MATEMATYKA
Wybrane zagadnienia algebry liniowej i geometrii analitycznej

SKRYPT DLA STUDENTÓW KIERUNKÓW INŻYNIERSKICH

Elżbieta Gołąbeska

Politechnika Białostocka

Elżbieta Gołąbeska

MATEMATYKA

Wybrane zagadnienia
algebry liniowej i geometrii analitycznej

Skrypt dla studentów kierunków inżynierskich

Politechnika Białostocka

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2023

Recenzent:
dr Arkadiusz Niedźwiecki

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Redakcja i korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Skład:
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej

Okładka:
Marcin Dominów

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2023

ISBN 978-83-67185-71-4
ISBN 978-83-67185-72-1 (e-Book)
DOI: 10.24427/978-83-67185-72-1

Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).
Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.

Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
www.pb.edu.pl

SPIS TREŚCI

SŁOWO WSTĘPNE

Książka niniejsza jest skryptem dla studentów kierunków inżynierskich, na których matematyka stanowi podstawę dalszych zastosowań w zagadnieniach technicznych. Zakres tematyczny jest zgodny z obowiązującymi programami nauczania i realizacji założonych efektów uczenia się.

W sposób możliwie przystępny i wyraźnie aplikacyjny, bez nadmiaru dyskusji formalnej, przedstawiono tu podstawowe zagadnienia aparatu matematycznego. Układ treści oraz sposób ich prezentacji skupiają się głównie na praktycznym wykorzystaniu najważniejszych kwestii. Konstrukcja każdego rozdziału jest jednolita i zawiera przede wszystkim kluczowe definicje, twierdzenia i własności, ze szczególnym uwzględnieniem ich zastosowania w licznych przykładach.

Tematycznie niniejsza publikacja składa się z czterech rozdziałów odpowiadających treściom realizowanym w pierwszym semestrze kierunków inżynierskich.

W rozdziale pierwszym prezentowana jest problematyka z zakresu algebry liniowej, poświęcona głównie macierzom i wyznacznikom. Po zapoznaniu się z treścią tego rozdziału czytelnik bez trudu określi rodzaj macierzy, wykona działania na macierzach, obliczy ich wyznacznik, wykona operacje elementarne na macierzach, sprowadzi ją do postaci bazowej, określi rząd macierzy, a także wyznaczy macierz odwrotną do danej metodami: eliminacji Gaussa, Gaussa–Jordana oraz dopełnień algebraicznych.

Drugi rozdział skryptu poświęcony jest układom równań liniowych i metodom ich rozwiązywania. Po zdefiniowaniu układu równań i wyróżnieniu ich typów ze względu na liczbę rozwiązań czytelnik będzie potrafił rozwiązać układy równań liniowych niejednorodnych, równań liniowych jednorodnych oraz układ n równań z n niewiadomymi, stosując metodę macierzy odwrotnej, wzory Cramera czy też metodę ciągu operacji elementarnych. Będzie również umiał rozwiązać układ n równań z m niewiadomymi przy zastosowaniu wzorów Cramera bądź metody ciągu operacji elementarnych, a także wyznaczyć rozwiązanie ogólne i rozwiązania bazowe układu równań liniowych.

Treść rozdziału trzeciego dotyczy geometrii wektorów w przestrzeni R^3. Po zdefiniowaniu pojęcia wektora swobodnego i wektora zaczepionego czytelnik pozna zasady wyznaczania współrzędnych wektora zaczepionego i obliczania jego długości. Wykona działania dodawania i odejmowania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę. Obliczy iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany wektorów, jak też zapozna się z możliwościami zastosowania geometrycznego iloczynu wektorowego i mieszanego wektorów.

Rozdział czwarty obejmuje problematykę geometrii płaszczyzn i prostych w przestrzeni R^3. Po zapoznaniu się z jego treścią student bez trudu wyznaczy równania parametryczne, kierunkowe oraz krawędziowe prostej w przestrzeni R^3, jak również równania normalne, ogólne, parametryczne i wyznacznikowe płaszczyzny w przestrzeni R^3. Tutaj też czytelnik znajdzie sposób wyznaczenia współrzędnych rzutu punktu zarówno na płaszczyznę, jak i na prostą w przestrzeni R^3, obliczenia odległości punktu od płaszczyzny oraz odległości płaszczyzn równoległych.

Prezentowana publikacja ma charakter pomocniczego wydawnictwa, użytecznego do ćwiczeń z przedmiotu matematyka I na kierunkach technicznych, i została w całości zredagowana przez wykładowcę z dużym doświadczeniem akademickim, który dostrzegł potrzebę stworzenia skryptu na takim poziomie.

Elżbieta Gołąbeska

1. MACIERZE I WYZNACZNIKI

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału pierwszego można bez trudu:

- **podać definicję macierzy,**
- **określać rodzaje macierzy,**
- **wykonywać działania na macierzach,**
- **obliczać wyznacznik macierzy,**
- **wykonywać operacje elementarne na macierzach,**
- **sprowadzać macierz do postaci bazowej,**
- **określać rząd macierzy,**
- **wyznaczać macierz odwrotną.**

1.1. Pojęcie macierzy

W wielu przypadkach wygodne jest użycie tablic liczb, w których poszczególne pozycje są określone przez dwa wskaźniki (indeksy) jednoznacznie definiujące położenie danego elementu w tablicy. Takie tablice nazywa się macierzami.

Definicja *macierzy*

Macierzą nazywa się prostokątną tablicę wymiaru $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ utworzoną z liczb rzeczywistych a_{ij}, gdzie $\mathrm{i} \in \{1,2, \dots \mathrm{m}\}$, $\mathrm{j} \in \{1,2, \dots \mathrm{n}\}$, natomiast a_{ij} jest wyrazem (lub elementem) macierzy znajdującym się na skrzyżowaniu i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{\mathrm{m}1} & a_{\mathrm{m}2} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}$$

Macierz o m wierszach i n kolumnach oznacza się $[a_{\mathrm{ij}}]$, $[a_{\mathrm{ij}}]_{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$, $\mathrm{A}_{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$ lub A i nazywa macierzą o wymiarach $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$.

Wiersze i kolumny macierzy

Ciąg elementów $a_{\mathrm{i}1}\ a_{\mathrm{i}2}\ a_{\mathrm{i}3} \dots a_{\mathrm{in}}$
nazywa się i-tym wierszem macierzy $\mathrm{A}_{\mathrm{m} \times \mathrm{n}}$.

Z kolei ciąg elementów

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{1j} \\ a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

nazywa się j-tą kolumną macierzy $A_{m \times n}$.

Macierz złożoną z jednego wiersza, tj. macierz postaci

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \cdots a_n],$$

nazywa się wektorem wierszowym.

Macierz złożoną z jednej kolumny, tj. macierz postaci

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

nazywa się wektorem kolumnowym.

Przykład 1.1.1.

Podać przykłady macierzy o wymiarach 1 × 3, 3 × 2, 2 × 2, 3 × 3.

Rozwiązanie

a) $A = [2 \quad -1 \quad 5]$ macierz o wymiarach 1 × 3

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 3 × 2

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 2 × 2

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 3 × 3

Przykład 1.1.2.

Pewne przedsiębiorstwo budowlane wytwarza siedem rodzajów izolacji styropianowej (polistyren ekspandowany, EPS) służącej do ocieplania budynków, których współczynnik przewodzenia ciepła λ (lambda) wynosi odpowiednio: 0,038; 0,039; 0,040; 0,041; 0,042; 0,043; 0,044. Informacje te można zapisać w postaci wektora wierszowego:

$$\lambda = [0{,}038 \quad 0{,}039 \quad 0{,}040 \quad 0{,}041 \quad 0{,}042 \quad 0{,}043],$$

który można nazwać wektorem współczynników przewodzenia ciepła.

Przykład 1.1.3.

Pewne przedsiębiorstwo budowlane wytwarza wełnę mineralną URSA FKP 39 o sześciu rodzajach grubości: 40; 50; 75; 80; 100; 120 [mm], służącą do izolacji dachu, poddasza, izolacji wypełniającej w elementach szkieletu drewnianego lub metalowego, izolacji stropów między legarami, sufitów podwieszanych, lekkich ścianek działowych, izolacji murów warstwowych i fasad wentylowanych.
Informacje te można zapisać w postaci wektora kolumnowego:

$$\begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 75 \\ 80 \\ 100 \\ 120 \end{bmatrix}$$

który można nazwać wektorem grubości wełny.

Przykład 1.1.4.

Planowanie zaopatrzenia firmy deweloperskiej w określony rodzaj materiałów służących do ocieplania budynków opiera się na informacjach dotyczących cen tych materiałów. Firma zakupuje trzy rodzaje materiałów, których ceny kształtują się jak podano w tabeli:

Cena	Ilość kupowanych materiałów (w t/mies.)		
	materiał 1	materiał 2	materiał 3
Wyższa	10	15	12
Niższa	20	25	28

Powyższe informacje można zapisać w postaci macierzy o wymiarach 2×3:

$$Z = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 12 \\ 20 & 25 & 28 \end{bmatrix}$$

którą nazywa się macierzą zaopatrzenia w określone ilości materiałów przy uwzględnieniu ich cen.

1.2. Rodzaje macierzy

1. Macierz kwadratowa

Definicja *macierzy kwadratowej*
Macierzą kwadratową nazywa się taką macierz, w której liczba wierszy i kolumn jest sobie równa.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Liczbę m = n nazywa się stopniem macierzy. W macierzy kwadratowej występuje tzw. główna przekątna (tworzą ją te elementy macierzy, które mają ten sam numer wiersza co kolumny).

Przykład 1.2.1.

Podać przykłady macierzy kwadratowych stopnia 2, 3, 4, n.

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ macierz kwadratowa stopnia 2

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ macierz kwadratowa stopnia 3

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 & 6 \\ -5 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ macierz kwadratowa stopnia 4

d) $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ macierz kwadratowa stopnia n

2. Macierz prostokątna

Definicja *macierzy prostokątnej*
Macierzą prostokątną nazywa się taką macierz, w której liczba wierszy i kolumn nie jest sobie równa.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład 1.2.2.

Podać przykłady macierzy prostokątnych o wymiarach 3×2, 2×3, 2×5, 6×2.

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 3×2

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 2×3

c) $C = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & -5 & 138 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 2×5

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -4 \\ -9 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 1 \\ 7 & -3 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ macierz o wymiarach 6×2

3. Macierz diagonalna

Definicja *macierzy diagonalnej*
Macierzą diagonalną nazywa się taką macierz kwadratową, której wszystkie elementy, poza główną przekątną, są równe zero, a na głównej przekątnej (diagonalnej) mogą stać dowolne liczby rzeczywiste.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład 1.2.3.

Podać przykłady macierzy diagonalnych stopnia 2, 3, 4, n.

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{17} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ macierz diagonalna stopnia 2

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ macierz diagonalna stopnia 3

c) $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ macierz diagonalna stopnia 4

d) $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{n} \end{bmatrix}$ macierz diagonalna stopnia n

4. Macierz jednostkowa

Definicja *macierzy jednostkowej*

Macierzą jednostkową nazywa się taką macierz kwadratową, której wszystkie elementy, poza główną przekątną, są równe zero, a na głównej przekątnej stoją jedynki. Macierz jednostkową oznacza się I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 1.2.4.

Podać przykłady macierzy jednostkowych stopnia 2, 3, 4, n.

Rozwiązanie

a) $I = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierz jednostkowa stopnia 2

b) $I = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierz jednostkowa stopnia 3

c) $I = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierz jednostkowa stopnia 4

d) $I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ macierz jednostkowa stopnia n

5. Macierz zerowa

Definicja *macierzy zerowej*
Macierzą zerową nazywa się taką macierz, której wszystkie elementy są zerami.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Przykład 1.2.5.

Podać przykłady macierzy zerowych o wymiarach 3×3, 2×3, 4×3, 2×6.

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ macierz zerowa o wymiarach 3×3

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ macierz zerowa o wymiarach 2×3

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ macierz zerowa o wymiarach 4×3

d) $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ macierz zerowa o wymiarach 2×6

6. Macierz transponowana

Definicja *macierzy transponowanej*
Macierzą transponowaną nazywa się macierz uzyskaną z macierzy A poprzez zamianę wierszy na kolumny tej macierzy, a kolumn na wiersze (w miejsce kolumn wstawia się wiersze – i odwrotnie – z zachowaniem kolejności ich elementów). Macierz transponowaną do A oznacza się A^T.
Uwaga: Transponować można zarówno macierze kwadratowe, jak i macierze prostokątne.

Przykład 1.2.6.

Wyznaczyć macierze transponowane podanych macierzy.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{10} \\ \sqrt{3} & \sqrt{7} & \sqrt{11} \\ 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{5} & 3 & \sqrt{13} \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 4 & 5 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & \sqrt{5} \\ \sqrt{6} & \sqrt{7} & 2\sqrt{2} & 3 \\ \sqrt{10} & \sqrt{11} & 2\sqrt{3} & \sqrt{13} \end{bmatrix}$

d) $M^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

7. Macierz symetryczna

Definicja *macierzy symetrycznej*
Macierzą symetryczną nazywa się taką macierz kwadratową, dla której zachodzi warunek: $A = A^T$

Przykład 1.2.7.

Uwzględniając fakt, że dana macierz jest macierzą symetryczną wówczas, gdy pierwszy wiersz jest taki sam jak pierwsza kolumna, drugi wiersz jest taki sam jak druga kolumna, trzeci wiersz jest taki sam jak trzecia kolumna itd., zastąpić miejsca oznaczone * w poniższych macierzach, tak aby otrzymać macierze symetryczne.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & * \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & * & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 1 & 3 \\ * & * & 2 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & * & 4 & * \\ 2 & * & * & 6 \\ * & -1 & 9 & -2 \\ 3 & * & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) W macierzy A wyraz $a_{11} = 2$, zatem $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) W macierzy B wyrazy $a_{13} = a_{31}$. Ponieważ $a_{31} = 2$, zatem $a_{13} = 2$. Wyrazy $a_{32} = a_{23}$. Ponieważ $a_{23} = 4$, zatem $a_{23} = 4$.

Zatem $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

c) W macierzy C wyrazy $a_{11}, a_{21} = a_{12}, a_{13} = a_{31}$ mogą być dowolnymi liczbami, np. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) W macierzy D wyraz a_{22} może być dowolną liczbą

8. Macierz ortogonalna

Definicja *macierzy ortogonalnej*
Macierzą ortogonalną nazywa się taką macierz kwadratową, dla której zachodzi warunek: $$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$
gdzie:
I – macierz jednostkowa,
A^T – macierz transponowana względem macierzy A,
$\cdot$ – mnożenie macierzy (omówione w dalszej części).

Przykład 1.2.8.

Podać przykłady macierzy ortogonalnych.

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ $\quad B^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$

Uwaga: Po wprowadzeniu działań na macierzach będzie można sprawdzić, że powyższe macierze (A, B, C, M) są ortogonalne.

1.3. Działania na macierzach. Własności działań

Na macierzach można wykonywać określone działania algebraiczne. Macierze można dodawać, odejmować, mnożyć macierz przez liczbę, mnożyć macierz przez macierz. Należy jednak pamiętać o odpowiednich warunkach, które muszą być przy tym spełnione. Działania na macierzach charakteryzują też pewne własności.

1. Dodawanie macierzy

Uwaga: Aby można było wykonać dodawanie macierzy, muszą być one tego samego wymiaru.

Definicja *sumy macierzy*

Sumą macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ o tym samym wymiarze $m \times n$ nazywa się macierz o tymże wymiarze, której elementy są sumami odpowiednich elementów macierzy A i macierzy B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Własności dodawania macierzy

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + 0 = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $\left(A^T\right)^T = A$

Przykład 1.3.1.

Dane są macierze A, B, C, D, E, F, G, H, J.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Wykonać dodawanie macierzy (o ile to możliwe).

a) $A + B$

b) $C + D + E$

c) $G + H$

d) $H + J^T$

Rozwiązanie

a) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -6 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 2+(-2) & -1+3 & 0+2 \\ 1+1 & 3+(-4) & 4+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $C + D + E = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1+3+1 & 4+3+(-2) \\ 2+1+4 & 3+2+0 \\ 5+4+0 & 7+5+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 5 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$

c) $G + H$ jest niewykonalne, gdyż macierz G jest wymiaru 3×3, natomiast macierz H wymiaru 4×2, czyli nie są tego samego wymiaru.

d) $H + J^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

2. Odejmowanie macierzy

Uwaga: Aby można było wykonać odejmowanie macierzy, muszą być one tego samego wymiaru.

Definicja *różnicy macierzy*

Różnicą macierzy $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ o tym samym wymiarze $m \times n$ nazywa się macierz o tymże wymiarze, której elementy są różnicami odpowiednich elementów macierzy A i macierzy B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

Własności odejmowania macierzy

- $A - B = A + (-B)$
- $A - A = 0$
- $A - 0 = A$

Przykład 1.3.2.

Dane są macierze A, B, C, D, E, F

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \; F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Wykonać odejmowanie macierzy (o ile to możliwe).

a) $A - B$

b) $C - D$

c) $A^T - B^T - F$

d) $A - E^T$

Rozwiązanie

a) $A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-3 & 0-2) \\ 1-(-1) & -3-4 & 4-6 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ 2 & -7 & -2 \end{bmatrix}$

b) $C - D$ jest niewykonalne, gdyż macierz C jest wymiaru 4×2, natomiast macierz D jest wymiaru 3×3, czyli nie są tego samego wymiaru.

c) $A^T - B^T - F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} -4 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

d) $A - E^T$ jest niewykonalne, gdyż macierz A jest wymiaru 4×2, natomiast macierz E^T jest wymiaru 2×4, czyli nie są tego samego wymiaru.

3. Mnożenie macierzy przez liczbę

Uwaga: Każdą macierz (dowolnego wymiaru) można pomnożyć przez liczbę α różną od zera.

Definicja *iloczynu macierzy przez liczbę*

Iloczynem macierzy A przez liczbę α nazywa się macierz $\alpha \cdot A$, której każdy element jest iloczynem odpowiedniego elementu macierzy A przez liczbę α.

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \dots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \dots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \dots & \alpha \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

Własności mnożenia macierzy przez liczbę

- $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$
- $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
- $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$

Przykład 1.3.3.

Wykonać mnożenie podanych macierzy przez liczbę α.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_1 = 3$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_2 = \frac{1}{8}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_3 = -4$

d) $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad \alpha_4 = 5$

Rozwiązanie

a) $\alpha_1 \cdot \mathrm{A} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -15 \\ 3 & -12 \\ 6 & -18 \end{bmatrix}$

b) $\alpha_2 \cdot \mathrm{B} = \frac{1}{8} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{7}{8} & 1 \end{bmatrix}$

c) $\alpha_3 \cdot \mathrm{C} = (-4) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 \\ -8 & -8 & -8 \end{bmatrix}$

d) $\alpha_4 \cdot \mathrm{M} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 25 \\ 10 & 30 & 0 \end{bmatrix}$

4. Mnożenie macierzy przez macierz

Uwaga: Aby można było pomnożyć macierz przez macierz, to liczba kolumn pierwszej macierzy musi być taka sama jak liczba wierszy drugiej macierzy.

Definicja *iloczynu macierzy przez macierz*

Iloczynem macierzy $\mathrm{A}_{\mathrm{m} \times \mathrm{n}} = [\mathrm{a_{ij}}]$ i $\mathrm{B}_{\mathrm{n} \times \mathrm{r}} = [\mathrm{b_{ij}}]$ nazywa się taką macierz $\mathrm{C}_{\mathrm{m} \times \mathrm{r}} = [\mathrm{c_{ik}}]$, której wyrazami są liczby:

$$\mathrm{c_{ik}} = a_{\mathrm{i1}} \cdot \mathrm{b_{1k}} + a_{\mathrm{i2}} \cdot \mathrm{b_{2k}} + \cdots + a_{\mathrm{in}} \cdot \mathrm{b_{nk}}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{b_{11}} & \mathrm{b_{12}} & \dots & \mathrm{b_{1k}} \\ \mathrm{b_{21}} & \mathrm{b_{22}} & \dots & \mathrm{b_{2k}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathrm{b_{n1}} & \mathrm{b_{n2}} & \cdots & \mathrm{b_{nk}} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\mathrm{n}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{\mathrm{m1}} & a_{\mathrm{m2}} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{b_{11}} & \mathrm{b_{12}} & \dots & \mathrm{b_{1k}} \\ \mathrm{b_{21}} & \mathrm{b_{22}} & \dots & \mathrm{b_{2k}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \mathrm{b_{n1}} & \mathrm{b_{n2}} & \cdots & \mathrm{b_{nk}} \end{bmatrix} = \tag{1.4}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot \mathrm{b_{11}} + a_{12} \cdot \mathrm{b_{21}} + \cdots + a_{1\mathrm{n}} \cdot \mathrm{b_{n1}} & \dots & a_{11} \cdot \mathrm{b_{1k}} + a_{12} \cdot \mathrm{b_{2k}} + \cdots + a_{1\mathrm{n}} \cdot \mathrm{b_{nk}} \\ a_{21} \cdot \mathrm{b_{11}} + a_{22} \cdot \mathrm{b_{21}} + \cdots + a_{2\mathrm{n}} \cdot \mathrm{b_{n1}} & \dots & a_{21} \cdot \mathrm{b_{1k}} + a_{22} \cdot \mathrm{b_{2k}} + \cdots + a_{2\mathrm{n}} \cdot \mathrm{b_{nk}} \\ \dots & \dots \quad \ddots & \dots \\ a_{\mathrm{m1}} \cdot \mathrm{b_{11}} + a_{\mathrm{m2}} \cdot \mathrm{b_{21}} + \cdots + a_{\mathrm{mn}} \cdot \mathrm{b_{n1}} & \dots & a_{\mathrm{m1}} \cdot \mathrm{b_{1k}} + a_{\mathrm{m2}} \cdot \mathrm{b_{2k}} + \cdots + a_{\mathrm{mn}} \cdot \mathrm{b_{nk}} \end{bmatrix}$$

Własności mnożenia macierzy przez macierz

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B)$
- $A_n \cdot I_n = I_n \cdot A_n = A_n$

Przykład 1.3.4.

Wykonać mnożenie macierzy A · B oraz B · A (o ile to możliwe).

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$A_1 \cdot B_1$ – macierz A_1 jest wymiaru 2×3, natomiast macierz B_1 jest wymiaru 3×2. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy A_1 jest taka sama jak liczba wierszy macierzy B_1, to mnożenie macierzy $A_1 \cdot B_1$ jest wykonalne, a w wyniku uzyska się macierz o wymiarach 2×2 (ponieważ takie są skrajne wymiary mnożonych macierzy, czyli liczba wierszy macierzy A_1 oraz liczba kolumn macierzy B_1).

$$A_1 \cdot B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 21 \end{bmatrix}$$

$B_1 \cdot A_1$ – macierz B_1 jest wymiaru 3×2, natomiast macierz A_1 jest wymiaru 2×3. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy B_1 jest taka sama jak liczba wierszy macierzy B_1, to mnożenie macierzy $A_1 \cdot B_1$ jest wykonalne, a w wyniku uzyska się macierz o wymiarach 3×3 (ponieważ takie są skrajne wymiary mnożonych macierzy, czyli liczba wierszy macierzy B_1 oraz liczba kolumn macierzy A_1).

$$B_1 \cdot A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 13 & 5 & 18 \\ 8 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A_2 \cdot B_2$ – macierz A_2 jest wymiaru 2×3, natomiast macierz B_2 jest wymiaru 3×3. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy A_2 jest taka sama jak liczba wierszy macierzy B_2, to mnożenie macierzy $A_2 \cdot B_2$ jest wykonalne, a w wyniku uzyska się macierz o wymiarach 2×3 (ponieważ takie są skrajne wymiary mnożonych macierzy, czyli liczba wierszy macierzy A_2 oraz liczba kolumn macierzy B_2).

$$A_2 \cdot B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$B_2 \cdot A_2$ – macierz B_2 jest wymiaru 3×3, natomiast macierz A_2 jest wymiaru 2×3. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy B_2 nie jest taka sama jak liczba wierszy macierzy A_2, to mnożenie macierzy $B_2 \cdot A_2$ jest niewykonalne.

c) $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$A_3 \cdot B_3$ – macierz A_3 jest wymiaru 4×2, natomiast macierz B_3 jest wymiaru 3×3. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy A_3 nie jest taka sama jak liczba wierszy macierzy B_3, to mnożenie macierzy $A_3 \cdot B_3$ jest niewykonalne.

$B_3 \cdot A_3$ – macierz B_3 jest wymiaru 3×3, natomiast macierz A_3 jest wymiaru 4×2. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy B_3 nie jest taka sama jak liczba wierszy macierzy A_3, to mnożenie macierzy $B_3 \cdot A_3$ jest niewykonalne.

d) $A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

$A_4 \cdot B_4$ – macierz A_4 jest wymiaru 3×2, natomiast macierz B_4 jest wymiaru 2×3. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy A_2 jest taka sama jak liczba wierszy macierzy B_4, to mnożenie macierzy $A_4 \cdot B_4$ jest wykonalne, a w wyniku uzyska się macierz o wymiarach 3×3 (ponieważ takie są skrajne wymiary mnożonych macierzy, czyli liczba wierszy macierzy A_4 oraz liczba kolumn macierzy B_4).

$$A_4 \cdot B_4 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$B_4 \cdot A_4$ – macierz B_4 jest wymiaru 2×3, natomiast macierz A_4 jest wymiaru 3×2. Z uwagi na to, że liczba kolumn macierzy B_4 jest taka sama jak liczba wierszy macierzy A_4, to mnożenie macierzy $B_4 \cdot A_4$ jest wykonalne, a w wyniku uzyska się macierz o wymiarach 2×2 (ponieważ takie są skrajne wymiary mnożonych macierzy, czyli liczba wierszy macierzy B_4 oraz liczba kolumn macierzy A_4).

$$B_4 \cdot A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Uwaga: Z powyższych przykładów wynika, że w ogólności $A \cdot B \neq B \cdot A$, zatem mnożenie macierzy przez macierz nie jest przemienne.

5. Potęgowanie macierzy

Definicja *potęgowania macierzy*
n-tą potęgą macierzy kwadratowej A nazywa się n-krotny iloczyn tej macierzy przez siebie, zatem:

$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A^n = A^{n-1} \cdot A$$

Uwaga: Aby można było podnieść macierz do potęgi, to ta macierz musi być kwadratowa.

Przykład 1.3.5.

Obliczyć n-tą potęgę podanych macierzy.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad n = 4$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad n = 2$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad n = 3$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad n = 3$

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 3+12 \\ 2+8 & 6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 10 & 22 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+30 & 21+60 \\ 10+44 & 30+88 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 81 \\ 54 & 118 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 37 & 81 \\ 54 & 118 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37+162 & 111+324 \\ 54+236 & 162+472 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 199 & 435 \\ 290 & 634 \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -2+0 \\ 6+0 & -3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 4+8+0 & 0+4+0 & 0+0+0 \\ 6+20+18 & 0+10+15 & 0+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \\ 44 & 25 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 \\ 44 & 25 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 12+16+0 & 0+8+0 & 0+0+0 \\ 44+100+54 & 0+50+45 & 0+0+27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 28 & 8 & 0 \\ 198 & 95 & 27 \end{bmatrix}$$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$M^2 = M \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+4+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+4+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+8+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+8+0 & 0+0+0+0 \\ 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+0 & 0+0+0+1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.4. Wyznacznik macierzy

Wyznacznikiem macierzy jest pewna liczba, którą przyporządkowuje się każdej macierzy kwadratowej, przy czym wiele macierzy może mieć przyporządkowaną taką samą liczbę.

Definicja *wyznacznika macierzy*
Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $\mathrm{A} = [a_{\mathrm{ij}}]$ nazywa się liczbę rzeczywistą $\det \mathrm{A}$, która określona jest wzorem rekurencyjnym:

$$\det \mathrm{A}_{\mathrm{ij}} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \mathrm{A}_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det \mathrm{A}_{12} + \cdots + \\ + (-1)^{1+\mathrm{n}} a_{1\mathrm{n}} \det \mathrm{A}_{1\mathrm{n}} \tag{1.4}$$

gdzie:
$\det \mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$ jest wyznacznikiem powstałym z wykreślenia pierwszego wiersza i j-tej kolumny $(\mathrm{j} = 1, 2, 3, \dots, \mathrm{n})$.

Uwaga: Wyznacznik można obliczać tylko dla macierzy kwadratowych. Macierz, której wyznacznik jest różny od zera, nazywa się macierzą nieosobliwą.

Wyznacznik macierzy A oznacza się także symbolem $\det[a_{\mathrm{ij}}]$ lub $|\mathrm{A}|$.

Własności wyznacznika macierzy

- Jeżeli wyznacznik ma dwa takie same wiersze lub dwie takie same kolumny, to jest on równy zero.
- Jeżeli wiersz lub kolumnę wyznacznika pomnoży się przez pewną liczbę, to wartość wyznacznika też zostanie pomnożona przez tę liczbę.
- Jeżeli macierz zawiera wiersz bądź kolumnę składające się z samych zer, to wyznacznik tej macierzy jest równy zero.
- Jeżeli zamieni się miejscami dwa wiersze (kolumny) macierzy, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny.
- Jeżeli macierz zawiera dwa jednakowe wiersze albo dwie jednakowe kolumny, to wyznacznik tej macierzy jest równy zero.
- Jeżeli do każdego z elementów pewnego wiersza lub pewnej kolumny macierzy doda się pomnożone przez tę samą liczbę odpowiednie elementy innego wiersza albo innej kolumny tej macierzy (tj. doda się elementy leżące w tych samych kolumnach bądź wierszach), to wyznacznik tej macierzy się nie zmieni. Ogólnie, wyznacznik macierzy się nie zmieni, jeżeli do pewnego wiersza (pewnej kolumny) tej macierzy doda się kombinację liniową innych wierszy (kolumn) tej macierzy.

- Transponowanie macierzy nie zmienia wartości jej wyznacznika.
- Jeżeli macierze A i B są tych samych stopni, to $\det(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) = \det\mathrm{A}\cdot\det\mathrm{B}$.

1. Wyznacznik macierzy 1×1

$$\mathrm{A} = [a_{11}]$$
$$\det\mathrm{A} = a_{11}$$

Przykład 1.4.1.

Obliczyć wyznacznik macierzy stopnia pierwszego.

a) $\mathrm{A} = [5]$

b) $\mathrm{B} = [-7]$

c) $\mathrm{C} = \left[\frac{1}{2}\right]$

d) $\mathrm{M} = [0]$

Rozwiązanie

a) $\det\mathrm{A} = 5$

b) $\det\mathrm{B} = -7$

c) $\det\mathrm{C} = \frac{1}{2}$

d) $\det\mathrm{M} = 0$

2. Wyznacznik macierzy 2×2

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det\mathrm{A} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.6}$$

Przykład 1.4.2.

Obliczyć wyznacznik macierzy stopnia drugiego.

a) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$

d) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $\det A = \det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2$

b) $\det B = \det\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 6 \cdot (-5) = 2 + 30 = 32$

c) $\det C = \det\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) =$
$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

d) $\det M = \det\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x =$
$= \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$

3. Wyznacznik macierzy 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33} \tag{1.7}$$

Metoda obliczania wyznacznika macierzy 3×3 nazywa się metodą Sarrusa.
Uwaga: Metody Sarrusa nie można stosować do liczenia wyznaczników stopnia wyższego niż trzeci.

Przykład 1.4.3.

Obliczyć wyznaczniki macierzy stopnia trzeciego.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 2 =$

$= 5 - 8 + 12 + 3 - 8 - 20 = -16$

b) $\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1$

c) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot 3 \cdot (-7) + 2 \cdot 6 \cdot 0 + (-1) \cdot (-4) \cdot (-5) - (-5) \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \cdot$
$\cdot (-7) - -1 \cdot 6 \cdot (-4) = -31$

d) $\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} =$

$= 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 3 \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot$
$\cdot (-3) - -4 \cdot (-1) \cdot 1 = 23$

4. Wyznacznik macierzy 4×4

W przypadku macierzy o wymiarach 4×4 należy skorzystać z definicji lub z twierdzenia Laplace'a.

Twierdzenie (Laplace'a)

Wyznacznik macierzy jest równy sumie wszystkich iloczynów każdego elementu dowolnego wiersza (lub dowolnej kolumny) i odpowiadającemu temu elementowi dopełnieniu algebraicznemu. Oznacza to, że wyznacznik ten określony jest następująco:

$$\det A = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \dots + a_{in}D_{in}, i \in \{1,2,\dots,n\}, \tag{1.8}$$

gdzie D_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij}, zdefiniowanym jako liczba otrzymana z pomnożenia minora M_{ij} przez $(-1)^{i+j}$:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$$

Minor M_{ij} jest to wyznacznik macierzy stopnia $n-1$ uzyskany poprzez skreślenie w macierzy A dowolnego, np. i-tego wiersza, oraz dowolnej, np. j-tej kolumny.

W przypadku rozwinięcia względem i-tego wiersza (gdzie $i = 1,2, \dots, n$) schemat metody Laplace'a wygląda następująco:

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}\det A_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}\det A_{i2} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}\det A_{in} \tag{1.9}$$

gdzie A_{ij} jest macierzą stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny ($\det A_{ij}$ to minor macierzy), np. A_{12} to macierz powstała przez usunięcie pierwszego wiersza i drugiej kolumny w macierzy A.

W przypadku rozwinięcia względem j-tej kolumny (gdzie $j = 1,2, \dots n$) schemat metody Laplace'a wygląda następująco:

$$\det A = a_{1j}(-1)^{1+j}\det A_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}\det A_{2j} + \cdots + a_{nj}(-1)^{n+j}\det A_{nj} \tag{1.10}$$

Metoda obliczania wyznacznika macierzy 4×4 (stopnia czwartego) i wyższych stopni nazywa się metodą Laplace'a.

Przykład 1.4.4.

Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy z wykorzystaniem wzoru Laplace'a:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot [-45 + (-8) + 80 - 24 - 24 - 50] -$$

$$-3 \cdot [27 + 16 + 100 - (-48) - 30 - (-30)] -$$

$$- 4 \cdot [36 + (-40) + 40 - (-64) - (-75) - (-12)] -$$

$$- 5 \cdot [60 + 60 + 20 - (-32) - (-125) - 18] =$$

$$= -142 - 573 - 748 - 1395 = -2858$$

b) $$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

c) $$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4[1 \cdot (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot (-5) -$$

$$- 3 \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 0] - 3[1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 0 \cdot 0 -$$

$$- (-1) \cdot 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \cdot 4] = 298$$

d) $\det \mathrm{M} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ -5 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -4 \\ -3 & 2 & -2 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-4) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 5 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \left[1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\left. + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \right] +$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \left[2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-4) \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot$$

$$\cdot\left[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&-2&3\\-3&1&-2\\4&2&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3&-2&3\\4&1&-2\\-5&2&1\end{vmatrix}+3\cdot\right.$$
$$\left.\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3&2&3\\4&-3&-2\\-5&4&1\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}-3&2&-2\\4&-3&1\\-5&4&2\end{vmatrix}\right]+$$
$$+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\left[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1&3\\-3&2&-2\\4&-3&1\end{vmatrix}\cdot\right.$$
$$\cdot\left[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1&3\\-3&2&-2\\4&-3&1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3&1&3\\4&2&-2\\-5&-3&1\end{vmatrix}+\right.$$
$$\left.+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3&2&3\\4&-3&-2\\-5&4&1\end{vmatrix}+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}-3&2&1\\4&-3&2\\-5&4&-3\end{vmatrix}\right]+$$
$$+5\cdot(-1)^{1+5}\cdot\left[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2&1&-2\\-3&2&1\\4&-3&2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3&1&-2\\4&2&1\\-5&-3&2\end{vmatrix}+\right.$$
$$\left.+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3&2&-2\\4&-3&1\\-5&4&2\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}-3&2&1\\4&-3&2\\-5&4&-3\end{vmatrix}\right]=$$
$$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot[1\cdot(-1)^{1+1}\cdot18+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-10)+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot$$
$$\cdot(-10)+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot22]+$$
$$+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot18+(-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot12+$$
$$+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot12+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot(-30)]+$$
$$+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-10)+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot12+$$
$$+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot0+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot2]+$$
$$+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot(-10)+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot12+$$
$$+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot0+(-4)\cdot(-1)^{1+4}\cdot2]+$$
$$+5\cdot(-1)^{1+5}\cdot[2\cdot(-1)^{1+1}\cdot22+1\cdot(-1)^{1+2}\cdot(-30)+$$
$$+(-2)\cdot(-1)^{1+3}\cdot2+3\cdot(-1)^{1+4}\cdot2]=160$$

1.5. Operacje elementarne na macierzach

W każdej macierzy można na jej wierszach i kolumnach wykonywać pewne działania zwane operacjami elementarnymi. Nie zmieniają one pewnych własności macierzy, można więc w ten sposób przekształcać je do wygodniejszej postaci.

Na macierzach można wykonywać trzy operacje elementarne:

- dodanie do wiersza/kolumny innego wiersza/kolumny (lub jej wielokrotności)

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 \ +2w_2} \begin{bmatrix} 5 & 11 & 5 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- mnożenie wiersza lub kolumny przez liczbę różną od zera

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- zamiana miejscami wierszy lub kolumn

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

albo kolumn

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{k_1 \leftrightarrow k_3} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne wykorzystuje się przy:

- sprowadzaniu macierzy do postaci bazowej (kanonicznej),
- obliczaniu wyznacznika macierzy,
- obliczaniu rzędu macierzy,
- rozwiązywaniu układów równań liniowych,
- wyznaczaniu macierzy odwrotnej do danej (w jednej z metod odwracania macierzy).

Zasady stosowania określonych operacji elementarnych

- Sprowadzanie macierzy do postaci bazowej (kanonicznej)

W tym przypadku można stosować wszystkie operacje elementarne, występuje więc całkowita swoboda działania.

- Obliczanie wyznacznika macierzy

  W tym przypadku nie można dowolnie stosować wszystkich operacji elementarnych. Wartości wyznacznika nie zmienia wyłącznie dodanie wielokrotności jednego wiersza do innego lub jednej kolumny do innej. Natomiast pomnożenie wiersza (bądź kolumny) przez liczbę α powoduje, że wyznacznik zwiększa się α razy. Jeszcze trudniej kontrolować zachowanie wyznacznika przy zamianie miejscami wierszy (lub kolumn) – wówczas może (ale nie musi) zmienić znak wyznacznika, co zależy od parzystości stosownej permutacji. Z uwagi na powyższe w przypadku liczenia wyznacznika najlepiej jest ograniczać się do pierwszej z wymienionych operacji.
- Obliczanie rzędu macierzy

  Rzędu macierzy nie zmieniają żadne operacje elementarne, zarówno na wierszach, jak i na kolumnach. W tym przypadku występuje więc całkowita swoboda działania.
- Rozwiązywanie układów równań liniowych

  Przy rozwiązywaniu układów równań metodą macierzową operacje elementarne można wykonywać wyłącznie na wierszach – stosowanie operacji na kolumnach oznaczałoby bowiem wprowadzenie nowych zmiennych (czego nigdy nie należy robić).
- Wyznaczanie macierzy odwrotnej do danej (w jednej z metod odwracania macierzy).

  W przypadku odwracania macierzy przy użyciu dopisanej macierzy jednostkowej operacje elementarne można wykonywać wyłącznie na wierszach.

1.6. Postać bazowa macierzy

Niezależnie od tego, czy macierz jest kwadratowa, czy prostokątna, można ją sprowadzić do postaci bazowej, która zawiera macierz jednostkową I_k oraz może zawierać macierze zerowe 0_1 i 0_2, jak również może zawierać macierz resztową R.

$$A = \begin{bmatrix} I_k & R \\ 0_1 & 0_2 \end{bmatrix}$$

gdzie:

I_k – macierz jednostkowa stopnia k,

R – macierz resztowa (jej elementami są dowolne liczby rzeczywiste),

0_1 i 0_2 – macierze zerowe.

Uwaga: Stopień k macierzy jednostkowej I otrzymanej w lewym górnym rogu macierzy określa rząd macierzy.

Twierdzenie
Każdą macierz A można za pomocą ciągu operacji elementarnych sprowadzić do postaci bazowej (kanonicznej), która zawiera podmacierz jednostkową stopnia k.

Przykład 1.6.1.

Za pomocą ciągu operacji elementarnych sprowadzić podane macierze do postaci bazowej.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1}$$

$$\xleftrightarrow[w_3 - 4w_1]{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -6 \\ 0 & -6 & -14 & -12 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{3}w_2}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{3}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 2 \\ 0 & -6 & -14 & -12 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 + 6w_2]{w_1 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&1&2\\3&4&5\end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3\ -3w_1]{w_2\ -2w_1} \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&-3&4\\0&-2&8\end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2\ -2w_3}$

$\xleftrightarrow{w_2\ -2w_3} \begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&-12\\0&-2&8\end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3\ +2w_2]{w_1\ -2w_2} \begin{bmatrix}1&0&23\\0&1&-12\\0&0&-16\end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{16}w_3}$

$\xleftrightarrow{-\frac{1}{16}w_3} \begin{bmatrix}1&0&23\\0&1&-12\\0&0&1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_2\ +12w_3]{w_1\ -23w_3} \left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$

c) $\begin{bmatrix}2&1&0&1&0\\1&3&2&-1&1\\0&-1&1&2&0\\-1&4&-2&1&0\\2&6&2&3&1\\3&4&0&-6&2\end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{2w_2-w_1\\2w_4+w_1\\w_5-w_1\\2w_5-3w_1}} \begin{bmatrix}2&1&0&1&0\\0&5&4&-1&2\\0&-1&1&2&0\\0&9&-4&3&0\\0&5&2&2&1\\0&5&0&-15&4\end{bmatrix} \xleftrightarrow{5w_1-w_2}$

$\xleftrightarrow{5w_1-w_2} \begin{bmatrix}10&0&-4&6&-2\\0&5&4&-1&2\\0&-1&1&2&0\\0&9&-4&3&0\\0&5&2&2&1\\0&5&0&-15&4\end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{5w_3+w_2\\5w_4-9w_2\\w_5-w_2\\w_6-w_2}}$

$\xleftrightarrow{\substack{5w_3+w_2\\5w_4-9w_2\\w_5-w_2\\w_6-w_2}} \begin{bmatrix}10&0&-4&6&-2\\0&5&4&-1&2\\0&0&9&9&2\\0&0&-56&24&-18\\0&0&-2&3&-1\\0&0&-4&-14&2\end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{9w_1+4w_3\\9w_2-4w_3\\9w_4+56w_3\\9w_5+2w_3\\9w_6+4w_3}}$

$\xleftrightarrow{\substack{9w_1+4w_3\\9w_2-4w_3\\9w_4+56w_3\\9w_5+2w_3\\9w_6+4w_3}} \begin{bmatrix}90&0&0&90&-10\\0&5&0&-45&10\\0&0&9&9&2\\0&0&0&720&-50\\0&0&0&45&-5\\0&0&0&-90&26\end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{8w_1-w_4\\16w_2+w_4\\80w_3-w_4\\16w_5-w_4\\8w_6+w_4}}$

$\xleftrightarrow{\substack{8w_1-w_4\\16w_2+w_4\\80w_3-w_4\\16w_5-w_4\\8w_6+w_4}} \begin{bmatrix}720&0&0&0&-30\\0&80&0&0&110\\0&0&720&0&210\\0&0&0&720&-50\\0&0&0&0&-30\\0&0&0&0&158\end{bmatrix} \xleftrightarrow{15w_6+79w_5}$

$$\xleftrightarrow{15w_6+79w_5}\begin{bmatrix}720 & 0 & 0 & 0 & -30\\ 0 & 80 & 0 & 0 & 110\\ 0 & 0 & 720 & 0 & 210\\ 0 & 0 & 0 & 720 & -50\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{w_1-w_5\\ 3w_2+11w_5\\ w_3+7w_5\\ 3w_4-5w_5}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{w_1-w_5\\ 3w_2+11w_5\\ w_3+7w_5\\ 3w_4-5w_5}}\begin{bmatrix}720 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 240 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 720 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2160 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{\frac{1}{720}w_1\\ \frac{1}{240}w_2\\ \frac{1}{720}w_3\\ \frac{1}{2160}w_4\\ -\frac{1}{30}w_5}}\left[\begin{array}{ccccc}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

d) $$\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 3 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{w_2+2w_1\\ 2w_3+w_1\\ w_4+w_1}}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 7 & 1 & 7 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{w_1-w_2\\ w_3-7w_2\\ w_4-2w_2}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{w_1-w_2\\ w_3-7w_2\\ w_4-2w_2}}\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 0 & -6 & 0 & -45\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -13\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{3w_1-w_3\\ 6w_2+w_3\\ 6w_4-w_3}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{3w_1-w_3\\ 6w_2+w_3\\ 6w_4-w_3}}\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0 & 0 & 30\\ 0 & 6 & 0 & 6 & -3\\ 0 & 0 & -6 & 0 & -45\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33\end{bmatrix}\xleftrightarrow{k_4\leftrightarrow k_5}$$

$$\xleftrightarrow{k_4\leftrightarrow k_5}\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0 & 30 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -3 & 6\\ 0 & 0 & -6 & -45 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -33 & 0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{-\frac{1}{33}w_4}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{33}w_4}\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0 & 30 & 0\\ 0 & 6 & 0 & -3 & 6\\ 0 & 0 & -6 & -45 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{w_1-30w_4\\ w_2+3w_4\\ w_3+45w_4}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{w_1-30w_4\\ w_2+3w_4\\ w_3+45w_4}}\begin{bmatrix}-6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\substack{-\frac{1}{6}w_1\\ \frac{1}{6}w_2\\ -\frac{1}{6}w_3}}\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

1.7. Rząd macierzy

Podstawowa definicja rzędu macierzy wiąże się z liniową niezależnością wierszy, co intuicyjnie można rozumieć w ten sposób, że rząd macierzy to maksymalna liczba wierszy, których nie da się wyzerować operacjami elementarnymi. Ponieważ jednak potrzebne jest bardziej precyzyjne określenie, więc równoważnie zdefiniować można tak, że rząd macierzy to wymiar największej podmacierzy kwadratowej o niezerowym wyznaczniku.

Uwaga: Rząd macierzy można określać zarówno dla macierzy kwadratowych, jak i prostokątnych. Zanim podamy sposoby określania rzędu macierzy, zdefiniujmy samo pojęcie rzędu macierzy.

Definicja *rzędu macierzy*
Rzędem macierzy A nazywa się maksymalną liczbę liniowo niezależnych wektorów (wierszy lub kolumn) tej macierzy i oznacza przez rzA lub r(A).

Twierdzenie
Rząd macierzy jest to najwyższy stopień niezerowego wyznacznika kwadratowej podmacierzy tej macierzy (najwyższy stopień jej nieosobliwej podmacierzy).

Chcąc obliczyć rząd macierzy, należy znaleźć największą podmacierz/macierz, której wyznacznik jest różny od zera, wielkość tej niezerowej macierzy będzie szukaną wartością. Jeśli największą macierzą, której wyznacznik jest różny od zera, jest macierz 3×3, to rząd tej macierzy jest równy 3.

Własności rzędu macierzy

- Rząd macierzy jest równy zero tylko dla macierzy zerowej.
- Rząd macierzy jednostkowej stopnia n jest równy n.
- Rząd macierzy A^T jest równy rzędowi macierzy A.
- Rząd macierzy nie może przekraczać żadnego z wymiarów macierzy.
- Jeśli macierz kwadratowa jest nieosobliwa (tzn. jej wyznacznik jest różny od zera), to jej rząd jest równy stopniowi tej macierzy.
- Jeśli dowolny wiersz / dowolną kolumnę macierzy pomnoży się przez stałą różną od zera i doda do innego wiersza / innej kolumny, to rząd macierzy nie ulegnie zmianie.

- Jeśli zamieni się dwa wiersze / dwie kolumny między sobą miejscami, to rząd macierzy się nie zmieni.
- Jeśli wykreśli się wiersz/kolumnę złożone z samych zer, to rząd nie ulegnie zmianie.

Sposób postępowania przy określaniu rzędu macierzy

Mając przykładowo macierz 4×4 i chcąc obliczyć jej rząd, najpierw należy obliczyć jej wyznacznik, a następnie:

- jeśli wyznacznik macierzy jest różny od zera, to rząd takiej macierzy wynosi 4 (bo wyznacznik macierzy 4×4 jest różny od zera);
- jeśli wyznacznik macierzy jest równy zero, to należy wybierać po kolei wszystkie podmacierze tej macierzy o wymiarach 3×3 (wykreślając którąś kolumnę i któryś wiersz) i liczyć ich wyznacznik, aż któryś będzie różny od zera. Wówczas rząd takiej macierzy wynosi 3 (bo wyznacznik macierzy 3×3 jest różny od zera);
- jeśli wyznacznik każdej wybranej macierzy 3×3 jest równy zero, to należy wybierać po kolei wszystkie podmacierze o wymiarach 2×2 (wykreślając któreś kolumny i wiersze) i liczyć ich wyznacznik, aż któryś będzie różny od zera. Wówczas rząd takiej macierzy wynosi 2 (bo wyznacznik macierzy 2×2 jest różny od zera);
- jeśli wyznacznik każdej wybranej macierzy 2×2 jest równy zero, to należy wybierać po kolei wszystkie podmacierze o wymiarach 1×1 (wykreślając któreś kolumny i wiersze) i liczyć ich wyznacznik, aż któryś będzie różny od zera. Wówczas rząd takiej macierzy wynosi 1 (bo wyznacznik macierzy 1×1 jest różny od zera);
- jeśli wszystkie liczby w macierzy są zerami, to rząd naszej macierzy wynosi zero.

Metody wyznaczania rzędu macierzy

1. **Wyznaczanie rzędu macierzy z definicji**

Przykład 1.7.1

Korzystając z definicji, określić rząd macierzy.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Zgodnie z definicją należy sprawdzić liniową niezależność wektorów

$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

Widać, że dwa wektory a_1, a_2 są liniowo niezależne.

Stąd rząd macierzy A wynosi 2, co można zapisać $\mathrm{rzA} = 2$ lub $\mathrm{r(A)} = 2$.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

Zgodnie z definicją należy sprawdzić liniową niezależność wektorów

$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

Widać, że trzy wektory b_1, b_2, b_3 są liniowo zależne, ponieważ wektor b_3 można przedstawić jako kombinację liniową wektorów b_1 i b_2:

$b_3 = b_1 + b_2$.

Stąd rząd macierzy B nie może wynosić 3.

Ale już np. wektory b_1 i b_2 są liniowo niezależne, dlatego można powiedzieć, że rząd macierzy B wynosi 2, co można zapisać $\mathrm{rzB} = 2$ lub $\mathrm{r(B)} = 2$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zgodnie z definicją należy sprawdzić liniową niezależność wektorów

$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Widać, że trzy wektory c_1, c_2, c_3 są liniowo niezależne.

Stąd rząd macierzy C wynosi 3, co można zapisać $\mathrm{rzC} = 3$ lub $\mathrm{r(C)} = 3$.

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Macierz M jest macierzą prostokątną o wymiarach 3×5, zatem jej rząd może być równy maksymalnie 3 (ponieważ największa podmacierz kwadratowa macierzy M ma wymiar 3×3).

Niech zatem podmacierz $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Zgodnie z definicją należy sprawdzić liniową niezależność wektorów

$m_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad m_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad m_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Widać, że trzy wektory m_1, m_2, m_3 są liniowo zależne, ponieważ wektor m_1 można przedstawić jako kombinację liniową wektorów m_2 i m_3:

$m_1 = m_2 - m_3$

Niech zatem podmacierz $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Zgodnie z definicją należy sprawdzić liniową niezależność wektorów

$m_{1*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad m_{2*} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad m_{3*} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Widać, że trzy wektory m_{1*}, m_{2*}, m_{3*} są liniowo niezależne.

Stąd rząd macierzy M wynosi 3, co można zapisać $\mathrm{rz}M = 3$ lub $r(M) = 3$.

2. Wyznaczanie rzędu macierzy metodą wyznacznikową

Aby określić rzędy podanych macierzy metodą wyznacznikową, należy skorzystać z następującego twierdzenia:

Twierdzenie

Najwyższy stopień nieosobliwej podmacierzy danej macierzy jest równy rzędowi tej macierzy.

Przykład 1.7.2.

Korzystając z metody wyznacznikowej, określić rząd macierzy.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

Na podstawie powyższego twierdzenia $0 \leq r\,(A) \leq \min(m, n)$.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Należy sprawdzić wyznacznik macierzy A

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -10$

Ponieważ $\det A \neq 0$, zatem macierz jest nieosobliwa, więc jej rząd wynosi 2, co można zapisać $\mathrm{rz}A = 2$ lub $r(A) = 2$.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

Należy sprawdzić wyznacznik macierzy B

$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 6 - 6 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 -$

$- 5 \cdot 3 \cdot 2 = 16 + 20 + 54 - 12 - 48 - 30 = 0$

Ponieważ $\det B = 0$, zatem macierz nie jest nieosobliwa, więc jej rząd nie może wynosić 3.

Należy zatem wybrać dowolną podmacierz kwadratową macierzy B i sprawdzić jej wyznacznik

$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\det B_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 2 - 6 = -4$

Ponieważ $\det B_1 \neq 0$, zatem B_1 jest macierzą nieosobliwą, więc rząd macierzy B wynosi 2, co można zapisać $\mathrm{rz}B = 2$ lub $r(B) = 2$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Należy sprawdzić wyznacznik macierzy C

$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot 3 -$

$- 0 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1 + 0 - 4 + 3 - 2 = -2$

Ponieważ $\det C \neq 0$, zatem macierz jest nieosobliwa, więc jej rząd wynosi 3, co można zapisać $\mathrm{rz}C = 3$ lub $r(C) = 3$.

d) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Macierz M jest macierzą prostokątną o wymiarach 3×5, zatem jej rząd może być równy maksymalnie 3 (ponieważ największa podmacierz kwadratowa macierzy M ma wymiar 3×3).

Niech zatem podmacierz $\mathrm{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Teraz należy sprawdzić wyznacznik macierzy D_1:

$$\det \mathrm{M}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} == 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) -$$

$$-(-1) \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 1 + 0 - 2 + 1 - 0 - 0 = 0$$

Ponieważ $\det \mathrm{M}_1 = 0$, zatem macierz nie jest nieosobliwa, więc na tej podstawie jej rząd nie może wynosić 3.

Należy zatem wybrać inną podmacierz kwadratową macierzy M wymiaru 3×3 i sprawdzić jej wyznacznik.

Niech zatem podmacierz $\mathrm{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Teraz należy sprawdzić wyznacznik macierzy D_2:

$$\det \mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 -$$

$$-2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 0 + 2 + 2 - 0 - 0 - 0 = 4$$

Ponieważ $\det \mathrm{M}_2 \neq 0$, zatem macierz jest nieosobliwa, więc rząd macierzy M wynosi 3, co można zapisać $\mathrm{rzM} = 3$ lub $\mathrm{r(M)} = 3$.

3. Wyznaczanie rzędu macierzy za pomocą ciągu operacji elementarnych

Przykład 1.7.3.

Korzystając z metody ciągu operacji elementarnych, określić rząd macierzy.

a) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

Aby określić rzędy podanych macierzy metodą ciągu operacji elementarnych, należy te macierze sprowadzić do postaci bazowej, a następnie określić rząd macierzy na podstawie następującego twierdzenia:

> **Twierdzenie**
>
> Stopień podmacierzy I_k macierzy danej w postaci bazowej jest równy rzędowi tej macierzy.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2 - 3w_1}$$

$$\xleftrightarrow{w_2 - 3w_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{10} w_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 + 3\,w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak widać, stopień podmacierzy I_k macierzy A danej w postaci bazowej jest równy 2, zatem rząd macierzy A jest równy 2, co można zapisać $\text{rz}A = 2$ lub $r(A) = 2$.

b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 - 2\,w_1]{w_2 - 2\,w_1}$$

$$\xleftrightarrow[w_3 - 2\,w_1]{w_2 - 2\,w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{4} w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 - 5\,w_2]{w_1 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jak widać, stopień podmacierzy I_k macierzy B danej w postaci bazowej jest równy 2, zatem rząd macierzy B jest równy 2, co można zapisać $\text{rz}B = 2$ lub $r(B) = 2$.

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 - 3\,w_1]{w_2 - 2\,w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{2}w_3}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{2}w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_2 - 2\,w_3]{w_1 + w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jak widać, stopień podmacierzy I_k macierzy C danej w postaci bazowej jest równy 3, zatem rząd macierzy C jest równy 3, co można zapisać $rzC = 3$ lub $r(C) = 3$.

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 - w_1]{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_3 - 2w_2}$$

$$\xleftrightarrow{w_3 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{k_3 \leftrightarrow k_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{5}w_3}$$

$$\xleftrightarrow{\frac{1}{5}w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_2 + w_3]{w_1 - w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jak widać, stopień podmacierzy I_k macierzy M danej w postaci bazowej jest równy 3, zatem rząd macierzy M jest równy 3, co można zapisać $rzM = 3$ lub $r(M) = 3$.

1.8. Macierz odwrotna

Definicja *macierzy odwrotnej*

Macierzą odwrotną do kwadratowej macierzy A nazywa się taką macierz A^{-1}, że

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad (1.11)$$

gdzie:

I – macierz jednostkowa (tego samego wymiaru co macierz A).

Rozważania dotyczące wyznaczania macierzy odwrotnej do danej macierzy A należy rozpocząć od tego, że aby istniała macierz odwrotna do macierzy A, to muszą być spełnione dwa warunki:

- A musi być macierzą kwadratową,
- A musi być macierzą nieosobliwą (tzn. $\det A \neq 0$).

Macierz odwrotną do A oznacza się A^{-1}.

Twierdzenie
Jeżeli A^{-1} istnieje, to o macierzy A mówi się, że jest odwracalna.

Twierdzenie
Jeżeli macierz A jest odwracalna, to istnieje do niej tylko jedna macierz odwrotna A^{-1}.

Własności macierzy odwrotnej

- $I^{-1} = I$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(c \cdot A)^{-1} = c^{-1} \cdot A^{-1}$, gdzie c – stała
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$

Metody wyznaczania macierzy odwrotnej

1. Wyznaczanie macierzy odwrotnej z definicji

Przykład 1.8.1.

Wyznaczyć macierze odwrotne do danych macierzy (o ile istnieją) metodą z definicji.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & 0 & 2 & 18 \\ 3 & 7 & 3 & 91 \\ 4 & 12 & 4 & 13 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) A jest macierzą kwadratową,

2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 12 \cdot 6 = -3 - 72 = -75.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem A^{-1} istnieje.

Niech $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Z definicji macierzy odwrotnej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{cases} a + 12c = 1 \\ 6a - 3c = 0 \,|\cdot 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 12d = 0 \\ 6b - 3d = 1 \,|\cdot 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 12c = 1 \\ 24a - 12c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 12d = 0 \\ 24b - 12d = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25a = 1 \\ c = \frac{1-a}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} 25b = 4 \\ d = -\frac{b}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{25} \\ c = \frac{2}{25} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{4}{25} \\ d = -\frac{1}{75} \end{cases}$$

Zatem

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{75} \end{bmatrix}$$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) B jest macierzą kwadratową,

2) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 1 -$
$- 0 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = 27 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 27.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem B^{-1} istnieje.

Niech $B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Z definicji macierzy odwrotnej:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{cases} 3a + 0d + 0g = 1 \\ 2a + 3d + 0g = 0 \\ 1a + 2d + 3g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3b + 0e + 0h = 0 \\ 2b + 3e + 0h = 1 \\ 1b + 2e + 3h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3c + 0f + 0i = 0 \\ 2c + 3f + 0i = 0 \\ 1c + 2f + 3i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 2a + 3d = 0 \\ a + 2d + 3g = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ 2b + 3e = 1 \\ b + 2e + 3h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ 2c + 3f = 0 \\ c + 2f + 3i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ d = -\frac{2}{9} \\ g = \frac{1}{27} \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0 \\ e = \frac{1}{3} \\ h = -\frac{2}{27} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ f = 0 \\ i = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Zatem

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{27} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) C jest macierzą kwadratową,
2) $\det C = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 -$
$- 3 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 4 = 0 + 3 + 0 - 4 - 0 - 4 = -5.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem C^{-1} istnieje.

Niech $C^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ oraz $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Z definicji macierzy odwrotnej:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{cases}4a+3d+2g=1\\0a+2d+1g=0\\1a+1d+0g=0\end{cases}\quad\begin{cases}4b+3e+2h=0\\0b+2e+1h=1\\1b+1e+0h=0\end{cases}\quad\begin{cases}4c+3f+2i=0\\0c+2f+1i=0\\1c+1f+0i=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}4a-3a+2g=1\\-2a+g=0\\d=-a\end{cases}\quad\begin{cases}4b-3b+2(1+2b)=0\\h=1+2b\\e=-b\end{cases}\quad\begin{cases}4c+3(1-c)-4(1-c)=0\\i=-2f\\f=1-c\end{cases}$$

$$\begin{cases}5a=1\\g=2a\\d=-a\end{cases}\quad\begin{cases}5b=-2\\h=1+2b\\e=-b\end{cases}\quad\begin{cases}5c=1\\i=-2f\\f=\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\frac{1}{5}\\g=\frac{2}{5}\\d=-\frac{1}{5}\end{cases}\quad\begin{cases}b=-\frac{2}{5}\\h=\frac{1}{5}\\e=\frac{2}{5}\end{cases}\quad\begin{cases}c=\frac{1}{5}\\i=-\frac{8}{5}\\f=\frac{4}{5}\end{cases}$$

Zatem

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

d) $M=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 12\\ 2 & 0 & 2 & 18\\ 3 & 7 & 3 & 91\\ 4 & 12 & 4 & 13\end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) M jest macierzą kwadratową,
2) $\det M=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 12\\ 2 & 0 & 2 & 18\\ 3 & 7 & 3 & 91\\ 4 & 12 & 4 & 13\end{vmatrix}=0$, ponieważ 1 i 3 kolumna są takie same, więc wyznacznik wynosi 0, czyli macierz odwrotna do macierzy M nie istnieje.

2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą dopełnień algebraicznych

Definicja ***dopełnienia algebraicznego elementu macierzy***

Niech A będzie macierzą stopnia n, gdzie $n \geq 2n \geq 2$. Niech A_{ij} będzie podmacierzą powstałą z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Liczbę $D_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot \det A_{ij}$ nazywa się dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A.

Aby wyznaczyć A^{-1} metodą dopełnień algebraicznych, należy skorzystać ze wzoru:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D \tag{1.12}$$

gdzie:

A^{-1} – macierz odwrotna do macierzy A,

A^D – transponowana macierz dopełnień algebraicznych ($A^D = D^T$), przy czym macierz D dobiera się w taki sposób, aby jej wymiar był zgodny z wymiarem macierzy A.

Przykład 1.8.2.

Wyznaczyć macierze odwrotne do danych macierzy (o ile istnieją) metodą dopełnień algebraicznych.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej do danej macierzy:

1) A jest macierzą kwadratową,
2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 12 \cdot 6 = -3 - 72 = -75.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem A^{-1} istnieje.

Aby skorzystać ze wzoru (1.8), należy najpierw wyznaczyć macierz $A^D = D^T$, gdzie $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$

$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |-3| = -3$

$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |6| = -6$

$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |12| = -12$

$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |1| = 1$

Stąd $D = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}$ $D^T = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ stąd $A^D = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$

Zatem $A^{-1} = \frac{1}{-75} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{75} \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) B jest macierzą kwadratową,

2) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 1 -$
$- 0 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = 27 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 27.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem B^{-1} istnieje.

Aby skorzystać ze wzoru (1.8), należy najpierw wyznaczyć macierz $B^D = D^T$,

gdzie $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$

$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6$

$D_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6$

$D_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

Stąd $D = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $D^T = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 1 & -6 & 9 \end{bmatrix}$ stąd $B^D = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 1 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

Zatem $B^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 0 \\ 1 & -6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) C jest macierzą kwadratową,
2) $\det C = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 -$
$-3 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 4 = 0 + 3 + 0 - 4 - 0 - 4 = -5.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem C^{-1} istnieje.

Aby skorzystać ze wzoru (1.8), należy najpierw wyznaczyć macierz $C^D = D^T$,

gdzie $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$

$D_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$D_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$D_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$D_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$

$D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

Stąd $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$ $D^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ stąd $C^D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

Zatem $C^{-1} = -\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & -4\\ -2 & -1 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5}\end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 4 & 3\end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) M jest macierzą kwadratową,

2) $\det M = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 4 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix} +$

$+ (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix} +$

$+ 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix} = 1\cdot(0+4+12-12-6-0) +$

$+(-1)\cdot(-1)\cdot(12+8+36-24-18-8) +$

$+ 1\cdot(6+0+18-12-0-4) - 2\cdot(8+0+12-8-0-8) =$

$= -2+6+8-8 = 4.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem M^{-1} istnieje.

Aby skorzystać ze wzoru (1.8), należy najpierw wyznaczyć macierz $M^D = D^T$,

gdzie $D = \begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34}\\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44}\end{bmatrix}$

$D_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot(0+4+12-12-6-0) = -2$

$D_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix} = (-1)\cdot(12+8+36-24-18-8) = -6$

$D_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix} = 1\cdot(6+0+18-12-0-4) = 8$

$D_{14} = (-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{vmatrix} = (-1)\cdot(8+0+12-8-0-8) = -4$

$$D_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6 + 2 + 8 - 8 - 3 + 4) = 3$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (6 + 4 + 24 - 16 - 9 - 4) = 5$$

$$D_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (3 - 4 + 12 - 8 + 9 - 2) = -10$$

$$D_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 - 8 + 6 - 4 + 12 - 4) = 6$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-6 + 6 + 0 - 8 - 0 + 12) = 4$$

$$D_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (6 + 12 + 16 - 16 - 6 - 12) = 0$$

$$D_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 12 + 8 - 0 + 6 - 6) = -4$$

$$D_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 - 8 + 4 - 0 + 8 - 4) = 0$$

$$D_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2 + 3 + 0 - 4 - 0 + 6) = -3$$

$$D_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 + 9 + 8 - 12 - 2 - 6) = -1$$

$$D_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (0 - 9 + 4 - 0 + 2 - 3) = 6$$

$$D_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 - 6 + 2 - 0 + 4 - 2) = -2$$

Stąd $D = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 8 & -4 \\ 3 & 5 & -10 & 6 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, $D^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & -3 \\ -6 & 5 & 0 & -1 \\ 8 & -10 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

stąd $M^D = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & -3 \\ -6 & 5 & 0 & -1 \\ 8 & -10 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Zatem $M^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 & -3 \\ -6 & 5 & 0 & -1 \\ 8 & -10 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą ciągu operacji elementarnych (metoda Gaussa–Jordana)

Metoda Gaussa–Jordana wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy A polega na tym, że do danej macierzy należy dopisać po prawej stronie macierz jednostkową tego samego wymiaru i za pomocą ciągu operacji elementarnych (wykonywanych na całych wierszach) doprowadzić macierz A do postaci macierzy jednostkowej, a macierz, która powstanie po prawej stronie, będzie szukaną macierzą A^{-1}.
Uwaga: W metodzie Gaussa–Jordana można wykorzystywać tylko operacje elementarne na wierszach. Nie można zamieniać miejscami kolumn.

Przykład 1.8.3.

Wyznaczyć macierze odwrotne do danych macierzy (o ile istnieją) metodą Gaussa–Jordana (metodą ciągu operacji elementarnych).

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Rozwiązanie

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej do danej macierzy:

1) A jest macierzą kwadratową,

2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - 12 \cdot 6 = -3 - 72 = -75.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem A^{-1} istnieje.
W kolejnym kroku tworzy się macierz rozszerzoną i sprowadza się ją do postaci bazowej. Fakt, że wyznacznik macierzy $A \neq 0$ (czyli to, że macierz A jest nieosobliwa), gwarantuje, że uda się ją sprowadzić do postaci macierzy jednostkowej.

$$\begin{bmatrix} 1 & 12 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2-6\,w_1} \begin{bmatrix} 1 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & -75 & -6 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{75}w_2}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{75}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{25} & -\frac{1}{75} \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1-12\,w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{21}{25} & \frac{4}{25} \\ 0 & 1 & \frac{2}{25} & -\frac{1}{75} \end{bmatrix}$$

Zatem $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25} & \frac{4}{25} \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{75} \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) B jest macierzą kwadratową,
2) $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot 1 -$
$-0 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \cdot 3 = 27 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 27.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem B^{-1} istnieje.
W kolejnym kroku tworzy się macierz rozszerzoną i sprowadza się ją do postaci bazowej. Fakt, że wyznacznik macierzy $B \neq 0$ (czyli to, że macierz B jest nieosobliwa), gwarantuje, że uda się ją sprowadzić do postaci macierzy jednostkowej.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3-3\,w_1]{w_2-2\,w_1}$$

$$\xleftrightarrow[w_3-3\,w_1]{w_2-2\,w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -6 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -9 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(-1)\cdot w_2}$$

$$\xleftrightarrow{(-1)\cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & -9 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3+6w_2]{w_1-2\,w_2}$$

$$\xleftrightarrow[w_3+6w_2]{w_1-2w_2}\begin{bmatrix}1&0&-9&0&2&-3\\0&1&6&0&-1&2\\0&0&27&1&-6&9\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\frac{1}{27}\cdot w_3}$$

$$\xleftrightarrow{\frac{1}{27}\cdot w_3}\begin{bmatrix}1&0&-9&0&2&-3\\0&1&6&0&-1&2\\0&0&1&\frac{1}{27}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\xleftrightarrow[w_2-6w_3]{w_1+9w_3}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0&-\frac{2}{9}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&\frac{1}{27}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Zatem $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\-\frac{2}{9}&\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{27}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

c) $C=\begin{bmatrix}4&3&2\\0&2&1\\1&1&0\end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) C jest macierzą kwadratową,

2) $\det C=\begin{vmatrix}4&3&2\\0&2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=4\cdot2\cdot0+3\cdot1\cdot1+0\cdot1\cdot2-2\cdot2\cdot1-$
$-3\cdot0\cdot0-1\cdot1\cdot4=0+3+0-4-0-4=-5.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem C^{-1} istnieje.

W kolejnym kroku tworzy się macierz rozszerzoną i sprowadza się ją do postaci bazowej. Fakt, że wyznacznik macierzy $C\neq0$ (czyli to, że macierz C jest nieosobliwa), gwarantuje, że uda się ją sprowadzić do postaci macierzy jednostkowej.

$$\begin{bmatrix}4&3&2&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{bmatrix}\xleftrightarrow{w_1\leftrightarrow w_3}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\0&2&1&0&1&0\\4&3&2&1&0&0\end{bmatrix}\xleftrightarrow{w_3-4w_1}$$

$$\xleftrightarrow{w_3-4w_1}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\0&2&1&0&1&0\\0&-1&2&1&0&-4\end{bmatrix}\xleftrightarrow{w_2+w_3}\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&1\\0&1&3&1&1&-4\\0&-1&2&1&0&-4\end{bmatrix}\xleftrightarrow[w_3+w_2]{w_1-w_2}$$

$$\xleftrightarrow[w_3+w_2]{w_1-w_2}\begin{bmatrix}1&0&-3&-1&-1&5\\0&1&3&1&1&-4\\0&0&5&2&1&-8\end{bmatrix}\xleftrightarrow{\frac{1}{5}w_3}$$

$$\xleftrightarrow{\frac{1}{5}w_3}\begin{bmatrix}1&0&-3&-1&-1&5\\0&1&3&1&1&-4\\0&0&1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{8}{5}\end{bmatrix}\xleftrightarrow[w_2-3w_3]{w_1+3w_3}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{1}{5}\\0&1&0&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&1&\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{8}{5}\end{bmatrix}$$

Zatem $C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$

d) $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Najpierw należy sprawdzić warunki istnienia macierzy odwrotnej:

1) M jest macierzą kwadratową,

2) $\det M = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$

$+ (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} +$

$+ 2 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (0 + 4 + 12 - 12 - 6 - 0) +$

$+ (-1) \cdot (-1) \cdot (12 + 8 + 36 - 24 - 18 - 8) +$

$+ 1 \cdot (6 + 0 + 18 - 12 - 0 - 4) - 2 \cdot (8 + 0 + 12 - 8 - 0 - 8) =$

$= -2 + 6 + 8 - 8 = 4.$

Powyższe warunki są spełnione, zatem M^{-1} istnieje.

W kolejnym kroku tworzy się macierz rozszerzoną i sprowadza się ją do postaci bazowej. Fakt, że wyznacznik macierzy $M \neq 0$ (czyli to, że macierz M jest nieosobliwa), gwarantuje, że uda się ją sprowadzić do postaci macierzy jednostkowej.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - 3w_1 \\ w_4 - 4w_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{2}w_2}$$

$$\xleftrightarrow{\frac{1}{2}w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{w_1 + w_2 \\ w_3 - 4w_2 \\ w_4 - 6w_2}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{w_1 + w_2 \\ w_3 - 4w_2 \\ w_4 - 6w_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(-1) \cdot w_3}$$

$$\xleftrightarrow{(-1)\cdot w_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]\xleftrightarrow{w_1-w_3}$$

$$\xleftrightarrow{w_1-w_3}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]\xleftrightarrow{-\frac{1}{2}w_4}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{2}w_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]\xleftrightarrow[w_3-3w_4]{w_1+\frac{3}{2}w_4,\ w_2+\frac{1}{2}w_4}$$

$$\xleftrightarrow[w_3-3w_4]{w_1+\frac{3}{2}w_4,\ w_2+\frac{1}{2}w_4}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Zatem $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2. UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału drugiego można bez trudu:

- **podać definicję układu równań liniowych i wyróżnić typy układów równań liniowych ze względu na liczbę rozwiązań,**
- **rozwiązać układy równań liniowych niejednorodnych,**
- **rozwiązać układy równań liniowych jednorodnych,**
- **rozwiązać układy n równań z n niewiadomymi, stosując metodę macierzy odwrotnej, wzory Cramera oraz metodę ciągu operacji elementarnych,**
- **rozwiązać układy n równań z m niewiadomymi, stosując metodę ciągu operacji elementarnych,**
- **wyznaczać rozwiązanie ogólne i rozwiązania bazowe układu równań liniowych.**

2.1. Pojęcie układu równań liniowych

Układ równań liniowych to koniunkcja przynajmniej dwóch równań. Układy równań mogą się jednak składać z większej liczby równań i większej liczby niewiadomych. Można zatem powiedzieć, że układ równań liniowych to układ równań, w którym występuje dowolna liczba równań liniowych i jednocześnie nie występują w nim żadne równania wyższego rzędu.

Definicja *układu równań liniowych*
Układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

nazywa się układem m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_n$. Liczby rzeczywiste a_{ij} oraz b_i nazywa się współczynnikami układu.

Układ równań może mieć:

- tyle samo niewiadomych co równań ($n = m$),
- więcej niewiadomych niż równań ($n > m$),
- mniej niewiadomych niż równań ($n < m$).

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

nazywa się macierzą współczynników przy niewiadomych lub macierzą podstawową układu równań liniowych.

W przypadku, gdy liczba niewiadomych jest taka sama jak liczba równań, A jest macierzą kwadratową. W pozostałych przypadkach są to prostokątne macierze współczynników. Ciąg wyrazów wolnych b_1, b_2, ..., b_m nazywa się kolumną wyrazów wolnych układu równań lub wektorem wyrazów wolnych i można go zapisać jako:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Wektor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

nazywa się wektorem niewiadomych.

W świetle powyższego układ równań liniowych (2.1) można zapisać jako równanie macierzowe:

$$A \cdot X = B \tag{2.3}$$

Przykład 2.1.1.

Podane układy równań liniowych zapisać w postaci równań macierzowych.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - \ 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + \ 2x_2 - x_3 = \ 2 \\ -x_1 \qquad\quad - 2x_3 = \ 4 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} 2x_1 + \ 3x_2 = 5 \\ 3x_1 - \ 2x_2 = \ 1 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników przy niewiadomych

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

oraz wektor wyrazów wolnych

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

i wektor niewiadomych

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Stąd układ równań przyjmuje postać równania macierzowego

$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} 4x_1 - \ 6x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + \ 2x_2 + x_3 = \ 6 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników przy niewiadomych

$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

oraz wektor wyrazów wolnych

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

i wektor niewiadomych

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Stąd układ równań przyjmuje postać równania macierzowego

$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 = 4 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników przy niewiadomych

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

oraz wektor wyrazów wolnych

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i wektor niewiadomych

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Stąd układ równań przyjmuje postać równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

d) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 \qquad\quad - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Należy utworzyć macierz współczynników przy niewiadomych

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

oraz wektor wyrazów wolnych

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i wektor niewiadomych

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Stąd układ równań przyjmuje postać równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Definicja *rozwiązania układu równań liniowych*

Rozwiązaniem układu nazywa się zbiór wszystkich takich wektorów $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$, które po podstawieniu w miejsce x_i do powyższych równań dają równości prawdziwe.

Typy układów równań liniowych ze względu na liczbę rozwiązań:

1. Układ równań liniowych, który ma dokładnie jedno rozwiązanie, nazywa się *oznaczonym*.
2. Układ równań liniowych, który ma co najmniej dwa rozwiązania, nazywa się *nieoznaczonym*.
3. Każdy nieoznaczony układ równań liniowych ma nieskończenie wiele rozwiązań (to znaczy, że niemożliwy jest przypadek, gdy występują np. dokładnie dwa rozwiązania).
4. Układ równań liniowych, który nie ma żadnego rozwiązania, nazywa się *sprzecznym*.

2.2. Układy równań liniowych niejednorodnych

Klasyfikując układy równań liniowych, można wyróżnić układy niejednorodne.

Definicja *układu równań liniowych niejednorodnych*
Układ równań postaci (2.1) o m równaniach i n niewiadomych, gdzie wyrazy wolne $b_1, b_2, \dots, b_m$ są różne od zera, nazywa się układem niejednorodnym lub układem równań niejednorodnych.

Przykład 2.2.1.

Podać przykłady układów równań niejednorodnych.

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - 4x_2 = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

Powyższe przykłady są układami równań niejednorodnych, ponieważ w każdym z nich wektor wyrazów wolnych jest wektorem niezerowym.

Warunki istnienia rozwiązań układu równań liniowych niejednorodnych
Układ równań liniowych niejednorodnych postaci (2.1) może być układem oznaczonym (gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie), nieoznaczonym (gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań) bądź sprzecznym (gdy nie ma rozwiązania).

Aby określić, czy dany układ niejednorodny ma rozwiązanie, można zastosować twierdzenie Kroneckera–Capellego. W tym celu konieczne jest wprowadzenie pojęcia macierzy uzupełnionej/rozszerzonej.

Niech U będzie macierzą o wymiarze $m \times (n+1)$ powstałą z macierzy A wymiaru $m \times n$ przez dołączenie do macierzy A dodatkowej kolumny powstałej z wektora wyrazów wolnych B, tj.

$$\begin{cases} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} \begin{matrix} x_1 + \cdots + \\ x_1 + \cdots + \\ x_1 + \cdots + \\ \\ x_1 + \cdots + \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \begin{matrix} x_n = \\ x_n = \\ x_n = \\ \\ x_n = \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}} \end{cases}$$

$$U = \left[\boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Twierdzenie *Kroneckera–Capellego*
Układ równań liniowych:

- ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A współczynników przy niewiadomych tego układu jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej/rozszerzonej U, czyli $r(A) = r(U) = n$. Taki układ nazywa się układem oznaczonym;
- ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów w przypadku, gdy $r(A) = r(U) < n$. Taki układ nazywa się układem nieoznaczonym;
- nie ma rozwiązań, jeżeli rząd macierzy A współczynników przy niewiadomych układu równań nie jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej U tego układu, tzn. $r(A) \neq r(U)$. Taki układ nazywa się układem sprzecznym.

Przykład 2.2.2.

Korzystając z twierdzenia Kroneckera–Capellego, określić liczbę rozwiązań układu równań liniowych niejednorodnych.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą kwadratową o wymiarach 2×2, zatem jej rząd może być najwyżej równy 2. Wystarczy obliczyć jej wyznacznik.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3, \quad \det A \neq 0, \text{ zatem } r(A) = 2$$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Należy określić rząd macierzy U

$r(U) \leq \min(2, 3) = 2$

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) = 2$, zatem układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest to więc układ oznaczony.

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą prostokątną, zatem jej rząd może być najwyżej równy mniejszemu z jej wymiarów. Wystarczy zatem wybrać podmacierz o wymiarach 2×2 i obliczyć jej wyznacznik.

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3, \quad \det A_1 \neq 0, \text{ zatem } r(A) = 2$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Należy określić rząd macierzy U

$r(U) \leq \min(2, 4) = 2$

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) = 2$, zatem układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest to więc układ oznaczony.

c) $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 = 3 \\ \ x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 = 3 \end{cases}$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą prostokątną, zatem jej rząd może być najwyżej równy mniejszemu z jej wymiarów. Wystarczy zatem wybrać podmacierz o wymiarach 2×2 i obliczyć jej wyznacznik.

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3, \quad \det A_1 \neq 0, \quad \text{zatem } r(A) = 2$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

Należy określić rząd macierzy U.

W tym przypadku macierz rozszerzona U jest macierzą kwadratową o wymiarach 3×3, zatem jej rząd może być równy 3. Należy obliczyć jej wyznacznik

$\det U = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 12 + (-15) + (-15) - 18 + 3 + 50 = 17$

zatem $r(U) = 3$.

Stąd wniosek: $r(U) \neq r(A)$, zatem układ nie ma rozwiązania. Jest to więc układ sprzeczny.

d) $\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ \ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -6 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą kwadratową o wymiarach 3×3, zatem jej rząd może być najwyżej równy 3. Wystarczy obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ zatem } \ r(A) < 3$$

Można wybrać podmacierz o wymiarach 2×2 i obliczyć jej wyznacznik. Można również określić rząd macierzy A inną metodą, np. ciągu operacji elementarnych.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_3-2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{3}w_2}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{3}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1-2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ zatem } \ r(A) = 2$$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

Należy określić rząd macierzy U.

W tym przypadku macierz rozszerzona U jest macierzą prostokątną o wymiarach 3×4, zatem jej rząd może być najwyżej równy mniejszemu z jej wymiarów. Można zatem wybrać podmacierz o wymiarach 3×3 i obliczyć jej wyznacznik bądź skorzystać z metody ciągu operacji elementarnych.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 4 & 12 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_3-2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2-2w_1}$$

$$\xleftrightarrow{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{3}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1-2w_2}$$

$$\xleftrightarrow{w_1-2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ \text{ zatem } \ r(U) = 2$$

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) = 2 < 3$, zatem układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru. Jest to więc układ nieoznaczony.

2.3. Układy równań liniowych jednorodnych

Innym rodzajem układów równań liniowych są układy jednorodne.

Definicja *układu równań liniowych jednorodnych*
Układ równań postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

o m równaniach i n niewiadomych, gdzie wyrazy wolne $b_1, b_2, \dots, b_m$ są równe zero, nazywa się układem jednorodnym lub układem równań jednorodnych.

Przykład 2.3.1.

Podać przykłady układów równań jednorodnych.

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - \quad x_2 = 0 \\ \quad x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Powyższe przykłady są układami równań jednorodnych, ponieważ w każdym z nich wektor wyrazów wolnych jest wektorem zerowym.

Warunki istnienia rozwiązań układu równań liniowych jednorodnych
Układ równań liniowych jednorodnych:

- ma zawsze rozwiązanie zerowe $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, które nazywa się rozwiązaniem trywialnym. Jeżeli wiadomo, że jednorodny układ równań liniowych ma jedno rozwiązanie, a jest tak, kiedy $r(U) = r(A) = n$, to wiadomo także, że jest to na pewno rozwiązanie zerowe. Taki układ nazywa się układem oznaczonym;

- ma inne rozwiązania oprócz rozwiązania zerowego, gdy rząd macierzy A współczynników przy niewiadomych tego układu jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej U i jest mniejszy od liczby niewiadomych ($r(U) = r(A) < n$). Taki układ nazywa się układem nieoznaczonym;
- układ równań liniowych jednorodnych nigdy nie jest układem sprzecznym, ponieważ zawsze ma przynajmniej jedno rozwiązanie (rozwiązanie zerowe).

Przykład 2.3.2.

Określić liczbę rozwiązań układu równań liniowych jednorodnych.

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą kwadratową o wymiarach 2×2, zatem jej rząd może być najwyżej równy 2. Wystarczy obliczyć jej wyznacznik

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-4) = 13, \quad$ zatem $r(A) = 2$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Należy określić rząd macierzy U

$r(U) \le \min(2,3) = 2$

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) = 2$, zatem układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest to więc układ oznaczony.

b) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2\,x_3 \ = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + \ x_3 \ = 0 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą prostokątną, zatem jej rząd może być najwyżej równy mniejszemu z jej wymiarów. Wystarczy zatem wybrać podmacierz o wymiarach 2×2 i obliczyć jej wyznacznik.

$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 - 2 = -17,\ \det A_1 \neq 0$ zatem $r(A) = 2$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Należy określić rząd macierzy U

$r(U) \leq \min(2, 4) = 2$

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) = 2$, natomiast $n = 3$. Rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy U, ale mniejszy od liczby niewiadomych. Ponadto liczba równań jest mniejsza od liczby niewiadomych, zatem układ ma więcej niż jedno rozwiązanie. Taki układ jest układem nieoznaczonym.

c) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą kwadratową o wymiarach 3×3, zatem jej rząd może być równy 3. Wystarczy obliczyć jej wyznacznik

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 4 + 6 - 6 + 9 + 4 = 26$

$\det A \neq 0$ zatem $r(A) = 3$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Należy określić rząd macierzy U

W tym przypadku macierz rozszerzona U jest macierzą prostokątną o wymiarach 3×4, zatem jej rząd może być najwyżej równy mniejszemu z wymiarów tej macierzy: $r(U) \leq \min(3, 4) = 3$.

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) = n = 3$, zatem układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Jest nim rozwiązanie zerowe. Taki układ jest układem oznaczonym.

d) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Następnie określa się rząd macierzy A. W tym przypadku macierz współczynników jest macierzą kwadratową o wymiarach 3×4, zatem jej rząd być najwyżej równy mniejszemu z jej wymiarów. Wystarczy zatem wybrać podmacierz o wymiarach 3×3 i obliczyć jej wyznacznik.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 15 + 2 + 12 - 12 + 2 + 15 = 34$$

$\det A_1 \neq 0$, zatem $r(A) = 3$

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Należy określić rząd macierzy U

W tym przypadku macierz rozszerzona U jest macierzą prostokątną o wymiarach 3×5, zatem jej rząd może być najwyżej równy mniejszemu z wymiarów tej macierzy: $r(U) \leq \min(3, 5) = 3$.

Stąd wniosek: $r(U) = r(A) < n = 4$. Rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy U, ale mniejszy od liczby niewiadomych. Ponadto liczba równań jest mniejsza od liczby niewiadomych, zatem układ ma więcej niż jedno rozwiązanie. Taki układ jest układem nieoznaczonym.

2.4. Układ równań Cramera

Układ równań liniowych nazywa się układem Cramera, jeśli macierz tego układu jest nieosobliwa (co w szczególności oznacza, że jest kwadratowa, czyli że jest tyle samo równań co niewiadomych oraz że jej wyznacznik jest różny od zera). Znaczenie układów Cramera wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie *Cramera*
W przypadku, gdy liczba równań układu (2.1) jest równa liczbie niewiadomych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{2.6}$$

macierz układu (2.2) jest macierzą kwadratową. Jeżeli dodatkowo jest to macierz nieosobliwa (czyli kwadratowa o wyznaczniku różnym od zera), wówczas układ ten nazywa się układem Cramera. Przedstawiając ten układ w postaci równania macierzowego (2.3), można wyznaczyć jego rozwiązanie, wykorzystując odwrotność macierzy układu.

1. Rozwiązanie układu równań metodą macierzy odwrotnej
Układy Cramera można rozwiązywać kilkoma metodami (znaną ze szkoły metodą podstawiania czy metodą przeciwnych współczynników), ale też wykorzystując rachunek macierzowy – metodą macierzy odwrotnej.

Twierdzenie *o liczbie rozwiązań równania macierzowego*
Jeżeli macierz współczynników A jest macierzą kwadratową i nieosobliwą, to równanie (2.3) ma dokładnie jedno rozwiązanie; rozwiązaniem tym jest $X = A^{-1} \cdot B$.

Dowód
Dany układ równań należy zapisać w postaci równania macierzowego (2.3) $A \cdot X = B$. Mnożąc obie strony tego równania przez macierz A^{-1} z lewej strony (pamiętając, że mnożenie macierzy nie jest działaniem przemiennym), otrzymuje się $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Wiadomo, że $A^{-1} \cdot A = I$, zatem $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Stąd $X = A^{-1} \cdot B$.

Macierz A^{-1} można wyznaczyć jedną z metod: operacji elementarnych, z definicji bądź dopełnień algebraicznych.

Schemat rozwiązywania układu równań metodą macierzy odwrotnej

- Dany układ równań należy zapisać w postaci równania macierzowego (2.3) i wskazać macierz współczynników A (2.2).
- Obliczyć wyznacznik macierzy współczynników $\det A$. Jeśli $\det A \neq 0$, to układ jest układem Cramera.
- Wyznaczyć A^{-1} dowolną metodą (np. operacji elementarnych, z definicji bądź dopełnień algebraicznych).
- Wymnożyć uzyskaną macierz A^{-1} przez wektor wyrazów wolnych B.
- Uzyskany wektor X jest rozwiązaniem układu równań.

Przykład 2.4.1.

Rozwiązać układ równań metodą macierzy odwrotnej.

a) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 2 \\ 4x_1 - 2x_2 = 12 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-28) = 24$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera, co oznacza, że istnieje macierz A^{-1}.

Macierz A^{-1} można wyznaczyć np. metodą ciągu operacji elementarnych.

$$\begin{bmatrix}2 & -7 & 1 & 0\\4 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2-2w_1} \begin{bmatrix}2 & -7 & 1 & 0\\0 & 12 & -2 & 1\end{bmatrix} \xleftrightarrow{12w_1+7w_2}$$

$$\xleftrightarrow{12w_1+7w_2} \begin{bmatrix}24 & 0 & -2 & 7\\0 & 12 & -2 & 1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[\frac{1}{12}w_2]{\frac{1}{24}w_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{7}{24}\\0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12}\end{bmatrix}$$

Macierzą odwrotną jest macierz $A^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{12} & \frac{7}{24}\\-\frac{1}{6} & \frac{1}{12}\end{bmatrix}$

W kolejnym kroku uzyskaną macierz A^{-1} należy wymnożyć przez wektor wyrazów wolnych $B = \begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix}$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix}-\frac{1}{12} & \frac{7}{24}\\-\frac{1}{6} & \frac{1}{12}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{12}\cdot 2 + \frac{7}{24}\cdot 12\\-\frac{1}{6}\cdot 2 + \frac{1}{12}\cdot 12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Uzyskany wektor $X = \begin{bmatrix}\frac{10}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$ jest rozwiązaniem układu równań.

b) $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 = 1\\x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\\x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2\end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} = 8 + 3 + 3 - 2 - 9 - 4 = -1$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera, co oznacza, że istnieje macierz A^{-1}. Macierz A^{-1} można wyznaczyć np. metodą ciągu operacji elementarnych

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3-w_1]{w_2-w_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\0 & 2 & 3 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3-2w_2]{w_1-w_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} \xleftrightarrow{-w_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[w_2-2w_3]{w_1+w_3} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2\\0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Macierzą odwrotną jest macierz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

W kolejnym kroku uzyskaną macierz A^{-1} należy wymnożyć przez wektor wyrazów wolnych $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Uzyskany wektor $X = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ jest rozwiązaniem układu równań.

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 1 + 3 + 2 + 1 = 0$$

$\det A = 0$, zatem układ nie jest układem Cramera, co oznacza, że nie istnieje macierz A^{-1}.

Oznacza to, że układ nie ma rozwiązania.

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A=\begin{vmatrix}2&-1&0&0\\1&1&-1&0\\0&1&1&-1\\0&0&-2&1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&1&-1\\0&-2&1\end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&-2&1\end{vmatrix}=2\cdot(1+0+0-0+1-2)-$$

$$-1\cdot(1+0+0-0-0-2)=1$$

$\det A\neq 0$, zatem układ jest układem Cramera, co oznacza, że istnieje macierz A^{-1}.

Macierz A^{-1} można wyznaczyć np. metodą ciągu operacji elementarnych

$$\left[\begin{array}{cccccccc}2&-1&0&0&1&0&0&0\\1&1&-1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&0&0&1&0\\0&0&-2&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xleftrightarrow{2w_2-w_1}$$

$$\xleftrightarrow{2w_2-w_1}\left[\begin{array}{cccccccc}2&-1&0&0&1&0&0&0\\0&3&-2&0&-1&2&0&0\\0&1&1&-1&0&0&1&0\\0&0&-2&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xleftrightarrow{\substack{3w_1+w_2\\3w_3-w_2}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{3w_1+w_2\\3w_3-w_2}}\left[\begin{array}{cccccccc}6&0&-2&0&2&2&0&0\\0&3&-2&0&-1&2&0&0\\0&0&5&-3&1&-2&3&0\\0&0&-2&1&0&0&0&1\end{array}\right]\xleftrightarrow{\substack{5w_1+2w_3\\5w_2+2w_3\\-5w_4-2w_3}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{5w_1+2w_3\\5w_2+2w_3\\-5w_4-2w_3}}\left[\begin{array}{cccccccc}30&0&0&-6&12&6&6&0\\0&15&0&-6&-3&6&6&0\\0&0&5&-3&1&-2&3&0\\0&0&0&1&-2&4&-6&-5\end{array}\right]\xleftrightarrow{\substack{w_1+6w_4\\w_2+6w_4\\w_3+3w_4}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{w_1+6w_4\\w_2+6w_4\\w_3+3w_4}}\left[\begin{array}{cccccccc}30&0&0&0&0&30&-30&-30\\0&15&0&0&-15&30&-30&-30\\0&0&5&0&-5&10&-15&-15\\0&0&0&1&-2&4&-6&-5\end{array}\right]\xleftrightarrow{\substack{\frac{w_1}{30}\\\frac{w_2}{15}\\\frac{w_3}{5}}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{\frac{w_1}{30}\\\frac{w_2}{15}\\\frac{w_3}{5}}}\left[\begin{array}{cccccccc}1&0&0&0&0&1&-1&-1\\0&1&0&0&-1&2&-2&-2\\0&0&1&0&-1&2&-3&-3\\0&0&0&1&-2&4&-6&-5\end{array}\right]$$

Macierzą odwrotną jest macierz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

W kolejnym kroku uzyskaną macierz A^{-1} należy wymnożyć przez wektor wyrazów wolnych $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & 4 & -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Uzyskany wektor $X = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}$ jest rozwiązaniem układu równań.

2. Rozwiązanie układu równań za pomocą wzorów Cramera

Układy Cramera można rozwiązywać również za pomocą wzorów Cramera – jest to znana ze szkoły metoda wyznacznikowa (albo metoda wyznaczników).

Twierdzenie *o rozwiązaniu układu równań przy użyciu wzorów Cramera*

Jeżeli macierz współczynników układu równań jest kwadratowa i nieosobliwa, to jedyne rozwiązanie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tego układu wyraża się wzorem:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.7}$$

w którym macierz A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej i-tej kolumny wektorem B.

Schemat rozwiązywania układu równań ze wzorów Cramera

- Dany układ równań należy zapisać w postaci równania macierzowego (wzór 2.3) i wskazać macierz współczynników A (wzór 2.2).
- Obliczyć wyznacznik macierzy współczynników detA. Jeśli $\det A \neq 0$, to układ jest układem Cramera.
- Utworzyć macierz A_1, zastępując pierwszą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_1$.
- W celu obliczenia x_1 należy podstawić do wzoru (2.7): $x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}$.

- Utworzyć macierz A_2, zastępując pierwszą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_2$.
- W celu obliczenia x_2 podstawiamy do wzoru $x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}$ itd.

Przykład 2.4.2.

Rozwiązać układ równań, stosując wzory Cramera.

a) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 6 \\ 8x_1 - 3x_2 = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 6 \\ 8x_1 - 3x_2 = 13 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -12 - (-16) = 4$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_1, zastępując pierwszą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 13 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} = -18 - (-26) = 8$$

W celu obliczenia x_1 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{4} = 2$$

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_2, zastępując drugą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_2$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = 52 - 48 = 4$$

W celu obliczenia x_2 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_1 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{4} = 2$$

b) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 \quad + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_1, zastępując pierwszą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

W celu obliczenia x_1 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{6}{6} = 1$$

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_2, zastępując drugą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_2$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

W celu obliczenia x_2 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0}{6} = 0$$

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_3, zastępując trzecią kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_3$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

W celu obliczenia x_3 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{6}{6} = 1$$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 18 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\det A = 0$, zatem układ nie jest układem Cramera, więc nie ma rozwiązania.

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -85$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_1, zastępując pierwszą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -85$$

W celu obliczenia x_1 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-85}{-85} = 1$$

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_2, zastępując drugą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_2$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

W celu obliczenia x_2 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{0}{-85} = 0$$

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_3, zastępując trzecią kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & -5 \end{vmatrix} = -85$$

W celu obliczenia x_3 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-85}{-85} = 1$$

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz A_4, zastępując czwartą kolumnę macierzy A kolumną wyrazów wolnych, i obliczyć $\det A_4$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -85$$

W celu obliczenia x_4 wykorzystać wzór (2.7)

$$x_4 = \frac{\det A_4}{\det A} = \frac{-85}{-85} = 1$$

3. Rozwiązanie układu Cramera metodą ciągu operacji elementarnych

Układ równań Cramera można rozwiązać metodą ciągu operacji elementarnych, opierając się na twierdzeniu Kroneckera–Capellego, które jest bardziej uniwersalne i dotyczy układów n równań o m niewiadomych. Można je jednak zastosować również do układów n równań o n niewiadomych.

Twierdzenie *Kroneckera–Capellego*

Jeżeli dany jest układ równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

to posiada on przynajmniej jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rz}A = \text{rz}U$.

Oznacza to, że rząd macierzy współczynników i rząd macierzy uzupełnionej układu są sobie równe.

W przypadku układu Cramera zagwarantowane jest, że $\det A \neq 0$. Stąd za pomocą ciągu operacji elementarnych uda się przekształcić macierz U zdefiniowaną przez (2.4), tak aby doprowadzić część macierzy po lewej stronie do postaci macierzy jednostkowej, a kolumna wyrazów wolnych powstała po prawej stronie będzie stanowić rozwiązanie układu równań.

Schemat rozwiązywania układu Cramera metodą operacji elementarnych

- Dany układ równań należy zapisać w postaci równania macierzowego (wzór 2.3) i wskazać macierz współczynników A (wzór 2.2).
- Obliczyć wyznacznik macierzy współczynników detA. Jeśli $\det A \neq 0$, to układ jest układem Cramera.
- Utworzyć macierz uzupełnioną układu U (zwaną też macierzą rozszerzoną), dopisując po prawej stronie kolumnę wyrazów wolnych.

- Za pomocą ciągu operacji elementarnych sprowadzić macierz U do postaci bazowej.
- Po lewej stronie uzyska się macierz jednostkową, a po prawej kolumnę wyników, która stanowi wektor rozwiązań.

Przykład 2.4.3.

Rozwiązać układ równań metodą ciągu operacji elementarnych.

a) $\begin{cases} x_1 - \quad x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x_1 - \quad x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz rozszerzoną U, dopisując do macierzy A kolumnę wyrazów wolnych

$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

Macierz U należy sprowadzić do postaci bazowej za pomocą ciągu operacji elementarnych

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{4}w_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 + w_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem układu równań

$x_1 = 5, x_2 = 1$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz rozszerzoną U, dopisując do macierzy A kolumnę wyrazów wolnych

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Macierz U należy sprowadzić do postaci bazowej za pomocą ciągu operacji elementarnych

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3+w_1]{w_2-2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(-1)w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1-w_2}$$

$$\xleftrightarrow{w_1-w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{1}{3}w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2-w_3} \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem układu równań

$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 8 + 1 - (-4) - 4 - 2 = 3$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz rozszerzoną U, dopisując do macierzy A kolumnę wyrazów wolnych

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Macierz U należy sprowadzić do postaci bazowej za pomocą ciągu operacji elementarnych

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -5 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{2}w_2}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{1}{2}w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3 + 3w_2]{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{2}{3}w_3}$$

$$\xleftrightarrow{-\frac{2}{3}w_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_2 + \frac{1}{2}w_3]{w_1 - \frac{3}{2}w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem układu równań

$x_1 = 1,\ x_2 = 2, x_3 = -2$

d) $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$$

Należy utworzyć macierz współczynników A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

a następnie obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -85,$$

$\det A \neq 0$, zatem układ jest układem Cramera.

W kolejnym kroku należy utworzyć macierz rozszerzoną U, dopisując do macierzy A kolumnę wyrazów wolnych

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

Macierz U należy sprowadzić do postaci bazowej za pomocą ciągu operacji elementarnych

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{2w_2-w_1 \\ 2w_3-3w_1 \\ 2w_4+w_1}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{2w_2-w_1 \\ 2w_3-3w_1 \\ 2w_4+w_1}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 13 & -10 & -10 & -20 \\ 0 & 5 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{7w_1+3w_2 \\ 7w_3-13w_2 \\ 7w_4-5w_2}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{7w_1+3w_2 \\ 7w_3-13w_2 \\ 7w_4-5w_2}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{2w_2-w_1 \\ 2w_3-3w_1 \\ 2w_4+w_1}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{2w_2-w_1 \\ 2w_3-3w_1 \\ 2w_4+w_1}} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 13 & -10 & -10 & -20 \\ 0 & 5 & 4 & -6 & -2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{7w_1+3w_2 \\ 7w_3-13w_2 \\ 7w_4-5w_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 34 & 34 & 68 \\ 0 & 0 & 68 & -2 & 66 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\frac{w_3}{34}}$$

$$\xleftrightarrow{\frac{w_3}{34}} \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 68 & -2 & 66 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{(w_1+10w_3)/14 \\ (w_2+8w_3)/7 \\ (-w_4+68w_3)/70}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{(w_1+10w_3)/14 \\ (w_2+8w_3)/7 \\ (-w_4+68w_3)/70}} \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 68 & -2 & 66 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{\frac{w_1+10w_3}{14} \\ \frac{w_2+8w_3}{7} \\ \frac{-w_4+68w_3}{70}}}$$

$$\xleftrightarrow{\substack{\frac{w_1+10w_3}{14} \\ \frac{w_2+8w_3}{7} \\ \frac{-w_4+68w_3}{70}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{\substack{w_1-w_4 \\ w_3-w_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem układu równań

$x_1 = 1,\ x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1$

2.5. Układ m równań o n niewiadomych

Układ równań liniowych może mieć m równań przy n niewiadomych (gdzie $m \neq n$). Wówczas klasyczne metody rozwiązań nie mają zastosowania. W takim przypadku stosuje się metodę ciągu operacji elementarnych.

Schemat rozwiązywania układu m równań o n niewiadomych ($m < n$) **metodą ciągu operacji elementarnych**

- Jeśli dany układ równań ma więcej niewiadomych niż równań, to jedną niewiadomą (bądź więcej) należy zamienić na parametr t i traktować jak liczbę. Można go zatem przenieść na prawą stronę równań. Należy utworzyć taki układ, aby liczba równań i niewiadomych była taka sama.
- Otrzymany układ równań należy zapisać w postaci równania macierzowego $A \cdot X = B$ i wskazać macierz współczynników A, następnie obliczyć jej wyznacznik. Jeśli $\det A \neq 0$, to układ ma rozwiązanie. Jeśli $\det A = 0$, to należy wrócić do układu wyjściowego i wybrać za parametr inną niewiadomą, następnie sprawdzić wyznacznik macierzy współczynników, czy jest różny od zera.
- Utworzyć macierz rozszerzoną układu U, dopisując po prawej stronie kolumnę wyrazów wolnych (wraz ze znajdującym się tam parametrem t).
- Za pomocą ciągu operacji elementarnych sprowadzić macierz U do postaci bazowej. Po lewej stronie uzyska się macierz jednostkową, a po prawej kolumnę wyników, która stanowi rozwiązanie ogólne układu równań.
- Aby uzyskać wszystkie rozwiązania bazowe, należy wstawić za niewiadomą x_1 zero i korzystając z rozwiązania ogólnego, obliczyć parametr t, a następnie, wstawiając go do kolejnych równań, wyliczyć pozostałe niewiadome. Następnie należy wstawić za niewiadomą x_2 zero i korzystając z rozwiązania ogólnego, obliczyć parametr t, a następnie, wstawiając go do kolejnych równań, wyliczyć pozostałe niewiadome. Liczba rozwiązań bazowych układu równań może wynosić nie więcej niż liczba niewiadomych.

Przykład 2.5.1.

Znaleźć rozwiązanie ogólne i wszystkie rozwiązania bazowe układu równań.

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = \ \ 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$

Rozwiązanie

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

Układ ma dwa równania i trzy niewiadome.

Zatem niech $x_3 = t$, gdzie $t \in R$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + t = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 5t = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - t \\ 2x_1 + x_2 = 5 - 5t \end{cases}$

Należy utworzyć macierz A (macierz współczynników)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

i obliczyć jej wyznacznik

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$\det A \neq 0$, zatem układ ma rozwiązanie.

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 - t \\ 2 & 1 & 5 - 5t \end{bmatrix}$

Należy sprowadzić macierz U do postaci bazowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 - t \\ 2 & 1 & 5 - 5t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 - t \\ 0 & -3 & -3 - 3t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{-\frac{1}{3}w_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 - t \\ 0 & 1 & 1 + t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 - 2w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 - 3t \\ 0 & 1 & 1 + t \end{bmatrix}$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem ogólnym układu równań

$\begin{cases} x_1 = 2 - 3t \\ x_2 = 1 + \ t \quad t \in R \\ x_3 = \quad t \end{cases}$

W kolejnym kroku należy wyznaczyć rozwiązania bazowe.
Niech $x_3 = 0$, wtedy $t = 0$
stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_2 = 1,\ x_1 = 2$
zatem pierwszym rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
Niech $x_2 = 0$, wtedy $t = -1$
stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_3 = -1,\ x_1 = 5$
zatem drugim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
Niech $x_1 = 0$, wtedy $t = \frac{2}{3}$
stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_3 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{5}{3}$
zatem trzecim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 13 \end{cases}$

Układ ma dwa równania i trzy niewiadome.
Zatem niech $x_3 = t$, gdzie $t \in R$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + t = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5t = 13 \end{cases}$
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 - t \\ 2x_1 + x_2 = 13 - 5t \end{cases}$
Należy utworzyć macierz A (macierz współczynników)
$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
i obliczyć jej wyznacznik
$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$
$\det A \neq 0$, zatem układ ma rozwiązanie.
Należy utworzyć macierz rozszerzoną U
$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 - t \\ 2 & 1 & 13 - 5t \end{bmatrix}$
Należy sprowadzić macierz U do postaci bazowej

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 - t \\ 2 & 1 & 13 - 5t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 + 4t \\ 2 & 1 & 13 - 5t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_2 - 2w_1}$$

$$\xleftrightarrow{w_2 - 2w_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 + 4t \\ 0 & -1 & 25 - 13t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{(-1) \cdot w_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -6 + 4t \\ 0 & 1 & -25 + 13t \end{bmatrix} \xleftrightarrow{w_1 - w_2}$$

$$\xleftrightarrow{w_1 - w_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19 - 9t \\ 0 & 1 & -25 + 13t \end{bmatrix}$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem ogólnym układu równań

$$\begin{cases} x_1 = \quad 19 - \quad 9t \\ x_2 = -25 + 13t \qquad t \in R \\ x_3 = \qquad\qquad\quad t \end{cases}$$

W kolejnym kroku należy wyznaczyć rozwiązania bazowe.

Niech $x_3 = 0$, wtedy $t = 0$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_2 = -25,\ x_1 = 19$

zatem pierwszym rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 19 \\ -25 \\ 0 \end{bmatrix}$

Niech $x_2 = 0$, wtedy $t = \frac{25}{13}$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_3 = \frac{25}{13},\ x_1 = \frac{22}{13}$

zatem drugim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} \frac{22}{13} \\ 0 \\ \frac{25}{13} \end{bmatrix}$

Niech $x_1 = 0$, wtedy $t = \frac{19}{9}$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_3 = \frac{19}{9},\ x_2 = \frac{22}{9}$

zatem trzecim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{22}{9} \\ \frac{19}{9} \end{bmatrix}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = -5 \end{cases}$

Układ ma trzy równania i cztery niewiadome.

Zatem niech $x_4 = t$, gdzie $t \in R$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4t = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2t = -4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5t = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 - 4t \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 + 2t \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = -5 + 5t \end{cases}$$

Należy utworzyć macierz A (macierz współczynników)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

i obliczyć jej wyznacznik

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 9 + 8 + 4 + 3 + 24 = 34$$

$\det A \neq 0$, zatem układ ma rozwiązanie.

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8-4t \\ 1 & 2 & -3 & -4+2t \\ -1 & 4 & 1 & -5+5t \end{bmatrix}$$

Należy sprowadzić macierz U do postaci bazowej

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8-4t \\ 1 & 2 & -3 & -4+2t \\ -1 & 4 & 1 & -5+5t \end{bmatrix} \xleftrightarrow[2w_3+w_1]{2w_2-w_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 8-4t \\ 0 & 7 & -8 & -16+8t \\ 0 & 5 & 4 & -2+6t \end{bmatrix} \xleftrightarrow[7w_3-5w_2]{7w_1+3w_2}$$

$$\xleftrightarrow[7w_3-5w_2]{7w_1+3w_2} \begin{bmatrix} 14 & 0 & -10 & 8-4t \\ 0 & 7 & -8 & -16+8t \\ 0 & 0 & 68 & 66+2t \end{bmatrix} \xleftrightarrow[68w_2+8w_3]{68w_1+10w_3}$$

$$\xleftrightarrow[68w_2+8w_3]{68w_1+10w_3} \begin{bmatrix} 952 & 0 & 0 & 1204-252t \\ 0 & 476 & 0 & -560+560t \\ 0 & 0 & 68 & 66+2t \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_3/68]{w_1/952 \atop w_2/476} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{43}{34} - \frac{9}{34}t \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{20}{17} + \frac{20}{17}t \\ 0 & 0 & 1 & \frac{33}{34} + \frac{1}{34}t \end{bmatrix}$$

Ostatnia kolumna jest rozwiązaniem ogólnym układu równań

$$\begin{cases} x_1 = \frac{43}{34} - \frac{9}{34}t \\ x_2 = -\frac{20}{17} + \frac{20}{17}t \\ x_3 = \frac{33}{34} + \frac{1}{34}t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad t \in R$$

W kolejnym kroku należy wyznaczyć rozwiązania bazowe.

Niech $x_4 = 0$, wtedy $t = 0$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_3 = \frac{33}{34}$, $x_2 = -\frac{20}{17}$, $x_1 = \frac{43}{34}$

zatem pierwszym rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} \frac{43}{34} \\ -\frac{20}{17} \\ \frac{33}{34} \\ 0 \end{bmatrix}$

Niech $x_3 = 0$, wtedy $t = -33$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_4 = -33$, $x_2 = -40$, $x_1 = 10$

zatem drugim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 10 \\ -40 \\ 0 \\ -33 \end{bmatrix}$

Niech $x_2 = 0$, wtedy $t = 1$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_4 = 1, x_3 = 1, x_1 = 1$

zatem trzecim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Niech $x_1 = 0$, wtedy $t = \frac{43}{9}$

stąd, podstawiając do równania ogólnego: $x_4 = \frac{43}{9}$, $x_3 = \frac{10}{9}$, $x_2 = \frac{40}{9}$

zatem czwartym rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{40}{9} \\ \frac{10}{9} \\ \frac{43}{9} \end{bmatrix}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$

Układ ma dwa równania i cztery niewiadome.

Zatem niech $x_3 = t_1, x_4 = t_2$, gdzie $t \in R$

$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2t_1 + 4t_2 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 3t_1 - 2t_2 = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8 - 2t_1 - 4t_2 \\ x_1 + 2x_2 = -4 + 3t_1 + 2t_2 \end{cases}$

Należy utworzyć macierz A (macierz współczynników)

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

i obliczyć jej wyznacznik

$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

$\det A \neq 0$, zatem układ ma rozwiązanie.

Należy utworzyć macierz rozszerzoną U

$U = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 - 2t_1 - 4t_2 \\ 1 & 2 & -4 + 3t_1 + 2t_2 \end{bmatrix}$

i sprowadzić ją do postaci bazowej

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 - 2t_1 - 4t_2 \\ 1 & 2 & -4 + 3t_1 + 2t_2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{2w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 - 2t_1 - 4t_2 \\ 0 & 7 & -16 + 8t_1 + 8t_2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{7w_1 + 3w_2}$$

$$\xleftrightarrow{7w_1 + 3w_2} \begin{bmatrix} 14 & 0 & 8 + 10t_1 - 4t_2 \\ 0 & 7 & -16 + 8t_1 + 8t_2 \end{bmatrix} \xleftrightarrow[w_2/7]{w_1/14} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{7} + \frac{5}{7}t_1 - \frac{2}{7}t_2 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}t_1 + \frac{8}{7}t_2 \end{bmatrix}$$

zatem rozwiązanie ogólne:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{7} + \frac{5}{7}t_1 - \frac{2}{7}t_2 \\ x_2 = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}t_1 + \frac{8}{7}t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in R$$

W kolejnym kroku należy wyznaczyć rozwiązania bazowe.

Niech $x_4 = 0$, wtedy $t_2 = 0$

stąd $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{7} + \frac{5}{7}t_1 \\ x_2 = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad t_1 \in R$

zatem pierwszym rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} + \frac{5}{7}t_1 \\ -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t_1 \in R$

Niech $x_3 = 0$, wtedy $t_1 = 0$

Stąd $\begin{cases} x_1 = \frac{4}{7} - \frac{2}{7}t_2 \\ x_2 = -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}t_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad t_2 \in R$

zatem drugim rozwiązaniem bazowym jest wektor $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} - \frac{2}{7}t_2 \\ -\frac{16}{7} + \frac{8}{7}t_2 \\ 0 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $t_2 \in R$

Niech $x_2 = 0$, wtedy $t_1 = 2 - t_2$ lub $t_2 = 2 - t_1$

Stąd $\begin{cases} x_1 = 2 - t_2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 2 - t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad t_2 \in R \quad$ lub $\quad \begin{cases} x_1 = t_1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 2 - t_1 \end{cases} \quad t_1 \in R$

zatem trzecim rozwiązaniem bazowym jest wektor

$\begin{bmatrix} 2 - t_2 \\ 0 \\ 2 - t_2 \\ t_2 \end{bmatrix}, \quad t_2 \in R \quad$ lub $\quad \begin{bmatrix} t_1 \\ 0 \\ t_1 \\ 2 - t_1 \end{bmatrix}, \quad t_1 \in R$

Niech $x_1 = 0$, wtedy $t_1 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t_2$ lub $t_2 = 2 + \frac{5}{2}t_1$

Stąd $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{16}{5} + \frac{8}{5}t_2 \\ x_3 = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases}$ $t_2 \in R$ lub $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 2 + \frac{5}{2}t_1 \end{cases}$ $t_1 \in R$

zatem czwartym rozwiązaniem bazowym jest wektor

$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{16}{5} + \frac{8}{5}t_2 \\ -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}t_2 \\ t_2 \end{bmatrix}$, $t_2 \in R$ .lub $\begin{bmatrix} 0 \\ 4t_1 \\ t_1 \\ 2 + \frac{5}{2}t_1 \end{bmatrix}$, $t_1 \in R$

3. WEKTORY W PRZESTRZENI R^3

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału trzeciego można bez trudu:

- **podać definicję wektora zaczepionego i wektora swobodnego w przestrzeni R^3,**
- **wyznaczyć współrzędne wektora zaczepionego,**
- **obliczyć długość wektora,**
- **wykonać działania: dodawania i odejmowania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę,**
- **obliczać iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy oraz iloczyn mieszany wektorów,**
- **wykorzystać iloczyn wektorowy i mieszany wektorów w zagadnieniach geometrycznych.**

3.1. Punkty i wektory w przestrzeni R^3

W trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej $R^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ wyróżnia się:

- punkty (x, y, z), które oznacza się wielkimi literami A, B, C itd. Liczby rzeczywiste x, y, z nazywa się współrzędnymi punktu $A\ (x, y, z)$,
- wektory zaczepione, które oznacza się $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... itd.,
- wektory swobodne, które oznacza się $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots \vec{u}$ itd.

Definicja *wektora zaczepionego*

Wektorem zaczepionym nazywa się uporządkowaną parę punktów, z których jeden jest początkiem, a drugi końcem tego wektora.

Jeśli dane są punkty $A\ (x_A, y_A, z_A)$ oraz $B\ (x_B, y_B, z_B)$, to wektor $\overrightarrow{AB}$ jest wektorem zaczepionym w punkcie A (tzn. o początku w punkcie A) o końcu w punkcie B.

Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ oblicza się ze wzoru:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A] \tag{3.1}$$

Należy zwrócić uwagę, że dowolny wektor postaci $\overrightarrow{AA}$, czyli o początku i końcu w tym samym punkcie, nazywa się wektorem zerowym i oznacza $\vec{0}$. Oczywiście $\vec{0} = [0, 0, 0]$.

Przykład 3.1.1.

Wyznaczyć współrzędne wektora zaczepionego w punkcie A o końcu w punkcie B.

a) $A\,(2, -1, 3)$, $B\,(4, 5, -1)$

b) $A\,(0, 0, 0)$, $B\,(1, 2, -1)$

c) $A\,(3, 2, -1)$, $B\,(0, -4, 1)$

d) $A\,(5, -3, 0)$, $B\,(7, -3, 2)$

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{AB} = [4 - 2, 5 - (-1), -1 - 3] = [2, 6, -4]$

b) $\overrightarrow{AB} = [1 - 0, 2 - 0, -1 - 0] = [1, 2, -1]$

c) $\overrightarrow{AB} = [0 - 3, -4 - 2, 1 - (-1)] = [-3, -6, 2]$

d) $\overrightarrow{AB} = [7 - 5, -3 - (-3), 2 - 0] = [2, 0, 2]$

Przykład 3.1.2.

Dane są punkty $A\,(0, 0, 0)$, $B\,(1, 2, -1)$, $C\,(1, 1, 1)$ i $D\,(2, 3, 0)$. Obliczyć współrzędne wektorów zaczepionych $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{AB} = [1 - 0, 2 - 0, -1 - 0] = [1, 2, -1]$

b) $\overrightarrow{CD} = [2 - 1, 3 - 1, 0 - 1] = [1, 2, -1]$

c) $\overrightarrow{AC} = [1 - 0, 1 - 0, 1 - 0] = [1, 1, 1]$

d) $\overrightarrow{BC} = [1 - 1, 1 - 2, 1 - (-1)] = [0, -1, 2]$

Kierunek i zwrot wektora

Definicja *wektora swobodnego*
Wektorem swobodnym, dokładniej wektorem swobodnym wyznaczonym przez pewien wektor zaczepiony $\overrightarrow{AB}$, nazywa się zbiór wszystkich wektorów zaczepionych, które mają ten sam zwrot, kierunek i długość co $\overrightarrow{AB}$. Rozważając dowolny wektor swobodny, na ogół utożsamia się go, na zasadzie abstrakcji, z konkretnym, dowolnie wybranym reprezentantem tego zbioru. Wektory swobodne oznacza się symbolami $\vec{a}, \vec{u}, \vec{v}$ itd.

Dwa wektory niezerowe $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{PQ}$ mają ten sam kierunek, jeżeli proste AB i PQ są równoległe.

Zwrotem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywa się ten z dwu zwrotów prostej AB, w którym punkt A poprzedza punkt B.

Definicja *wektora przeciwnego*
Wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywa się wektor $\overrightarrow{BA}$, przy czym współrzędne wektora $\overrightarrow{BA}$ są przeciwne do współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$.

Przykład 3.1.3.

Wyznaczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ oraz wektora do niego przeciwnego.

a) A (1, 2, 3), B (4, 5, 6)

b) A (2, 3, 4), B (3, 2, 0)

c) A (4, 0, 1), B (0, 2, 5)

d) A (2, 7, 5), B (3, 1, 2)

Rozwiązanie

a) A (1, 2, 3), B (4, 5, 6)

$$\overrightarrow{AB} = [4-1, 5-2, 6-3] = [3, 3, 3]$$
$$\overrightarrow{BA} = [1-4, 2-5, 3-6] = [-3, -3, -3]$$

b) A (2, 3, 4), B (3, 2, 0)

$$\overrightarrow{AB} = [3-2, 2-3, 0-4] = [1, -1, -4]$$
$$\overrightarrow{BA} = [2-3, 3-2, 4-0] = [-1, 1, 4]$$

c) A (4, 0, 1), B (0, 2, 5)

$$\overrightarrow{AB} = [0-4, 2-0, 5-1] = [-4, 2, 4]$$
$$\overrightarrow{BA} = [4-0, 0-2, 1-5] = [4, -2, -4]$$

d) A (2, 7, 5), B (3, 1, 2)

$$\overrightarrow{AB} = [3-2, 1-7, 2-5] = [1, -6, -3]$$
$$\overrightarrow{BA} = [2-3, 7-1, 5-2] = [-1, 6, 3]$$

Przykład 3.1.4.

Wyznaczyć współrzędne wektora przeciwnego do wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) $\overrightarrow{AB} = [3, -7, 5]$

b) $\overrightarrow{AB} = [2, 9, -3]$

c) $\overrightarrow{AB} = [-1, 0, 4]$

d) $\overrightarrow{AB} = [0, 3, -1]$

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{BA} = [-3, 7, -5]$

b) $\overrightarrow{BA} = [-2, -9, 3]$

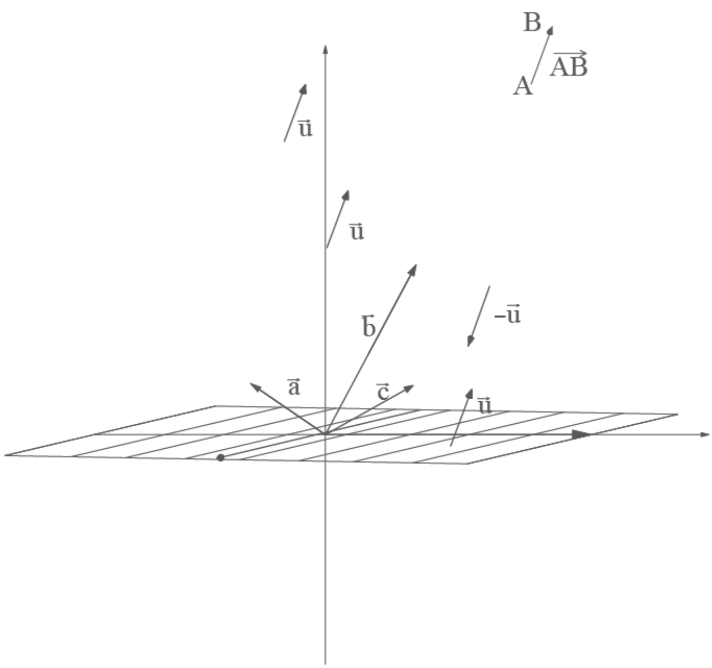
c) $\overrightarrow{BA} = [1, 0, -4]$

d) $\overrightarrow{BA} = [0, -3, 1]$

Definicja *równoległości wektorów*
Dwa wektory niezerowe $\vec{u}, \vec{v}$ są równoległe, co zapisuje się $\vec{u} \| \vec{v}$, gdy mają te same kierunki.

Przyjmuje się dodatkowo, że wektor zerowy jest równoległy do każdego innego wektora.

Własność równoległości wektorów
Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}$. Wówczas $\vec{u} \| \vec{v}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie liczby rzeczywiste α, β, że $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0$.



Rys. 3.1. Położenie wektorów w przestrzeni R^3, $\vec{u}$ – wektory swobodne, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – wektory zaczepione o początku w (0, 0, 0), $-\vec{u}$ – wektory przeciwne do wektora $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$ – wektor zaczepiony w punkcie A o końcu w punkcie B

3.2. Długość wektora

Każdy wektor w przestrzeni R^3 określają trzy parametry: kierunek, zwrot oraz długość. Aby obliczyć długość wektora, najpierw należy ją zdefiniować.

Definicja *długości wektora*
Niech dane będą dwa punkty $A\,(x_A, y_A, z_A)$ oraz $B\,(x_B, y_B, z_B)$. Długością wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywa się długość odcinka $\overline{AB}$.

Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ oznacza się symbolem $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ oblicza się ze wzoru:

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \tag{3.2}$$

Przykład 3.2.1.

Korzystając z definicji, obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

a) A (2, 1, 3), B (−1, 1, 4)

b) A (3, 4, 2), B (1, −2, 0)

c) A (1, 1, 0), B (2, 0, −1)

d) A (0, 2, 1), B (−2, 4, 2)

Rozwiązanie

a) A (2, 1, 3), B (−1, 1, 4)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-1)^2 + (4-3)^2} =$$
$$= \sqrt{(-3)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

b) A (3, 4, 2), B (1, −2, 0)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-4)^2 + (0-2)^2} =$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$$

c) A (1, 1, 0), B (2, 0, −1)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2 + (-1-0)^2} =$$
$$= \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

d) A (0, 2, 1), B (−2, 4, 2)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-2)^2 + (2-1)^2} =$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Przykład 3.2.2.

Korzystając ze współrzędnych wektora, obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$, wiedząc, że:

a) A (2,−1, 3), B (4, 2,−1)

b) A (3,−2, 4), B (8, 4,−2)

c) A (4,−3, 5), B (2, 1,−4)

d) A (3,−4, 6), B (0, 0, 6)

Rozwiązanie

a) A (2,−1, 3), B (4, 2,−1)

Należy wyznaczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = [2, 3, -4]$

Następnie należy obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$

b) A (3,−2, 4), B (8, 4,−2)

Należy wyznaczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = [5, 6, -6]$

Następnie należy obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{5^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{97}$

c) A (4,−3, 5), B (2, 1,−4)

Należy wyznaczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = [-2, 4, -9]$

Następnie należy obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-9)^2} = \sqrt{101}$

d) A (3,−4, 6), B (0, 0, 6)

Należy wyznaczyć współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = [-3, 4, 0]$

Następnie należy obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

Przykład 3.2.3.

Obliczyć długość wektora $\overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AB} = [0, 0, -4]$

b) $\overrightarrow{AB} = [2, 3, -2]$

c) $\overrightarrow{AB} = [4, 0, -3]$

d) $\overrightarrow{AB} = [2, -2, 1]$

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{AB} = [0, 0, -4]$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

b) $\overrightarrow{AB} = [2, 3, -2]$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$

c) $\overrightarrow{AB} = [4, 0, -3]$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

d) $\overrightarrow{AB} = [2, -2, 1]$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

Własności długości wektorów

Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}$ oraz liczba α. Wtedy:

- $\|\vec{u}\| \geq 0$ oraz $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\|\alpha \cdot \vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
- $|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$

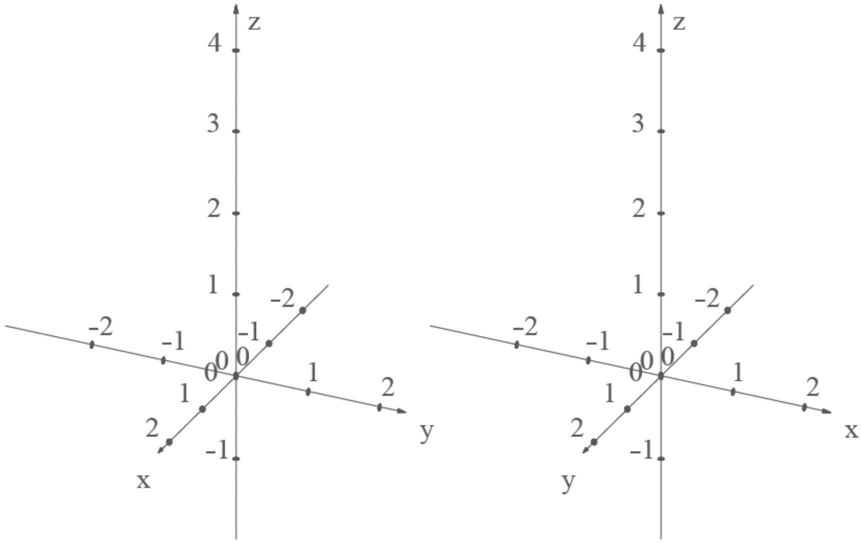
Wektor jednostkowy

Zanim wprowadzone zostanie pojęcie wektora jednostkowego, należy zdefiniować układ współrzędnych w przestrzeni R^3.

Definicja *układu współrzędnych w przestrzeni* $\mathbf{R^3}$

Układem współrzędnych w przestrzeni R^3 nazywa się trzy ustalone proste x, y, z przecinające się w jednym punkcie O (0, 0, 0), które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ współrzędnych oznacza się przez OXYZ.

Proste OX, OY, OZ nazywa się osiami układu. W zależności od wzajemnego położenia osi OX, OY, OZ wyróżnia się dwie jego orientacje: układ prawoskrętny i układ lewoskrętny.

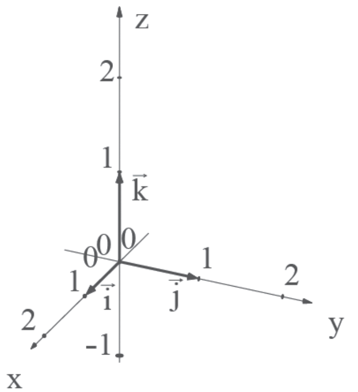


Rys. 3.2. Układ prawoskrętny i lewoskrętny

Na poszczególnych osiach układu można ustalić tzw. wektor jednostkowy. Jest to taki wektor, którego długość wynosi 1 (moduł wektora jest równy jeden). Informuje on o kierunku, ale nie daje żadnej informacji o wartości. Wektor jednostkowy nosi nazwę wersora.

Można zatem powiedzieć, że wersor to wektor o długości 1, wskazujący kierunek i zwrot pewnego wektora początkowego, któremu ten wersor jest przypisany. Wersor przemnożony przez długość wektora początkowego daje wektor początkowy.

Definicja *wersora*
Wersorem osi nazywa się wektor o długości (normie) 1, którego kierunek i zwrot są zgodne z pewną dodatnią półosią prostokątnego układu współrzędnych. Dla osi OX, OY, OZ w przestrzeni R^3 wersorami są odpowiednio wektory jednostkowe $\vec{i} = [1,0,0], \vec{j} = [0,1,0], \vec{k} = [0,0,1]$.



Rys. 3.3. Wersory osi OX, OY, OZ

3.3. Działania na wektorach

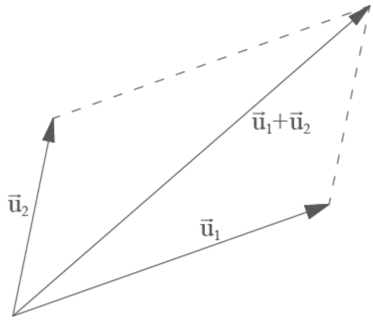
Podobnie jak w przestrzeni dwuwymiarowej R^2, tak też i w przestrzeni trójwymiarowej R^3 w zbiorze wektorów zachodzą pewne działania. Niech dane będą dwa wektory $\vec{u}_1 = [x_1, y_1, z_1], \vec{u}_2 = [x_2, y_2, z_2]$ oraz liczba rzeczywista α. Wówczas można zdefiniować działania takie jak: dodawanie wektorów, odejmowanie wektorów oraz mnożenie wektora przez liczbę (skalar).

Definicja *sumy* wektorów
Sumą wektorów $\overrightarrow{u_1}$ i $\overrightarrow{u_2}$ nazywa się wektor $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ określony jako:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2] \tag{3.3}$$

Dodając dwa wektory, otrzymuje się trzeci, którego kolejne współrzędne są sumą odpowiadających sobie współrzędnych wektorów.

Interpretację geometryczną sumy wektorów przedstawia rys. 3.4.



Rys. 3.4. Suma wektorów

W sensie geometrycznym sumą dwóch wektorów jest wektor stanowiący przekątną równoległoboku skonstruowanego w ten sposób, że jeden z wektorów przesuwa się równolegle do jego kierunku, tak aby początek tego wektora pokrył się z końcem drugiego. Sumę wielu wektorów (wypadkową) otrzymuje się, dodając do sumy dwóch pierwszych wektorów następny wektor itd.

Przykład 3.3.1.

Obliczyć sumę wektorów $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$.

a) $\vec{u}_1 = [1, 2, 6]$, $\vec{u}_2 = [-1, 9, 5]$

b) $\vec{u}_1 = [2, 3, 0]$, $\vec{u}_2 = [0, 3, -2]$

c) $\vec{u}_1 = [0, 2, 1]$, $\vec{u}_2 = [3, -2, 4]$

d) $\vec{u}_1 = [1, 1, 2]$, $\vec{u}_2 = [1, -3, 1]$

Rozwiązanie

a) $\vec{u}_1 = [1, 2, 6]$, $\vec{u}_2 = [-1, 9, 5]$
$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [1 + (-1), 2 + 9, 6 + 5] = [0, 11, 11]$

b) $\vec{u}_1 = [2, 3, 0]$, $\vec{u}_2 = [0, 3, -2]$
$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [2 + 0, 3 + 3, 0 + (-2)] = [2, 6, -2]$

c) $\vec{u}_1 = [0, 2, 1]$, $\vec{u}_2 = [3, -2, 4]$
$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [0 + 3, 2 + (-2), 1 + 4] = [3, 0, 5]$

d) $\vec{u}_1 = [1, 1, 2]$, $\vec{u}_2 = [1, -3, 1]$
$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [1 + 1, 1 + (-3), 2 + 1] = [2, -2, 3]$

Przykład 3.3.2.

Który z podanych wektorów stanowi sumę wektorów?

$\vec{u}_1 = [3, -2{,}5]$, $\vec{u}_2 = [-1{,}4, -7]$, $\vec{u}_3 = [-4, -1{,}2]$

a) $\vec{u} = [0, 0, 0]$

b) $\vec{u} = [2, 2, -2]$

c) $\vec{u} = [-2, 1, 0]$
d) $\vec{u} = [1, 2, 3]$

Rozwiązanie
$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = [3, -2{,}5] + [-1{,}4, -7] + [-4, -1{,}2] =$
$= [3 + (-1) + (-4), -2 + 4 + (-1), 5 + (-7) + 2] = [-2, 1, 0]$

Przykład 3.3.3.

Dane są wektory $\vec{u}_1 = [3, -2, 5]$, $\vec{u}_2 = [-1, 4, -7]$, $\vec{u}_3 = [-4, -1, 2]$. Obliczyć sumę wektorów.
a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$
b) $\vec{u}_1 + \vec{u}_3$
c) $\vec{u}_3 + \vec{u}_2$
d) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$

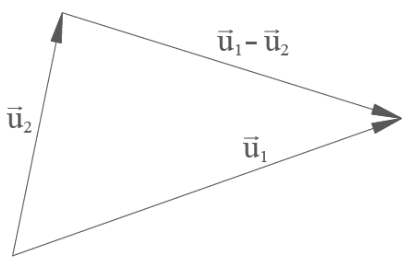
Rozwiązanie
a) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = [3, -2, 5] + [-1, 4, -7] = [2, 2, -2]$
b) $\vec{u}_1 + \vec{u}_3 = [3, -2, 5] + [-4, -1, 2] = [-1, -3, 7]$
c) $\vec{u}_3 + \vec{u}_2 = [-4, -1, 2] + [-1, 4, -7] = [-5, 3, -5]$
d) $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = [3, -2, 5] + [-1, 4, -7] + [-4, -1, 2] = [-2, 1, 0]$

Definicja *różnicy* wektorów
Różnicą wektorów $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ nazywa się wektor $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ określony jako:

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2] \tag{3.4}$$

Odejmując od wektora $\vec{u}_1$ wektor $\vec{u}_2$, otrzymuje się wektor, którego kolejne współrzędne są różnicami odpowiadających sobie współrzędnych wektorów.

Interpretację geometryczną różnicy wektorów przedstawia rys. 3.5.



Rys. 3.5. Różnica wektorów

W sensie geometrycznym różnicą wektorów $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_2$ zaczepionych w jednym punkcie jest wektor, który łączy ich końce.

Przykład 3.3.4.

Obliczyć różnicę wektorów.

a) $\vec{u}_1 = [1, 2, 6]$, $\vec{u}_2 = [-1, 9, 5]$

b) $\vec{u}_1 = [2, 3, 0]$, $\vec{u}_2 = [0, 3, -2]$

c) $\vec{u}_1 = [0, 2, 1]$, $\vec{u}_2 = [3, -2, 4]$

d) $\vec{u}_1 = [1, 1, 2]$, $\vec{u}_2 = [1, -3, 1]$

Rozwiązanie

a) $\vec{u}_1 = [1, 2, 6]$, $\vec{u}_2 = [-1, 9, 5]$
$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [1 - (-1), 2 - 9, 6 - 5] = [2, -7, -1]$

b) $\vec{u}_1 = [2, 3, 0]$, $\vec{u}_2 = [0, 3, -2]$
$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [2 - 0, 3 - 3, 0 - (-2)] = [2, 0, 2]$

c) $\vec{u}_1 = [0, 2, 1]$, $\vec{u}_2 = [3, -2, 4]$
$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [0 - 3, 2 - (-2), 1 - 4] = [-3, 4, -3]$

d) $\vec{u}_1 = [1, 1, 2]$, $\vec{u}_2 = [1, -3, 1]$
$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [1 - 1, 1 - (-3), 2 - 1] = [0, 4, 1]$

Przykład 3.3.5.

Który z podanych wektorów stanowi różnicę wektorów?
$\vec{u}_1 = [3, -2, 5]$ i $\vec{u}_2 = [-1, 4, -7]$

a) $\vec{u} = [-4, 6, -12]$

b) $\vec{u} = [4, -6, 12]$

c) $\vec{u} = [-4, -6, 12]$

d) $\vec{u} = [16, 36, 144]$

Rozwiązanie

$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [3, -2, 5] - [-1, 4, -7] = [3 - (-1), -2 - 4, 5 - (-7)] =$
$= [4, -6, 12]$

Przykład 3.3.6.

Dane są wektory $\vec{u}_1 = [3, -2, 5], \vec{u}_2 = [-1, 4, -7]$, $\vec{u}_3 = [-4, -1, 2]$. Obliczyć różnicę wektorów.

a) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$

b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_3$

c) $\vec{u}_3 - \vec{u}_2$

d) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$

Rozwiązanie

a) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = [3, -2, 5] - [-1, 4, -7] = [4, -6, 12]$

b) $\vec{u}_1 - \vec{u}_3 = [3, -2, 5] - [-4, -1, 2] = [7, -1, 3]$

c) $\vec{u}_3 - \vec{u}_2 = [-4, -1, 2] - [-1, 4, -7] = [-3, -5, 9]$

d) $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3 = [3, -2, 5] - [-1, 4, -7] - [-4, -1, 2] = [0, -5, 10]$

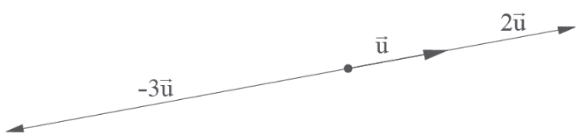
Definicja *iloczynu* wektora przez liczbę

Iloczynem wektora $\vec{u} = [x, y, z]$ przez liczbę (skalar) α nazywa się wektor $\alpha \cdot \vec{u}$ określony jako:

$$\alpha \cdot \vec{u} = [\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z] \tag{3.5}$$

Zatem iloczynem danego wektora $\vec{u}$ przez skalar α jest inny wektor o tym samym kierunku, ale długości stanowiącej iloczyn długości tego wektora przez ten skalar i zwrocie zgodnym ze zwrotem wektora $\vec{u}$ w przypadku, gdy $\alpha > 0$, natomiast zwrocie przeciwnym do $\vec{u}$ w przypadku, gdy $\alpha < 0$.

Interpretację geometryczną iloczynu wektora przez skalar przedstawia rys. 3.6.



Rys. 3.6. Iloczyn wektora przez liczbę (skalar)

Przykład 3.3.7.

Obliczyć iloczyn wektora $\vec{u}$ przez skalar α.

a) $\vec{u} = [-4, 1, 2], \alpha = 3$

b) $\vec{u} = [5, -1, 3], \alpha = 2$

c) $\vec{u} = [-2, 0, 4], \alpha = 4$

d) $\vec{u} = [0, 1, -2], \alpha = -2$

Rozwiązanie

a) $\vec{u} = [-4, 1, 2], \alpha = 3$

$\alpha \cdot \vec{u} = 3 \cdot [-4, 1, 2] = [-12, 3, 6]$

b) $\vec{u} = [5, -1, 3], \alpha = 2$

$\alpha \cdot \vec{u} = 2 \cdot [5, -1, 3] = [10, -2, 6]$

c) $\vec{u} = [-2, 0, 4], \alpha = 4$

$\alpha \cdot \vec{u} = 4 \cdot [-2, 0, 4] = [-8, 0, 16]$

d) $\vec{u} = [0, 1, -2], \alpha = -2$

$\alpha \cdot \vec{u} = (-2) \cdot [0, 1, -2] = [0, -2, 4]$

Przykład 3.3.8.

Który z podanych wektorów stanowi iloczyn wektora $\vec{u} = [3, 2, 1]$ przez skalar $\alpha = -5$?

a) $\vec{u} = [-15, -10, -5]$

b) $\vec{u} = [15, 10, 5]$

c) $\vec{u} = [5, 10, 15]$

d) $\vec{u} = [-5, -10, -15]$

Rozwiązanie

$\alpha \cdot \vec{u} = (-5) \cdot [3, 2, 1] = [-15, -10, -5]$

Przykład 3.3.9.

Dane są wektory $\vec{u}_1 = [3, -2, 5]$, $\vec{u}_2 = [-1, 4, -7]$, $\vec{u}_3 = [-4, -1, 2]$ oraz skalary $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$. Obliczyć iloczyn wektora przez skalar.

a) $\alpha_1 \cdot \vec{u}_1$

b) $\alpha_1 \cdot \vec{u}_2$

c) $\alpha_2 \cdot \vec{u}_1$

d) $\alpha_2 \cdot \vec{u}_3$

Rozwiązanie

a) $\alpha_1 \cdot \vec{u}_1 = 2 \cdot [3, -2, 5] = [6, -4, 10]$

b) $\alpha_1 \cdot \vec{u}_2 = 2 \cdot [-1, 4, -7] = [-2, 8, -14]$

c) $\alpha_2 \cdot \vec{u}_1 = (-2) \cdot [3, -2, 5] = [-6, 4, -10]$

d) $\alpha_2 \cdot \vec{u}_3 = (-2) \cdot [-4, -1, 2] = [8, 2, -4]$

Własności działań na wektorach

Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz liczby α i β. Wtedy:

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (dodawanie wektorów jest przemienne)
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (dodawanie wektorów jest łączne)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ (wektor zerowy $\vec{0}$ jest elementem neutralnym sumy wektorów)
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ (wektor $-\vec{u}$ jest elementem przeciwnym do wektora $\vec{u}$)
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$
- $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$
- $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$

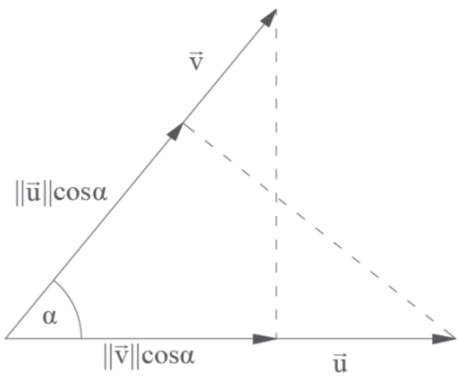
3.4. Iloczyn skalarny wektorów

Mając dane w przestrzeni R^3 wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, można wprowadzić pojęcie iloczynu skalarnego tych wektorów.

Definicja *iloczynu skalarnego wektorów*
Niech dane będą wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w przestrzeni R^3. Iloczynem skalarnym tych wektorów jest liczba (skalar) $\vec{u} \circ \vec{v}$ obliczona według wzoru:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi \tag{3.6}$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.



Rys. 3.7. Iloczyn skalarny wektorów

Jeśli dane są wektory $\overrightarrow{u_1} = [x_1, y_1, z_1]$, $\overrightarrow{u_2} = [x_2, y_2, z_2]$ o ustalonych współrzędnych, wtedy iloczyn skalarny można obliczyć ze wzoru:

$$\overrightarrow{u_1} \circ \overrightarrow{u_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \tag{3.7}$$

Przykład 3.4.1.

Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$.

a) $\overrightarrow{u} = [-1, 2, -3], \vec{v} = [2, 0, -1]$

b) $\overrightarrow{u} = [1, -2, -4], \vec{v} = [3, -1, 2]$

c) $\overrightarrow{u} = [-3, 0, -1], \vec{v} = [-2, 1, 5]$

d) $\overrightarrow{u} = [3, -3, -5], \vec{v} = [-5, 4, 0]$

Rozwiązanie

a) $\overrightarrow{u} = [-1, 2, -3], \vec{v} = [2, 0, -1]$

$\vec{u} \circ \vec{v} = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) = -2 + 0 + 3 = 1$

b) $\overrightarrow{u} = [1, -2, -4], \vec{v} = [3, -1, 2]$

$\vec{u} \circ \vec{v} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 = 3 + 2 - 8 = -3$

c) $\overrightarrow{u} = [-3, 0, -1], \vec{v} = [-2, 1, 5]$

$\vec{u} \circ \vec{v} = (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 = 6 + 0 - 5 = 1$

d) $\overrightarrow{u} = [3, -3, -5], \vec{v} = [-5, 4, 0]$

$\vec{u} \circ \vec{v} = 3 \cdot (-5) + (-3) \cdot 4 + (-5) \cdot 0 = -15 - 12 + 0 = -17$

Własności iloczynu skalarnego wektorów

Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz liczba (skalar) α. Wtedy:

- $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$
- $(\alpha \cdot \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$
- $\vec{u} \circ \vec{u} = (\|\vec{u}\|)^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ \vec{w} + \vec{v} \circ \vec{w}$
- $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, przy czym zachodzi to $\Leftrightarrow \vec{u} \| \vec{v}$.

3.5. Iloczyn wektorowy wektorów

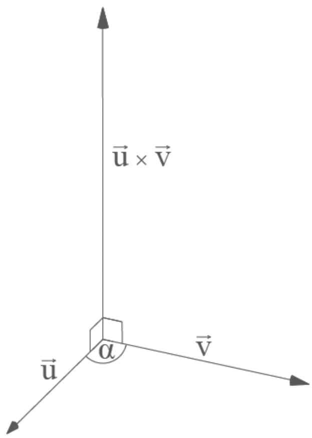
Mając dane w przestrzeni R^3 wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$, można wprowadzić pojęcie iloczynu wektorowego tych wektorów.

Definicja *iloczynu wektorowego wektorów*

Niech dane będą nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w przestrzeni R^3. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ w układzie współrzędnych OXYZ jest wektor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ spełniający warunki:

1. $\vec{w}$ jest prostopadły do każdego z wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ (czyli jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na tych wektorach),
2. $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin \varphi$, gdzie φ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Orientacja trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jest zgodna z orientacją układu OXYZ. Jeśli $\vec{u} \| \vec{v}$ (w szczególności, jeśli jeden z nich jest wektorem zerowym), to przyjmuje się, że $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.



Rys. 3.8. Iloczyn wektorowy wektorów

Jeśli dane są wektory $\vec{u}_1 = [x_1, y_1, z_1], \vec{u}_2 = [x_2, y_2, z_2]$ o ustalonych współrzędnych, wtedy iloczyn wektorowy można obliczyć ze wzoru:

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

przy czym przy obliczaniu powyższego wyznacznika wersory $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ należy traktować jak liczby.

Przykład 3.5.1.

Obliczyć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = [-1, 2, 4], \vec{v} = [2, 0, -1]$

b) $\vec{u} = [3, -2, 5], \vec{v} = [-1, 4, -7]$

c) $\vec{u} = [-3, 2, 1], \vec{v} = [-5, 1, 2]$

d) $\vec{u} = [-4, 1, 0], \vec{v} = [1, -2, -1]$

Rozwiązanie

a) $\vec{u} = [-1, 2, 4], \vec{v} = [2, 0, -1]$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k} = [-2, 7, -4]$$

b) $\vec{u} = [3, -2, 5], \vec{v} = [-1, 4, -7]$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -6\vec{i} + 16\vec{j} + 10\vec{k} = [-6, 16, 10]$$

c) $\vec{u} = [-3, 2, 1], \vec{v} = [-5, 1, 2]$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k} = [3, 1, 7]$$

d) $\vec{u} = [-4, 1, 0], \vec{v} = [1, -2, -1]$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k} = [-1, -4, 7]$$

Własności iloczynu wektorowego wektorów

Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ oraz liczba (skalar) α. Wtedy:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $(\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$, przy czym zachodzi $\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.

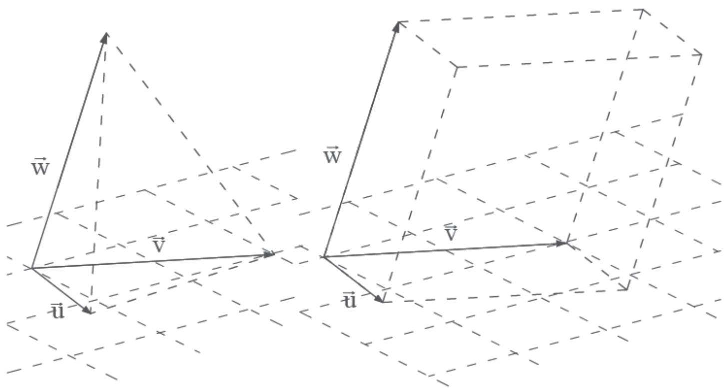
3.6. Iloczyn mieszany wektorów

Mając dane w przestrzeni R^3 wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, można wprowadzić pojęcie iloczynu mieszanego tych wektorów.

Definicja *iloczynu mieszanego wektorów*

Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ w przestrzeni R^3. Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ jest liczba

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} \tag{3.9}$$



Rys. 3.9. Iloczyn mieszany wektorów

Jeśli dane są wektory $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$, $\vec{w} = [x_3, y_3, z_3]$ o ustalonych współrzędnych, wtedy iloczyn mieszany można obliczyć ze wzoru:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Przykład 3.6.1.

Obliczyć iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

a) $\vec{u} = [0, 1, 2], \vec{v} = [-2, -1, -3], \vec{w} = [1, -1, 1]$

b) $\vec{u} = [1, 2, 3], \vec{v} = [0, 1, 2], \vec{w} = [0, 0, 1]$

c) $\vec{u} = [1, 2, -5], \vec{v} = [-1, 3, 6], \vec{w} = [0, -4, -7]$

d) $\vec{u} = [1, 2, 3], \vec{v} = [-1, -2, 4], \vec{w} = [0, 0, 1]$

Rozwiązanie

a) $\vec{u} = [0, 1, 2], \vec{v} = [-2, -1, -3], \vec{w} = [1, -1, 1]$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 4 + 2 - 0 + 2 = 5$$

b) $\vec{u} = [1, 2, 3], \vec{v} = [0, 1, 2], \vec{w} = [0, 0, 1]$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$$

c) $\vec{u} = [1, 2, -5], \vec{v} = [-1, 3, 6], \vec{w} = [0, -4, -7]$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & -4 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 0 - 20 -$$

$$-0 + 14 + 24 = -3$$

d) $\vec{u} = [1, 2, 3], \vec{v} = [-1, -2, 4], \vec{w} = [0, 0, 1]$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 + 2 - 0 = 0$$

Własności iloczynu mieszanego wektorów

Niech dane będą wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r}$ oraz liczba (skalar) α. Wtedy:

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$
- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$
- $(\vec{u} + \vec{r}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{r}, \vec{v}, \vec{w})$
- $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$
- wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ leżą na jednej płaszczyźnie $\Leftrightarrow$ $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$
- $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$, przy czym równość zachodzi $\Leftrightarrow$ wektory te są wzajemnie prostopadłe.

3.7. Wybrane zagadnienia geometrii iloczynu wektorowego i mieszanego wektorów w R^3

Iloczyn wektorowy i iloczyn mieszany wektorów znajdują liczne zastosowania w rozwiązywaniu zagadnień z zakresu geometrii analitycznej przestrzeni R^3.

Niech $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Można za ich pomocą obliczać między innymi:

- **pole równoległoboku**: pole P równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem: $P = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$,
- **pole trójkąta**: pole P trójkąta rozpiętego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem: $P = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$,
- **objętość równoległościanu**: objętość V równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ wyraża się wzorem: $V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w})|$,
- **objętość czworościanu**: objętość V czworościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ wyraża się wzorem: $V = \frac{1}{6}|(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w})|$.

Przykład 3.7.1.

Obliczyć długość h wysokości trójkąta o wierzchołkach w punktach A $(1, 1, 1)$, B $(2, 2, 2)$, C $(3, 4, 5)$ opuszczonej z wierzchołka C.

Rozwiązanie

Pole trójkąta można obliczyć, wykorzystując wzór klasyczny:

$P = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \cdot h$

ale też ze wzoru opartego na iloczynie wektorowym wektorów:

$P = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$

Należy najpierw wyznaczyć wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = [1, 1, 1]$, $\overrightarrow{AC} = [2, 3, 4]$

a następnie obliczyć ich iloczyn wektorowy

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = [1,2,1]$$

Wstawiając do wzoru: $P = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}\| \cdot h$, można wyznaczyć h

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

Przykład 3.7.2.

Obliczyć długość wysokości h czworościanu o wierzchołkach A $(0, 0, 0)$, B $(1, 0, 0)$, C $(0, 2, 3)$, D $(3, 4, 5)$ opuszczonej z wierzchołka D.

Rozwiązanie

Objętość czworościanu można obliczyć ze wzoru opartego na iloczynie mieszanym wektorów:

$V = \frac{1}{6} |(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w})|$

ale też wykorzystując wzór klasyczny na objętość ostrosłupa

$V = \frac{1}{3} P_{\Delta ABC} \cdot h_D$

Ponadto pole trójkąta można obliczyć ze wzoru opartego na iloczynie wektorowym wektorów:

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

stąd $\frac{1}{6} |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \frac{1}{3} P_{\Delta ABC} \cdot h_D$, czyli $h_D = \frac{|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}{2 \cdot P_{\Delta ABC}} = \frac{|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$

Niech wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = [1, 0, 0]$, $\quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = [0, 2, 3]$, $\quad \vec{w} = \overrightarrow{AD} = [3, 4, 5]$

oraz

$$|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = \left|\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}\right| = |-2| = 2$$

$$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}\right\| = \left\|\vec{i}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\right\| = \|[0,3,2]\| = \sqrt{13}$$

Stąd $h_D = \frac{|(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

Przykład 3.7.3.

Obliczyć długość wysokości h czworościanu o wierzchołkach A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), C (0, 2, 3), D (3, 4, 5) opuszczonej z wierzchołka A, B, C.

Rozwiązanie

Korzystając z poprzedniego przykładu, można wyznaczyć wysokości opuszczone z kolejnych punktów:

$$h_A = \frac{|(\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{w}_1)|}{2\cdot P_{\Delta BCD}} = \frac{|(\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{w}_1)|}{\|\vec{u}_1\times\vec{v}_1\|}$$

$$h_B = \frac{|(\vec{u}_2,\vec{v}_2,\vec{w}_2)|}{2\cdot P_{\Delta ACD}} = \frac{|(\vec{u}_2,\vec{v}_2,\vec{w}_2)|}{\|\vec{u}_2\times\vec{v}_2\|}$$

$$h_C = \frac{|(\vec{u}_3,\vec{v}_3,\vec{w}_3)|}{2\cdot P_{\Delta ABD}} = \frac{|(\vec{u}_3,\vec{v}_3,\vec{w}_3)|}{\|\vec{u}_3\times\vec{v}_3\|}$$

gdzie

$\vec{u}_1 = \overrightarrow{BC} = [-1, 2, 3], \vec{v}_1 = \overrightarrow{BD} = [2, 4, 5], \vec{w}_1 = \overrightarrow{BA} = [-1, 0, 0] = -\vec{u},$

$\vec{u}_2 = \overrightarrow{AC} = \vec{v},\ \ \vec{v}_2 = \overrightarrow{AD} = \vec{w},\ \ \vec{w}_2 = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

$\vec{u}_3 = \overrightarrow{AB} = \vec{u},\ \vec{v}_3 = \overrightarrow{AD} = \vec{w},\ \ \vec{w}_3 = \overrightarrow{BD} = \vec{v}$

Ponadto

$|(\vec{u}_1,\vec{v}_1,\vec{w}_1)| = |(\vec{u}_2,\vec{v}_2,\vec{w}_2)| = |(\vec{u}_3,\vec{v}_3,\vec{w}_3)| = |(\vec{u},\vec{v},\vec{w})| = 2$

oraz

$$\|\vec{u}_1\times\vec{v}_1\| = \left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}\right\| = \|[-2,11,-8]\| = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$$

$$\|\vec{u}_2\times\vec{v}_2\| = \|\vec{v}\times\vec{w}\| = \left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & 3\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}\right\| = \|[-2,9,-6]\| = \sqrt{121} = 11$$

$$\|\vec{u}_3 \times \vec{v}_3\| = \|\vec{u} \times \vec{w}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \right\| = \|[0, -5, 4]\| = \sqrt{41}$$

Stąd

$$h_A = \frac{|(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)|}{\|\vec{u}_1 \times \vec{v}_1\|} = \frac{2}{3\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{63}$$

$$h_B = \frac{|(\vec{u}_2, \vec{v}_2, \vec{w}_2)|}{\|\vec{u}_2 \times \vec{v}_2\|} = \frac{2}{11}$$

$$h_C = \frac{|(\vec{u}_3, \vec{v}_3, \vec{w}_3)|}{\|\vec{u}_3 \times \vec{v}_3\|} = \frac{2}{\sqrt{41}} = \frac{2\sqrt{41}}{41}$$

4. PROSTE I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI R^3

Po zapoznaniu się z treścią rozdziału czwartego można bez trudu:

- **podać pojęcie prostej w przestrzeni R^3,**
- **wyznaczyć równanie parametryczne, równanie kierunkowe oraz równanie krawędziowe prostej w przestrzeni R^3,**
- **wyznaczyć równanie normalne, równanie ogólne, równanie parametryczne oraz równanie wyznacznikowe płaszczyzny w przestrzeni R^3,**
- **wyznaczyć rzut punktu na płaszczyznę oraz rzut punktu na prostą w przestrzeni R^3,**
- **obliczyć odległość punktu od płaszczyzny w przestrzeni R^3,**
- **obliczyć odległość płaszczyzn równoległych w przestrzeni R^3.**

4.1. Prosta w przestrzeni R^3

Aby zdefiniować prostą w trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej R^3, najpierw należy przypomnieć, że punkty w R^3 opisuje się trójkami liczb (współrzędnymi): $A(x_A, y_A, z_A)$. W poprzednim rozdziale zostały w tej przestrzeni określone również wektory zaczepione jako pary punktów $\overrightarrow{AB}$, wektory swobodne (albo po prostu wektory), jako klasy równoważności wektorów zaczepionych względem odpowiedniej relacji. Na wektorach swobodnych określono dodawanie i mnożenie przez skalar. Można zatem powiedzieć, że wektory tworzą przestrzeń liniową, którą można uważać za tożsamą z R^3, utożsamiając punkt A z klasą równoważności wektora $\overrightarrow{OA}$. Prosta przechodząca przez O jest podprzestrzenią liniową wymiaru 1, więc ma bazę składającą się z jednego wektora V. Prostą taką można zapisać jako $p_0 = \{tV : t \in R\}$. Prosta nieprzechodząca przez zero jest warstwą pewnej jednowymiarowej podprzestrzeni liniowej i można ją zapisać jako $p = \{P + tV : t \in R\}$ albo przy użyciu współrzędnych: $x = p_1 + tv_1, y = p_2 + tv_2, z = p_3 + tv_3$. Prostą w przestrzeni R^3 można zapisać w postaci równania parametrycznego, równania kierunkowego oraz równania krawędziowego.

1. Równanie parametryczne prostej

Niech w przestrzeni R^3 dane będą dowolny punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ oraz wektor $\vec{v} = [x_v, y_v, z_v]$, który nazywa się wektorem kierunkowym prostej l. Jeżeli teraz $P(x, y, z)$ jest dowolnym punktem prostej l, to wektor $\overrightarrow{P_0P}$ jest równoległy do prostej l, a więc jest równoległy do wektora $\vec{v}$. Z własności równoległości wektorów:

$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{v} \text{ dla każdego } t \in R$$

Podstawiając $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ oraz $\vec{v} = [x_v, y_v, z_v]$, otrzymuje się $[x - x_0, y - y_0, z - z_0] = t \cdot [x_v, y_v, z_v] = [t \cdot x_v, t \cdot y_v, t \cdot z_v]$.

Porównując odpowiednie współrzędne, można napisać równanie

$$l: \begin{cases} x = x_0 + t \cdot x_v \\ y = y_0 + t \cdot y_v \\ z = z_0 + t \cdot z_v \end{cases} \text{ gdzie } t \in R \tag{4.1}$$

które jest równaniem parametrycznym prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora $\vec{v}$.

Przykład 4.1.1.

Zapisać równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\vec{v}$.

a) $P_0(2, -3, 5), \vec{v} = [-1, 2, 3]$

b) $P_0(3, 2, -7), \vec{v} = [2, -2, 4]$

c) $P_0(-1, 4, 2), \vec{v} = [3, -5, 1]$

d) $P_0(1, -1, 3), \vec{v} = [6, 3, -4]$

Rozwiązanie

a) $l: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ gdzie $t \in R$

b) $l: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -7 + 4t \end{cases}$ gdzie $t \in R$

c) $l: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 4 - 5t \\ z = 2 + t \end{cases}$ gdzie $t \in R$

d) $l: \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ gdzie $t \in R$

Przykład 4.1.2.

Napisać równania parametryczne prostej l przechodzącej przez punkty.

a) $P_1(3,-2,-5)$, $P_2(1,-2,3)$

b) $P_1(4,2,-1)$, $P_2(2,-1,0)$

c) $P_1(5,-3,-1)$, $P_2(-1,2,2)$

d) $P_1(-1,2,3)$, $P_2(4,-3,1)$

Rozwiązanie

a) $P_1(3,-2,-5)$, $P_2(1,-2,3)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2}=[-2,0,8]$

Następnie należy napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_1(3,-2,-5)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-2,0,8]$

$$l:\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -2 \\ z = -5+8t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Można też napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_2(1,-2,3)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-2,0,8]$

$$l:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -2 \\ z = 3+8t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

b) $P_1(4,2,-1)$, $P_2(2,-1,0)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2}=[-2,-3,1]$

Następnie należy napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_1(4,2,-1)$i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-2,-3,1]$

$$l:\begin{cases} x = 4-2t \\ y = 2-3t \\ z = -1+t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Można też napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_2(2,-1,0)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-2,-3,1]$

$$l:\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1-3t \\ z = t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

c) $P_1(5,-3,-1)$, $P_2(-1,2,2)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2}=[-6,5,3]$

Następnie należy napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_1(5,-3,-1)$i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = [-6,5,3]$

$$l: \begin{cases} x = 5 - 6t \\ y = -3 + 5t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Można też napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_2(-1,2,2)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = [-6,5,3]$

$$l: \begin{cases} x = -1 - 6t \\ y = 2 + 5t \\ z = 2 + 3t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

d) $P_1(-1,2,3)$, $P_2(4,-3,1)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2} = [5,-5,-2]$

Następnie należy napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_1(-1,2,3)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = [5,-5,-2]$

$$l: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Można też napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_2(4,-3,1)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = [5,-5,-2]$

$$l: \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -3 - 5t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Przykład 4.1.3.

Sprawdzić, które z równań jest równaniem parametrycznym prostej przechodzącej przez punkt $P(1,0,-2)$ równoległej do wektora $\vec{v} = [1,\ 2,\ 3]$.

a) $$l_1: \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 2 - 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

b) $$l_2: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

c) $$l_3: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

d) $$l_4: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Rozwiązanie

Wykorzystując odpowiednie współrzędne punktu i wektora na podstawie wzoru (4.1), równanie parametryczne prostej przechodzącej przez P, równoległej do wektora $\vec{v}$, przyjmuje postać:

$$l_3: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

Przykład 4.1.4.

Sprawdzić, które z równań jest równaniem parametrycznym prostej przechodzącej przez punkty $P_1(4, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 0)$.

a) $$l_1: \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

b) $$l_2: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

c) $$l_3: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = -t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

d) $$l_4: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

Rozwiązanie

Wykorzystując współrzędne punktu P_1 i wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = [-2,\ 1,\ 1]$, na podstawie wzoru (4.1), równanie parametryczne prostej przechodzącej przez P_1, równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$, przyjmuje postać:

$$l_4: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

Zamiast wyznaczać równanie parametryczne prostej, można po prostu wstawić współrzędne punktów P_1 i P_2 do każdego z równań, aby sprawdzić, czy punkty należą do kolejnych prostych (punkt należy do prostej, gdy po wstawieniu współrzędnych otrzyma się dokładnie jedno t).

a) Sprawdzenie punktu $P_1(4, 2, -1)$:

$$l_1: \begin{cases} 4 = -1 + 3t \\ 2 = 3 - 2t \\ -1 = 4 - 5t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R, \text{ stąd } \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{2}{3} \\ t = 0 \end{cases}, \text{ zatem } P_1 \notin l_1$$

Z uwagi na to, że $P_1 \notin l_1$, nie ma potrzeby sprawdzać dla P_2, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

b) Sprawdzenie punktu $P_1(4, 2, -1)$:

$$l_2: \begin{cases} 4 = 1 - 2t \\ 2 = 2 + 3t \\ -1 = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R, \text{ stąd } \begin{cases} t = -\frac{3}{2} \\ t = 0 \\ t = \frac{5}{4} \end{cases}, \text{ zatem } P_1 \notin l_2$$

Z uwagi na to, że $P_1 \notin l_2$, nie ma potrzeby sprawdzać dla P_2, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

c) Sprawdzenie punktu $P_1(4, 2, -1)$:

$$l_3: \begin{cases} 4 = 2 + 4t \\ 2 = 3 + 2t \\ -1 = -t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R, \text{ stąd } \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}, \text{ zatem } P_1 \notin l_3$$

Z uwagi na to, że $P_1 \notin l_3$, nie ma potrzeby sprawdzać dla P_2, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

d) Sprawdzenie punktu $P_1(4, 2, -1)$:

$$l_4: \begin{cases} 4 = 4 - 2t \\ 2 = 2 + t \\ -1 = -1 + t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R, \text{ stąd } \begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}, \text{ zatem } P_1 \in l_4$$

Z uwagi na to, że $P_1 \in l_4$, należy sprawdzić, czy $P_2 \in l_4$, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

Sprawdzenie punktu $P_2(2, 3, 0)$

$$l_4: \begin{cases} 2 = 4 - 2t \\ 3 = 2 + t \\ 0 = -1 + t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R, \text{ stąd } \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}, \text{ zatem } P_2 \in l_4$$

Z uwagi na to, że $P_1 \in l_4$ i $P_2 \in l_4$, więc l_4 jest równaniem parametrycznym szukanej prostej.

2. Równanie kierunkowe prostej

Z równania parametrycznego prostej można wyrugować zmienną t, otrzymując:

$$l: \begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{x_v} \\ t = \dfrac{y - y_0}{y_v} \\ t = \dfrac{z - z_0}{z_v} \end{cases}$$

co można zapisać:

$$l: \frac{x-x_0}{x_v} = \frac{y-y_0}{y_v} = \frac{z-z_0}{z_v} \tag{4.2}$$

Taka postać równania prostej nazywa się równaniem kierunkowym bądź równaniem zwyczajnym (albo równaniem w postaci podwójnej proporcji).
Uwaga. W takiej postaci w mianowniku może się pojawić 0 (bo kreska nie jest tu symbolem dzielenia, tylko proporcji). Występowanie zera w mianowniku oznacza, że licznik też jest równy zero.

Przykład 4.1.5.

Zapisać równanie kierunkowe prostej l przechodzącej przez punkt P_0 i równoległej do wektora $\vec{v}$.

a) $P_0(1, 2, -3), \vec{v} = [-1, -5, \ 0]$
b) $P_0(-2, 3, 4), \vec{v} = [1, -3, -4]$
c) $P_0(4, -7, 1), \vec{v} = [-2, \ 6, -2]$
d) $P_0(0, -1, 5), \vec{v} = [3, -3, -7]$

Rozwiązanie

a) $l\colon \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{0}$
b) $l\colon \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-4}{-4}$
c) $l\colon \frac{x-4}{-2} = \frac{y+7}{6} = \frac{z-1}{-2}$
d) $l\colon \frac{x}{3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-5}{-7}$

Przykład 4.1.6.

Zapisać równanie kierunkowe prostej l przechodzącej przez punkty P_1 i P_2.

a) $P_1(3, 0, 2), P_2(0, -2, 3)$
b) $P_1(1, 1, 1), P_2(3, -2, 4)$
c) $P_1(0, 3, 2), P_2(0, 2, -5)$
d) $P_1(4, 2, 5), P_2(1, -3, 2)$

Rozwiązanie

a) $P_1(3, 0, 2), P_2(0, -2, 3)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej
$\overrightarrow{P_1P_2} = [-3, -2, 1]$
Następnie należy napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_1(3, 0, 2)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2} = [-3, -2, 1]$
$l\colon \frac{x-3}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$

Można też napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_2(0,-2,3)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-3,-2,1]$

l: $\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{1}$

b) $P_1(1,1,1)$, $P_2(3,-2,4)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2}=[2,-3,3]$

Następnie należy napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_1(1,1,1)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[2,-3,3]$

l: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{3}$

Można też napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_2(3,-2,4)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[2,-3,3]$

l: $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{3}$

c) $P_1(0,3,2)$, $P_2(0,2,-5)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2}=[0,-1,-7]$

Następnie należy napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_1(0,3,2)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[0,-1,-7]$

l: $\frac{x}{0}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{-7}$

Można też napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_2(0,2,-5)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[0,-1,-7]$

l: $\frac{x}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+5}{-7}$

d) $P_1(4,2,5)$, $P_2(1,-3,2)$

Najpierw należy wyznaczyć wektor kierunkowy szukanej prostej

$\overrightarrow{P_1P_2}=[-3,-5,-3]$

Następnie należy napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_1(4,2,5)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-3,-5,-3]$

l: $\frac{x-4}{-3}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z-5}{-3}$

Można też napisać równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt $P_2(1,-3,2)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}=[-3,-5,-3]$

l: $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{-5}=\frac{z-2}{-3}$

Przykład 4.1.7.

Wyznaczyć punkty, w których prosta o równaniu $\frac{x-3}{-3}=\frac{y}{-2}=\frac{z-2}{1}$ przecina płaszczyzny układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć punkt przecięcia danej prostej z płaszczyzną OZY, należy podstawić do podanego równania $x = 0$

$\frac{-3}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$

Stąd $\frac{y}{-2} = 1$ oraz $\frac{z-2}{1} = 1$

Z czego $y = -2$ oraz $z = 3$

Szukanym punktem P_1 jest punkt o współrzędnych (0, –2, 3).

Aby wyznaczyć punkt przecięcia danej prostej z płaszczyzną OXZ, należy podstawić do podanego równania $y = 0$

$\frac{x-3}{-3} = \frac{0}{-2} = \frac{z-2}{1}$

Stąd $\frac{x-3}{-3} = 0$ oraz $\frac{z-2}{1} = 0$

Z czego $x = 3$ oraz $z = 2$

Szukanym punktem P_2 jest punkt o współrzędnych (3, 0, 2).

Aby wyznaczyć punkt przecięcia danej prostej z płaszczyzną OXY, należy podstawić do podanego równania $z = 0$

$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{-2}{1}$

Stąd $\frac{x-3}{-3} = -2$ oraz $\frac{y}{-2} = -2$

Z czego $x = 9$ oraz $y = 4$

Szukanym punktem P_3 jest punkt o współrzędnych (9, 4, 0).

Przykład 4.1.8.

Sprawdzić, które z równań jest równaniem kierunkowym prostej przechodzącej przez punkt $P(1, 0, -2)$ równoległej do wektora $\vec{v} = [1, 2, 3]$.

a) $l_1: \frac{x-4}{-2} = y + 1 = z$

b) $l_2: x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$

c) $l_3: \frac{x-4}{-2} = y - 2 = z + 1$

d) $l_4: \frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{1}$

Rozwiązanie

Należy wyznaczyć równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt P, równoległej do wektora $\vec{v}$ zgodnie ze wzorem (4.2):

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z+2}{3}$

Zatem jest to prosta l_2: $x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$

Przykład 4.1.9.

Sprawdzić, które z równań jest równaniem parametrycznym prostej przechodzącej przez punkty $P_1(4,2,-1)$, $P_2(2,3,0)$.

a) $l_1: \frac{x-4}{-2} = y - 2 = z + 1$

b) $l_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$

c) $l_3: x - 1 = \frac{y}{2} = z + 1$

d) $l_4: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

Rozwiązanie

Należy wyznaczyć równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt P_1, równoległej do wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$, zgodnie ze wzorem (4.2)

$\overrightarrow{P_1P_2} = [-2,1,1]$

$\frac{x-4}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$

Zatem jest to prosta $l_1: \frac{x-4}{-2} = y - 2 = z + 1$

Zamiast wyznaczać równanie parametryczne prostej, można po prostu wstawić współrzędne punktów P_1 i P_2 do każdego z równań, aby sprawdzić, czy punkty należą do kolejnych prostych (punkt należy do prostej, gdy po wstawieniu współrzędnych otrzyma się dokładnie jedno t).

a) Sprawdzenie punktu $P_1(4,2,-1)$

$l_1: \frac{4-4}{-2} = 2 - 2 = -1 + 1$, stąd $0 = 0 = 0$, zatem $P_1 \in l_1$

Z uwagi na to, że $P_1 \in l_1$, należy sprawdzić, czy $P_2 \in l_1$, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

Sprawdzenie punktu $P_2(2,3,0)$

$l_1: \frac{4-2}{-2} = 2 - 3 = -1 - 0$, stąd $-1 = -1 = -1$, zatem $P_2 \in l_1$

Z uwagi na to, że $P_1 \in l_1$ i $P_2 \in l_1$, więc l_1 jest równaniem parametrycznym szukanej prostej.

b) Sprawdzenie punktu $P_1(4,2,-1)$

$l_2: \frac{4-1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{-1+2}{3}$, stąd $3 = 1 = \frac{1}{3}$, zatem $P_1 \notin l_2$

Z uwagi na to, że $P_1 \notin l_2$, nie ma potrzeby sprawdzać dla P_2, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

c) Sprawdzenie punktu $P_1(4,2,-1)$

$l_3: 4 - 1 = \frac{2}{2} = -1 + 1$, stąd $3 = 1 = 0$, zatem $P_1 \notin l_3$

Z uwagi na to, że $P_1 \notin l_3$, nie ma potrzeby sprawdzać dla P_2, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

d) Sprawdzenie punktu $P_1(4, 2, -1)$

$l_4\colon \frac{4-1}{3} = \frac{2-2}{2} = \frac{-1-3}{1}$, stąd $1 = 0 = -4$, zatem $P_1 \notin l_4$

Z uwagi na to, że $P_1 \notin l_4$, nie ma potrzeby sprawdzać dla P_2, ponieważ oba punkty mają należeć do prostej.

3. Równanie krawędziowe prostej

W zagadnieniach praktycznych prosta często pojawia się jako część wspólna (krawędź przecięcia) dwóch nierównoległych płaszczyzn[1]. Niech tymi płaszczyznami będą:

$$\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ oraz } \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Aby wyznaczyć równanie prostej, która jest częścią wspólną tych płaszczyzn, należy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Należy zauważyć, że płaszczyzny π_1 oraz π_2 nie są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne $\vec{v}_1 = [A_1, B_1, C_1]$ i $\vec{v}_2 = [A_2, B_2, C_2]$ nie są równoległe, tj. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 \neq 0.1$ Wektor $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1$ jest jednocześnie wektorem kierunkowym (równoległym) prostej *l*, który można oznaczyć jako $\vec{v}$. W świetle powyższego można zapisać, że $\vec{v} = [A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2]$.

Przykład 4.1.10.

Mając dane równanie krawędziowe prostej, wyznaczyć jej równanie parametryczne i równanie kierunkowe.

a) $l_1\colon \begin{cases} x + 3y + 4z + 5 = 0 \\ 3x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$

b) $l_2\colon \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

c) $l_3\colon \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

d) $l_4\colon \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

[1] O płaszczyznach w dalszej części opracowania.

Rozwiązanie

a) $l_1\colon \begin{cases} x + 3y + 4z + 5 = 0 \\ 3x + \ \ y + \ \ z + 4 = 0 \end{cases}$

Należy wyznaczyć wektory normalne płaszczyzn

$\vec{v}_1 = [1, 3, 4],\ \vec{v}_2 = [3, 1, 1]$

Aby sprawdzić, czy wektory normalne płaszczyzn nie są równoległe, należy obliczyć ich iloczyn wektorowy

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\vec{i} + 11\vec{j} - 8\vec{k} = [-1, 11, -8] \neq 0$$

Wyznaczony wektor $\vec{v} = [-1, 11, -8]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej. Należy wyznaczyć punkt należący do prostej, wykorzystując układ równań i przyjmując, np. $x = 0$

$$l_1\colon \begin{cases} 0 + 3y + 4z + 5 = 0 \\ 0 + \ \ y + \ \ z + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 4z = -5 \\ \ \ y + \ \ z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -z - 4 \\ 3(-z - 4) + 4z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -z - 4 \\ -3z - 12 + 4z = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -z - 4 \\ z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -11 \\ z = 7 \end{cases}$$

Zatem szukany punkt to $P(0, -11, 7)$. Mając wektor kierunkowy prostej i punkt, przez który przechodzi, można zapisać na podstawie wzoru (4.1) równanie parametryczne tej prostej

$$l_1\colon \begin{cases} x = -t \\ y = -11 + 11t \\ z = 7 - 8t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

oraz na podstawie wzoru (4.2) równanie kierunkowe tej prostej

$$l_1\colon \frac{x}{-1} = \frac{y+11}{11} = \frac{z-7}{-8}$$

b) $l_2\colon \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ \ \ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Należy wyznaczyć wektory normalne płaszczyzn

$\vec{v}_1 = [2, -1, 1],\ \vec{v}_2 = [1, 1, 1]$

Aby sprawdzić, czy wektory normalne płaszczyzn nie są równoległe, należy obliczyć ich iloczyn wektorowy

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k} = [-2, -1, 3] \neq 0$$

Wyznaczony wektor $\vec{v} = [-2, -1, 3]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej. Należy wyznaczyć punkt należący do prostej, wykorzystując układ równań i przyjmując, np. $x = 0$

$$l_2: \begin{cases} 0 - y + z + 1 = 0 \\ 0 + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + z = -1 \\ \ \ y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = y - 1 \\ y + (y - 1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ \ z = y - 1 \\ 2y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Zatem szukany punkt to $P(0, 1, 0)$. Mając wektor kierunkowy prostej i punkt, przez który przechodzi, można zapisać na podstawie wzoru (4.1) równanie parametryczne tej prostej

$$l_2: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 - t \\ z = 3\,t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

oraz na podstawie wzoru (4.2) równanie kierunkowe tej prostej

$$l_2: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

c) $l_3: \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + 3z \quad = 0 \end{cases}$

Należy wyznaczyć wektory normalne płaszczyzn

$\vec{v}_1 = [2, -1, 1], \vec{v}_2 = [1, 2, 3]$

Aby sprawdzić, czy wektory normalne płaszczyzn nie są równoległe, należy obliczyć ich iloczyn wektorowy

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k} = [-5, -5, 5] \neq 0$$

Wyznaczony wektor $\vec{v} = [-5, -5, 5]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej. Należy wyznaczyć punkt należący do prostej, wykorzystując układ równań i przyjmując, np. $x = 0$

$$l_3\colon \begin{cases} 0 - y + z + 1 = 0 \\ 0 + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + z = -1 \\ 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = y - 1 \\ 2y + 3(y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = y - 1 \\ 5y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{5} \\ z = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Zatem szukany punkt to $P\left(0, \frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. Mając wektor kierunkowy prostej i punkt, przez który przechodzi, można zapisać na podstawie wzoru (4.1) równanie parametryczne tej prostej

$$l_3\colon \begin{cases} x = -5t \\ y = \frac{3}{5} - 5t \\ z = -\frac{2}{5} + 5\,t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

oraz na podstawie wzoru (4.2) równanie kierunkowe tej prostej

$$l_3\colon \frac{x}{-5} = \frac{y - \frac{3}{5}}{-5} = \frac{z + \frac{2}{5}}{5}$$

d) $l_4\colon \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$

Należy wyznaczyć wektory normalne płaszczyzn

$\vec{v}_1 = [1, 1, 1], \vec{v}_2 = [1, -2, -1]$

Aby sprawdzić, czy wektory normalne płaszczyzn nie są równoległe, należy obliczyć ich iloczyn wektorowy

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k} = [1, -2, -3] \neq 0$$

Wyznaczony wektor $\vec{v} = [1, -2, -3]$ jest wektorem kierunkowym szukanej prostej. Należy wyznaczyć punkt należący do prostej, wykorzystując układ równań i przyjmując, np. $x = 0$

$$l_4\colon \begin{cases} 0 + y + z + 1 = 0 \\ 0 - y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + z = -1 \\ -y - 2z = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -z - 1 \\ -(-z - 1) - 2z = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -z - 1 \\ -z = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$
Zatem szukany punkt to $P(0, -1, 0)$. Mając wektor kierunkowy prostej i punkt, przez który przechodzi, można zapisać na podstawie wzoru (4.1) równanie parametryczne tej prostej

$$l_4: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 2t \\ z = -3\,t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

oraz na podstawie wzoru (4.2) równanie kierunkowe tej prostej

$$l_4: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-3}$$

4.2. Płaszczyzna w przestrzeni R^3

W trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej R^3 oprócz prostej, którą określono jako podprzestrzeń liniową wymiaru 1, występuje także płaszczyzna, którą również można traktować jako podprzestrzeń liniową lub jej warstwę, ale wymiaru 2. Położenie płaszczyzny w przestrzeni jest określone jednoznacznie, gdy znane są jeden jej punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i wektor $\vec{v} = [A, B, C]$ prostopadły do tej płaszczyzny, tzw. wektor normalny płaszczyzny.

1. Równanie normalne płaszczyzny

Niech $P_0(x_0, y_0, z_0)$ będzie dowolnym punktem płaszczyzny, a $\vec{v} = [A, B, C]$ będzie wektorem prostopadłym do tej płaszczyzny. Wtedy płaszczyznę można określić jako zbiór wszystkich punktów $P(x, y, z)$ takich, że wektor $\overrightarrow{P_0P}$ jest prostopadły do wektora $\vec{v}$ i z warunku prostopadłości otrzymuje się:

$$\overrightarrow{P_0P} \circ \vec{v} = 0$$

Ponieważ $\overrightarrow{P_0P} = [x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ to po obliczeniu iloczynu skalarnego

$$[x - x_0, y - y_0, z - z_0] \circ [A, B, C] = 0$$

uzyskuje się

$$\pi\colon A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{4.3}$$

Jest to tzw. równanie normalne płaszczyzny.

Przykład 4.2.1.

Wyznaczyć równanie normalne płaszczyzny o wektorze normalnym $\vec{v}$, przechodzącej przez punkt P_0.

a) $P_0(1,2,3), \vec{v}=[-3,2,1]$

b) $P_0(-1,0,3), \vec{v}=[-1,-2,5]$

c) $P_0\left(4,3,\sqrt{2}\right), \vec{v}=[1,0,-1]$

d) $P_0(3,-2,2), \vec{v}=[-2,1,3]$

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć równanie normalne płaszczyzny, należy wstawić współrzędne punktu P_0 i współrzędne wektora $\vec{v}$ do równania (4.3).

a) $\pi_1\colon -3(x-1)+2(y-2)+(z-3)=0$

b) $\pi_2\colon -(x+1)-2(y-0)+5(z-3)=0$

c) $\pi_3\colon (x-4)-\left(z-\sqrt{2}\right)=0$

d) $\pi_4\colon -2(x-3)+(y+2)+3(z-2)=0$

2. Równanie ogólne płaszczyzny

Z równania normalnego płaszczyzny postaci:

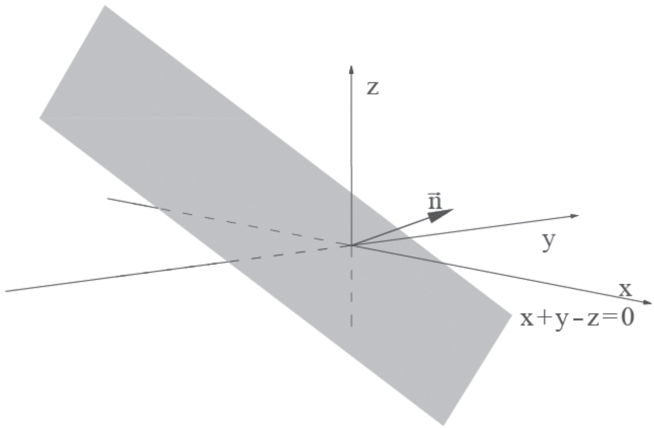
$$\pi\colon A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

bardzo łatwo można przejść do innej postaci równania tej płaszczyzny. Wystarczy przyjąć, że $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, uzyskując równanie:

$$\pi\colon Ax+By+Cz+D=0 \tag{4.4}$$

gdzie $A^2+B^2+C^2>0$, które nazywa się równaniem ogólnym płaszczyzny.

Wektorem normalnym tej płaszczyzny jest wektor $\vec{v}=[A,B,C]$, a prosta przechodzi przez punkty $P_1\left(-\frac{D}{A},0,0\right)$, $P_2\left(0,-\frac{D}{B},0\right)$, $P_3\left(0,0,-\frac{D}{C}\right)$ (o ile oczywiście $A,B,C\neq 0$).



Rys. 4.1. Położenie płaszczyzny w przestrzeni R^3

Wyróżnia się szczególne przypadki położenia płaszczyzny w układzie współrzędnych w przestrzeni R^3. Jeżeli płaszczyzna:

- przechodzi przez początek układu, to D = 0,
- jest równoległa do osi OZ, to C = 0,
- jest równoległa do osi OY, to B = 0,
- jest równoległa do osi OX, to A = 0,
- jest prostopadła do osi OZ, to A = B = 0 itd.

Przykład 4.2.2.

Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P_1(3, 2, 1)$, $P_2(-1, 5, 2)$, $P_3(2, -3, 1)$.

Rozwiązanie

Należy zbudować wektory zaczepione w tym samym punkcie (np. P_1)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u} = [-4, 3, 1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{v} = [-1, -5, 0]$

Następnie w celu znalezienia wektora normalnego szukanej płaszczyzny należy obliczyć ich iloczyn wektorowy

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\vec{i} - \vec{j} + 23\vec{k} = [5, -1, 23] \neq 0$$

Uzyskany wektor jest wektorem normalnym szukanej płaszczyzny. Za punkt P_0 można przyjąć jeden z podanych punktów (np. P_1). Wówczas $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -5 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 - 23 \cdot 1 = -36$

Stąd równanie normalne płaszczyzny ma postać $5x - y + 23z - 36 = 0$.

Nie ma znaczenia, który z punktów zostanie przyjęty za P_0 w celu obliczenia D.

Gdyby za P_0 przyjąć punkt P_2, wówczas:

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -5 \cdot (-1) - (-1) \cdot 5 - 23 \cdot 2 = -36$

Gdyby za P_0 przyjąć punkt P_3, wówczas:

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -5 \cdot 2 - (-1) \cdot (-3) - 23 \cdot 1 = -36$

Przykład 4.2.3.

Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny o wektorze normalnym $\vec{v}$ przechodzącej przez punkt P_0.

a) $P_0(1, 2, 3), \vec{v} = [-3, 2, 1]$

b) $P_0(-1, 0, 3), \vec{v} = [-1, -2, 5]$

c) $P_0\left(4, 3, \sqrt{2}\right), \vec{v} = [1, 0, -1]$

d) $P_0(3, -2, 2), \vec{v} = [-2, 1, 3]$

Rozwiązanie

Korzystając z przykładu 4.2.1, w którym wyznaczano równania normalne, można obecnie je wykorzystać do wyznaczenia równań ogólnych.

a) $\pi_1: -3(x - 1) + 2(y - 2) + (z - 3) = 0$
$\pi_1: -3x + 3 + 2y - 4 + z - 3 = 0$
$\pi_1: -3x + 2y + z - 4 = 0$

b) $\pi_2: -(x + 1) - 2(y - 0) + 5(z - 3) = 0$
$\pi_2: -x - 1 - 2y + 5z - 15 = 0$
$\pi_2: -x - 2y + 5z - 16 = 0$

c) $\pi_3: (x - 4) - \left(z - \sqrt{2}\right) = 0$
$\pi_3: x - 4 - z + \sqrt{2} = 0$
$\pi_3: x - z + \sqrt{2} - 4 = 0$

d) $\pi_4: -2(x - 3) + (y + 2) + 3(z - 2) = 0$
$\pi_4: -2x + 6 + y + 2 + 3z - 6 = 0$
$\pi_4: -2x + y + 3z + 2 = 0$

3. Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (nieleżących na jednej prostej) wektorów $\vec{u} = [x_u, y_u, z_u]$ i $\vec{v} = [x_v, y_v, z_v]$ ma postać:

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + rx_u + sx_v \\ y = y_0 + ry_u + sy_v \\ z = z_0 + rz_u + sz_v \end{cases} \quad \text{gdzie } r, s \in R \tag{4.5}$$

Jest to tzw. równanie parametryczne płaszczyzny.

Przykład 4.2.4.

Wyznaczyć równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty:

a) $P_1(3,2,1)$, $P_2(-1,5,2)$, $P_3(2,-3,1)$

b) $P_1(0,-2,0)$, $P_2(-1,0,2)$, $P_3(1,1,1)$

c) $P_1(1,3,2)$, $P_2(4,-3,1)$, $P_3(3,-2,1)$

d) $P_1(-2,4,5)$, $P_2(1,4,-3)$, $P_3(2,4,0)$

Rozwiązanie

a) $P_1(3,2,1)$, $P_2(-1,5,2)$, $P_3(2,-3,1)$

Należy zbudować wektory zaczepione w tym samym punkcie (np. P_1)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u} = [-4,3,1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{v} = [-1,-5,0]$

Następnie, wykorzystując współrzędne tych wektorów oraz współrzędne dowolnego spośród danych punktów (np. P_1), zgodnie ze wzorem (4.5), równanie parametryczne szukanej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi: \begin{cases} x = 3 - 4r - s \\ y = 2 + 3r - 5s \\ z = 1 + r \end{cases} \quad \text{gdzie } r, s \in R$$

Gdyby zbudować wektory zaczepione w tym samym punkcie (np. P_2)

$\overrightarrow{P_2P_1} = \vec{u} = [4,-3,-1]$, $\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{v} = [3,-8,-1]$

Następnie, wykorzystując współrzędne tych wektorów oraz współrzędne dowolnego spośród danych punktów (np. P_2), zgodnie ze wzorem (4.5), równanie parametryczne szukanej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi: \begin{cases} x = -1 + 4r + 3s \\ y = 5 - 3r - 8s \\ z = 2 - r - s \end{cases} \quad \text{gdzie } r, s \in R$$

b) $P_1(0,-2,0)$, $P_2(-1,0,2)$, $P_3(1,1,1)$

Należy zbudować wektory zaczepione w tym samym punkcie (np. P_1)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u} = [-1,2,2]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{v} = [1,3,1]$

Następnie, wykorzystując współrzędne tych wektorów oraz współrzędne dowolnego spośród danych punktów (np. P_1), zgodnie ze wzorem (4.5), równanie parametryczne szukanej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi: \begin{cases} x = -r + s \\ y = -2 + 2r + 3s \\ z = 2r + s \end{cases} \quad \text{gdzie } r, s \in R$$

c) $P_1(1,3,2)$, $P_2(4,-3,1)$, $P_3(3,-2,1)$

Należy zbudować wektory zaczepione w tym samym punkcie (np. P_1)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u} = [3,-6,-1]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{v} = [2,-5,-1]$

Następnie, wykorzystując współrzędne tych wektorów oraz współrzędne dowolnego spośród danych punktów (np. P_1), zgodnie ze wzorem (4.5), równanie parametryczne szukanej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + 3r + 2s \\ y = 3 - 6r - 5s \\ z = 2 - r - s \end{cases} \quad \text{gdzie } r, s \in R$$

d) $P_1(-2, 4, 5)$, $P_2(1, 4, -3)$, $P_3(2, 4, 0)$

Należy zbudować wektory zaczepione w tym samym punkcie (np. P_1)

$\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{u} = [3, 0, -8]$, $\overrightarrow{P_1P_3} = \vec{v} = [4, 0, -5]$

Następnie, wykorzystując współrzędne tych wektorów oraz współrzędne dowolnego spośród danych punktów (np. P_1), zgodnie ze wzorem (4.5), równanie parametryczne szukanej płaszczyzny przyjmuje postać:

$$\pi: \begin{cases} x = -2 + 3r + 4s \\ y = 4 \\ z = 5 - 8r - 5s \end{cases} \quad \text{gdzie } r, s \in R$$

4. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Jeżeli płaszczyzna nie przechodzi przez początek układu współrzędnych ani nie jest równoległa do żadnej osi układu, to można jej równanie zapisać w postaci odcinkowej:

$$\pi: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \qquad \text{gdzie } a, b, c \neq 0 \tag{4.6}$$

Płaszczyzna opisana takim równaniem przecina osie OX, OY oraz OZ układu współrzędnych OXYZ w punktach $P_x(a, 0, 0)$, $P_y(0, b, 0)$, $P_z(0, 0, c)$.

Aby z równania ogólnego otrzymać równanie odcinkowe, wystarczy przenieść D na prawą stronę równania i podzielić równanie przez –D.

Przykład 4.2.5.

Wyznaczyć równanie odcinkowe płaszczyzny opisanej równaniem ogólnym.

a) $\pi_1: -3x + 2y + z - 4 = 0$

b) $\pi_2: -x - 2y + 5z - 16 = 0$

c) $\pi_3: x - 2y + z = 0$

d) $\pi_4: -2x + y + 3z + 2 = 0$

Rozwiązanie

a) $\pi_1: -3x + 2y + z - 4 = 0$

$\pi_1: -3x + 2y + z = 4 \quad |:4$

$\pi_1: \frac{x}{-\frac{4}{3}} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$

b) $\pi_2\colon -x - 2y + 5z - 16 = 0$

$\pi_2\colon -x - 2y + 5z = 16 \ \ |{:}16$

$\pi_2\colon \frac{x}{-16} + \frac{y}{-8} + \frac{z}{\frac{16}{5}} = 1$

c) $\pi_3\colon x - 2y + z = 0$ brak postaci odcinkowej, ponieważ płaszczyzna ta przechodzi przez początek układu współrzędnych

a) $\pi_4\colon -2x + y + 3z + 2 = 0$

d) $\pi_4\colon -2x + y + 3z = -2 \ \ |{:}(-2)$

$\pi_4\colon \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-\frac{2}{3}} = 1$

5. Równanie wyznacznikowe płaszczyzny

Każde trzy niewspółliniowe punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę π, która je zawiera. Niech $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Punkt $P(x, y, z)$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty P_1, P_2, P_3, wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_1P_3}$ są liniowo zależne. Równanie poszukiwanej płaszczyzny π można zatem wyrazić w postaci:

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

Przykład 4.2.6.

Korzystając ze wzoru (4.7), wyznaczyć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty P_1, P_2, P_3.

a) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 2, 3)$, $P_3(0, 0, 1)$

b) $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 1, 1)$, $P_3(3, 2, 1)$

c) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 2, 3)$, $P_3(0, 0, 1)$

d) $P_1(2, 3, 1)$, $P_2(1, 2, 3)$, $P_3(1, 2, 1)$

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru (4.7), uzyskuje się:

a) $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 2, 3)$, $P_3(0, 0, 1)$

$$\pi\colon \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 2 - 0 & 3 - 0 \\ 0 - 0 & 0 - 0 & 1 - 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{stąd} \quad \pi\colon \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Po obliczeniu wyznacznika równanie przyjmuje postać:

π: $2x - y = 0$ – równanie ogólne, normalne, brak postaci odcinkowej.

b) $P_1(1,1,1), P_2(2,1,1), P_3(3,2,1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2-1 & 1-1 & 1-1 \\ 3-1 & 2-1 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{stąd} \quad \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Po obliczeniu wyznacznika równanie przyjmuje postać:

$\pi: z - 1 = 0$ – równanie ogólne, normalne, brak postaci odcinkowej.

c) $P_1(0,0,0), P_2(1,2,3), P_3(0,0,1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 2-0 & 3-0 \\ 0-0 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{stąd} \quad \pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Po obliczeniu wyznacznika równanie przyjmuje postać:

$\pi: 2x - y = 0$ – równanie ogólne, normalne, brak postaci odcinkowej.

d) $P_1(2,3,1), P_2(1,2,3), P_3(1,2,1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1-2 & 2-3 & 3-1 \\ 1-2 & 2-3 & 1-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{stąd} \quad \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Po obliczeniu wyznacznika równanie przyjmuje postać:

$\pi: 2(x-2) - 2(y-3) = 0$ – równanie normalne,

$\pi: 2x - 2y + 2 = 0$ – równanie ogólne,

$\pi: \frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1$ – równanie odcinkowe.

4.3. Wybrane zagadnienia geometrii punktów, prostych i płaszczyzn w R^3

1. Rzut punktu na płaszczyznę

Niech $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ będzie dowolną płaszczyzną, a $P(x,y,z)$ dowolnym punktem w R^3. Aby wyznaczyć rzut prostopadły tego punktu na tę płaszczyznę, należy napisać równanie prostej przechodzącej przez P i prostopadłej do π (wektor normalny płaszczyzny to $[A,B,C]$), a następnie obliczyć współrzędne punktu przecięcia prostej z płaszczyzną.

Przykład 4.3.1.

Wyznaczyć rzut punktu P na płaszczyznę π.

a) $P(1,3,5), \pi: 2x + 3y + 4z - 2 = 0$

b) $P(1,1,1), \pi: x - 2y - 3z + 2 = 0$

c) $P(2,3,-1), \pi: -x - y - z - 1 = 0$

d) $P(-1,-2,-3)$, $\pi: 2x - y - 3z - 37 = 0$

Rozwiązanie

a) $P(1,3,5)$ $\pi: 2x + 3y + 4z - 2 = 0$

Z równania $2x + 3y + 4z - 2 = 0$ należy odczytać jej wektor normalny $[2,3,4]$.

Wykorzystując ten wektor oraz współrzędne punktu P, można napisać równanie parametryczne prostej *l* przechodzącej przez P i prostopadłej do tej płaszczyzny:

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Podstawiając je do równania płaszczyzny, należy obliczyć t

$2(1 + 2t) + 3(3 + 3t) + 4(5 + 4t) - 2 = 0$

$2 + 4t + 9 + 9t + 20 + 16t - 2 = 0$

$29t + 29 = 0$

$29t = -29$

$t = -1$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej

$$l: \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot (-1) \\ y = 3 + 3 \cdot (-1) \\ z = 5 + 4 \cdot (-1) \end{cases} \quad \text{stąd } l: \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Zatem rzutem punktu $P(1,3,5)$ na płaszczyznę $2x + 3y + 4z - 2 = 0$ jest punkt $P'(-1,0,1)$.

b) $P(1,1,1)$ $\pi: x - 2y - 3z + 2 = 0$

Z równania $x - 2y - 3z + 2 = 0$ należy odczytać jej wektor normalny $[1,-2,-3]$.

Wykorzystując ten wektor oraz współrzędne punktu P, można napisać równanie parametryczne prostej *l* przechodzącej przez P i prostopadłej do tej płaszczyzny

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad \text{gdzie } t \in R$$

Podstawiając je do równania płaszczyzny, należy obliczyć t

$(1 + t) - 2(1 - 2t) - 3(1 - 3t) + 2 = 0$

$1 + t - 2 + 4t - 3 + 9t + 2 = 0$

$14t - 2 = 0$

$14t = 2$

$t = \frac{1}{7}$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej

$$l: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{7} \\ y = 1 - 2 \cdot \frac{1}{7} \\ z = 1 - 3 \cdot \frac{1}{7} \end{cases} \qquad \text{stąd} \quad l: \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = \frac{5}{7} \\ z = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Zatem rzutem punktu $P(1, 1, 1)$ na płaszczyznę $x - 2y - 3z + 2 = 0$ jest punkt $P'\left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}\right)$.

c) $P(2, 3, -1)$ $\pi: -x - y - z - 1 = 0$

Z równania $-x - y - z - 1 = 0$ należy odczytać jej wektor normalny $[-1, -1, -1]$.

Wykorzystując ten wektor oraz współrzędne punktu P, można napisać równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez P i prostopadłej do tej płaszczyzny

$$l: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - t \\ z = -1 - t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

Podstawiając je do równania płaszczyzny, należy obliczyć t

$-(2 - t) - (3 - t) - (-1 - t) - 1 = 0$

$-2 + t - 3 + t + 1 + t - 1 = 0$

$3t - 5 = 0$

$3t = 5$

$t = \frac{5}{3}$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej:

$$l: \begin{cases} x = 2 - \frac{5}{3} \\ y = 3 - \frac{5}{3} \\ z = -1 - \frac{5}{3} \end{cases} \qquad \text{stąd} \quad l: \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Zatem rzutem punktu $P(2, 3, -1)$na płaszczyznę $-x - y - z - 1 = 0$ jest punkt $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.

d) $P(-1, -2, -3)$ $\pi: 2x - y - 3z - 37 = 0$

Z równania $2x - y - 3z - 37 = 0$ należy odczytać jej wektor normalny $[2, -1, -3]$.

Wykorzystując ten wektor oraz współrzędne punktu P, można napisać równanie parametryczne prostej l przechodzącej przez P i prostopadłej do tej płaszczyzny:

$$l: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \qquad \text{gdzie } t \in R$$

Podstawiając je do równania płaszczyzny, należy obliczyć t:

$2(-1+2t)-(-2-\ t)-3(-3-3t)-37=0$

$-2+4t+2+t+9+9t-37=0$

$14t-28=0$

$14t=28$

$t=2$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej:

$l\colon \begin{cases} x=-1+2\cdot 2 \\ y=-2-2 \\ z=-3-3\cdot 2 \end{cases}$ stąd $l\colon \begin{cases} x=\ \ \ 3 \\ y=-4 \\ z=-9 \end{cases}$

Zatem rzutem punktu $P(-1,-2,-3)$ na płaszczyznę $2x-y-3z-37=0$ jest punkt $P'(3,-4,-9)$.

2. Rzut punktu na prostą

Niech $l\colon \begin{cases} x=x_0+t\cdot x_v \\ y=y_0+t\cdot y_v \\ z=z_0+t\cdot z_v \end{cases}$ będzie dowolną prostą, a $P(x,y,z)$ dowolnym punktem w R^3. Aby wyznaczyć rzut prostopadły tego punktu na tę prostą, należy zauważyć, że szukany punkt P' jest punktem wspólnym prostej i płaszczyzny, która przechodzi przez dany punkt P i jest prostopadła do tej prostej.

Przykład 4.3.2.

Wyznaczyć rzut punktu P na prostą l

a) $P(2,1,1)$, $l\colon \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-\ \ t \\ z=1+4t \end{cases}$ gdzie $t\in R$

b) $P(0,0,1)$, $l\colon \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ gdzie $t\in R$

c) $P(0,1,-1)$, $l\colon \begin{cases} x=t \\ y=1-3t \\ z=1+2t \end{cases}$ gdzie $t\in R$

d) $P(2,3,-1)$, $l\colon \begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+3t \\ z=-1-\ \ t \end{cases}$ gdzie $t\in R$

Rozwiązanie

a) $P(2,1,1)$, $\quad l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - \quad t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ $\quad$ gdzie $t \in R$

Z równania parametrycznego prostej $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - \quad t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$ należy odczytać wektor normalny płaszczyzny prostopadłej do danej prostej

$\vec{v} = [2, -1, 4]$.

Aby napisać równanie ogólne płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, w której zawiera się rzut punktu $P(2, 1,1)$, najpierw należy wyznaczyć D

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 - 4 \cdot 1 = -7$

Stąd równanie ogólne płaszczyzny π: $2x - y + 4z - 7 = 0$

Podstawiając równanie prostej l do równania płaszczyzny π, można obliczyć t

$2(1 + 2t) - (2 - t) + 4(1 + 4t) - 7 = 0$

$2 + 4t - 2 + t + 4 + 16t - 7 = 0$

$21t - 3 = 0$

$21t = 3$

$t = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej l

$l: \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{7} \\ y = 2 - \quad \frac{1}{7} \\ z = 1 + 4 \cdot \frac{1}{7} \end{cases}$ $\quad$ stąd $\; l: \begin{cases} x = \frac{9}{7} \\ y = \frac{13}{7} \\ z = \frac{11}{7} \end{cases}$

Zatem rzutem punktu $P(2, 1, 1)$na prostą $l: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - \quad t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$

jest punkt $P'\left(\frac{9}{7}, \frac{13}{7}, \frac{11}{7}\right)$.

b) $P(0,0,1)$, $\quad l: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ $\quad$ gdzie $t \in R$

Z równania parametrycznego prostej $l: \begin{cases} x = \quad t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ należy odczytać wektor normalny płaszczyzny prostopadłej do danej prostej

$\vec{v} = [1, 2, 3]$.

Aby napisać równanie ogólne płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, w której zawiera się rzut punktu $P(0, 0,1)$, najpierw należy wyznaczyć D

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3$

Stąd równanie ogólne płaszczyzny π: $x + 2y + 3z - 3 = 0$

Podstawiając równanie prostej l do równania płaszczyzny π, można obliczyć t

$t + 2 \cdot 2t + 2 \cdot 2t - 3 = 0$

$t + 4t + 4t - 3 = 0$

$9t - 3 = 0$

$9t = 3$

$t = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej l

$l: \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \cdot \frac{1}{3} \\ z = 3 \cdot \frac{1}{3} \end{cases}$ stąd $l: \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = 1 \end{cases}$

Zatem rzutem punktu $P(0, 0, 1)$ na prostą $l: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

jest punkt $P'\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$.

c) $P(0, 1, -1)$, $l: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ gdzie $t \in R$

Z równania parametrycznego prostej $l: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ należy odczytać wektor normalny płaszczyzny prostopadłej do danej prostej:

$\vec{v} = [1, -3, 2]$.

Aby napisać równanie ogólne płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, w której zawiera się rzut punktu $P(0, 1, -1)$, najpierw należy wyznaczyć D

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 5$

Stąd równanie ogólne płaszczyzny π: $x - 3y + 2z + 5 = 0$

Podstawiając równanie prostej l do równania płaszczyzny π, można obliczyć t

$t - 3(1 - 3t) + 2(1 + 2t) + 5 = 0$

$t - 3 + 9t + 2 + 4t + 5 = 0$

$14t + 4 = 0$

$14t = -4$

$t = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej l

$$l: \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = 1 - 3 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \\ z = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) \end{cases} \quad \text{stąd} \quad l: \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = \frac{13}{7} \\ z = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Zatem rzutem punktu $P(0, 1, -1)$ na prostą $l: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

jest punkt $P'\left(-\frac{2}{7}, \frac{13}{7}, \frac{3}{7}\right)$.

d) $P(2, 3, -1)$, $l: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ gdzie $t \in R$

Z równania parametrycznego prostej $l: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$ należy odczytać wektor normalny płaszczyzny prostopadłej do danej prostej

$\vec{v} = [2, 3, -1]$.

Aby napisać równanie ogólne płaszczyzny $Ax + By + Cz + D = 0$, w której zawiera się rzut punktu $P(2, 3, -1)$, najpierw należy wyznaczyć D

$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = -2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) = -14$

Stąd równanie ogólne płaszczyzny π: $2x + 3y - z - 14 = 0$

Podstawiając równanie prostej l do równania płaszczyzny π, można obliczyć t

$2(-1 + 2t) + 3(-1 + 3t) - (-1 - t) - 14 = 0$

$-2 + 4t - 3 + 9t + 1 + t - 14 = 0$

$14t - 18 = 0$

$14t = 18$

$t = -\frac{18}{14} = -\frac{9}{7}$

Obliczone t należy wstawić do równania parametrycznego prostej l

$$l: \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) \\ y = -1 + 3 \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) \\ z = -1 - \left(-\frac{9}{7}\right) \end{cases} \quad \text{stąd} \quad l: \begin{cases} x = -\frac{25}{7} \\ y = -\frac{34}{7} \\ z = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Zatem rzutem punktu $P(2, 3, -1)$ na prostą $l: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases}$

jest punkt $P'\left(-\frac{25}{7}, -\frac{34}{7}, \frac{2}{7}\right)$.

3. Odległość punktu od płaszczyzny

Niech $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ będzie dowolną płaszczyzną, a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dowolnym punktem w R^3. Aby obliczyć odległość tego punktu od tej płaszczyzny, wystarczy sobie uświadomić, że ta odległość to długość odcinka $\overline{P_0 P_0{}'}$, gdzie $P_0{}'$ jest rzutem prostopadłym punktu P_0 na płaszczyznę π. W wyniku przekształcenia wzorów ogólnych uzyskać można wzór na odległość punktu od płaszczyzny:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{4.8}$$

Przykład 4.3.3.

Obliczyć odległość punktu P_0 od płaszczyzny π.

a) $P_0(4, 2, 8)$, $\pi\colon x + 2y - 2z + 2 = 0$

b) $P_0(0, 0, 0)$, $\pi\colon x + 2y - 3z + 5 = 0$

c) $P_0(1, 1, 1)$, $\pi\colon x - 2y - 3z + 2 = 0$

d) $P_0(2, 3, -1)$, $\pi\colon -x - y - z - 1 = 0$

Rozwiązanie

a) $P_0(4, 2, 8)$ $\quad \pi\colon x + 2y - 2z + 2 = 0$

Aby obliczyć odległość punktu $P_0(4, 2, 8)$ ze wzoru 4.8 od płaszczyzny $\pi\colon x + 2y - 2z + 2 = 0$, należy podstawić równanie płaszczyzny, do którego wstawia się współrzędne punktu P_0 do wzoru (4.8):

$$d(P_0, \pi) = \frac{|4 + 2\cdot 2 - 2\cdot 8 + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|4 + 4 - 16 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|-6|}{\sqrt{9}} = 2$$

b) $P_0(0, 0, 0)$ $\quad \pi\colon x + 2y - 3z + 5 = 0$

Aby obliczyć odległość punktu $P_0(0, 0, 0)$ ze wzoru 4.8 od płaszczyzny $\pi\colon x + 2y - 3z + 5 = 0$, należy podstawić równanie płaszczyzny, do którego wstawia się współrzędne punktu P_0 do wzoru (4.8):

$$d(P_0, \pi) = \frac{|0 + 2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{|0 + 0 - 0 + 5|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|5|}{\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{14}$$

c) $P_0(1, 1, 1)$ $\quad \pi\colon x - 2y - 3z + 2 = 0$

Aby obliczyć odległość punktu $P_0(1, 1, 1)$ ze wzoru 4.8 od płaszczyzny $\pi\colon x - 2y - 3z + 2 = 0$, należy podstawić równanie płaszczyzny, do którego wstawia się współrzędne punktu P_0 do wzoru (4.8):

$$d(P_0, \pi) = \frac{|1 - 2\cdot 1 - 3\cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{|1 - 2 - 3 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|-2|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

d) $P_0(2,3,-1)$ $\pi: -x - y - z - 1 = 0$

Aby obliczyć odległość punktu $P_0(2,3,-1)$ ze wzoru 4.8 od płaszczyzny $\pi: -x - y - z - 1 = 0$, należy podstawić równanie płaszczyzny, do którego wstawia się współrzędne punktu P_0 do wzoru (4.8):

$$d(P_0,\pi) = \frac{|-2-3+1-1|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-5|}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

4. Odległość płaszczyzn równoległych

Niech $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ będą dowolnymi płaszczyznami w R^3. Płaszczyzny te są równoległe, jeśli ich wektory normalne mają ten sam kierunek, tzn.

$$[A_1, B_1, C_1] = \alpha \cdot [A_2, B_2, C_2], \quad \alpha \neq 0 \tag{4.9}$$

Odległość płaszczyzn równoległych jest to odległość dowolnego punktu jednej płaszczyzny od drugiej. Aby ją obliczyć, należy znaleźć jakikolwiek punkt pierwszej płaszczyzny (np. przyjmując $x = 0$, $y = 0$ i obliczyć z). Następnie, korzystając ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny, obliczyć odległość danego punktu od danej płaszczyzny.

Przykład 4.3.4.

Obliczyć odległość dwóch płaszczyzn π_1 i π_2.

a) $\pi_1: 2x + 3y - z + 5 = 0, \pi_2: 2x + 3y - z + 7 = 0$

b) $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0, \pi_2: 2x - 4y - 6z + 1 = 0$

c) $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0, \pi_2: -x + 2y + 3z - 1 = 0$

d) $\pi_1: 2x - 3z - 1 = 0,\ \pi_2: 6x - 9z + 2 = 0$

Rozwiązanie

a) $\pi_1: 2x + 3y - z + 5 = 0 \quad \pi_2: 2x + 3y - z + 7 = 0$

Wektory normalne rozważanych płaszczyzn są równe, co oznacza, że płaszczyzny są równoległe. Należy wybrać jakikolwiek punkt pierwszej płaszczyzny $\pi_1: 2x + 3y - z + 5 = 0$ (np. przyjmując $x = 0$ oraz $y = 0$, obliczony $z = 5$). Następnie, korzystając ze wzoru (4.9), należy obliczyć odległość wskazanego punktu $P_0(0,0,5)$ od drugiej płaszczyzny $\pi_2: 2x + 3y - z + 7 = 0$

$$d = \frac{|2\cdot 0+3\cdot 0-5+7|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{|2|}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

b) $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0 \quad \pi_2: 2x - 4y - 6z + 1 = 0$

Należy sprawdzić warunek równoległości płaszczyzn (4.9). Wektor normalny płaszczyzny $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0$ to $[1,-2,-3]$, natomiast wektor normalny płaszczyzny $\pi_2: 2x - 4y - 6z + 1 = 0$ to $[2, -4, -6]$. Jak widać, dla $\alpha = 2$ można zapisać kombinację liniową wektorów jako: $[2, -4, -6] = 2 \cdot [1, -2, -3]$, co oznacza, że płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe. W kolejnym kroku należy wybrać jakikolwiek punkt pierwszej płaszczyzny $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0$ (np. przyjmując $x = 0$ oraz $z = 0$, obliczony $y = 1$). Następnie, korzystając ze wzoru (4.9), należy obliczyć odległość wskazanego punktu $P_0(0, 1, 0)$ od drugiej płaszczyzny $\pi_2: 2x - 4y - 6z + 1 = 0$

$$d = \frac{|2\cdot 0 - 4\cdot 1 - 6\cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-6)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{4+16+36}} = \frac{3}{\sqrt{56}} = \frac{3\sqrt{14}}{28}$$

c) $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0 \quad \pi_2: -x + 2y + 3z - 1 = 0$

Należy sprawdzić warunek równoległości płaszczyzn (4.9). Wektor normalny płaszczyzny $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0$ to $[1, -2, -3]$, natomiast wektor normalny płaszczyzny $\pi_2: -x + 2y + 3z - 1 = 0$ to $[-1, 2, 3]$. Jak widać, dla $\alpha = -1$ można zapisać kombinację liniową wektorów jako: $[-1, 2, 3] = (-1) \cdot [1, -2, -3]$, co oznacza, że płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe. W kolejnym kroku należy wybrać jakikolwiek punkt pierwszej płaszczyzny $\pi_1: x - 2y - 3z + 2 = 0$ (np. przyjmując $x = 0$ oraz $z = 0$, obliczony $y = 1$). Następnie, korzystając ze wzoru (4.9), należy obliczyć odległość wskazanego punktu $P_0(0, 1, 0)$ od drugiej płaszczyzny $\pi_2: -x + 2y + 3z - 1 = 0$.

$$d = \frac{|(-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

d) $\pi_1: 2x - 3z - 1 = 0 \quad \pi_2: 6x - 9z + 2 = 0$

Należy sprawdzić warunek równoległości płaszczyzn (4.9). Wektor normalny płaszczyzny $\pi_1: 2x - 3z - 1 = 0$ to $[2, 0, -3]$, natomiast wektor normalny płaszczyzny $\pi_2: 6x - 9z + 2 = 0$ to $[6, 0, -9]$. Jak widać, dla $\alpha = 3$ można zapisać kombinację liniową wektorów jako: $[6, 0, -9] = 3 \cdot [2, 0, -3]$ co oznacza, że płaszczyzny π_1 i π_2 są równoległe. W kolejnym kroku należy wybrać jakikolwiek punkt pierwszej płaszczyzny $\pi_1: 2x - 3z - 1 = 0$ (np. przyjmując $x = 0$ oraz $y = 0$, obliczony $z = -\frac{1}{3}$). Następnie, korzystając ze wzoru (4.9), należy obliczyć odległość wskazanego punktu $P_0\left(0, 0, -\frac{1}{3}\right)$ od drugiej płaszczyzny $\pi_2: 6x - 9z + 2 = 0$.

$$d = \frac{\left|6\cdot 0 - 9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\right|}{\sqrt{6^2 + 0^2 + (-9)^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{36+0+81}} = \frac{5}{3\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{39}$$

LITERATURA

1. Bartosiewicz Z., Mozyrska D., Pawłuszewicz E. (2003), *Matematyka. Skrypt dla studentów kierunku zarządzanie i marketing*, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok
2. Gdowski B., Pluciński E. (1982), *Zadania z rachunku wektorowego i geometrii analitycznej*, PWN, Warszawa
3. Gewert M., Skoczylas Z. (oprac.) (2005), *Algebra liniowa 1. Kolokwia i egzaminy*, wyd. IX uzup., Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław
4. Janowski W. (1973), *Matematyka. Podręcznik dla wydziałów mechanicznych i elektrycznych politechnik*, t. 1, PWN, Warszawa
5. Jurlewicz T., Skoczylas Z. (2005), *Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory*, wyd. XII popr., Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław
6. Jurlewicz T., Skoczylas Z. (2005), *Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania*, wyd. XI popr., Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2005
7. Jurlewicz T., Skoczylas Z. (2014), *Algebra liniowa 1*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław
8. Klukowski J., Nabiałek I. (1999), *Algebra dla studentów*, WNT, Warszawa
9. Leja F. (1972), *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa
10. Otto E. (red.) (1984), *Matematyka dla wydziałów budowlanych i mechanicznych*, cz. 1–2, PWN, Warszawa
11. Trajdos (2023), *Matematyka: liczby zespolone, wektory, macierze, wyznaczniki, geometria analityczna i różniczkowa*, cz.3, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne PWN, Warszawa

SPIS RYSUNKÓW

Dr ELŻBIETA GOŁĄBESKA, profesor Politechniki Białostockiej, od ponad trzydziestu lat wykłada matematykę i statystykę. Od 2009 roku pracuje na Wydziale Budownictwa i Nauk o Środowisku, gdzie kieruje również studiami podyplomowymi wycena nieruchomości.

Jest docenianym przez studentów nauczycielem akademickim. Dwukrotnie została laureatką konkursu na Najlepszego Dydaktyka Politechniki Białostockiej na WBiNŚ i Wykładowcą Roku w plebiscycie „Kuriera Porannego".

Jest autorką wielu monografii, m.in. *Wybrane problemy związane z realizacją systemów wykorzystujących zieloną energię* (E. Gołąbeska, A. Harasimowicz, 2023) czy *Sieć ryzyka inwestycyjnego na rynku nieruchomości* (E. Gołąbeska, 2018). Publikuje również we współautorstwie ze studentami (zarówno książki, jak i artykuły), m.in.: *Wirtualna rzeczywistość, sztuczna inteligencja oraz modelowanie informacji o budynkach jako nowoczesne technologie w marketingu nieruchomości* (E. Gołąbeska, I. Biała, 2023), *Stan techniczny budynku mieszkalnego w kontekście jego efektywności energetycznej* (E. Gołąbeska, A. Drewnowska, 2019).

Matematyka – wybrane zagadnienia algebry liniowej i geometrii analitycznej. Skrypt dla studentów kierunków inżynierskich jest dostosowany do obowiązujących programów nauczania i realizacji założonych efektów uczenia się. Przedstawia podstawowe zagadnienia aparatu matematycznego, które skupiają się głównie na ich praktycznym wykorzystaniu. Konstrukcja każdego rozdziału jest jednolita i zawiera w szczególności kluczowe definicje, twierdzenia i własności z uwzględnieniem ich zastosowania w licznych przykładach.

Politechnika Białostocka