (rysunek 3.1). Pierwszy i ostatni współczynnik w każdym wierszu jest z definicji równy 1, a dowolny inny współczynnik jest sumą lewego i prawego współczynnika w wierszu powyżej.

				1					
				1		1			
			1		2		1		
		1		3		3		1	
	1		4		6		4		1
1		5		10		10		5	
	1		6		15		20		15
		1		7		21		35	
			1		8		28		56
				1		9		36	

Rysunek 3.1. Trójkąt Pascala

Wzór dwumianowy Newtona:

Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad (3.11)$$

Nierówność Bernoulliego to klasyczne twierdzenie, które mówi, że dla każdego $x > -1$ oraz dla każdego $n \geq 0$ zachodzi nierówność

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (3.12)$$

Jeśli n jest liczbą naturalną i $x \geq -1$, to nierówność jest ostra dla $x > -1$ oraz $n \geq 2$.

Przykład 3.1.3. Obliczyć:

a) $\binom{7}{3}$ b) $\binom{n+1}{n-1}$

Rozwiązanie:

a) Wykorzystując wzór (3.4) oraz definicję silni (3.1.1), otrzymujemy

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

b) Ponownie korzystamy ze wzoru (3.4) oraz definicji silni (3.1.1)

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{n-1} &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!(n+1-(n-1))!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(n-1)!(2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Przykład 3.1.4. Wykazać, że

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}.$$

Rozwiązanie: W dowodzie korzystamy ze wzoru (3.10). Wychodzimy ze strony prawej i dochodzimy do strony lewej

$$\begin{aligned} P &= \binom{8}{4} = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = \\ &= \binom{5}{4} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}. \end{aligned}$$

Z racji, że $\binom{4}{4} = 1 = \binom{3}{3}$, otrzymujemy

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = L,$$

co należało wykazać.

Przykład 3.1.5. Obliczyć $(\sqrt{5} - 1)^5$.

Rozwiązanie: Wykorzystujemy wzór (3.11), więc

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} - 1)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (\sqrt{5})^{5-k} (-1)^k = \\&= \binom{5}{0} (\sqrt{5})^5 (-1)^0 + \binom{5}{1} (\sqrt{5})^4 (-1)^1 + \binom{5}{2} (\sqrt{5})^3 (-1)^2 + \\&+ \binom{5}{3} (\sqrt{5})^2 (-1)^3 + \binom{5}{4} (\sqrt{5})^1 (-1)^4 + \binom{5}{5} (\sqrt{5})^0 (-1)^5 = \\&= 1 \cdot \sqrt{5}^5 \cdot (-1)^0 + 5 \cdot \sqrt{5}^4 \cdot (-1)^1 + 10 \cdot \sqrt{5}^3 \cdot 1 + 10 \cdot \sqrt{5}^2 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \\&= 1 \cdot 5^{5/2} \cdot 1 + 5 \cdot 5^2 \cdot (-1) + 10 \cdot 5^{3/2} \cdot 1 + 10 \cdot 5 \cdot (-1) + 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 1 + (-1) = \\&= 1 \cdot 5\sqrt{5} - 5 \cdot 25 + 10 \cdot 5\sqrt{5} - 10 \cdot 5 + 5\sqrt{5} - 1 = \\&= 5\sqrt{5} - 125 + 50\sqrt{5} - 50 + 5\sqrt{5} - 1 = \\&= 80\sqrt{5} - 176.\end{aligned}$$

W powyższym przykładzie moglibyśmy też skorzystać z trójkąta Pascala (rysunek 3.1). Dla $n = 5$ bierzemy współczynniki z szóstego wiersza trójkąta Pascala i otrzymujemy

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

czyli

$$\begin{aligned}(\sqrt{5} - 1)^5 &= (\sqrt{5})^5 + 5(\sqrt{5})^4 \cdot (-1) + 10(\sqrt{5})^3 \cdot (-1)^2 + \\&+ 10(\sqrt{5})^2 \cdot (-1)^3 + 5\sqrt{5} \cdot (-1)^4 + (-1)^5 = 80\sqrt{5} - 176.\end{aligned}$$

3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Obliczyć:

1) $\binom{5}{2}$

2) $\frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

3) $\frac{\binom{n}{2}}{n^2}$

4) $\frac{\binom{n+3}{n}}{n^2}$

5) $\frac{\binom{n}{2}}{2\binom{n}{2}+n}$

6) $\binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{n-2}$

7) $\left(\frac{1}{3}\right)$

8) $\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n}{3}}$

9) $\frac{n!-(n+1)!}{n!}$

10) $\frac{(n-2)!}{(n+2)!}$ dla $n \geq 2$

11) $(\sqrt{3} + 1)^9$

12) $(\sqrt{7} - 2)^8$

Odpowiedzi:

1) 10

2) $n + 3$

3) $\frac{n-1}{2n}$

4) $\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6n^2}$

5) $\frac{n(n-1)}{2n^2}$

6) $\frac{(n+1)n(4-n)}{6}$

7) $\frac{5}{81}$

8) $n + 1$

9) $-n$

10) $\frac{1}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$

11) $2448\sqrt{3} + 4240$

12) $108497 - 41008\sqrt{7}$

4. Przegląd funkcji elementarnych

4.1. Pojęcie funkcji i jej własności

Definicja 4.1.1. Zakładamy, że X, Y są niepustymi zbiorami. Funkcja f ze zbioru X w zbiór Y , czyli $f : X \rightarrow Y$, jest to przyporządkowanie, które **każdemu** elementowi x ze zbioru X przyporządkowuje **dokładnie jeden element** y ze zbioru Y .

Zbiór X , którego elementom funkcja f przyporządkowuje elementy zbioru Y , nazywamy **dziedziną funkcji** i oznaczamy jako D_f . Elementy dziedziny funkcji nazywamy **argumentami funkcji** f . **Dla każdego argumentu funkcja f przyjmuje dokładnie jedną wartość.** Elementom ze zbioru X mogą być przyporządkowane wszystkie elementy zbioru Y lub tylko niektóre z nich. Zbiór tych elementów ze zbioru Y , które zostały przyporządkowane elementom ze zbioru X , nazywamy **zbiorem wartości funkcji**.

Definicja 4.1.2. **Miejscem zerowym funkcji** nazywamy każdą wartość argumentu x , dla której wartość funkcji równa jest 0, czyli dla której

$$f(x) = 0. \quad (4.1)$$

Przykład 4.1.3. Wyznaczyć miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{|x|}{x} - 1$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że dziedziną danej funkcji jest $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zgodnie ze wzorem (4.1), aby wyznaczyć miejsce zerowe funkcji, powinniśmy rozwiązać równanie

$$\frac{|x|}{x} - 1 = 0,$$

czyli

$$\frac{|x| - x}{x} = 0.$$

Biorąc pod uwagę wzór (1.1), powyższe równanie należy rozważyć osobno na dwóch przedziałach $x \in (-\infty, 0)$ oraz $x \in [0, \infty)$:

I. $x \in (-\infty, 0)$:

$$\begin{aligned}\frac{-x - x}{x} &= 0 \\ \frac{-2x}{x} &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie $x = 0$, ale $x = 0 \notin (-\infty, 0)$ oraz $x = 0 \notin D_f$, więc w przedziale $(-\infty, 0)$ dana funkcja nie ma miejsc zerowych.

II. $x \in [0, \infty)$, czyli uwzględniając dziedzinę funkcji, w przedziale $x \in (0, \infty)$:

$$\begin{aligned}\frac{x - x}{x} &= 0 \\ \frac{0}{x} &= 0 \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy równanie tożsamościowe. Zatem jego rozwiązaniem jest dowolny x z przedziału $(0, \infty)$.

Bierzemy pod uwagę fakt, że w przedziale $(-\infty, 0)$ równanie nie miało rozwiązań, więc miejscami zerowymi funkcji $f(x) = \frac{|x|}{x} - 1$ są wszystkie $x \in (0, \infty)$.

Definicja 4.1.4. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **rosnącą** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi $f(x_1) < f(x_2)$.

Definicja 4.1.5. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **malejącą** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi $f(x_1) > f(x_2)$.

Definicja 4.1.6. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **stałą** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdego argumentu z dziedziny funkcja ta przyjmuje taką samą wartość.

Definicja 4.1.7. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **niemalejącą** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definicja 4.1.8. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **nierosnącą** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdych dwóch elementów $x_1, x_2 \in A$ takich, że $x_1 < x_2$, zachodzi $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definicja 4.1.9. Funkcję f nazywamy **funkcją monotoniczną** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli jest w tym zbiorze rosnąca albo malejąca, albo nierosnąca, albo niemalejąca.

Definicja 4.1.10. Funkcję f nazywamy **funkcją ściśle monotoniczną** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli jest w tym zbiorze rosnąca albo malejąca.

Definicja 4.1.11. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D_f$ zachodzi $(-x) \in D_f$ oraz $f(-x) = f(x)$.

Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY .

Definicja 4.1.12. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **nieparzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in D_f$ zachodzi $(-x) \in D_f$ oraz $f(-x) = -f(x)$.

Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$.

Uwaga: Fakt, iż funkcja nie jest parzysta, nie oznacza, że jest nieparzysta i odwrotnie – to, że nie jest nieparzysta, nie oznacza, że jest parzysta. Najczęściej mamy do czynienia z funkcjami, które nie są ani parzyste, ani nieparzyste.

Przykład 4.1.13. Zbadać parzystość i nieparzystość funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że dziedziną funkcji jest $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a więc dla dowolnej liczby x należącej do tego zbioru $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Daną funkcję, zgodnie ze wzorem (1.1), możemy zapisać jako

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x}, & \text{gdy } x \geq 0 \\ \frac{x}{-x}, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Zatem

$$f(-x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x \geq 0 \\ 1, & \text{gdy } x < 0 \end{cases},$$

oraz

$$-f(x) = \begin{cases} -1, & \text{gdy } x \geq 0 \\ 1, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Widać, że $f(-x) \neq f(x)$, więc funkcja $f(x) = \frac{x}{|x|}$ nie jest funkcją parzystą, ale $f(-x) = -f(x)$, co oznacza, że funkcja $f(x) = \frac{x}{|x|}$ jest funkcją nieparzystą.

b) Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$ jest $x \in \mathbb{R}$, więc dla dowolnej liczby x należącej do tego zbioru również $-x \in \mathbb{R}$. Mamy też

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{2(-x)^2 + (-x) + 1} = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1}$$

oraz

$$-f(x) = -\frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{-x^2 - 1}{2x^2 + x + 1}.$$

Widzimy, że $f(-x) \neq f(x)$ oraz $f(-x) \neq -f(x)$, czyli funkcja $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2+x+1}$ nie jest ani funkcją parzystą, ani funkcją nieparzystą.

Definicja 4.1.14. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **różnowartościową** w zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli dla każdych $x_1, x_2 \in A$ takich, że $x_1 \neq x_2$, zachodzi $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Z definicji 4.1.14 wynika, że funkcja różnowartościowa to taka, która różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości tej funkcji.

Twierdzenie 4.1.15. Jeżeli funkcja f jest rosnąca albo malejąca w zbiorze $A \subset D_f$, to jest różnowartościowa w tym zbiorze.

Definicja 4.1.16. Funkcję $f : D_f \rightarrow Y$ nazywamy **okresową**, jeśli istnieje taka liczba $T \neq 0$, że dla każdego $x \in D_f$ zachodzą jednocześnie warunki:

1. $x + T \in D_f$
2. $f(x + T) = f(x)$

Liczbę T nazywamy **okresem funkcji**. Jeżeli istnieje najmniejszy dodatni okres, to nazywamy go **okresem podstawowym**.

Przykład 4.1.17. Wyznaczyć okres podstawowy funkcji:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \leq x < \frac{2n+1}{2}, n \in \mathbb{N}_0 \\ -1 & \text{dla } \frac{2n+1}{2} \leq x < n+1, n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(t) = t - n \quad \text{dla } n \leq t < n+1, n \in \mathbb{N}_0$$

Rozwiązanie:

a) Funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość 1 dla $n \leq x \leq \frac{2n+1}{2}$ oraz wartość -1 dla $\frac{2n+1}{2} \leq x < n+1$, więc całkowita długość jednego pełnego cyklu (od n do $n+1$) wynosi 1, ponieważ $n+1 - n = 1$.

Musimy znaleźć najmniejsze $T > 0$, takie że $f(x + T) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Jak już zauważyliśmy, wartości funkcji f zmieniają się cyklicznie od -1 do 1 w przedziałach długości 1. Oznacza to, że okres podstawowy funkcji wynosi $T = 1$.

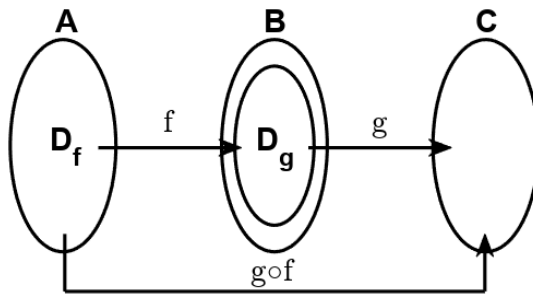
b) Zauważmy, że w każdym przedziale $[n, n+1)$, dla każdego $n \in \mathbb{N}_0$, wzór $f(t) = t - n$ opisuje liniową zależność, przy czym $f(n) = 0$, a $f(n+1) = 1$. Musimy znaleźć najmniejszą liczbę dodatnią $T > 0$, taką że $f(t + T) = f(t)$

dla każdego t . Ponieważ funkcja w każdym przedziale $[n, n+1)$ powtarza się w ten sam sposób (przyjmuje wartości od 0 do 1), po przesunięciu o $T = 1$ funkcja „wraca do tego samego wzoru”, co oznacza, że $f(t+1) = f(t)$.

Okres podstawowy funkcji $f(t) = t - n$ wynosi więc $T = 1$.

Złożenie funkcji (rysunek 4.1) to operacja, która „łączy dwie funkcje w jedną” w taki sposób, że wynik jednej funkcji staje się argumentem drugiej funkcji. Formalnie, jeśli mamy funkcje $f : D_f \rightarrow B$ i $g : D_g \rightarrow C$, to złożenie tych funkcji oznaczane jako $g \circ f$ jest funkcją $h : D_f \rightarrow C$, zdefiniowaną dla każdego $x \in D_f$ jako:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)). \quad (4.2)$$



Rysunek 4.1. Złożenie $g \circ f$

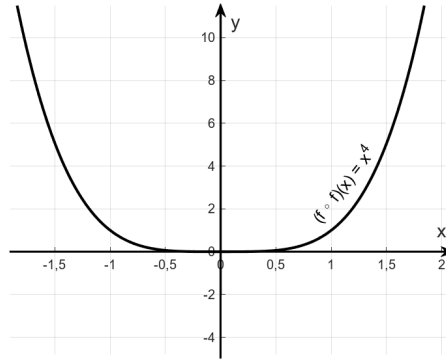
Jeśli zbiór wartości funkcji f zawiera się w dziedzinie funkcji g , to dziedzina funkcji złożonej $g \circ f$ pokrywa się z dziedziną funkcji f , czyli $D_{g \circ f} = D_f$. Jeżeli natomiast zbiór wartości funkcji f nie zawiera się w dziedzinie funkcji g , wówczas dziedzina złożenia funkcji $g \circ f$ składa się jedynie z argumentów należących do dziedziny funkcji f , których wartości należą do dziedziny funkcji g , czyli $D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f \text{ i } f(x) \in D_g\}$.

Przykład 4.1.18. Wiedząc, że $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, wyznaczyć i naszkicować złożenia funkcji $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ i ich dziedziny.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R}$ oraz $D_g = [0, \infty)$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 = x^4, \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R}$$

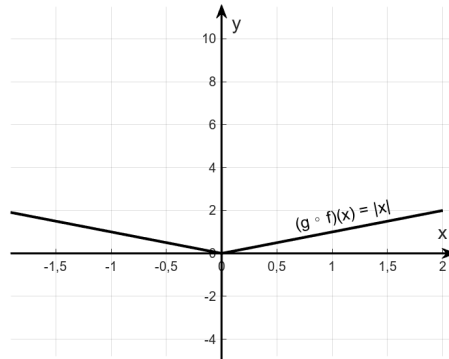
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x, & D_{f \circ g} &= [0, \infty) \\(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|, & D_{g \circ f} &= \mathbb{R} \\(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}, & D_{g \circ g} &= [0, \infty)\end{aligned}$$



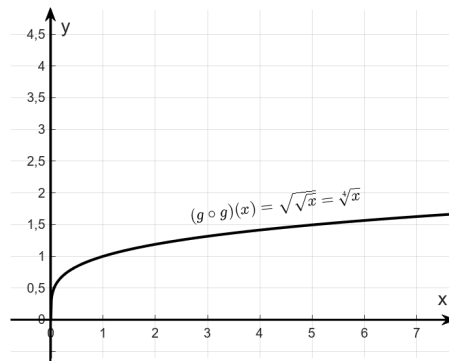
Rysunek 4.2. Wykres złożenia $f \circ f$ (przykład 4.1.18)



Rysunek 4.3. Wykres złożenia $f \circ g$ (przykład 4.1.18)



Rysunek 4.4. Wykres złożenia $g \circ f$ (przykład 4.1.18)



Rysunek 4.5. Wykres złożenia $g \circ g$ (przykład 4.1.18)

Jak wiemy, funkcja $y = f(x)$ o dziedzinie D_f i przeciwdziedzinie W przyporządkowuje każdemu $x \in D_f$ dokładnie jeden element $y \in W$. Załóżmy, że funkcja f jest różnowartościowa. Załóżmy też, że dla każdego $y \in W$ istnieje dokładnie jeden $x \in D_f$ taki, że $x = g(y)$. Tak określone przyporządkowanie nazywamy **funkcją odwrotną** funkcji f i oznaczamy ją jako f^{-1} , czyli $g = f^{-1}$.

Wykres funkcji odwrotnej $y = \varphi(x) = f^{-1}(x)$ do funkcji f otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu krzywej $y = f(x)$ względem prostej $y = x$.

Uwaga: Symbol f^{-1} jest traktowany jako całość, nie należy go mylić z potęgą o wykładniku -1 .

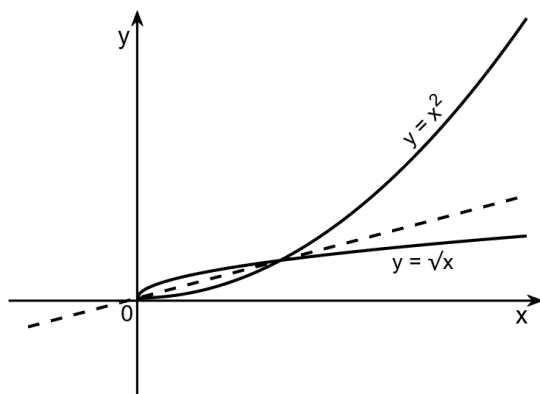
Kiedy rozważamy funkcję $f(x)$ i jej odwrotność $f^{-1}(x)$, możemy zauważyć, że ich role są zamienne: to, co dla jednej funkcji jest dziedziną, dla drugiej staje się przeciwdziedziną i odwrotnie.

Funkcja odwrotna $f^{-1}(x)$ przypisuje każdej wartości wyjściowej y funkcji $f(x)$ odpowiednią wartość wejściową x . Oznacza to, że jeśli $f(x) = y$, to $f^{-1}(y) = x$. Wynika stąd, że

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \quad (4.3)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x. \quad (4.4)$$

Przykład 4.1.19. Funkcje wzajemnie odwrotne to na przykład funkcje $f(x) = x^2$ oraz $y = \sqrt{x}$, dla $x \geq 0$. Wykres funkcji odwrotnej $y = \varphi(x) = \sqrt{x}$ można uzyskać, odbijając wykres funkcji $y = f(x) = x^2$ względem prostej $y = x$ (rysunek 4.6).



Rysunek 4.6. Funkcja $f(x) = x^2$ oraz funkcja do niej odwrotna $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

Przykład 4.1.20. Wyznaczyć algebraicznie funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, musimy wyznaczyć x_0 . Z równania $y = \frac{x-1}{x+2}$. Zatem

$$x - 1 = (x + 2)y$$

$$x - 1 = xy + 2y$$

$$x - xy = 2y + 1$$

$$x(1 - y) = 2y + 1.$$

Czyli $x = \frac{2y+1}{1-y}$. Zatem funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ jest

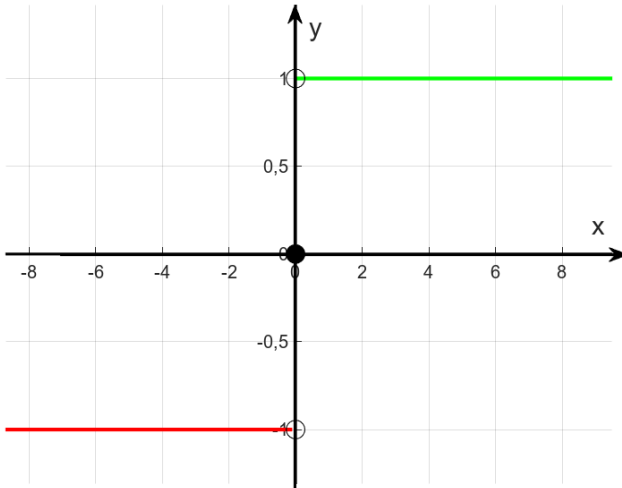
$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}.$$

Zauważmy, że dziedziną funkcji f jest zbiór $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\}$, natomiast przeciwdziedziną jest $W = \{y \in \mathbb{R} : y \neq 1\}$. W przypadku funkcji odwrotnej f^{-1} dziedziną jest $D_{f^{-1}} = W$, a przeciwdziedziną $W_{f^{-1}} = D_f$.

Definicja 4.1.21. Funkcją **signum** (rysunek 4.7) nazywamy funkcję $\text{sgn}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ określoną wzorem:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Funkcja $\text{sgn}(x)$ jest niemalejąca, a dokładniej, jest przedziałami stała.



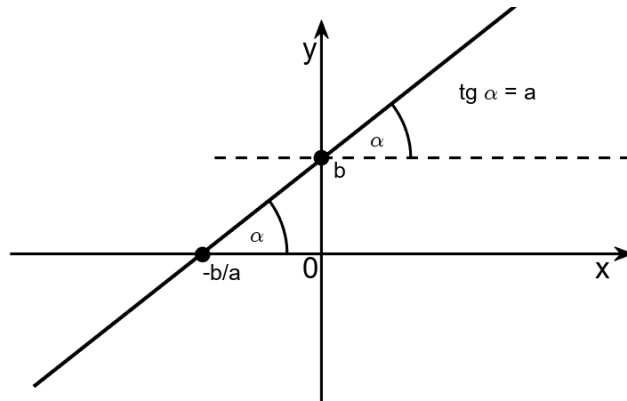
Rysunek 4.7. Wykres funkcji signum

4.2. Funkcja liniowa

Funkcja liniowa to funkcja dana wzorem

$$f(x) = ax + b, \quad (4.6)$$

gdzie a oraz b są stałymi współczynnikami rzeczywistymi. Wykresem funkcji liniowej jest linia prosta (rysunek 4.8), przechodząca przez punkty $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ i $(0, b)$.



Rysunek 4.8. Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$

Tabela 4.1. Własności funkcji liniowej $f(x) = ax + b$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}$
Miejsca zerowe	$x_0 = -\frac{b}{a}$
Monotoniczność	funkcja rosnąca: gdy $a > 0$ funkcja malejąca: gdy $a < 0$ funkcja stała: gdy $a = 0$

Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej $y = ax + b$. Jest on równy tangensowi kąta nachylenia prostej będącej wykresem funkcji $f(x)$ do osi OX (rysunek 4.8), czyli

$$a = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.7)$$

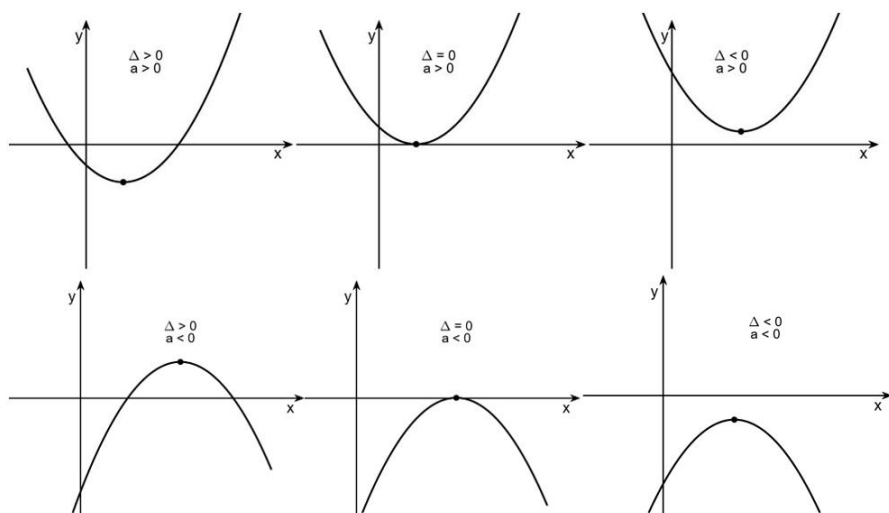
Współczynnik b często nazywany jest **wyrazem wolnym**. Wskazuje on punkt, w którym wykres funkcji przecina oś OY .

4.3. Funkcja kwadratowa

Jeżeli $a \neq 0$, to funkcję f określoną wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (4.8)$$

nazywamy **funkcją kwadratową** (rysunek 4.9), gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ to współczynniki (funkcji kwadratowej).



Rysunek 4.9. Wykres funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ w zależności od znaku współczynnika a i znaku Δ

Postać funkcji kwadratowej przedstawiona zależnością (4.8) jest to **postać ogólna funkcji kwadratowej**. Każdą funkcję kwadratową można doprowadzić do **postaci kanonicznej**

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad (4.9)$$

gdzie

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = \frac{\Delta}{4a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac. \quad (4.10)$$

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można doprowadzić do **postaci iloczynowej**

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (4.11)$$

gdzie

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (4.12)$$

Tabela 4.2. Własności funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	jeżeli $a > 0$, to $y \in [q, +\infty)$ jeżeli $a < 0$, to $y \in (-\infty, q)$
Miejsca zerowe	jeżeli $\Delta < 0$, to brak miejsc zerowych jeżeli $\Delta = 0$, to jest dokładnie jedno miejsce zerowe: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, jeżeli $\Delta > 0$, to są dwa miejsca zerowe: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Monotoniczność	gdy $a > 0$, to: $\begin{cases} \text{funkcja rosnąca dla } x \in [p, +\infty) \\ \text{funkcja malejąca dla } x \in (-\infty, p] \end{cases}$ gdy $a < 0$, to: $\begin{cases} \text{funkcja rosnąca dla } x \in (-\infty, p] \\ \text{funkcja malejąca dla } x \in [p, +\infty) \end{cases}$

Funkcja kwadratowa osiąga wartość największą lub najmniejszą (w zależności od znaku współczynnika a we wzorze ((4.8), rysunek 4.9) w punkcie $W(p, q)$ będącym wierzchołkiem wykresu funkcji kwadratowej (czyli paraboli)

$$W\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right). \quad (4.13)$$

Tak więc

- jeżeli $a > 0$, to funkcja kwadratowa w wierzchołku paraboli przyjmuje wartość najmniejszą $q = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $p = -\frac{b}{2a}$,
- jeżeli $a < 0$, to funkcja kwadratowa w wierzchołku paraboli przyjmuje wartość najwyższą $q = -\frac{\Delta}{4a}$ dla $p = -\frac{b}{2a}$.

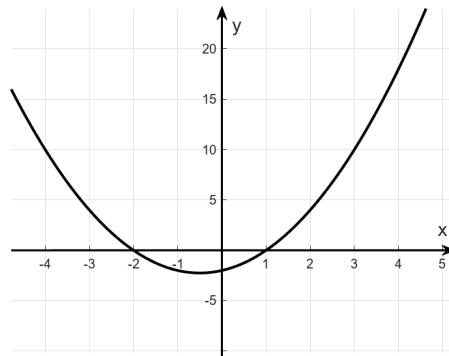
Przykład 4.3.1. Narysować wykres funkcji:

a) $f(x) = x^2 + x - 2$ b) $f(x) = x|x| + x - 2$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x$ d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x^2$

Rozwiązanie:

a) Ponieważ mamy do czynienia z funkcją kwadratową, więc do narysowania jej wykresu potrzebujemy współrzędnych wierzchołka paraboli (wzór (4.13)) i miejsc zerowych (tabela 4.3). Tutaj $\Delta > 0$, więc mamy dwa miejsca zerowe: $x_1 = -2$ i $x_2 = 1$, wierzchołek zaś paraboli znajduje się w punkcie $W\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$. Stąd otrzymujemy wykres przedstawiony na rysunku 4.10.

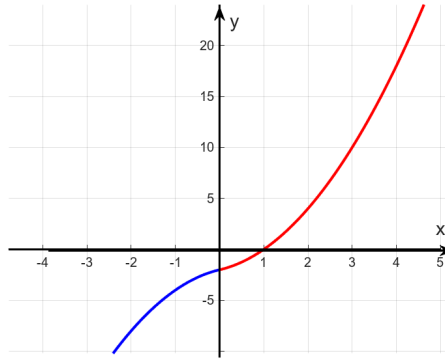


Rysunek 4.10. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + x - 2$

b) Zgodnie ze wzorem (1.1) otrzymujemy

$$f(x) = x|x| + x - 2 = \begin{cases} x^2 + x - 2, & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x^2 + x - 2, & \text{gdy } x < 0 \end{cases}.$$

Wykres danej funkcji przedstawiony jest na rysunku 4.11. Część krzywej zaznaczona kolorem czerwonym odpowiada przypadkowi $x \geq 0$, czyli jest wykresem paraboli $y = x^2 + x - 2$. Natomiast część krzywej zaznaczona kolorem niebieskim odpowiada przypadkowi $x < 0$, czyli jest wykresem paraboli $y = -x^2 + x - 2$.



Rysunek 4.11. Wykres funkcji $f(x) = x|x| + x - 2$

c) Zauważmy, że $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$ (wzory (2.1) i (1.12)). Zatem $f(x) = |x+1| + x$, czyli

$$f(x) = |x+1| + x = \begin{cases} x+1+x, & \text{gdy } x \geq -1 \\ -x-1+x, & \text{gdy } x < -1 \end{cases}$$

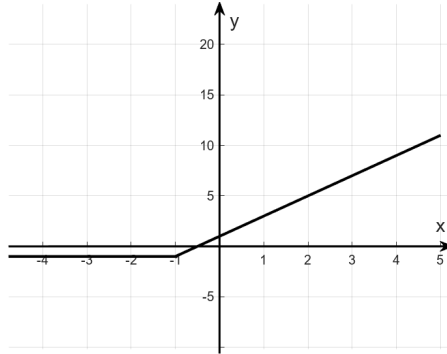
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{gdy } x \geq -1 \\ -1 & \text{gdy } x < -1 \end{cases}.$$

Stąd otrzymujemy wykres funkcji $f(x)$ taki, jak na rysunku 4.12.

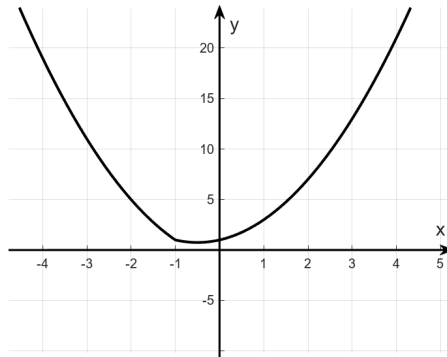
d) Podobnie jak w poprzednim przykładzie, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x^2 = |x+1| + x^2$, czyli

$$f(x) = |x+1| + x^2 = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{gdy } x \geq -1 \\ x^2 - x - 1 & \text{gdy } x < -1 \end{cases}.$$

Wykresem funkcji jest więc rysunek 4.13.



Rysunek 4.12. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x$



Rysunek 4.13. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x^2$

Przykład 4.3.2. W zależności od parametru m zbadać liczbę rozwiązań równania $(m + 1)x^2 - 4mx + 2m + 3 = 0$.

Rozwiązanie: Sprawdźmy najpierw, czy dane równanie ma rozwiązanie, gdy $m + 1 = 0$ ($m = -1$), czyli gdy dane równanie będzie równaniem liniowym. Otóż dla $m = -1$ mamy

$$4x - 2 + 3 = 0,$$

$$x = -\frac{1}{4}.$$

Zatem dla $m = -1$ dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $m \neq -1$. Zgodnie z tabelą 4.3 liczba rozwiązań równania $f(x) = 0$ zależy od znaku wyróżnika Δ

$$\Delta = (-4m)^2 - 4(m+1)(2m+3) = 8m^2 - 20m - 12.$$

Jeśli $\Delta = 0$, to

$$\begin{aligned} 8m^2 - 20m - 12 &= 0, \\ 2m^2 - 5m - 3 &= 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Ponownie wyznaczamy Δ oraz pierwiastki równania (4.14):

$$\Delta = 49, \quad m_1 = -\frac{1}{2}, \quad m_2 = 3,$$

czyli dla $m \in \{-1, -\frac{1}{2}, 3\}$ równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m+3 = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Teraz pozostało już sprawdzić, dla jakich m $\Delta > 0$, czyli dla jakich m będziemy mieli dwa rozwiązania, oraz dla jakich m $\Delta < 0$, czyli dla jakich m rozważane równanie nie będzie miało rozwiązań. Ponieważ

$$\Delta > 0, \quad \text{gdy} \quad m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, \infty),$$

uwzględniając, że $m \neq -1$, otrzymujemy

$$\Delta > 0, \quad \text{gdy} \quad m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, \infty).$$

Gdy zaś $\Delta < 0$, to

$$m \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right).$$

Podsumowując, równanie $(m+1)x^2 - 4mx + 2m+3 = 0$ ma:

- 2 różne rozwiązania, gdy $m \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$,
- 1 rozwiązanie, gdy $m \in \{-1, -\frac{1}{2}, 3\}$,
- 0 rozwiązań, gdy $m \in (-\frac{1}{2}, 3)$.

Przykład 4.3.3. Rzucona piłka określa w powietrzu tor opisany równaniem $f(x) = x - x^2$. Oblicz maksymalną wysokość, na jaką została wyrzucona ta piłka.

Rozwiązanie: Zauważmy, że tor lotu piłki zadany jest równaniem kwadratowym. Rysując tor lotu piłeczki, otrzymujemy parabolę o ramionach skierowanych do dołu. Oznacza to, że aby znaleźć maksymalną wysokość (maksymalną wartość), wystarczy obliczyć współrzędną $y = q$ wierzchołka danej funkcji. Ponieważ $\Delta = 1$, więc:

$$q = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

Zatem maksymalne wzniesienie piłki wynosi $\frac{1}{4}$.

4.4. Funkcja wielomianowa

Definicja 4.4.1. Wielomianem stopnia n zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (4.15)$$

gdzie: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ to współczynniki wielomianu $W(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
Wielomianem stopnia zero (wielomianem zerowym) nazywamy funkcję stałą $W(x) = a_0$.

Wielomiany $W(x)$ i $P(x)$ zmiennej x **są równe** wtedy i tylko wtedy, gdy są to wielomiany tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x .

Twierdzenie 4.4.2. Jeśli $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x)$, że:

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad (4.16)$$

gdzie stopień $R(x)$ jest mniejszy od stopnia wielomianu $P(x)$.

Definicja 4.4.3. Wielomian $R(x)$ w (4.16) nazywamy **resztą** z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

Aby wykonać dzielenie wielomianów, można posłużyć się co najmniej jednym z dwóch sposobów:

1. Algorytm pisemnego dzielenia wielomianu przez wielomian¹

Aby podzielić wielomian $W(x)$ stopnia n przez wielomian $P(x)$ stopnia $k \leq n$, należy:

- 1) uporządkować oba wielomiany, zapisując kolejne ich wyrazy w porządku malejącym potęg kolejnych wyrazów;
- 2) pierwszy wyraz wielomianu $W(x)$ podzielić przez pierwszy wyraz wielomianu $P(x)$;
- 3) zapisać wynik;
- 4) wynik dzielenia pomnożyć przez wielomian $P(x)$, a otrzymany wielomian $Q(x)$ odjąć od wielomianu $W(x)$, otrzymując w ten sposób wielomian $Z(x)$;
- 5) wykonać ponownie punkt 1. dla nowego wielomianu $Z(x)$;
- 6) operację tę wykonujemy aż do momentu otrzymania jako różnicy wielomianu o stopniu niższym od stopnia wielomianu $P(x)$.

Uwaga: Zawsze należy zwracać uwagę na brakujące potęgi wielomianów.

Przykład 4.4.4. Wielomian $W(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ podzielić przez wielomian $P(x) = x^2 + x + 1$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że we wzorze wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ brakuje x , dlatego, aby ułatwić dzielenie, dopisujemy $0x$. Dzielenie wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ przez $P(x) = x^2 + x + 1$ rozpoczynamy od podzielenia pierwszego wyrazu x^3 przez x^2 , co daje x . Następnie mnożymy x przez $P(x)$, uzyskując $x^3 + x^2 + x$, i odejmujemy go od $W(x)$, co prowadzi do nowej reszty $3x^2 - x - 5$. W kolejnym kroku dzielimy $3x^2$ przez x^2 , otrzymując 3 . Mnożymy 3 przez $P(x)$, co daje $3x^2 + 3x + 3$, i odejmujemy od reszty, uzyskując $-4x - 8$:

$$\begin{array}{r}
 x + 3 \\
 \hline
 (x^3 + 4x^2 + 0x - 5) : (x^2 + x + 1) \\
 \underline{-x^3 - x^2 - x} \\
 3x^2 - x - 5 \\
 \underline{-3x^2 - 3x - 3} \\
 -4x - 8
 \end{array}$$

¹Patrz [12].

Podsumowując, po podzieleniu wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 5$ przez $P(x) = x^2 + x + 1$ otrzymujemy iloraz $Q(x) = x + 3$ oraz resztę $R(x) = -4x - 8$. Możemy więc zapisać, że $W(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$, czyli

$$W(x) = (x + 3)(x^2 + x + 1) + (-4x - 8).$$

2. Schemat Hornera²

Schemat Hornera to algorytm służący do obliczania wartości wielomianu w punkcie a oraz do wyznaczania ilorazu i reszty z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$.

Aby znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$, postępujemy następująco:

- 1) tworzymy tabelę jak poniżej

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{k+1}	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
a	a_n									

- 2) współczynniki wielomianu, które otrzymamy po podzieleniu wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$, zapisujemy w pustych polach drugiego wiersza tabeli, wykorzystując do obliczeń poniższe zależności

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{k+1}	a_k	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
a	a_n	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_k	b_{k-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$R(x)$

gdzie $R(x)$ to reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $P(x) = x - a$.

Kolejne współczynniki b_i wielomianu otrzymujemy następująco

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{n-2} &= ab_{n-1} + a_{n-1}, \\ b_{n-3} &= ab_{n-2} + a_{n-2}, \\ &\vdots \\ b_1 &= ab_2 + a_2, \\ R &= ab_0 + a_0. \end{aligned}$$

²Patrz [12].

Uwaga: Wykorzystując schemat Hornera do dzielenia wielomianów, wielomian $W(x)$ musi być uporządkowany od najwyższej potęgi do najniższej. Zastosowanie schematu Hornera do wyznaczania pierwiastków wielomianu jest omówione szczegółowo w przykładzie 4.4.8.

Uwaga: Schemat Hornera mimo swojej prostoty ma jedno ważne ograniczenie: możemy go stosować tylko w przypadku dzielenia wielomianu przez dwumian. W każdym innym przypadku nie ma on zastosowania.

Twierdzenie 4.4.5. (Twierdzenie Bézouta) Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x - a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba a jest pierwiastkiem tego wielomianu, czyli gdy:

$$W(a) = 0. \quad (4.17)$$

Z twierdzenia Bézouta wynika, że **reszta** $R(x)$ z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $P(x) = x - a$ jest równa $W(a)$.

Przykład 4.4.6. Sprawdzić, czy wielomian

$$W(x) = -3x^{2024} + x^{2023} + 2x + 6$$

jest podzielny przez dwumian $P(x) = x + 1$.

Rozwiązanie: Z twierdzenia Bézouta wiemy, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $P(x) = x + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$W(-1) = 0.$$

Wyznamy wartość wielomianu $W(x)$ dla $x = -1$, czyli

$$\begin{aligned} W(-1) &= -3 \cdot (-1)^{2024} + (-1)^{2023} + 2 \cdot (-1) + 6 = \\ &= -3 - 1 \cdot 1 - 2 + 6 = 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $W(-1) = 0$, to wielomian $W(x) = -3x^{2024} + x^{2023} + 2x + 6$ jest podzielny przez dwumian $P(x) = x + 1$, zatem $x = -1$ jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Uwaga: Jeżeli wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma **pierwiastek całkowity**, to jest on dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 . Jeżeli wielomian $W(x)$ o współczynnikach całkowitych ma **pierwiastek wymierny** $\frac{p}{q}$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0 , a q jest dzielnikiem współczynnika a_n .

Definicja 4.4.7. Jeżeli liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to jego **krotnością** nazywamy największą liczbę naturalną k , taką, że wielomian $W(x)$ jest podzielny przez wielomian $(x - a)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$.

Uwaga: Dzieląc wielokrotnie wielomian $W(x)$ przez dwumian $P(x) = x - a$, możemy określić krotność pierwiastka a .

Przykład 4.4.8. Znaleźć pierwiastki wielomianu

$$W(x) = 2x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 22x - 12.$$

Rozwiązanie:

I sposób: Ponieważ wyrazem wolnym danego wielomianu jest $a_0 = -12$, więc dzielnikami wyrazu $a_0 = -12$ są $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Współczynnikiem przy x^4 jest $a_4 = 2$, więc $q = \pm 1, \pm 2$. Zatem możliwymi pierwiastkami rozważanego wielomianu mogą być:

$$x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm 6, \pm \frac{6}{2}, \pm 12.$$

Teraz możemy sprawdzić, które z tych wartości x są pierwiastkami wielomianu, czyli spełniają równanie $W(x) = 0$:

$$W(1) = 0, \text{ czyli } x = 1 \text{ jest pierwiastkiem wielomianu } W(x),$$

$$W\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0, W(2) \neq 0,$$

$$W(3) = 0, \text{ czyli } x = 3 \text{ jest pierwiastkiem wielomianu } W(x),$$

$$W\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0, W(4) \neq 0, W(6) \neq 0,$$

$$W(12) \neq 0, W(-1) \neq 0, W\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0,$$

$W(-2) = 0$, czyli $x = -2$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$,

$$W(-3) \neq 0, W\left(-\frac{3}{2}\right) \neq 0, W(-4) \neq 0, W(-6) \neq 0, W(-12) \neq 0.$$

II sposób: Schemat Hornera

Na początku wystarczy znaleźć jeden pierwiastek wielomianu. Z poprzednich obliczeń wiemy, że $W(1) = 0$, czyli, że $x = 1$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(x)$. Na tej podstawie, stosując schemat Hornera, otrzymujemy

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -6 & -6 & 22 & -12 \\ 1 & & 2 & -4 & -10 & 12 \\ \hline & 2 & -4 & -10 & 12 & 0 \end{array}$$

Zatem wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x - 1)$ jest wielomian $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$. Czyli możemy zapisać

$$W(x) = (2x^3 - 4x^2 - 10x + 12)(x - 1).$$

W następnym kroku użyjemy schematu Hornera dla wielomianu $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 10x + 12$. Zauważmy, że $Q(3) = 0$, więc

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -4 & -10 & 12 \\ 3 & & 6 & 6 & -12 \\ \hline & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

Zatem wynikiem dzielenia wielomianu $Q(x)$ przez $(x - 3)$ jest wielomian $R(x) = 2x^2 + 2x - 4$, czyli możemy zapisać, że

$$Q(x) = (2x^2 + 2x - 4)(x - 1)(x - 3).$$

Pozostaje już tylko znaleźć pierwiastki dla wielomianu drugiego stopnia $R(x) = 2x^2 + 2x - 4$. Ponieważ $\Delta > 0$, zatem $x_1 = 1$, a $x_2 = -2$. Jak można zauważyć, $x = 1$ jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$, a $x = -2$ i $x = 3$ są pierwiastkami jednokrotnymi tego wielomianu.

Warto dodać, że znając pierwiastki wielomianu $W(x)$ oraz ich krotność, wielomian $W(x)$ możemy zapisać jako $W(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - 3)$.

Przykład 4.4.9. Rozwiązać równanie $(x^2 + 6x + 9)(x - 1) = 0$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2.$$

Otrzymujemy więc

$$(x + 3)^2(x - 1) = 0.$$

Iloczyn kilku czynników jest równy zero, gdy co najmniej jeden z nich jest równy zero, czyli

$$(x + 3)^2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 1 = 0$$

$$x = -3 \quad \text{lub} \quad x = 1.$$

Rozwiązywanie nierówności wielomianowych: Często stosowany sposób rozwiązywania nierówności stopnia $n \geq 3$ polega na tym, że rozkładamy $W(x)$ na czynniki liniowe lub kwadratowe. Jeśli $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ są pierwiastkami $W(x)$, tworzymy przedziały:

$$(-\infty; x_1), \quad (x_1; x_2), \quad \dots, \quad (x_{k-1}; x_k), \quad (x_k; \infty).$$

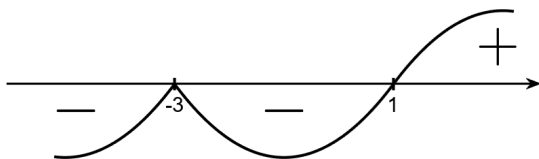
Badamy kolejno, jaki znak (+ czy -) mają w każdym z tych przedziałów wartości każdego dwumianu czy trójmianu występującego w rozkładzie $W(x)$ na czynniki. W ten sposób powstaje tzw. siatka znaków. Zapisując wyniki w siatce znaków, stwierdzamy, jaki znak ma w danym przedziale iloczyn wszystkich czynników rozkładu, czyli wielomian $W(x)$. Zmianę znaków wielomianu $W(x)$ w kolejnych przedziałach ilustrujemy, zaznaczając na osi punkty $x_1, x_2, \dots, x_n$, a następnie prowadząc przez nie tzw. wężyk. Jeżeli współczynnik przy najwyższej potędze niewiadomej jest dodatni, wówczas wężyk funkcji wielomianowej rysujemy od prawej strony, zaczynając od góry, jeżeli zaś współczynnik przy najwyższej potędze niewiadomej jest ujemny, to wężyk funkcji wielomianowej rysujemy od prawej strony, zaczynając od dołu. Jeżeli krotność pierwiastka jest parzysta, to wężyk odbijamy od osi, a jeżeli nieparzysta, to wężyk przecina oś.

Przykład 4.4.10. Rozwiązać nierówność $(x^2 + 6x + 9)(x - 1) \geq 0$.

Rozwiązanie: Korzystamy z obliczeń wykonanych w przykładzie 4.4.9, tak więc

$$(x + 3)^2(x - 1) \geq 0.$$

Mamy też wyznaczone miejsca zerowe wielomianu $x = -3$ (pierwiastek podwójny) oraz $x = 1$ (pierwiastek jednokrotny). Zaznaczymy pierwiastki wielomianu na osi liczbowej. Zauważmy, że współczynnik $a_n = -2 > 0$, więc rysowanie wężyka rozpoczynamy od góry z prawej strony. 1 jest pierwiastkiem jednokrotnym, dlatego wężyk przecina oś w tym punkcie, -3 zaś jest pierwiastkiem dwukrotnym, dlatego w tym punkcie „odbija się” od osi (rysunek 4.14). Linia wężyka znajduje się nad osią i na osi dla $x \in [1, \infty] \cup \{-3\}$, dlatego też ten zbiór jest rozwiązaniem danej nierówności.



Rysunek 4.14. Wężyk dla nierówności z przykładu 4.4.5

Przykład 4.4.11. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{(x^2 + 6x + 9)(x - 1)}$.

Rozwiązanie: Wiemy, że wyrażenie pod pierwiastkiem powinno przyjmować wartości nieujemne. Stąd otrzymujemy, że

$$(x^2 + 6x + 9)(x - 1) \geq 0.$$

Rozwiązanie tej nierówności przedstawione zostało w przykładzie 4.4.10. Zatem $D_f = [1, \infty] \cup \{-3\}$.

4.5. Funkcja wymierna

Definicja 4.5.1. Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów, tzn.:

$$f(x) = \frac{W(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (4.18)$$

o ile $P(x) \neq 0$. Jeżeli stopień wielomianu $W(x)$ jest większy bądź równy stopniowi wielomianu $P(x)$, to mówimy o **funkcji wymiernej niewłaściwej**. Jeżeli natomiast stopień wielomianu $W(x)$ jest mniejszy niż stopień wielomianu $P(x)$, to mówimy o **funkcji wymiernej właściwej**.

Twierdzenie 4.5.2. Każda funkcja wymierna niewłaściwa jest sumą pewnego niezerowego wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej.

Najprostszym sposobem sprowadzenia funkcji wymiernej niewłaściwej do sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej jest podzielenie wielomianu znajdującego się w liczniku przez wielomian znajdujący się w mianowniku.

Przykład 4.5.3. Przedstawić funkcję $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x - 10}{x^2 - x - 6}$ w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Rozwiązanie: Aby przedstawić funkcję w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej, musimy podzielić licznik przez mianownik. Wykorzystujemy tutaj algorytm pisemnego dzielenia wielomianu przez wielomian ze strony 48:

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ (x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x - 10) : (x^2 - x - 6) \\ \underline{-x^4 + x^3 + 6x^2} \\ x^2 + 2x - 10 \\ \underline{-x^2 + x + 6} \\ 3x - 4 \end{array}$$

Wynikiem dzielenia wielomianu $x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x - 10$ przez $x^2 - x - 6$ jest $x^2 + 1$ z resztą $3x - 4$. Daną funkcję możemy więc zapisać jako sumę wielomianu $x^2 + 1$ i funkcji wymiernej właściwej $\frac{3x-4}{x^2-x-6}$, czyli

$$f(x) = x^2 + 1 + \frac{3x - 4}{x^2 - x - 6}.$$

Twierdzenie 4.5.4. Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych, czyli funkcji wymiernych postaci:

$$\frac{A}{(ax + b)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx + C}{(cx^2 + dx + e)^p},$$

gdzie A, B, C, a, b, c, d, e są to stałe rzeczywiste, takie, że $d^2 - 4ce < 0$, a k i p są liczbami naturalnymi.

Algorytm rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste³

- 1) sprawdzić stopnie wielomianów w liczniku i mianowniku funkcji wymiernej $\frac{W(x)}{P(x)}$;
- 2) jeżeli stopień wielomianu $W(x)$ jest wyższy od stopnia $P(x)$, to należy wykonać dzielenie $W(x) : P(x)$;
- 3) jeżeli $R(x)$ jest resztą otrzymaną z dzielenia, to

$$\frac{W(x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)},$$

gdzie $\frac{R(x)}{P(x)}$ jest to funkcja wymierna właściwa, którą rozkładamy na ułamki proste;

- 4) rozłożyć wielomian $P(x)$ na czynniki stopnia co najwyżej drugiego;
- 5) zapisać przewidywany rozkład funkcji wymiernej $\frac{Q(x)}{P(x)}$ w postaci ogólnej:
 - dla czynników pierwszego rodzaju, to znaczy czynników $(x - x_1)^n, (x - x_2)^m$, przewidujemy rozkład danej funkcji $\frac{P(x)}{Q(x)}$ na ułamki proste pierwszego rodzaju, czyli rozkład:

$$\frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{Z}{(x - x_1)^n} +$$

$$\frac{C}{(x - x_2)} + \frac{D}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{Y}{(x - x_2)^m}$$

- dla czynników drugiego rodzaju, tj. $(ax^2 + bx + c)^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}, \Delta < 0$, przewidujemy ułamki drugiego rodzaju, czyli rozkład:

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{Kx + L}{(ax^2 + bx + c)^k};$$

- 6) wyznaczyć wszystkie nieznane współczynniki $A, B, C, \dots, Z$ poprzez porównanie współczynników wielomianów po obydwu stronach równości;

³Patrz [12].

7) zapisać funkcję wymierną jako sumę ułamków prostych.

Przykład 4.5.5. Rozłożyć na ułamki proste funkcję $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-x-6}$.

Rozwiązanie: Najpierw zauważmy, że jest to funkcja wymierna właściwa.

Ponieważ $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, więc

$$\frac{3x - 4}{x^2 - x - 6} = \frac{3x - 4}{(x - 3)(x + 2)}.$$

Ponieważ mianownik danej funkcji wymiernej jest iloczynem dwóch czynników stopnia pierwszego, więc

$$\frac{3x - 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2}.$$

Z powyższego równania chcemy wyznaczyć stałe A i B . W tym celu mnożymy obie jego strony przez $(x - 3)(x + 2)$

$$\frac{3x - 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} \quad | \cdot (x - 3)(x + 2)$$

$$3x - 4 = A(x + 2) + B(x - 3)$$

i porządkujemy prawą stronę równości według malejących potęg x

$$3x - 4 = Ax + 2A + Bx - 3B$$

$$3x - 4 = (A + B)x + (2A - 3B).$$

Ponieważ dwa wielomiany są równe, gdy mają ten sam stopień i równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ -4 = 2A - 3B \end{cases} ,$$

z którego wyznaczamy stałe A i B

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \end{cases} .$$

Podstawiając otrzymane wartości A i B do wyrażenia $\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$, otrzymujemy

$$f(x) = \frac{3x - 4}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{1}{x - 3} + \frac{2}{x + 2}.$$

Przykład 4.5.6. Rozłóż na ułamki proste funkcję $f(x) = \frac{3x-4}{(x-3)^2(x+2)}$.

Rozwiązanie: Ponieważ mianownik funkcji jest iloczynem trzech czynników, więc funkcję $\frac{3x-4}{(x-3)^2(x+2)}$ rozkładamy na trzy składniki

$$\frac{3x-4}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-3)^2(x+2)$

$$\frac{3x-4}{(x-3)^2(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+2} \quad | \cdot (x-3)^2(x+2)$$

$$3x-4 = A(x-3)(x+2) + B(x+2) + C(x-3)^2$$

i porządkujemy prawą stronę równości według malejących potęg x

$$3x-4 = A(x^2-x-6) + Bx+2B + C(x^2-6x+9)$$

$$3x-4 = (A+C)x^2 + (-A+B-6C)x + (-6A+2B+9C).$$

Porównując wielomiany po obu stronach równości, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} A+C=0, \\ -A+B-6C=3, \\ -6A+2B+9C=-4 \end{cases}$$

z którego wyznaczamy stałe A , B i C

$$\begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = 1 \\ C = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Tak więc

$$f(x) = \frac{\frac{2}{5}}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{-\frac{2}{5}}{x+2}.$$

Przykład 4.5.7. Rozłóż na ułamki proste funkcję $f(x) = \frac{3x-4}{x^2(x^2-x+6)}$.

Rozwiązanie: Najpierw sprawdzamy, czy nie możemy rozłożyć na czynniki wyrażenia x^2-x+6 . Ponieważ $\Delta < 0$, więc jest to niemożliwe. Zauważmy,

4. Przegląd funkcji elementarnych

że mianownik funkcji jest iloczynem trzech czynników, więc funkcję $\frac{3x-4}{x^2(x^2-x+6)}$ rozkładamy na trzy składniki

$$\frac{3x-4}{x^2(x^2-x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+6}$$

i mnożymy obie strony równości przez $x^2(x^2-x+6)$. Otrzymujemy

$$\frac{3x-4}{x^2(x^2-x+6)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+6} \quad | \cdot x^2(x^2-x+6)$$

$$3x-4 = Ax(x^2-x+6) + B(x^2-x+6) + (Cx+D)x^2$$
$$(A+C)x^3 + (-A+B+D)x^2 + (6A-B)x + 6B,$$

więc

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+D=0 \\ 6A-B=3 \\ 6B=-4 \end{cases}.$$

Stąd

$$\begin{cases} A = \frac{7}{18} \\ B = -\frac{2}{3} \\ C = -\frac{7}{18} \\ D = \frac{19}{18} \end{cases},$$

więc

$$f(x) = \frac{3x-4}{x^2(x^2-x+6)} = \frac{\frac{7}{18}}{x} + \frac{-\frac{2}{3}}{x^2} + \frac{-\frac{7}{18}x + \frac{19}{18}}{x^2-x+6}.$$

Przykład 4.5.8. Rozwiązać nierówność:

$$\text{a) } \frac{1}{x} < x \quad \text{b) } \frac{x+3}{x-3} > \frac{x-1}{x+5} \quad \text{c) } \frac{1-2x}{1+x} - \frac{1+x}{1+2x} > 1$$

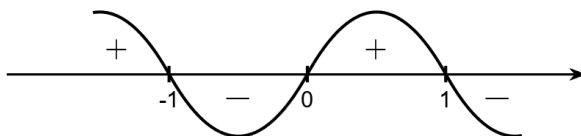
Rozwiązanie:

a) Przenosimy wszystkie wyrazy nierówności $\frac{1}{x} < 1$ na jedną stronę i sprowadzamy do wspólnego mianownika, czyli

$$\frac{1}{x} < x$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} - x &< 0 \\ \frac{1 - x^2}{x} &< 0 \\ \frac{(1 - x)(1 + x)}{x} &< 0.\end{aligned}$$

Znak tej nierówności jest taki sam jak znak nierówności $^4 (1-x)(1+x)x < 0$. Zauważmy, że $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a pierwiastkami licznika są $x = -1$ i $x = 1$. Zaznaczmy pierwiastki z licznika i mianownika na osi. Współczynnik przy x^2 jest ujemny, dlatego też zaczynamy rysować wężyk od dołu. Wszystkie pierwiastki są jednokrotne, więc wężyk będzie przecinał oś w każdym z tych punktów.



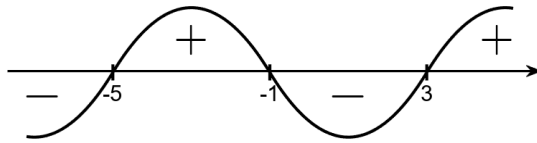
Rysunek 4.15. Wężyk dla nierówności z przykładu 4.5.8.a

Wężyk znajduje się pod osią dla $x \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$, więc ten przedział jest rozwiązaniem danej nierówności.

b) Postępujemy podobnie jak w przykładzie 4.5.8a. Zauważamy oczywiście, że $x \neq 3$ i $x \neq -5$. Zatem

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x-3} &\geq \frac{x-1}{x+5} \\ \frac{x+3}{x-3} - \frac{x-1}{x+5} &\geq 0 \\ \frac{(x+3)(x+5) - (x-1)(x-3)}{(x-3)(x+5)} &\geq 0 \\ \frac{12(x+1)}{(x-3)(x+5)} &\geq 0\end{aligned}$$

Zaznaczamy na osi pierwiastki licznika: $x = -1$ oraz mianownika: $x = 3$ i $x = -5$.



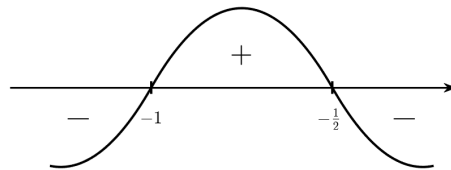
Rysunek 4.16. Wężyk dla nierówności z przykładu 4.5.8.b

Rozwiązaniem nierówności $\frac{x+3}{x-3} > \frac{x-1}{x+5}$ jest więc suma przedziałów $x \in (-5, -1] \cup (3, \infty)$.

c) Nierówność $\frac{1-2x}{1+x} - \frac{1+x}{1+2x} > 1$ rozwiązujemy analogicznie do dwóch poprzednich przykładów. Zauważmy, że $x \neq -1$ i $x \neq -\frac{1}{2}$. Zatem

$$\begin{aligned} \frac{1-2x}{1+x} - \frac{1+x}{1+2x} &\leq 1 \\ \frac{1-2x}{1+x} - \frac{1+x}{1+2x} - 1 &\leq 0 \\ \frac{(1-2x)(1+2x) - (1+x)(1+x) - (1+x)(1+2x)}{(1+x)(1+2x)} &\leq 0 \\ \frac{-7x^2 - 5x - 1}{(1+x)(1+2x)} &\leq 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $-7x^2 - 5x - 1 < 0$ ($\Delta < 0$ i $a = -7 < 0$ (rysunek 4.9)). Na osi zaznaczamy więc tylko pierwiastki z mianownika: $x = -1$ oraz $x = -\frac{1}{2}$ i zaczynamy rysować wężyk od dołu.



Rysunek 4.17. Wężyk dla nierówności z przykładu 4.5.8.c

Z rysunku 4.17 odczytujemy, że rozwiązaniem nierówności jest przedział $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$.

⁴Znak nierówności $\frac{a}{b} > 0$ (odpowiednio $\frac{a}{b} < 0$) jest taki sam jak znak iloczynu $ab > 0$ (odpowiednio $ab < 0$).

4.6. Funkcja potęgowa

Definicja 4.6.1. Funkcją potęgową nazywamy funkcję f wyrażoną wzorem

$$f(x) = x^a, \quad (4.19)$$

gdzie a jest liczbą rzeczywistą.

Uwaga: Jeżeli a jest liczbą naturalną, wtedy f jest jednomianem, czyli szczególnym przypadkiem funkcji wielomianowej.

Dziedzina funkcji potęgowej jest uzależniona od wartości wykładnika. Jeśli:

- $a \in \mathbb{Z}, a \geq 0$ to $D_f = \mathbb{R}$,
- $a \in \mathbb{Z}, a < 0$ to $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, a > 0$ to $D_f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,
- $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, a < 0$ to $D_f = \mathbb{R}_+$.

4.7. Funkcja wykładnicza

Definicja 4.7.1. Funkcją wykładniczą (rysunek 4.18) nazywamy funkcję dla każdego $x \in \mathbb{R}$ określoną jako

$$f(x) = a^x, \quad (4.20)$$

gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$.

Wykres funkcji $f(x) = a^x$ zawsze przecina oś OY w punkcie $(0, 1)$ (patrz rysunek 4.18).

Uwaga: Rozwiązując nierówności wykładnicze, czyli nierówności, w których niewiadoma występuje wyłącznie w wykładniku potęgi, należy zwrócić szczególną uwagę na sposób przechodzenia z nierówności wykładniczej do nierówności wynikającej z wyrażeń znajdujących się w wykładnikach. Wynika to z monotoniczności funkcji wykładniczej. I tak:

4. Przegląd funkcji elementarnych

- ponieważ dla $a \in (0, 1)$ funkcja wykładnicza jest malejąca, więc

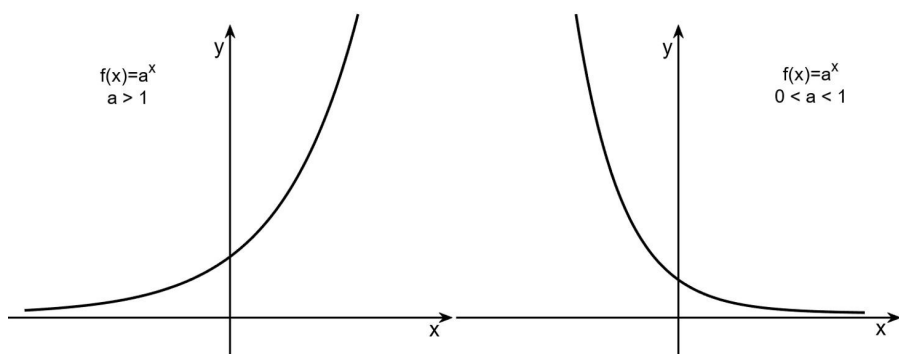
$$a^{x_1} < a^{x_2} \implies x_1 > x_2, \quad (4.21)$$

czyli opuszczając podstawy, zmieniamy znak nierówności na przeciwny,

- ponieważ dla $a > 1$ funkcja wykładnicza jest rosnąca, więc

$$a^{x_1} < a^{x_2} \implies x_1 < x_2, \quad (4.22)$$

czyli opuszczając podstawy, pozostawiamy znak nierówności bez zmian.



Rysunek 4.18. Wykres funkcji wykładniczej

Tabela 4.3. Własności funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}_+$
Miejsca zerowe	nie ma miejsc zerowych
Monotoniczność	funkcja rosnąca dla $a > 1$ funkcja malejąca dla $a \in (0, 1)$

Przykład 4.7.2. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$.

Rozwiązanie: Wiemy, że wartość wyrażenia pod pierwiastkiem powinna być nieujemna, więc

$$2^x - 3^x \geq 0$$

$$\begin{aligned}
2^x &\geq 3^x \quad | \cdot \frac{1}{3^x} \\
\left(\frac{2}{3}\right)^x &\geq 1 \\
\left(\frac{2}{3}\right)^x &\geq \left(\frac{2}{3}\right)^0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Zauważmy, że $a = \frac{2}{3} \in (0, 1)$, więc zgodnie ze wzorem (4.21), opuszczając podstawy, zmieniamy znak nierówności na przeciwny i otrzymujemy rozwiązanie nierówności (4.23)

$$x \leq 0.$$

Przykład 4.7.3. Rozwiązać nierówność $2^{x+1} < 2^{3x+5}$.

Rozwiązanie: Mamy do czynienia z funkcją wykładniczą rosnącą ($a = 2 > 1$), więc zgodnie ze wzorem (4.22), opuszczając podstawy, pozostawiamy znak nierówności bez zmian, czyli

$$x + 1 < 3x + 5$$

$$x > -2.$$

4.8. Funkcja logarytmiczna

Definicja 4.8.1. Logarytmem liczby dodatniej b przy podstawie a , $a > 0$, $a \neq 1$ nazywamy taką liczbę c , że a podniesione do potęgi c , daje liczbę b , czyli

$$\log_a b = c \iff a^c = b. \tag{4.24}$$

Własności logarytmów:

Niech $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$. Wtedy:

$$\log_a a = 1 \tag{4.25}$$

$$\log_a 1 = 0 \tag{4.26}$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \tag{4.27}$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c} \quad (4.28)$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b \neq 1 \quad (4.29)$$

$$n \cdot \log_a b = \log_a b^n, n \in \mathbb{N} \quad (4.30)$$

$$\frac{1}{n} \log_a b = \log_{a^n} b \quad (4.31)$$

$$a^b = p^{b \log_p a} \quad (4.32)$$

$$a^{\log_a b} = b \quad (4.33)$$

$$\log_a a^b = b \quad (4.34)$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad c \neq 1 \quad (4.35)$$

Przykład 4.8.2. Obliczyć $\log_9 7 \cdot \log_{49} 27$.

Rozwiązanie: W pierwszym kroku $\log_{49} 27$ przedstawiamy jako logarytm o podstawie 9. W tym celu korzystamy z własności (4.35)

$$\log_{49} 27 = \frac{\log_9 27}{\log_9 49} = \frac{\log_9 3^3}{\log_9 7^2}.$$

Korzystając z własności (4.30) oraz (4.25), otrzymujemy

$$\log_9 3^3 = 3 \log_9 3 = 3 \log_9 \sqrt{9} = 3 \log_9 9^{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \log_9 9 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

oraz

$$\log_9 7^2 = 2 \log_9 7.$$

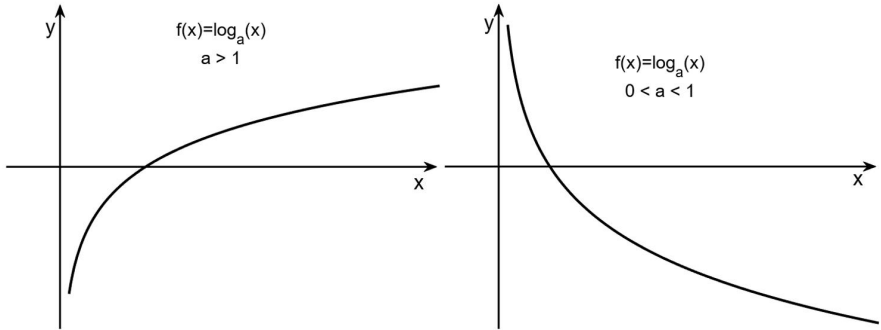
Zatem

$$\log_9 7 \cdot \log_{49} 27 = \log_9 7 \cdot \frac{\frac{3}{2}}{2 \log_9 7} = \frac{3}{4}.$$

Definicja 4.8.3. Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję

$$f(x) = \log_a x, \quad (4.36)$$

gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $x > 0$.



Rysunek 4.19. Wykres funkcji logarytmicznej

Tabela 4.4. Własności funkcji logarytmicznej $f(x) = \log_a x$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}_+$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}$
Miejsce zerowe	$x = 1$
Monotoniczność	funkcja rosnąca dla $a > 1$ funkcja malejąca dla $a \in (0, 1)$

Wykres funkcji $f(x) = \log_a x$ zawsze przecina oś OX w punkcie $(1, 0)$ (rysunek 4.19).

Przykład 4.8.4. Rozwiązać równanie:

a) $\log_2(x^2 - 5x + 5) = 1$ b) $\log_x(x^2 - 1) = 10$

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że z definicji logarytmu wynika, że $x^2 - 5x + 5 > 0$, czyli $x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. Również z definicji logarytmu wiemy, że $\log_2(x^2 - 5x + 5) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x^2 - 5x + 5 = 1^2$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

a stąd otrzymujemy rozwiązanie

$$x_1 = 1 \in \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{i} \quad x_2 = 4 \in \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

b) Zauważmy, że niewiadoma x występuje w podstawie logarytmu $\log_x(x^2 - 1) = 10$, więc $x > 0$, $x \neq 1$. Ponieważ wyrażenie logarytmowane musi być dodatnie (definicja logarytmu), więc $x^2 - 1 > 0$. Biorąc pod uwagę, że $x > 0$ i $x \neq 1$, otrzymujemy, że dziedziną funkcji jest $x \in (1, \infty)$. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy

$$\log_x(x^2 - 1) = 10$$

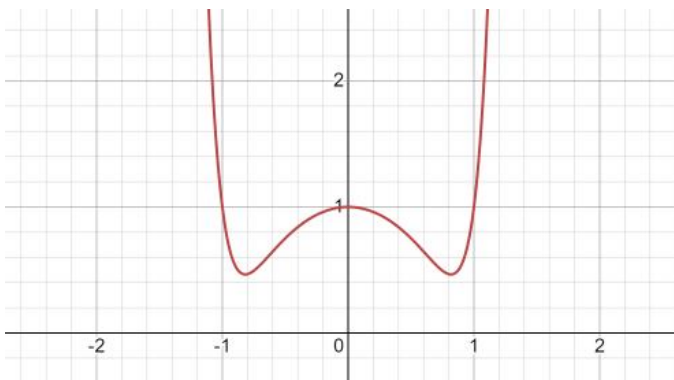
$$\log_x(x^2 - 1) = \log_x x^{10}.$$

Opuszczając logarytmy po obu stronach ostatniej równości, mamy

$$x^2 - 1 = x^{10}$$

$$x^{10} - x^2 + 1 = 0.$$

Otrzymaliśmy wielomian $W(x) = x^{10} - x^2 + 1$ dziesiątego stopnia, którego wykres przedstawiono na rysunku 4.20. Analizując ten wykres, widzimy, że równanie $x^{10} - x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych w przedziale $[1, \infty)$.



Rysunek 4.20. Wykres wielomianu $W(x) = x^{10} - x^2 + 1$

Uwaga: Rozwiązując nierówności logarytmiczne, w których niewiadoma występuje w wyrażeniu logarytmowanym lub w podstawie logarytmu, należy zwrócić szczególną uwagę na sposób przechodzenia z nierówności logarytmów do nierówności wyrażen logarytmowanych. Wynika to z monotoniczności funkcji logarytmicznej (tabela 4.8). I tak:

- ponieważ dla $a \in (0, 1)$ funkcja logarytmiczna jest malejąca, więc

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \implies x_1 > x_2, \quad (4.37)$$

czyli opuszczając logarytmy, zmieniamy znak nierówności na przeciwny.

- ponieważ dla $a > 1$ funkcja logarytmiczna jest rosnąca, więc

$$\log_a x_1 < \log_a x_2 \implies x_1 < x_2, \quad (4.38)$$

czyli opuszczając logarytmy, pozostawiamy znak nierówności bez zmian.

Przykład 4.8.5. Rozwiązać nierówność:

$$\text{a) } \log(x^2 - 1) > 0 \quad \text{b) } \log_x(x^2 - 1) > 0$$

Rozwiązanie:

a) Wyznamy najpierw dziedzinę nierówności $\log(x^2 - 1) > 0$. Z definicji logarytmu wynika, że $x^2 - 1 > 0$, więc $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Zauważmy, że na podstawie wzoru (4.38) mamy $\log 1 = 0$, czyli

$$\log(x^2 - 1) > \log 1,$$

więc

$$x^2 - 1 > 1$$

$$x^2 - 2 > 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) > 0.$$

Czyli

$$x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty) \quad \text{ i } \quad x \in D_f.$$

Więc rozwiązaniem danej nierówności jest przedział $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$.

b) Dziedzina nierówności $\log_x(x^2 - 1) > 0$ jest w tym przypadku taka sama, jak w przykładzie 4.8.4b, czyli $x \in (1, \infty)$. Ponieważ $x > 1$, funkcja logarytmiczna jest rosnąca, więc nie zmieniamy znaku, opuszczając logarytmy. Stąd też

$$\begin{aligned}\log_x(x^2 - 1) &> 0 \\ \log_x(x^2 - 1) &> \log_x 1 \\ x^2 - 1 &> 1 \\ x^2 - 2 &> 0 \\ (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &> 0.\end{aligned}$$

Uwzględniając dziedzinę, otrzymujemy rozwiązanie rozważanej nierówności

$$x \in (\sqrt{2}, \infty).$$

Przykład 4.8.6. Wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = 3^x - 2$.

Rozwiązanie: Aby wyznaczyć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = 3^x - 2$, wyznaczamy x z równania $3^x - 2 = y$. Ponieważ $3^x = y + 2$, więc logarytmując to równanie stronami, przy podstawie 3 otrzymujemy

$$\log_3 3^x = \log_3(y + 2).$$

Korzystając ze wzoru (4.34), otrzymujemy $x = \log_3(y + 2)$. Zgodnie z ideą funkcji odwrotnej zamieniamy miejscami zmienne x i y , otrzymując

$$f^{-1}(x) = \log_3(x + 2).$$

Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R}$, a zbiorem wartości funkcji f jest $W_f = (-2, \infty)$. Natomiast $D_{f^{-1}} = (-2, \infty)$, a $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Przykład 4.8.7. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{4-x^2} \left(\frac{x-1}{x} \right)$.

Rozwiązanie: Z definicji logarytmu (definicja 4.8.1) wynika, że podstawa logarytmu musi spełniać warunki: $4 - x^2 > 0$ i $4 - x^2 \neq 1$, a wyrażenie logarytmowane musi być dodatnie, czyli $\frac{x-1}{x} > 0$.

Rozwiązujemy poszczególne nierówności osobno i otrzymujemy: $x \in (-2, 2)$, $x \neq \sqrt{3}$ i $x \neq -\sqrt{3}$ oraz $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, co ostatecznie daje wynik

$$D_f = (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2).$$

Przykład 4.8.8. Wiedząc, że $f(x) = 2^x$, $g(x) = \log_2 x$, wyznaczyć i naszkicować funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz wyznaczyć ich dziedziny.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $D_f = \mathbb{R}$ oraz $D_g = \mathbb{R}_+$. Korzystając z (4.2), otrzymujemy:

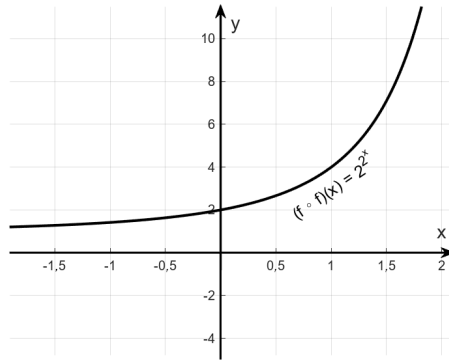
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2^x) = 2^{2^x}, \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R},$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2 x) = 2^{\log_2 x} = x, \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R}_+,$$

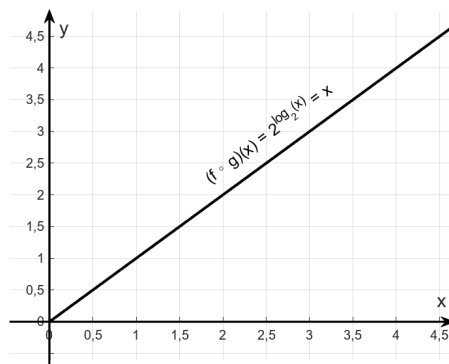
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2^x) = \log_2 2^x = x, \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R},$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\log_2 x) = \log_2(\log_2 x), \quad D_{g \circ g} = (1, \infty).$$

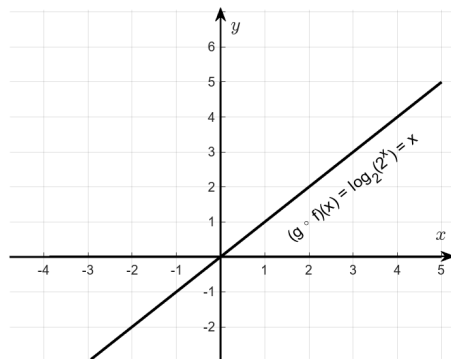
Zauważmy, że mimo że $(f \circ g)(x) = x$ i $(g \circ f)(x) = x$, to dziedziny tych funkcji złożonych są różne.



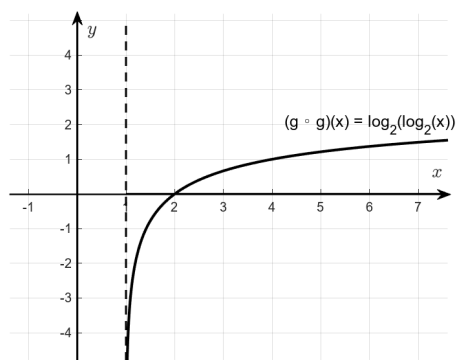
Rysunek 4.21. Wykres funkcji złożonej $f \circ f$ (przykład 4.8.8)



Rysunek 4.22. Wykres funkcji złożonej $f \circ g$ (przykład 4.8.8)



Rysunek 4.23. Wykres funkcji złożonej $g \circ f$ (przykład 4.8.8)



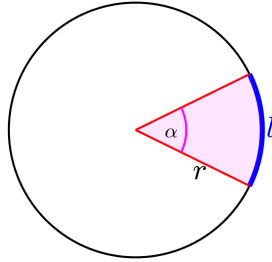
Rysunek 4.24. Wykres funkcji złożonej $g \circ g$ (przykład 4.8.8)

4.9. Funkcje trygonometryczne

Definicja 4.9.1. Niech α będzie kątem środkowym okręgu o promieniu r , $r > 0$ (rysunek 4.25). **Miarą łukową** kąta α nazywamy stosunek długości łuku l , na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia tego okręgu, tzn.

$$\alpha = \frac{l}{r}. \quad (4.39)$$

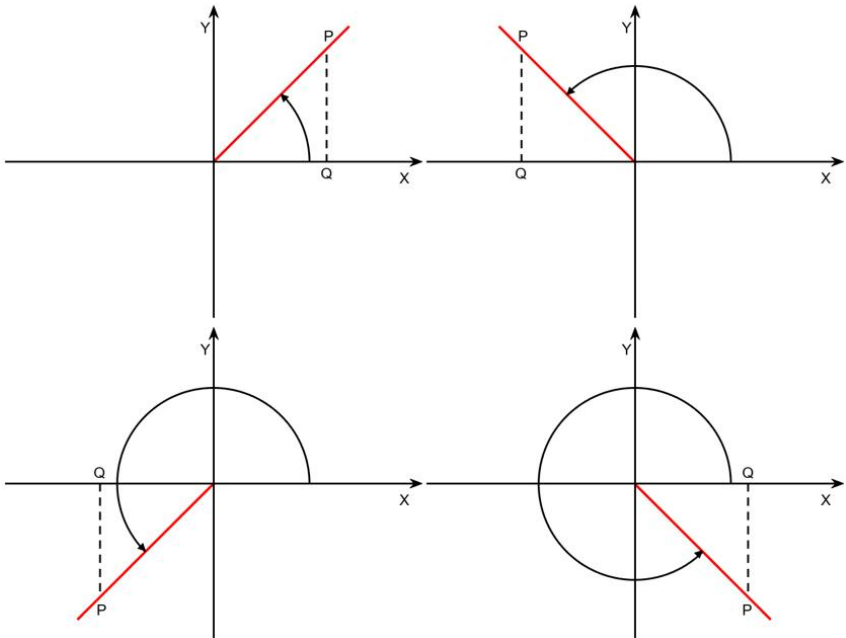
Jednostką miary łukowej kąta jest **1 radian**:



Rysunek 4.25. Kąt środkowy

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \quad \text{oraz} \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Definicja 4.9.2. **Kątem skierowanym** nazywamy uporządkowaną parę półprostych o wspólnym początku. Pierwszą z półprostych nazywamy ramieniem początkowym, a drugą – ramieniem końcowym kąta (rysunek 4.26).



Rysunek 4.26. Kąt skierowany

Spójrzmy na rysunek 4.26. Jeśli α jest miarą kąta skierowanego, tzn. jeśli $\angle XOP = \alpha$, gdzie $P = (x, y) \neq (0, 0)$, jest dowolnym punktem końcowego ramienia tego kąta, a $|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, to

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad (4.40)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0). \quad (4.41)$$

Tabela 4.5. Tabela wartości funkcji trygonometrycznych

α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
α [°]	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Tabela 4.6. Tabela znaków wartości funkcji trygonometrycznych

α	ćw. I	ćw. II	ćw. III	ćw. IV
$\sin \alpha$	+	+	—	—
$\cos \alpha$	+	—	—	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	—	+	—
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	—	+	—

Związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta α :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (4.42)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.43)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.44)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.45)$$

Funkcje sinus/cosinus sumy/różnicy kątów:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.46)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad (4.47)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (4.48)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (4.49)$$

Suma i różnica funkcji sinus/cosinus dowolnego kąta:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.50)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.51)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.52)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (4.53)$$

Iloczyn funkcji sinus/cosinus dowolnego kąta:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \quad (4.54)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \quad (4.55)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (4.56)$$

Funkcje połowy kąta:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \quad (4.57)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \quad (4.58)$$

przy czym znak “+” / “-” zależy od ćwiartki, do której należy końcowe ramię kąta $\frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0 \quad (4.59)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0 \quad (4.60)$$

Funkcje sinus/cosinus podwojonego kąta:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad (4.61)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (4.62)$$

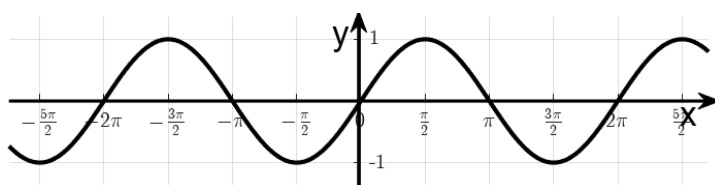
Wzory redukcyjne

Wzory redukcyjne pozwalają sprowadzić obliczanie wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta skierowanego do obliczenia wartości odpowiednich funkcji trygonometrycznych kąta ostrego. W tabeli 4.7 przedstawiono zależności między funkcjami trygonometrycznymi dowolnego kąta β a funkcjami trygonometrycznymi odpowiadającego mu kąta ostrego α .

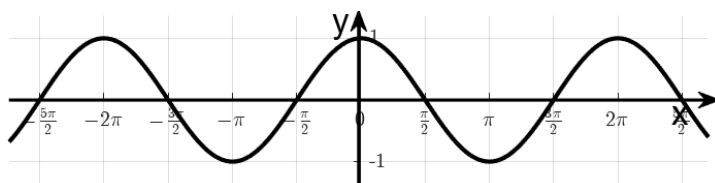
Tabela 4.7. Wzory redukcyjne

β	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Wykresy i własności funkcji trygonometrycznych



Rysunek 4.27. Wykres funkcji $f(x) = \sin x$



Rysunek 4.28. Wykres funkcji $f(x) = \cos x$

Tabela 4.8. Własności funkcji $f(x) = \sin x$

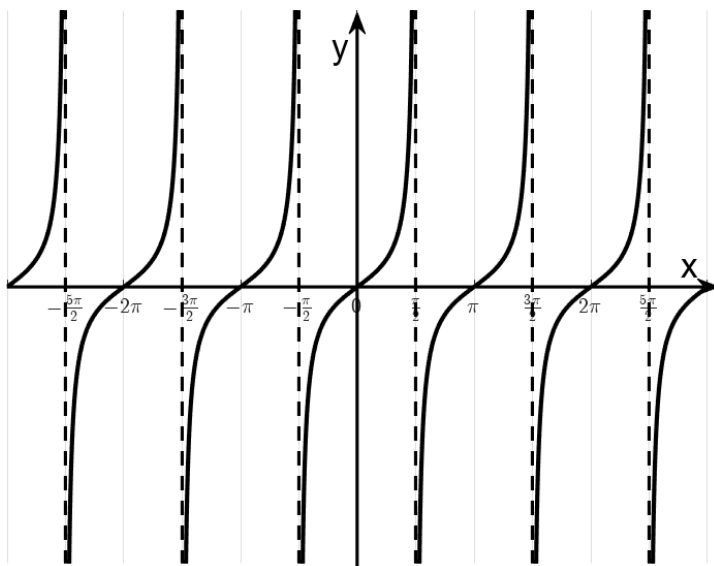
Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	$Y = [-1, 1]$
Miejsca zerowe	$x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Monotoniczność	funkcja rosnąca dla: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ funkcja malejąca dla: $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
Okres podstawowy	$T = 2\pi$
Parzystość/nieparzystość	funkcja nieparzysta, czyli $\sin(-x) = -\sin x$

Tabela 4.9. Własności funkcji $f(x) = \cos x$

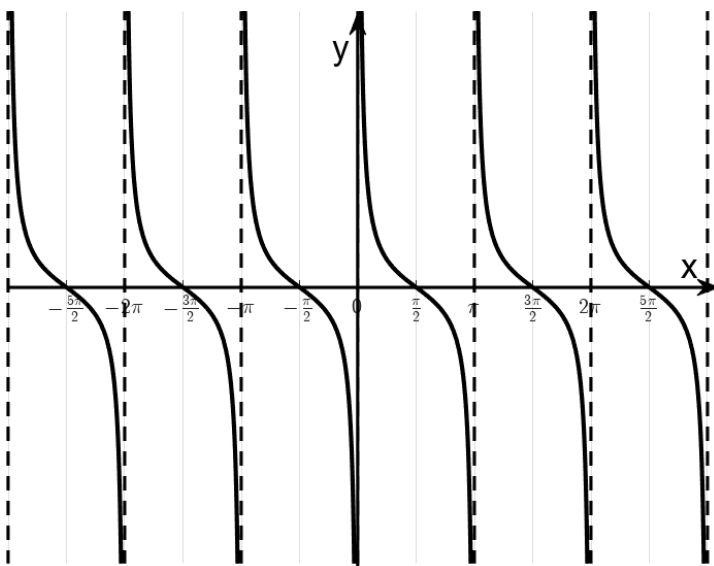
Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	$Y = [-1, 1]$
Miejsca zerowe	$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Monotoniczność	funkcja rosnąca dla: $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ funkcja malejąca dla: $x \in (0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$
Okres podstawowy	$T = 2\pi$
Parzystość/nieparzystość	funkcja parzysta, czyli $\cos(-x) = \cos x$

Tabela 4.10. Własności funkcji $f(x) = \operatorname{tg} x$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}$
Miejsca zerowe	$x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Monotoniczność	funkcja rosnąca w przedziałach dla: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
Okres podstawowy	$T = \pi$
Parzystość/nieparzystość	funkcja nieparzysta, czyli $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$
Asymptoty pionowe	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



Rysunek 4.29. Wykres funkcji $f(x) = \tan x$



Rysunek 4.30. Wykres funkcji $f(x) = \cot x$

Tabela 4.11. Własności funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}$
Miejsca zerowe	$x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Monotoniczność	funkcja malejąca w przedziałach dla: $x \in (k\pi, \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
Okres podstawowy	$T = \pi$
Parzystość/nieparzystość	funkcja nieparzysta, czyli $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
Asymptoty pionowe	$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Przykład 4.9.3. Dana jest funkcja $f(x) = 2 \cos 2x$. Dla jakich wartości argumentu x z przedziału $[-\pi, \pi]$ prawdziwa jest nierówność $|f(x)| \leq 1$?

Rozwiązanie: Korzystamy z własności (1.10). Stąd

$$|f(x)| \leq 1 \implies -1 \leq f(x) \leq 1,$$

więc

$$\begin{aligned} -1 \leq 2 \cos 2x \leq 1 & \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Z wykresu funkcji cosinus (rysunek 4.28) odczytujemy, że $-\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq \frac{1}{2}$ wtedy, gdy

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ i } \quad \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Zatem

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ i } \quad \frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Uwzględniając przedział $x \in [-\pi, \pi]$, otrzymujemy rozwiązanie nierówności $-1 \leq 2 \cos 2x \leq 1$ w postaci

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right].$$

Przykład 4.9.4. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 4x}}{\cos(x)}$.

Rozwiązanie: Aby funkcja f była określona, musi spełniać warunki, przy których zarówno licznik, jak i mianownik są określone, czyli $\operatorname{ctg} 4x \geq 0$, $\cos x \neq 0$ i z własności funkcji cotangens (tabela 4.9): $4x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Na podstawie wykresu funkcji $f(x) = \operatorname{ctg} x$ (rysunek 4.30) widać, że $\operatorname{ctg} 4x \geq 0$ wtedy, gdy

$$0 + k\pi \leq 4x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Czyli

$$\frac{k\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z wykresu funkcji cosinus (rysunek 4.28) odczytujemy, że $\cos x \neq 0$ wtedy, gdy

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Z ostatniego warunku ($4x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) otrzymujemy zaś

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bierzemy teraz część wspólną ze zbiorów uzyskanych w wyniku rozwiązania wszystkich trzech warunków, czyli

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ x = \frac{k\pi}{4} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ x = \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \right).$$

4.10. Funkcje cyklometryczne

Definicja 4.10.1. Funkcje cyklometryczne są to funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych, czyli:

$$y = \arcsin x \quad i \quad x \in [-1, 1] \iff x = \sin y \quad i \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.63)$$

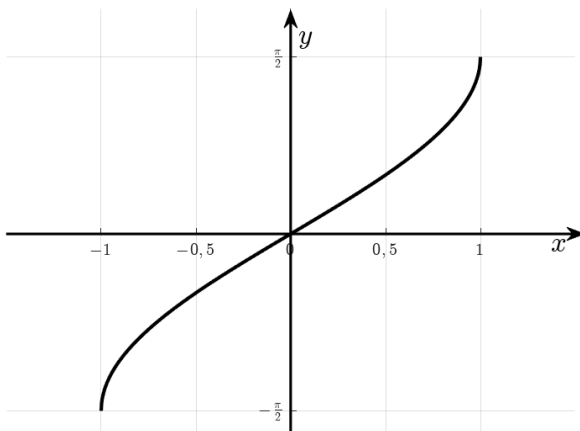
$$y = \arccos x \quad i \quad x \in [-1, 1] \iff x = \cos y \quad i \quad y \in [0, \pi] \quad (4.64)$$

$$y = \operatorname{arctg} x \quad i \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

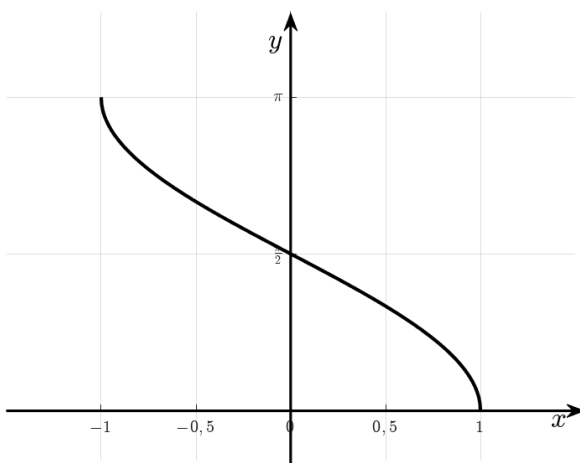
$$\Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \quad i \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.65)$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \quad i \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} y \quad i \quad y \in (0, \pi) \quad (4.66)$$



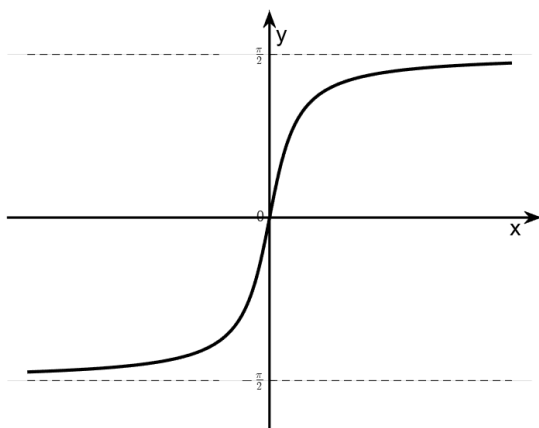
Rysunek 4.31. Wykres funkcji $f(x) = \arcsin x$



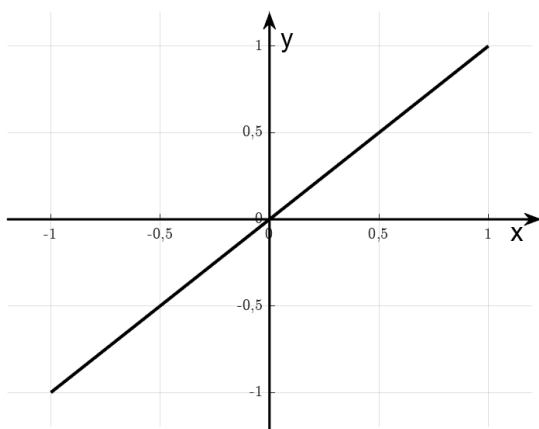
Rysunek 4.32. Wykres funkcji $f(x) = \arccos x$

Tabela 4.12. Własności funkcji $f(x) = \arcsin x$ i $f(x) = \arccos x$

	$f(x) = \arcsin x$	$f(x) = \arccos x$
Dziedzina	$D_f = [-1, 1]$	$D_f = [-1, 1]$
Zbiór wartości	$Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$Y = [0, \pi]$
Miejsca zerowe	$x_0 = 0$	$x_0 = 1$
Monotoniczność	funkcja rosnąca	funkcja malejąca
Parzystość/nieparzystość	funkcja nieparzysta	—



Rysunek 4.33. Wykres funkcji $f(x) = \arctg x$



Rysunek 4.34. Wykresy funkcji $f(x) = \text{arcctg } x$

Tabela 4.13. Własności funkcji $f(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f(x) = \operatorname{arcctg} x$

	$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f(x) = \operatorname{arcctg} x$
Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	$Y = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$Y = (0, \pi)$
Miejsca zerowe	$x_0 = 0$	brak
Monotoniczność	funkcja rosnąca	funkcja malejąca
Parzystość/nieparzystość	funkcja nieparzysta	—

Z własności funkcji cyklometrycznych i na podstawie ich wykresów można zauważyć, że:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad (4.67)$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (4.68)$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x \quad (4.69)$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad (4.70)$$

Można pokazać, że:

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{dla } x \in (-1, 1) \quad (4.71)$$

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{dla } x \in (-1, 1) \quad (4.72)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad (4.73)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad (4.74)$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.75)$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{dla } x \in (0, \pi) \quad (4.76)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.77)$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x \quad \text{dla } x \in (0, \pi) \quad (4.78)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1] \quad (4.79)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad (4.80)$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1] \quad (4.81)$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{dla } x \in [-1, 1] \quad (4.82)$$

Przykład 4.10.2. Obliczyć wartość wyrażenia

$$\frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3})}{\arcsin(1)}.$$

Rozwiązanie: Wiemy, że $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, czyli $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Korzystając ze wzoru (4.68), otrzymujemy

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

Skoro $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, więc $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Podobnie, ponieważ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, więc $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Podstawiając te wartości do danego wyrażenia, otrzymujemy

$$\frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(\sqrt{3})}{\arcsin(1)} = \frac{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{6}.$$

Przykład 4.10.3. Wyznaczyć dziedzinę funkcji $f(x) = \arcsin\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

Rozwiązanie: Wiemy, że dziedziną funkcji $\arcsin x$ jest przedział $[-1, 1]$ (tabela 4.10). Stąd też, aby wyznaczyć dziedzinę zadanej funkcji, powinniśmy rozwiązać nierówność

$$-1 \leq 1 - \frac{1}{x} \leq 1,$$

czyli

$$1 - \frac{1}{x} \geq -1 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{1}{x} \leq 1.$$

Obie nierówności rozwiązujemy analogicznie do przykładów z zadania 4.5.8.

Czyli

$$1 - \frac{1}{x} \geq -1 \quad \text{i} \quad 1 - \frac{1}{x} \leq 1.$$

Zatem

$$2 - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{x} \leq 0,$$

a co za tym idzie

$$\frac{2x-1}{x} \geq 0 \quad \text{i} \quad -\frac{1}{x} \leq 0.$$

Stąd

$$x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \quad \text{i} \quad x \in (0, \infty).$$

Zatem

$$D_f = \left\{ \frac{1}{2}, \infty \right).$$

Przykład 4.10.4. Narysować wykres funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$.

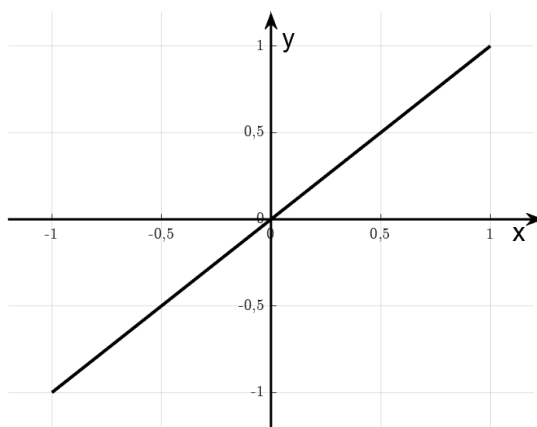
Rozwiązanie: Ponieważ $y = \sin(\arcsin x)$, więc z definicji funkcji $\arcsin x$ otrzymujemy

$$\arcsin x = \arcsin y.$$

Ponieważ funkcja $\arcsin x$ jest funkcją różnowartościową, więc

$$x = y.$$

Ale z definicji funkcji $\arcsin x$ wynika, że $x \in [-1, 1]$, więc wykresem funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$ jest odcinek prostej $y = x$ przedstawiony na rysunku 4.35.



Rysunek 4.35. Wykres funkcji $f(x) = \sin(\arcsin x)$

4.11. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Rozłożyć na ułamki proste funkcje:

1) $\frac{3x^2-5x+2}{(x^2-3)(x-2)}$

2) $\frac{3x^3-4x^2-1}{(x-2)^4}$

3) $\frac{3x-4}{(x^2+3)(x-2)}$

4) $\frac{3x-4}{x^3(x^3+2)^2}$

Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

5) $f(x) = \sqrt{|x+2|} - 3$

6) $f(x) = \log_{x-1} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

7) $f(x) = \frac{\log(16-x^2)}{\sqrt{(x-1)^2}}$

8) $f(x) = \frac{1}{1-2^{1-|x|}}$

9) $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{-\sin x}$

10) $f(x) = \arccos\left(\frac{2-x}{4}\right)$

Rozwiązać równania/nierówności:

11) $-1 < \frac{x+1}{x-1} < \frac{3}{x-3}$

12) $\cos(2x + \frac{\pi}{6}) < \frac{1}{2}$

13) $x^3 - 9x^2 + 14x + 24 \leq 0$

14) $5^x - 3^x < 0$

15) $8^x + 5 \cdot 2^x = 2 + 4^{x+1}$

Narysować wykres funkcji:

16) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x$

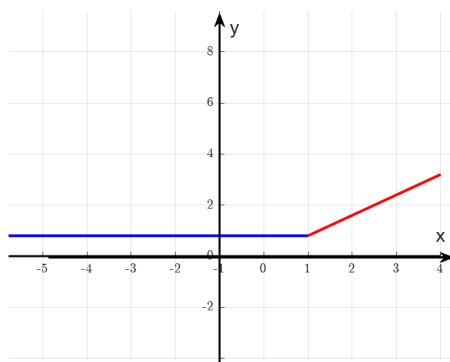
17) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x^2$

18) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2}$

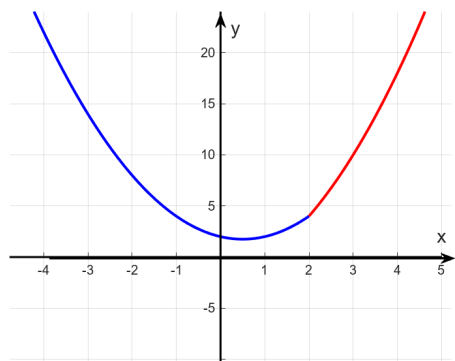
19) $f(x) = \cos(\arccos x)$

Odpowiedzi:

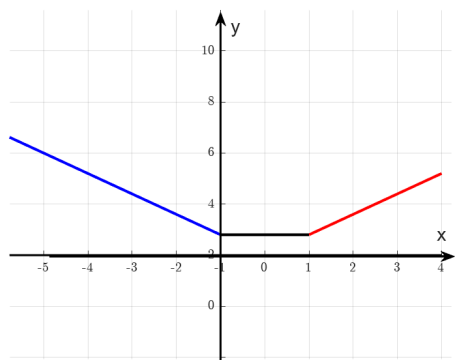
- 1) $-\frac{4}{5(x-2)} + \frac{22}{15(x+3)} + \frac{7}{3(x-3)}$
- 2) $\frac{3}{x-2} + \frac{14}{(x-2)^2} + \frac{20}{(x-2)^3} + \frac{7}{(x-2)^4}$
- 3) $\frac{17-2x}{7(x^2+3)} + \frac{2}{7(x-2)}$
- 4) $\frac{4-3x}{4(x^3+2)} + \frac{4-3x}{2(x^3+2)^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{4x^2}$
- 5) $D_f = (-\infty, -5] \cup [1, \infty)$
- 6) $D_f = (1, 2) \cup (3, \infty)$
- 7) $D_f = (-4, 1) \cup (1, 4)$
- 8) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- 9) $D_f = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- 10) $D_f = (-2, 6)$
- 11) $x \in (3, 5)$
- 12) $\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
- 13) $x \in (-\infty, -1] \cup [4, 6]$
- 14) $x < 0$
- 15) $x = 0, x = 1$
- 16) rys. 4.36
- 17) rys. 4.37
- 18) rys. 4.38
- 19) rys. 4.39



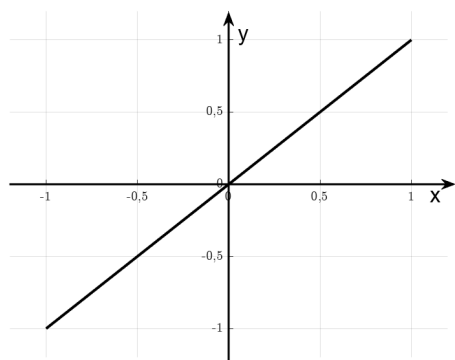
Rysunek 4.36. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x$



Rysunek 4.37. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x^2$



Rysunek 4.38. Wykres funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2}$



Rysunek 4.39. Wykres funkcji $f(x) = \cos(\arccos x)$

5. Ciągi

5.1. Pojęcie ciągu

Definicja 5.1.1. Ciąg liczbowy nieskończony to funkcja f , której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych, a przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych, czyli

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Wartość funkcji f dla argumentu $n \in \mathbb{N}$, czyli $f(n)$, jest nazywana **n-tym wyrazem ciągu** i oznaczana jako a_n . Zatem

$$a_n = f(n). \quad (5.2)$$

Ciąg o wyrazie ogólnym a_n oznaczany jest jako (a_n) . Przykładowo a_1, a_5, a_{80}, a_k to kolejno pierwszy, piąty, osiemdziesiąty oraz k -ty wyraz ciągu (a_n) .

Przykład 5.1.2. Wyznaczyć setny wyraz ciągu $a_n = \frac{n+1}{2n-3}$

Rozwiązanie: Jak łatwo zauważyć $n = 100$, zatem

$$a_{100} = \frac{100+1}{2 \cdot 100-3} = \frac{101}{197}$$

Definicja 5.1.3. Ciąg (a_n) jest **ograniczony**, jeżeli istnieją liczby m i M , takie że dla każdego n zachodzi $m \leq a_n \leq M$.

Definicja 5.1.4. Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągami rosnącym** (odpowiednio **niemalejącym**), jeśli $a_{n+1} > a_n$ (odpowiednio $a_{n+1} \geq a_n$) dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 5.1.5. Ciąg nieskończony (a_n) nazywamy **ciągami malejącym** (odpowiednio **nierosnącym**), jeśli $a_{n+1} < a_n$ (odpowiednio $a_{n+1} \leq a_n$) dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 5.1.6. Ciągi rosnące, niemalejące, malejące i nierosnące nazywamy **ciągami monotonicznymi**.

Z definicji ciągu rosnącego wynika, że aby wykazać, że dany ciąg (a_n) jest **rosnący**, wystarczy sprawdzić, czy

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad (5.3)$$

dla każdej liczby naturalnej n .

Analogicznie więc (a_n) jest **malejący** wtedy i tylko wtedy, gdy nierówność

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad (5.4)$$

jest spełniona dla każdej liczby naturalnej n .

Przykład 5.1.7. Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:

$$\text{a) } a_n = \frac{2n-1}{3n+2} \quad \text{b) } a_n = 1 + (-1)^n \quad \text{c) } a_n = \frac{(n-2)(n-4)}{(n-3)^2}$$

Rozwiązanie:

a) Aby zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$, musimy sprawdzić znak różnicy $a_{n+1} - a_n$. Ponieważ

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{3(n+1)+2} = \frac{2n+1}{3n+5},$$

zatem

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+1}{3n+5} - \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{(2n+1)(3n+2) - (2n-1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} \\ &= \frac{(2n+1)(3n+2) - (2n-1)(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)} = \frac{7}{(3n+5)(3n+2)}. \end{aligned}$$

Ponieważ $7 > 0$ oraz $(3n+5)(3n+2) > 0$ dla $n \geq 1$, to $a_{n+1} - a_n > 0$. Oznacza to, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$ jest rosnący.

b) Ciąg $1 + (-1)^n$ jest ciągiem naprzemiennym, ponieważ $(-1)^n$ przyjmuje na przemian wartości 1 i -1 . Dla n parzystych $a_n = 1 + 1 = 2$, a dla n nieparzystych $a_n = 1 - 1 = 0$. Zatem ciąg $1 + (-1)^n$ nie jest monotoniczny.

c) Obliczamy różnicę dwóch kolejnych wyrazów danego ciągu

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2} - \frac{(n-2)(n-4)}{(n-3)^2} = \\ &= \frac{(n-1)(n-3)(n-3)^2 - (n-2)(n-4)(n-2)^2}{(n-2)^2(n-3)^2} = \\ &= \frac{2n-5}{(n-2)^2(n-3)^2}. \end{aligned}$$

Analizując znak różnicy $a_{n+1} - a_n$, można zauważyć, że:

- dla $n = 1$, $a_{n+1} - a_n < 0$,
- dla $n = 2$ i $n = 3$ różnica jest nieokreślona,
- dla $n > 3$, $a_{n+1} - a_n > 0$,

zatem ciąg (a_n) nie jest monotoniczny.

5.2. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny

Definicja 5.2.1. Ciąg arytmetyczny to ciąg liczbowy, w którym różnica między kolejnymi dwoma wyrazami jest stała. Ta różnica nazywana jest **różnicą ciągu** i oznaczana symbolem r .

Jeżeli a_1 oznacza pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, to wyraz ogólny a_n tego ciągu można wyrazić wzorem

$$a_n = a_1 + (n-1)r. \quad (5.5)$$

Suma pierwszych n wyrazów ciągu arytmetycznego, czyli

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \quad (5.6)$$

dana jest wzorem

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n. \quad (5.7)$$

Definicja 5.2.2. Ciąg geometryczny to ciąg liczbowy, w którym każdy wyraz (poczynając od drugiego) jest iloczynem poprzedniego wyrazu i stałej liczby, zwanej **ilorazem ciągu**, oznaczanym zwykle jako q .

Jeżeli pierwszy wyraz ciągu oznaczmy jako a_1 , to wyraz ogólny a_n ciągu geometrycznego można wyrazić wzorem

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \quad (5.8)$$

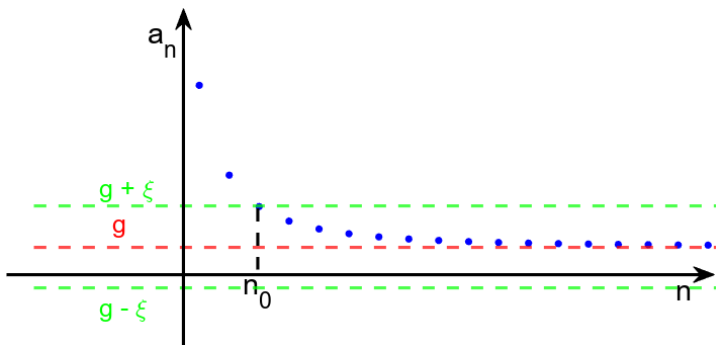
Suma n wyrazów ciągu geometrycznego, oznaczana jako S_n , zależy od wartości ilorazu q

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1, \quad n - \text{skończone}, \\ n \cdot a_1, & q = 1 \\ \frac{a_1}{1-q}, & |q| < 1, \quad n - \text{nieskończone} \end{cases}. \quad (5.9)$$

5.3. Granica ciągu

Definicja 5.3.1. (Cauchy’ego) Liczbę g nazywamy **granicą ciągu** (a_n) , jeżeli dla każdej dodatniej liczby ε istnieje taka liczba naturalna n_0 , że dla $n > n_0$ spełniona jest nierówność

$$|a_n - g| < \varepsilon. \quad (5.10)$$



Rysunek 5.1. Interpretacja graficzna granicy ciągu

O ciągu, który ma granicę g , mówimy, że jest **zbieżny** do liczby g . W takim przypadku zapisujemy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g. \quad (5.11)$$

Obrazowo, ciąg jest zbieżny do granicy g , gdy jego dostatecznie dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko g . Definicję granicy ilustruje rysunek 5.1.

Twierdzenie 5.3.2. Jeżeli (a_n) i (b_n) są ciągami zbieżnymi to:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (5.12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (5.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad \text{gdzie } c \in \mathbb{R} \quad (5.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \quad (5.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \text{o ile } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \quad (5.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^p, \quad \text{gdzie } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (5.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{k}{\sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \quad (5.18)$$

Granice wybranych ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \text{dla } a > 0 \quad (5.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \quad (5.20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \quad \text{nie istnieje} \quad (5.21)$$

Twierdzenie 5.3.3. Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

Jak widać, ciąg $(1 + (-1)^n)$ jest ograniczony, ale nie jest zbieżny (przykład 5.1.7b). Ograniczoność ciągu jest zatem warunkiem koniecznym jego zbieżności, ale nie jest warunkiem wystarczającym.

Twierdzenie 5.3.4. Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Przykład 5.3.5. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{2n+3}{4n^2-5}$ b) $a_n = \frac{4n^2-5}{2n+3}$

Rozwiązanie:

a) Wyraz a_n możemy przekształcić, dzieląc licznik i mianownik przez najwyższą potęgę n w mianowniku, czyli przez n^2

$$a_n = \frac{\frac{2n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{5}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{5}{n^2}}.$$

Teraz, przy $n \rightarrow \infty$, wyrażenia $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n^2}$ oraz $\frac{5}{n^2}$ dążą do zera. Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{4 - \frac{5}{n^2}} = \frac{0+0}{4-0} = 0.$$

b) Musimy wyznaczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-5}{2n+3}$. Rozpocznijmy od wyciągnięcia w liczniku i mianowniku przed nawias najwyższej potęgi n

$$a_n = \frac{n^2 \left(4 - \frac{5}{n^2}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{n \left(4 - \frac{5}{n^2}\right)}{2 + \frac{3}{n}}.$$

Obliczamy granicę, korzystając z własności (5.15)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(4 - \frac{5}{n^2}\right)}{2 + \frac{3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(4 - \frac{5}{n^2}\right)}{2 + \frac{3}{n}} = \infty,$$

ponieważ, jeśli $n \rightarrow \infty$, to $\frac{5}{n^2} \rightarrow 0$ oraz $\frac{3}{n} \rightarrow 0$.

Przykład 5.3.6. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = 2n - \sqrt{4n^2 - n}$ b) $a_n = 3n - (9n^2 + 6n - 5)^{\frac{1}{2}}$

Rozwiązanie:

a) Aby obliczyć granicę ciągu (a_n) , należy najpierw przekształcić wyraz ogólny danego ciągu. W tym celu mnożymy licznik i mianownik (równy 1) przez wyrażenie sprzężone z $2n - \sqrt{4n^2 - n}$, czyli przez $2n + \sqrt{4n^2 - n}$

$$\begin{aligned} a_n = 2n - \sqrt{4n^2 - n} &= \frac{(2n - \sqrt{4n^2 - n})(2n + \sqrt{4n^2 - n})}{2n + \sqrt{4n^2 - n}} = \\ &= \frac{4n^2 - (4n^2 - n)}{2n + \sqrt{4n^2 - n}} = \frac{n}{2n + \sqrt{4n^2 - n}}. \end{aligned}$$

Teraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + \sqrt{4n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(2 + \sqrt{\frac{4n^2 - n}{n^2}} \right)} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4 - 0}} = \frac{1}{4}.$$

b) Przemnożmy licznik i mianownik (równy 1) przez wyrażenie sprzężone z wyrażeniem $3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 5}$, czyli przez $3n + \sqrt{9n^2 + 6n - 5}$

$$a_n = 3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 5} =$$

$$\frac{3n - \sqrt{9n^2 + 6n - 5}}{1} \cdot \frac{3n + \sqrt{9n^2 + 6n - 5}}{3n + \sqrt{9n^2 + 6n - 5}} =$$

$$\frac{9n^2 - (9n^2 + 6n - 5)}{3n + \sqrt{9n^2 + 6n - 5}} = \frac{-6n + 5}{3n + \sqrt{9n^2 + 6n - 5}}.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n + 5}{3n + \sqrt{9n^2 + 6n - 5}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6 + \frac{5}{n}}{3 + \sqrt{9 + \frac{6}{n} - \frac{5}{n^2}}} = \frac{-6}{3 + \sqrt{9}} = -1.$$

Przykład 5.3.7. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{6^n + 2^n \cdot 3^{n-1} + 5^n}{4^n - 2 \cdot 6^{n-1}}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że korzystając z działań na potęgach (wzory (2.13) i (2.15)), otrzymujemy $2^n \cdot 3^{n-1} = 6^{n-1} \cdot 2$. Stąd

$$6^n + 2^n \cdot 3^{n-1} + 5^n = 6^n + 2 \cdot 6^{n-1} + 5^n.$$

W liczniku i mianowniku wyrazu ogólnego a_n wyciągamy „najwyższą potęgę” 6^n przed nawias

$$a_n = \frac{6^n + 2 \cdot 6^{n-1} + 5^n}{4^n - 2 \cdot 6^{n-1}} = \frac{6^n \left(1 + \frac{2}{6} + \left(\frac{5}{6} \right)^n \right)}{6^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3} \right)} = \frac{1 + \frac{2}{6} + \left(\frac{5}{6} \right)^n}{\left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{1}{3}}.$$

Ponieważ przy $n \rightarrow \infty$, mamy $(\frac{5}{6})^n \rightarrow 0$ i $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{6} + (\frac{5}{6})^n}{(\frac{2}{3})^n - \frac{1}{3}} = \frac{1 + \frac{2}{6}}{-\frac{1}{3}} = -7.$$

Przykład 5.3.8. Obliczyć granicę ciągu (a_n) o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{1}{2}(2n-1) - \frac{1}{n+1}(1+3+5+\dots+(2n-1))$

b) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+(\frac{-1}{2})^n}$

Rozwiązanie:

a) Najpierw zauważmy, że $1+3+5+\dots+(2n-1)$ jest sumą wyrazów ciągu arytmetycznego. Wykorzystując wzór (5.7), obliczamy

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{n}{2}(1+(2n-1)) = n^2.$$

Stąd

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(2n-1) - \frac{1}{n+1} \cdot (1+3+5+\dots+(2n-1)) = \\ &= \frac{2n-1}{2} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(2n-1)(n+1) - 2n^2}{2(n+1)} = \frac{n-1}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

b) Zauważmy, że zarówno licznik, jak i mianownik wyrazu

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + (\frac{-1}{2})^n}$$

są sumami ciągów geometrycznych skończonych. Ponieważ licznik jest sumą ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$, więc korzystając ze wzoru (5.9), otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Mianownik jest sumą ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $a_1 = 1$ i ilorazie $q = \frac{1}{2}$, więc korzystając ze wzoru (5.9), mamy

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Zatem

$$a_n = \frac{2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{\frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)} = \frac{3 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Jeżeli $n \rightarrow \infty$, to $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ oraz $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, i w rezultacie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3(1-0)}{1-0} = 3.$$

Przykład 5.3.9. Obliczyć granicę ciągu (a_n) , jeżeli:

a) $a_n = \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ b) $a_n = \frac{\binom{n}{2}}{n^2}$

Rozwiązanie:

a) Korzystając ze wzoru (3.3), otrzymujemy

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n-1)! \cdot n \cdot (n+1),$$

więc

$$a_n = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n^2 + n.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot n = \infty. \end{aligned}$$

b) Korzystając ze wzoru (3.4), otrzymujemy

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Stąd

$$\frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Twierdzenie 5.3.10. (o trzech ciągach) Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) i (c_n) spełniają warunki:

1) dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad (5.22)$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$,

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g. \quad (5.23)$$

Przykład 5.3.11. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$5^n \leq 3^n + 4^n + 5^n \leq 3 \cdot 5^n.$$

Stąd

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \leq (\sqrt[n]{3 \cdot 5^n}).$$

Korzystając z własności (5.19), otrzymujemy

$$\sqrt[n]{3} \rightarrow 1 \quad \text{dla} \quad n \rightarrow \infty.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 5 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{5^n} \\ &5 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} \leq 5. \end{aligned}$$

Czyli, zgodnie z twierdzeniem o trzech ciągach,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n} = 5.$$

5.4. Zadania do samodzielnego rozwiązania**Zbadać monotoniczność ciągu o wyrazie ogólnym:**

1) $a_n = \frac{n-4}{6}$

2) $a_n = \frac{n^2-3n+2}{2n^2+n-1}$

3) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$

4) $a_n = \log \frac{n}{n+5}$

5) $a_n = \frac{\binom{n}{3} \cdot n}{n^2+1}$

6) $a_n = \frac{(n+2)!}{(n-2)!}$

7) $a_n = \frac{\binom{n}{3}}{n^3}$

Obliczyć granicę ciągu a_n o wyrazie ogólnym:

8) $a_n = \frac{3n+4}{5n^2+2n-1}$

9) $a_n = \frac{7n^2-6}{4n+1}$

10) $a_n = \frac{7^n+3^n \cdot 5^n-1+8^n}{5^n-3 \cdot 7^n-1}$

11) $a_n = \frac{3^n+2^n \cdot 4^n-1+9^n}{6^n-4 \cdot 3^n-1}$

12) $a_n = 5n - \sqrt{16n^2 + 9n}$

13) $a_n = 4n - \sqrt{25n^2 - 4n + 7}$

14) $a_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1}$

15) $a_n = \frac{1}{3}(3n-2) - \frac{1}{n+2}(1+4+7+\dots+(3n-2))$

16) $a_n = \frac{1}{4}(4n+1) - \frac{1}{n+3}(2+6+10+\dots+(4n+1))$

17) $a_n = \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+(-\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}$

$$18) a_n = \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + (-\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$19) a_n = \sqrt[n]{4^n + 3^n + 7^n}$$

$$20) a_n = \sqrt[n]{1 + (-1)^n}$$

$$21) a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{7}{5}\right)^n}$$

$$22) a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n + e^n + \left(\frac{\pi}{2}\right)^n + 2^n}$$

Dla jakich wartości parametru a :

$$23) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 3n + 1}{4n^2 - 5n} = 1$$

$$24) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + a^4 n^{n-1}}{(a+1)2n^{n+1} + 3^n} = 3$$

Odpowiedzi:

- 1) rosnący
- 2) nie jest monotoniczny
- 3) nie jest monotoniczny
- 4) malejący
- 5) rosnący
- 6) rosnący
- 7) malejący
- 8) 0
- 9) ∞
- 10) ∞
- 11) ∞
- 12) ∞
- 13) $-\infty$
- 14) $\frac{1}{2}$
- 15) ∞
- 16) ∞
- 17) 2
- 18) $\frac{4}{3}$
- 19) 7
- 20) 1

- 21) 0
- 22) ∞
- 23) 4
- 24) nie istnieje

6. Liczba e i logarytm naturalny

6.1. Liczba e

Wśród wszystkich ciągów na szczególną uwagę zasługuje ciąg o wyrazie ogólnym

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (6.1)$$

Przykład 6.1.1. Wykazać, że:

- a) ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony
- b) ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący

Rozwiązanie:

a) Korzystając ze wzoru (3.4), otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \\ &\quad \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Zauważmy, że wszystkie wyrażenia w nawiasach są dodatnie i mniejsze od 1, czyli

$$1 - \frac{1}{n} < 1, \quad 1 - \frac{2}{n} < 1 \quad \dots, \quad 1 - \frac{n-1}{n} < 1.$$

Otrzymujemy więc

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

Ponieważ $k! \geq 2^{k-1}$ dla $k \geq 2$, więc $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$, czyli

$$\frac{1}{2!} < \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}},$$

więc

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Wynika z tego, że każdy wyraz ciągu a_n jest mniejszy niż 3. Ponadto każdy wyraz jest większy od 1, co oznacza, że ciąg jest ograniczony z góry i z dołu.

b) Pokażemy, że ciąg $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący, czyli że $a_{n+1} > a_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Ponieważ $a_n > 0$, więc możemy rozważyć nierówność

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \\ &= \frac{\left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Korzystamy z nierówności Bernoulliego (wzór (3.12)). Wobec tego

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1 - \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Zatem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1.$$

Co dowodzi, że $a_{n+1} > a_n$. Wynika stąd, że ciąg $(a_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący.

Ponieważ ciąg $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest ograniczony i rosnący, więc na podstawie twierdzenia (5.3.4) jest on zbieżny. Granicą tego ciągu jest liczba Eulera (zwana też liczbą Nepera) oznaczana jako e . Wartość tej liczby wynosi w przybliżeniu 2,718281828459.... Oznacza to, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828459... \quad (6.2)$$

Twierdzenie 6.1.2. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $a_n \neq 0$, dla $n \in \mathbb{N}$, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \quad (6.3)$$

Przykład 6.1.3. Obliczyć granicę ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = n(\ln(n+1) - \ln n).$$

Rozwiązanie: Stosując własność (4.28), mamy

$$a_n = n(\ln(n+1) - \ln n) = n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Korzystając ze wzoru (4.30), otrzymujemy

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Ponieważ $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$, przy $n \rightarrow \infty$, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln e = 1.$$

Przykład 6.1.4. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$.

Rozwiązanie: Aby obliczyć jego granicę, możemy zauważyć, że korzystając z (5.15), mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \\ &= e \cdot e \cdot e = e^3.\end{aligned}$$

Przykład 6.1.5. Obliczyć granicę ciągu $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$.

Rozwiązanie: Możemy przekształcić wyraz ogólny danego ciągu w następujący sposób

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Korzystając ze wzoru (6.3), otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e^{-1}.$$

Zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Przykład 6.1.6. Obliczyć $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n-5}$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n}$. Zatem

$$a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n-5}.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{3n-5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-5}.\end{aligned}$$

Zauważmy, że w wykładniku wyrażenia $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-5}$ mamy stałą wartość -5 i $\frac{2}{n} \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-5} = 1^{-5} = 1$. Korzystając ze wzoru (6.3), otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}n}\right)^{\frac{1}{2}n}\right)^2 = e^2.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^6 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-5} = (e^2)^6 \cdot 1 = e^{12}.$$

Przykład 6.1.7. Kapitał $k = 2000$ zł podlega oprocentowaniu $p = 5\%$ w skali rocznej w ciągu $t = 4$ lat. Obliczyć kapitał końcowy, gdy oprocentowanie odbywa się w sposób ciągły.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} k \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nt}$$
$$k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}} = k \cdot e^{\frac{pt}{100}}.$$

Zatem

$$K = 1500 \cdot e^{\frac{4 \cdot 5}{100}} = 1500 \cdot e^{0,2}.$$

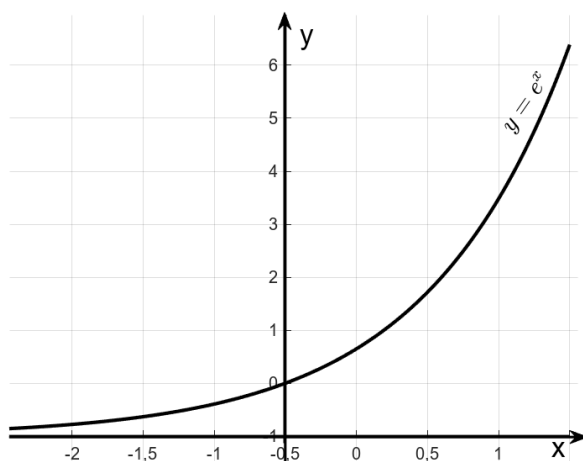
Kapitał końcowy to

$$K = 1500 \cdot 1,2214 = 1832,10 \text{ zł}.$$

6.2. Funkcje $f(x) = e^x$ i $f(x) = \ln x$

Funkcja $f(x) = e^x$ jest szczególnym przypadkiem funkcji wykładniczej (definicja (4.7.1)), kiedy jako podstawę weźmiemy $a = e$ (rysunek (6.1)). Ze względu na swoje zastosowanie jest to jedna z ważniejszych funkcji w matematyce. Własności tej funkcji są analogiczne do własności funkcji wykładniczej o podstawie większej od 1.

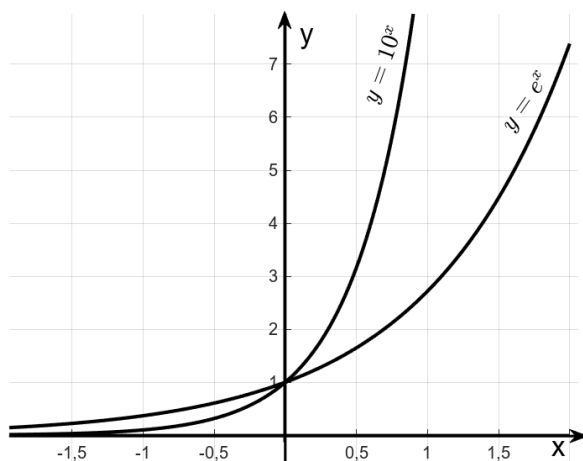
Dla porównania, na rysunku 6.2 przedstawiono zestawienie wykresów funkcji $f(x) = 10^x$ i $f(x) = e^x$.



Rysunek 6.1. Wykres funkcji $f(x) = e^x$

Tabela 6.1. Własności funkcji $f(x) = e^x$

Dziedzina	$D_f = \mathbb{R}$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}_+$
Miejsce zerowe	brak
Monotoniczność	rosnąca w całej dziedzinie



Rysunek 6.2. Zestawienie wykresów funkcji $f(x) = 10^x$ i $f(x)e^x$

Szczególną rolę w różnych zastosowaniach odgrywają **logarytmy o podstawie e , zwane logarytmami naturalnymi**, czyli

$$\ln x = \log_e x. \quad (6.4)$$

Ze wzoru (4.32) wynika, że:

$$a^b = e^{b \ln a}. \quad (6.5)$$

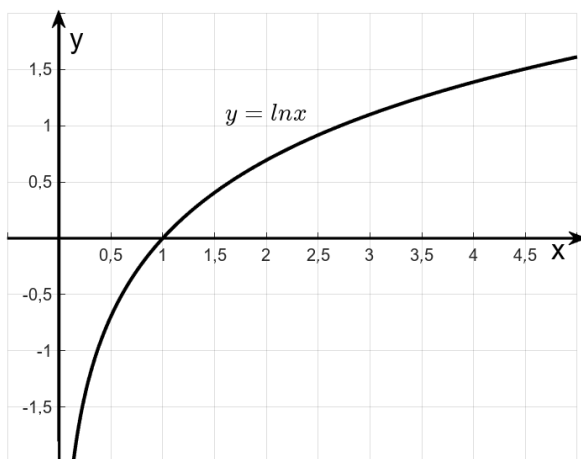
Dla x bliskich zera zachodzi:

$$\ln(1+x) \approx x \quad (6.6)$$

oraz:

$$e^x \approx 1+x. \quad (6.7)$$

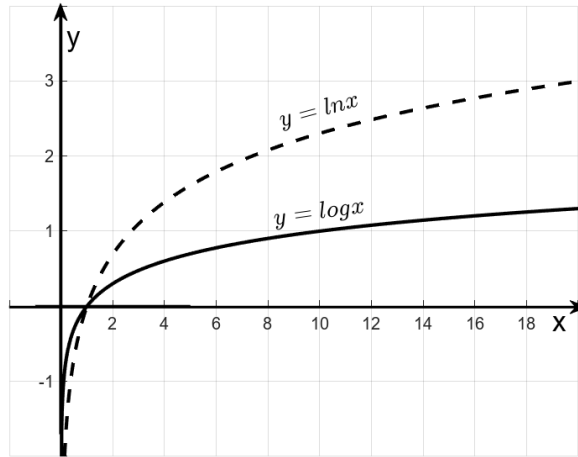
Wykres funkcji $f(x) = \ln x$ zaprezentowano na rysunku 6.3, a zestawienie wykresów funkcji $f(x) = \log x$ i $f(x) = \ln x$ pokazano na rysunku 6.4.



Rysunek 6.3. Wykres funkcji $f(x) = \ln x$

Tabela 6.2. Własności funkcji $f(x) = \ln x$

Dziedzina	$D_f = (0, \infty)$
Zbiór wartości	$Y = \mathbb{R}$
Miejsce zerowe	$x_0 = 1$
Monotoniczność	rosnąca w całej dziedzinie



Rysunek 6.4. Zestawienie wykresów funkcji $f(x) = \log x$ i $f(x) = \ln x$

Przykład 6.2.1. Rozwiązać równanie $\ln(x^2 - 4) = \ln 4x$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że z definicji logarytmu wynika, że $\ln(x^2 - 4)$ i $\ln(4x)$ są określone tylko wtedy, gdy $x^2 - 4 > 0$ i $4x > 0$. Stąd

$$x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \quad \text{i} \quad x > 0.$$

Zatem dziedziną równania $\ln(x^2 - 4) = \ln 4x$ jest zbiór $(2; +\infty)$.

$$\ln(x^2 - 4) = \ln 4x,$$

więc po opuszczeniu logartmów otrzymujemy

$$x^2 - 4 = 4x$$

$$x^2 - 4x - 4 = 0.$$

Ponieważ $\Delta = 32$, to $x_1 = 2 + 2\sqrt{2} \in (2; +\infty)$, ale $x_2 = 2 - 2\sqrt{2} \notin (2; +\infty)$. Zatem jedynym rozwiązaniem danego równania jest $x = 2 + 2\sqrt{2}$.

Przykład 6.2.2. Rozwiązać nierówność $\ln x > -2$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że z definicji logarytmu wynika, że $x > 0$. Ponieważ $-2 = \ln e^{-2}$, więc $\ln x > \ln e^{-2}$. Ponieważ podstawą logarytmów po obu stronach jest $e > 1$, więc, opuszczając logarytmy (własność (4.22)), otrzymujemy

$$x > e^{-2}.$$

Rozwiązaniem nierówności jest więc

$$x > \frac{1}{e^2}.$$

Przykład 6.2.3. Rozwiązać nierówność $\ln(x^2 + 5x - 6) > 1$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że aby logarytm $\ln(x^2 + 5x - 6)$ był określony, musi być spełniona nierówność

$$x^2 + 5x - 6 > 0.$$

Rozwiązując tę nierówność, otrzymujemy

$$x \in (-\infty, -6) \cup (1, \infty).$$

Ponieważ $1 = \ln e$ (własność (4.25)), więc, opuszczając logarytmy (własność (4.22)), mamy

$$x^2 + 5x - 6 > e^1.$$

Ponieważ $\Delta = 49 + 4e$ oraz $x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49 + 4e}}{2}$ i $x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49 + 4e}}{2}$, biorąc pod uwagę, że $x \in (-\infty, -6) \cup (1, \infty)$, otrzymujemy

$$x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, \infty).$$

Przykład 6.2.4. Załóżmy, że pewna wielkość przyrasta w stałym tempie p procent rocznie. Po jakim czasie nastąpi jej podwojenie?

Rozwiązanie: Problem sprowadza się do rozwiązania równania

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = 2.$$

Z definicji logarytmu i wzoru (4.35) na zamianę podstaw w logarytmie otrzymamy

$$x = \frac{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right) 2}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Gdy p jest niezbyt duże (w praktyce chodzi o przyrost do ok. 10%), wyrażenie $\frac{p}{100}$ można uznać za bliskie zera i skorzystać z przybliżenia

$$\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100}. \quad (6.8)$$

Przykład 6.2.5. Oszacować okres podwojenia dla kapitału $k = 1000$ zł przy rocznym wzroście w tempie 8%.

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = 2. \quad (6.9)$$

Logarytmując obie strony powyższej równości, otrzymujemy

$$\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = \ln 2,$$

a stąd

$$x \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \ln 2,$$

czyli

$$x = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Jeśli $p = 8\%$, to

$$x = \frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{8}{100}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln(1,08)}.$$

Ponieważ

$$\ln 2 \approx 0,6931 \quad \text{oraz} \quad \ln 1,08 \approx 0,07696,$$

więc

$$x = \frac{0,6931}{0,07696} \approx 9,01.$$

Zatem kapitał podwoi się po około 9 latach przy rocznym wzroście o 8%.

Przykład 6.2.6. Na konto z kapitalizacją kwartalną i oprocentowaniem w stosunku rocznym wynoszącym 5% włożono 5000 zł. Obliczyć stan konta po upływie roku. Po ilu kwartałach stan konta przekroczy 6000 zł?

Rozwiązanie: Korzystamy ze wzoru na stan konta po t kwartałach

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}, \quad (6.10)$$

gdzie jest $S_0 = 5000$ zł to kapitał początkowy, $r = 0,05$ to oprocentowanie roczne (5%), $k = 4$ to liczba kapitalizacji w ciągu roku (4 kapitalizacje kwartalne), t to czas oprocentowania. Zatem

$$S(t) = 5000 \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4t} = 5000 (1 + 0,0125)^{4t} = 5000(1,0125)^{4t}.$$

Po roku ($t = 1$) mamy

$$S(1) = 5000(1,0125)^4 \approx 5000 \cdot 1,0509 = 5254,50 \text{ zł}.$$

Aby obliczyć czas, po którym stan konta przekroczy 6000 zł, musimy rozwiązać nierówność

$$5000 \cdot (1,0125)^{4t} > 6000 \quad \Rightarrow \quad (1,0125)^{4t} > \frac{6000}{5000} = 1,2.$$

Teraz logarytmujemy obie strony ostatniej nierówności

$$4t \ln(1,0125) > \ln(1,2).$$

Ponieważ

$$\ln(1,0125) \approx 0,0124, \quad \ln(1,2) \approx 0,1823,$$

zatem

$$4t \cdot 0,0124 > 0,1823 \quad \Rightarrow \quad 4t > \frac{0,1823}{0,0124} \approx 14,7 \quad \Rightarrow \quad t > \frac{14,7}{4} \approx 3,68.$$

Tak więc stan konta przekroczy 6000 zł po około 4 pełnych latach (czyli po 16 kwartałach).

6.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania**Obliczyć:**

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n+1}$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n-1}$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^{4n+1}$

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n$

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n+4}\right)^n$

7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$

9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1\right)^n$

11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)^{2n}$

12) Na konto z kapitalizacją kwartalną i oprocentowaniem rocznym wynoszącym 4% włożono 8000 zł. Oblicz stan konta po upływie 2 lat. Po ilu kwartałach stan konta przekroczy 9000 zł?

13) Rozwiązać nierówność $\ln x - \ln(x+2) > 2$.

Odpowiedzi:

1) e^2

2) e^2

3) e^6

4) 0

5) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

6) e^{-7}

7) e^{-1}

8) e^{-3}

9) 1

10) e^2

11) $\frac{1}{e^2}$

12) Stan konta po 2 latach wynosi 8663,20 zł. Stan konta przekroczy 9000 zł po 12 kwartałach.

13) $x \in \left(0, \frac{2e^2}{e^2-1}\right)$

Uwagi bibliograficzne

Pisząc skrypt *Matematyka + między szkołą średnią a studiami. Część I: Funkcje i ich własności*, korzystałyśmy głównie z naszych notatek do zajęć przygotowywanych przez lata prowadzenia zajęć dydaktycznych z matematyki, a co za tym idzie – spotkań i dyskusji ze studentami I semestru o różnym stopniu przygotowania do podjęcia studiów na kierunkach inżynierskich.

Podczas pracy nad materiałami do zajęć prowadzonych w I semestrze studiów, na kursach wyrównawczych, a także w czasie pisania tego skryptu przy doborze przykładów i zadań, poza własnymi notatkami, sięgałyśmy zarówno do starszych pozycji (na przykład do zbioru [1], [8], [13] czy tablic [11]), których treści są aktualne dziś, jak i do nowszych, ale także do klasycznych podręczników i zbiorów zadań takich jak [5–7], [10], [13], [15]. Korzystałyśmy też ze skryptu [2], tablic [11], kompendium [3]. Cenne wskazówki znajdują się również w podręcznikach [4] i [14]. Sposoby prezentacji takich algorytmów jak dzielenie wielomianów, algorytm Hornera, algorytm rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste, zostały zaczerpnięte z [12], własności funkcji trygonometrycznych – z [3] i [11], a cyklometrycznych z [3] i [6]. Pozycje [2] i [3] w szczególności wykorzystano przy pisaniu rozdziału szóstego, a [12] – przy omawianiu sposobu rozwiązywania nierówności wielomianowych (rozdział czwarty). Przy doborze przykładów i zadań szczególnie w dwóch pierwszych rozdziałach pomocne okazały się zbiory zadań [1] (przykłady i zadania dotyczące przekształceń wyrażeń wymiernych), [7], [8], [10], [13] (były inspiracją do doboru i wyboru przykładów i zadań z rozdziałów od trzeciego do szóstego). Rozwiązania zadań z przykładu 6.1.1 zostały zaczerpnięte z [8].

Bibliografia

- [1] Antonow N.P., Wygodzki M.J., Nikitin W.W., Sankin A.I., *Zbiór zadań z matematyki elementarnej. Podręcznik dla samouków*, PWN, Warszawa 1969.
- [2] Bartosiewicz Z., Mozyrska D., Pawłuszewicz E., *Matematyka: skrypt dla studentów kierunku zarządzania i marketing*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2003.
- [3] Bronsztejn I.N., Siemiendiajew K.A., Musiol G., Mühlig H., *Nowoczesne kompendium matematyki*, PWN, Warszawa 2002.
- [4] Bryński M., Dróbka N., Szymański K., *Matematyka dla zerowego roku studiów wyższych*, WNT, Warszawa 2007.
- [5] Decewicz G., Żakowski W., *Matematyka, cz. I*, WNT, Warszawa 2023.
- [6] Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna I. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2022.
- [7] Gewert M., Skoczylas Z., *Analiza matematyczna I. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2022.
- [8] Grabowski M., *Ćwiczenia z analizy matematycznej dla nauczycieli*, PWN, Warszawa 1984.
- [9] Kielbasa A., *Matura z matematyki 2018 – Poziom podstawowy i rozszerzony. Część I*, Wydawnictwo 2000, Warszawa 2017.
- [10] Krywicki W., Włodarski L., *Analiza matematyczna w zadaniach, t. 1*, PWN, Warszawa 2018.
- [11] Lipczyński J., Okołowicz M., Olczak S., Rybka E., *Tablice matematyczne, fizyczne, chemiczne i astronomiczne*, WSiP, Warszawa 1984.
- [12] Regel W., *50 ważnych algorytmów i metod matematycznych z przykładami*, Bila, Rzeszów 2017.
- [13] Siewierski L., *Ćwiczenia z analizy matematycznej z zastosowaniami, cz. I*, PWN, Warszawa 1982.
- [14] Zakrzewski M., *Markowe wykłady z matematyki. Analiza*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2013.

- [15] Żakowski W., Decewicz G., *Matematyka, cz. 1: Analiza matematyczna*, Wydawnictwo WNT, Warszawa 2024.



Minister
Nauki



Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego

Opracowanie publikacji jest finansowane
ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego,
dotacja celowa Ministra Nauki
„Politechniczna Sieć VIA CARPATIA im. Prezydenta RP Lecha Kaczyńskiego”



POLITECHNICZNA SIEĆ
VIA CARPATIA



POLITECHNIKA
LUBELSKA



POLITECHNIKA
RZESZOWSKA
Im. Ignacego Łukasiewicza