

Rozdział 4

O WŁASNOŚCIACH PIERŚCIENI Z GRADACJAMI WZGLĘDEM PÓŁGRUP

Marek Kępczyk*

Streszczenie Naszym głównym celem jest zebranie, uporządkowanie oraz uzupełnienie znanych wyników dotyczących pierścieni z różnego typu S -gradacjami, gdzie S jest półgrupą. Skupimy się głównie na klasach pierścieni, które są bezpośrednimi uogólnieniami klasy pierścieni nilpotentnych. Przedstawimy własności pierścieni T -nilpotentnych oraz radykalnych w sensie radykału pierwszego, tzw. pierścieni β -radykalnych. Na tej podstawie wykażemy, że są to klasy zamknięte na gradacje względem skończonych 2-grup. Analogiczny fakt udowodniony był wcześniej dla klasy PI -pierścieni. Podamy opisy wszystkich półgrup S , dla których klasa PI -pierścieni jest zamknięta względem coraz ogólniejszych typów S -gradacji. Przedstawimy też trudności, które stoją na przeszkodzie do uzyskania analogicznych charakterystyk dla obydwu pozostałych klas pierścieni.

Słowa kluczowe: półgrupy, kraty, pierścienie z gradacją, radykały

Wprowadzenie

W zrozumieniu zagadnień poruszanych w tym rozdziale monografii wystarczy znajomość podstawowych faktów z Teorii Pierścieni Nieprzemiennej, które można znaleźć na przykład w Lam (1991).

Historycznie bardzo ważna motywacja do badań i wyników, które przedstawimy, dotyczących pierścieni, pochodzi z teorii grup. Mianowicie w latach 50. ubiegłego wieku zajmowano się intensywnie grupami, które są iloczynami dwóch podgrup właściwych. Niech G będzie grupą A, B jej podgrupami. Załóżmy, że dla każdego $g \in G$ istnieją takie $a \in A$ oraz $b \in B$, że $g = ab$. Zapisujemy to krótko $G = A \cdot B$. Ito (1955) pokazał, że jeżeli A i B są grupami abelowymi, to G jest grupą metaabelową. Kegel oraz Wielandt (1958, 1961) pokazali, że jeżeli A i B są skończonymi grupami nilpotentnymi, to G jest grupą rozwiązalną.

* Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, Wiejska 45A, 15-351 Białystok, m.kepczyk@pb.edu.pl

DOI 10.24427/978-83-67185-18-9_4

Kegel przeniósł powyższą tematykę na grunt teorii pierścieni w następujący sposób. Niech R będzie pierścieniem łącznym oraz R_1, R_2 jego podpierścieniami. Załóżmy, że dla każdego $r \in R$ istnieją takie $r_1 \in R_1$ oraz $r_2 \in R_2$, że $r = r_1 + r_2$. Zapisujemy to krótko $R = R_1 + R_2$. Kegel również wykazał w Kegel (1962/63), że jeżeli R_1 oraz R_2 są nilpotentne (tzn. spełniają tożsamości postaci $x_1 x_2 \cdots x_m = 0$), to R również. W Bahturin i Giambruno (1994) udowodniono, że jeżeli R_1 oraz R_2 są przemienne, to R spełnia tożsamość $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$, gdzie $[a, b] = ab - ba$. W Kępczyk i Puczyłowski (2001) pokazano, że jeżeli R_1 oraz R_2 są nil-pierścieniami ograniczonego indeksu (tzn. spełniają tożsamość postaci $x^n = 0$), to R jest pierścieniem nil ograniczonego indeksu. Okazało się (Ferrero i Puczyłowski (1989)), że sławny w teorii pierścieni, ciągle otwarty Problem Koethe ma pozytywne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy prawdziwa jest następująca implikacja: jeżeli R_1 jest pierścieniem nilpotentnym R_2 jest nil-pierścieniem, to R jest nil-pierścieniem (tzn. dla każdego $x \in R$ istnieje liczba naturalna n taka, że $x^n = 0$).

Wyniki te dały początek wielu badań koncentrujących się głównie na dwóch obszarach. Wiele prac dotyczyło po pierwsze pierścieni, które są sumami dwóch podpierścieni w kontekście radykałów (np. Ferrero i Puczyłowski (1989); Kępczyk i Puczyłowski (1996)) oraz po drugie tożsamości wielomianowych (np. Beidar i Mikhalev (1995), Felzenszwalb, Giambruno i Leal (2003), Kępczyk (2015), Kępczyk (2016)). Beidar i Mikhalev, zainspirowani wynikami częściowymi, postawili w Beidar i Mikhalev (1995) następujący problem. Przypuśćmy, że R_1 oraz R_2 spełniają tożsamości wielomianowe (krótko, są *PI*-pierścieniami), czy wtedy również R jest *PI*-pierścieniem? Całościową pozytywną odpowiedź podano w Kępczyk (2017). Przeniesienie wspomnianych wyników do ogólniejszego przypadku większej liczby podpierścieni ograniczyło się, jak do tej pory wedle naszej wiedzy, do następującego stwierdzenia, które ze względu na pewne tematyczne podobieństwo do niektórych wyników z rozdziałów 4.4 oraz 4.5, dla kompletności przedstawimy z dowodem:

Stwierdzenie 4.0.1. (Kępczyk, 2020, Stwierdzenie 4.3) Niech R_1, R_2, R_3 będą podpierścieniami pierścienia R takimi, że $R = R_1 + R_2 + R_3$. Jeżeli R_1, R_2 oraz R_3 są podpierścieniami z zerowym mnożeniem, to R jest pierścieniem nilpotentnym.

Dowód. Rozważmy następujący prawostronny ideał $P = R_1 + R_1 R$ pierścienia R . Na podstawie modularności kraty podgrup addytywnych pierścienia R dostajemy $P = R_1 + (R_2 + R_3) \cap P$. Oczywiście $R_1 <_r P$, bo $R_1 P = \{0\}$. Standardowy fakt dotyczący pierścieni nilpotentnych mówiący, że jednostronny ideał nilpotentny generuje dwustronny ideał nilpotentny, implikuje że ideał $H \triangleleft P$ generowany przez R_1 jest nilpotentny. Ponadto $P = H + (R_2 + R_3) \cap P$. Pokażemy, że $((R_2 + R_3) \cap P)^5 = \{0\}$.

Niech $a_i = b_i + c_i \in (R_2 + R_3) \cap P$, gdzie $b_i \in R_2$, $c_i \in R_3$ oraz $a_i \in P$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Ponieważ $R_1 P = \{0\}$, więc:

$$rb_i = -rc_i \text{ dla dowolnego } r \in R_1. \quad (4.0.1)$$

Ponadto $R_2^2 = R_3^2 = \{0\}$, więc $a_1a_2a_3a_4a_5 = b_1c_2b_3c_4b_5 + c_1b_2c_3b_4c_5$. Zauważmy, że $c_2b_3 = t + x + y$, gdzie $t \in R_1$, $x \in R_2$ oraz $y \in R_3$. Na podstawie (4.0.1) mamy $tc_4 = -tb_4$, więc $b_1c_2b_3c_4b_5 = b_1(t + x + y)c_4b_5 = b_1tc_4b_5 = -b_1tb_4b_5 \in b_1tR_2^2 = \{0\}$. Podobnie pokazujemy, że $c_1b_2c_3b_4c_5 = 0$. Wobec tego $a_1a_2a_3a_4a_5 = 0$ i stąd $((R_2 + R_3) \cap P)^5 = \{0\}$.

Ponieważ $((R_2 + R_3) \cap P)^5 = \{0\}$ oraz $P/H = (((R_2 + R_3) \cap P) + H)/H$, P jest nilpotentny. Dodatkowo ideał $J \triangleleft R$ generowany przez P jest nilpotentny. Ponadto $R/J = (R_2 + J)/J + (R_3 + J)/J$. Teraz do R/J wystarczy zastosować twierdzenie Kegel (z Kegel (1962/63)), z którego wynika, że R/J jest pierścieniem nilpotentnym. W konsekwencji R jest również nilpotentny, co kończy dowód. $\square$

Wyjaśnienie braku innych podobnych rezultatów wynika z twierdzenia Bokutia z Bokut (1976), który wykazał, że dowolną algebrę nad ciałem można włożyć w algebrę prostą, która jest sumą trzech podalgebr nilpotentnych indeksu nilpotentności trzy. Zatem algebra tego typu może mieć właściwie dowolnie zadane własności, co pokazuje, że przypadki sum dwóch i więcej niż dwóch podpierścieni są zdecydowanie odmienne. Ponadto w tej ogólniejszej sytuacji nie można spodziewać się żadnych prawidłowości bez dodatkowych założeń dotyczących mnożenia.

Niektóre ważne konstrukcje w teorii pierścieni opierają się na sumach ich podgrup addytywnych ze ściśle określonymi warunkami dotyczącymi mnożenia. Są to pierścienie z różnego typu gradacjami. W pracy zajmujemy się przedstawieniem wyników odnoszących się do zagadnień opisanych wyżej (dla dwóch podpierścieni) dla szeregu coraz ogólniejszych rodzajów gradacji. Dokładniej, zajmujemy się sumami półkratowymi, S - gradacjami oraz S -sumami pierścieni, gdzie S jest półgrupą. Skoncentrujemy się na przedstawieniu, uporządkowaniu i rozwinięciu wyników z Janeski i Weissglass (1973); Kelarev (1993); Kelarev i McConnell (1995); Teply, Turman i Quesada (1980); Weissglass (1973), głównie w odniesieniu do klas pierścieni β radykalnych, T -nilpotentnych oraz PI -pierścieni. Własności, potrzebne fakty i nowe wyniki dotyczące klasy β -radykalnych i pierścieni T -nilpotentnych zaprezentujemy w dwóch pierwszych rozdziałach. W trzecim rozdziale przedstawimy wyniki związane z sumami półkratowymi, głównie w odniesieniu do znanych klas radykalnych. W kolejnych dwóch rozdziałach zajmujemy się sumami półgrupowymi oraz S -sumami, odpowiednio. Główne rezultaty tam przedstawione dotyczyć będą klasy PI -pierścieni. W przypadku pozostałych klas, wyniki jakie uzyskaliśmy, doprowadzają do kilku otwartych problemów, które przedstawimy. Większość znanych wyników, których będziemy potrzebować dla kompletności oraz wygody czytelnika, przedstawimy z dowodami.

Wszystkie pierścienie rozważane w pracy są pierścieniami łącznymi. Oznaczając przez I ideał, ideał lewostronny lub ideał prawostronny pierścienia A , piszemy $I \triangleleft A$, $I <_l$ lub $I <_r A$, odpowiednio. Przez $\mathbb{N}$ oznaczamy zbiór liczb naturalnych. Niech R będzie pierścieniem oraz $S \subseteq R$. Wtedy $r_R(S) = \{x \in R \mid Sx = \{0\}\}$ oraz $l_R(S) = \{x \in R \mid xS = \{0\}\}$.

Niech A będzie pierścieniem. Przez A^n , gdzie n jest liczbą naturalną, oznaczamy podpierścień pierścienia A generowany przez produkty postaci $x_1 x_2 \cdots x_n$ elementów z A . Pierścień A nazywa się nilpotentnym jeżeli $A^n = 0$ dla pewnego $n \geq 1$. Klasę wszystkich pierścieni nilpotentnych oznaczamy przez $\mathcal{N}$. Powiemy, że pierścień A jest lokalnie nilpotentny, jeżeli każdy jego skończony podzbiór generuje podpierścień nilpotentny w A . Klasę wszystkich pierścieni lokalnie nilpotentnych oznaczamy przez $\mathcal{L}$. Jeżeli ideał I jest złożony z elementów nilpotentnych nazywamy go nil ideałem. Nil radykałem pierścienia A nazywamy sumę wszystkich nil ideałów pierścienia A i oznaczamy przez $\mathcal{K}(A)$. Klasę wszystkich nil-pierścieni oznaczamy przez $\mathcal{K}$. Wiadomo, że $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{K}$.

4.1 Pierścień β -radykalne

Rozpocznijmy ten paragraf przedstawiając definicję radykału pierwszego β . Posłużymy się konstrukcją Baera. Oznaczmy przez $W(A)$ sumę nilpotentnych ideałów pierścienia A . Możemy zdefiniować teraz następujący łańcuch ideałów $W_\alpha(A)$ pierścienia A dla dowolnej liczby porządkowej α :

- (1) $W_0(A) = 0$.
- (2) Załóżmy, że $\alpha > 0$ i $W_\gamma(A)$ określone zostało dla $\gamma < \alpha$. Wtedy:
 - (a) $W_\alpha(A) = \bigcup_{\gamma < \alpha} W_\gamma(A)$, jeżeli α jest liczbą graniczną.
 - (b) $W_\alpha(A)$ jest takim ideałem A , że $W_\alpha(A)/W_{\alpha-1}(A) = W(A/W_{\alpha-1}(A))$, jeżeli α nie jest liczbą graniczną.

Radykał pierwszy pierścienia A określamy następująco:

$$\beta(A) = \bigcup_{\alpha \geq 0} W_\alpha(A). \quad (4.1.1)$$

Przez β oznaczamy klasę wszystkich pierścieni A takich, że $\beta(A) = A$. Klasę β nazywamy radykałem pierwszym lub β -radykałem. Pierścień $A \in \beta$ nazywamy pierścieniem β -radykalnym, natomiast $A/\beta(A)$ pierścieniem półpierwszym. Powiemy, że pierścień R jest sumą podprostą pierścieni R_t , gdzie $t \in T$ wtedy i tylko wtedy, gdy R zawiera takie ideały I_t , że $\bigcap I_t = \{0\}$ oraz $R_t \simeq R/I_t$. Wiadomo, że każdy pierścień półpierwszy jest sumą podprostą pierścieni pierwszych. Zatem $A \notin \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje właściwy ideał I pierścienia A taki, że A/I jest pierścieniem pierwszym.

Łatwo pokazać, że β -radykał jest dziedziczny na podpierścień, tzn. dowolny podpierścień pierścienia β -radykalnego jest również β -radykalny. Ponadto radykał β jest prawostronnie silny tzn., jeżeli $I <_r R$ i $I \in \beta$, to $I + RI \in \beta$, czyli $I \subseteq \beta(R)$.

Niech R będzie pierścieniem, T dowolnym zbiorem indeksów takim, że $I_t \triangleleft R$ oraz $I_t \in \beta$, gdzie $t \in T$. Wtedy oczywiście $\sum_{t \in T} I_t \in \beta$.

Zauważmy, że dla liczby porządkowej α , to $a \in W_\alpha(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy aA jest nilpotentny modulo $W_\gamma(A)$ dla pewnego $\gamma < \alpha$. Pokażemy, że jeżeli $I \triangleleft A$, to $W_\alpha(I) \subseteq W_\alpha(A)$. Oczywiście $W_0(I) = W_0(A)$. Załóżmy, że $i \in W_\alpha(I)$, $\alpha > 0$ oraz $W_\beta(I) \subseteq W_\beta(A)$ dla dowolnego $\beta < \alpha$. Stąd $(iA)^{2n} = (iAiA)^n \subseteq (iI)^n \subseteq W_\gamma(I) \subseteq W_\gamma(A)$ dla pewnej liczby naturalnej n i liczby porządkowej $\gamma < \alpha$. Zatem nasza teza wynika na podstawie indukcji pozaskończonej.

Teraz wykażemy, że jeżeli $I <_r A$ i $I \subseteq W_\alpha(A)$, to $I = W_\alpha(I)$. Jeszcze raz zastosujemy indukcję względem liczby porządkowej α . Dla $\alpha = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że $\alpha > 0$ i teza zachodzi dla dowolnego $\gamma < \alpha$. Wystarczy teraz pokazać, że $I \subseteq W_\alpha(I)$. Weźmy $i \in I$. Ponieważ $i \in W_\alpha(A)$, otrzymujemy $(iI)^n \subseteq W_\gamma(A)$ dla pewnej liczby naturalnej n i liczby porządkowej $\gamma < \alpha$. Wykorzystując założenie indukcyjne dostajemy $(iI)^n = W_\gamma((iI)^n)$. Ale $(iI)^n \triangleleft iI$, więc $W_\gamma((iI)^n) \subseteq W_\gamma(iI)$. Zatem $(iI)^n \subseteq W_\gamma(iI)$.

Udowodniliśmy następujący

Lemat 4.1. (por.(Chebotar, Lee i Puczyłowski, 2010, Stwierdzenie 1) Niech A będzie pierścieniem oraz α będzie liczbą porządkową.

- (1) Jeżeli $I \triangleleft A$, to $W_\alpha(I) \subseteq W_\alpha(A)$.
- (2) Jeżeli $I <_r A$ oraz $I \subseteq W_\alpha(A)$, to $I = W_\alpha(I)$.

Przyjmijmy w dalszych rozważaniach tego rozdziału następującą konwencję: piszemy $A^0 \subseteq W_\alpha(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy A jest nilpotentny modulo $W_\gamma(A)$ dla pewnej liczby porządkowej $\gamma < \alpha$.

Lemat 4.2. (Kępczyk, 2020, Lemat 2.2.) Jeżeli A jest pierścieniem oraz $A^n \subseteq W_\alpha(A)$ dla pewnej liczby naturalnej n i liczby porządkowej α , to $(bA)^{n-1} \subseteq W_\alpha(bA)$ dla każdego $b \in A$.

Dowód. Niech $b \in A$ oraz załóżmy, że $n = 1$. W konsekwencji $A = W_\alpha(A)$, więc bA jest nilpotentny modulo $W_\gamma(A)$ dla pewnej liczby porządkowej $\gamma < \alpha$. Zatem $(bA)^k \subseteq W_\gamma(A)$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Stąd na mocy Lematu 4.1 mamy, że $(bA)^k = W_\gamma((bA)^k) \subseteq W_\gamma(bA)$ i wobec tego $(bA)^{n-1} = (bA)^0 \subseteq W_\alpha(bA)$.

Założmy teraz, że $n > 1$, czyli $2(n-1) \geq n$. Zatem $(bA)^{n-1} \subseteq (A^2)^{n-1} \subseteq A^n \subseteq W_\alpha(A)$. Stąd na mocy Lematu 4.1 mamy, że $(bA)^{n-1} = W_\alpha((bA)^{n-1}) \subseteq W_\alpha(bA)$. $\square$

Przykład 4.1. Niech F będzie ciałem, $F[x]$ pierścieniem wielomianów zmiennej x nad F oraz (x^i) ideałem w $F[x]$ generowanym przez x^i , gdzie $i \in \mathbb{N}$. Połóżmy $R_i = xF[x]/(x^i)$. Rozważmy następującą sumę prostą pierścieni R_i :

$$R = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} R_i. \quad (4.1.2)$$

Zauważmy, że $W(R) = R$, ale R nie jest pierścieniem nilpotentnym, czyli $\mathcal{N} \subsetneq \beta$.

Daje się również wykazać, że $\beta \subsetneq \mathcal{L}$. W dalszej części tego rozdziału będziemy wykorzystywać specjalnie dobrany porządek częściowy.

Przypomnijmy teraz definicję porządku częściowego i kilka potrzebnych dalej pojęć z nim związanych.

Definicja 4.1. Porządkiem częściowym zbioru X nazywamy relację $\preceq$, która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia, tzn.

1. $\forall x \in X \ x \preceq x$,
2. $\forall x, y \in X \ (x \preceq y \wedge y \preceq x) \implies (x = y)$,
3. $\forall x, y, z \in X \ (x \preceq y \wedge y \preceq z) \implies (x \preceq z)$.

Porządek częściowy $\preceq$ zbioru X nazywamy liniowym, jeżeli spełnia następujący warunek:

$$\forall x, y \in X \ (x \preceq y) \vee (y \preceq x).$$

Podzbiór Y zbioru X uporządkowanego przez pewien porządek częściowy $\leq$ nazywamy łańcuchem jeżeli Y jest uporządkowany liniowo przez $\leq$. Podzbiór $Z \subseteq X$, w którym żadne dwa elementy nie są porównywalne nazywamy antyłańcuchem.

Definicja 4.2. Element $x \in X$ nazywamy elementem maksymalnym w zbiorze $(X, \leq)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $y \in X$, $y \leq x$ lub zbiór $\{x, y\}$ jest antyłańcuchem w X .

Zauważmy, że jeżeli $A \in \beta$, to istnieje taka liczba naturalna $n > 1$ i liczba porządkowa α , że $A^n \subseteq W_\alpha(A)$. Zbiór par (α, n) , gdzie α jest liczbą porządkową oraz n jest liczbą naturalną, można uporządkować liniowo w następujący sposób:

$$(\gamma, m) \preceq (\alpha, n) \iff \gamma \leq \alpha \vee (\alpha = \gamma \wedge m \leq n).$$

Jeżeli $(\gamma, m) \preceq (\alpha, n)$ oraz $(\gamma, m) \neq (\alpha, n)$ piszemy $(\gamma, m) \prec (\alpha, n)$. Zatem dla dowolnego $A \in \beta$ istnieje minimalna para (α, n) taka, że $A^n \subseteq W_\alpha(A)$. Tak dobraną parę (α, n) będziemy nazywać β -indeksem pierścienia A .

Jesteśmy przygotowani, żeby przedstawić przydatny później wynik, którego dowód w Kępczyk (2020) zawiera lukę. Podamy teraz pełny dowód tego twierdzenia.

Twierdzenie 4.1. (por.(Kępczyk, 2020, Stwierdzenie 2.4)) Niech R_1 będzie podpierścieniem, a R_2 będzie podgrupą grupy addytywnej pierścienia R oraz $R = R_1 + R_2$. Jeżeli $R_1 \in \beta$ oraz $R_2^2 \subseteq R_1$, to $R \in \beta$.

Dowód. Zauważmy, że dowolny obraz homomorficzny pierścienia R spełnia założenia twierdzenia. Jeżeli zatem $R \neq 0$ oraz $R \notin \beta$, możemy założyć, że R jest pierścieniem pierwszym.

Rozważmy:

$$T = R_2 + R_2^3 + R_2^5 + \dots$$

Ponieważ $T^2 \subseteq R_1$ możemy dodatkowo założyć, że $T = R_2$. Dalej dowód przeprowadzimy przez indukcję względem β -indeksu $i = (\alpha, n)$ pierścienia R_1 . Dla $i = (0, 1)$ mamy $R_1 = 0$, co prowadzi do sprzeczności, gdyż wtedy $R = R_2$ i $R_2^2 = 0$. Zatem założymy, że $(0, 1) \prec (\alpha, n)$ i teza naszego twierdzenia zachodzi dla każdego $(\gamma, m) \prec (\alpha, n)$. Stosując Lemat 4.2, dla dowolnego $b \in R_2^2$, bR_1 ma β -indeks $j \prec (\alpha, n)$. Rozważmy $bR = bR_1 + bR_2$. Ponieważ $(bR_2)^2 \subseteq bR_2^4 \subseteq bR_1$, stosując założenie indukcyjne dostajemy $bR \in \beta$. Zatem $bR \subseteq \beta(R) = 0$, skąd $bR = 0$. Ponieważ R jest pierścieniem pierwszym, to $b = 0$. Zatem $R_2^2 = 0$. Niech $l_{R_2}(R_2) = \{x \in R_2 \mid xR_2 = 0\}$. Możemy zastosować teraz (Kępczyk i Puczyłowski, 1996, Twierdzenie 1), z którego wynika, że $l_{R_2}(R_2) \subseteq \beta(R)$. Zatem $R_2 = l_{R_2}(R_2) \subseteq \beta(R) = 0$, więc $R = R_1 \in \beta$, co daje sprzeczność i kończy dowód. $\square$

4.2 Pierścienie T -nilpotentne

W rozdziale tym zajmiemy się kolejnym uogólnieniem nilpotentności.

Definicja 4.3. Powiemy, że pierścień R jest lewostronnie T -nilpotentny wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny niezerowy obraz homomorficzny pierścienia R ma niezerowy lewostronny anihilator.

Pierścienie prawostronnie T -nilpotentne definiuje się analogicznie. Łatwo pokazać, że nie są to pojęcia symetryczne, tzn. można wskazać przykłady pierścieni T -nilpotentnych z lewej strony, które nie są T -nilpotentne z prawej. Oczywiście każdy pierścień nilpotentny jest prawostronnie i lewostronnie T -nilpotentny. W dalszych rozważaniach skupimy się na pierścieniach lewostronnie T -nilpotentnych, ale przedstawiane dalej wyniki odnoszące się do tej klasy mają swoją oczywistą dualną prawostronną wersję.

Z pojęciem T -nilpotentności ściśle wiąże się pojęcie hiperanihilatora. Niech A będzie pierścieniem. Powiemy, że $l(A)$ jest lewostronnym hiperanihilatorem pierścienia A wtedy i tylko wtedy, gdy $l(A) = \bigcup_{\alpha \geq 0} l_\alpha(A)$, gdzie:

$$l_0(A) = 0,$$

oraz dla liczby porządkowej $\alpha \geq 1$,

$$l_\alpha(A) = \left\{ x \in A \mid xA \subseteq \bigcup_{\beta < \alpha} l_\beta(A) \right\}. \quad (4.2.1)$$

Łatwo można pokazać, że pierścień A jest lewostronnie T -nilpotentny wtedy i tylko wtedy, gdy $l(A) = A$. Dodatkowo wykorzystując powyższą definicję hiperanihilatora $l(A)$ i konstrukcję (4.1.1) radykału $\beta(A)$, otrzymujemy stąd, że je-

żeli $l(A) = A$, to $\beta(A) = A$. Istotnie, $l_1(A) = l_A(A) \triangleleft A$, czyli $l_1(A)^2 = 0$, więc $l_1(A) \subseteq W_1(A)$. Analogicznie, stosując dowód indukcyjny, można pokazać, że $l_\alpha(A) \subseteq W_\alpha(A)$ dla dowolnej liczby porządkowej α . Oczywiście $l_\alpha(A) \triangleleft A$ dla dowolnego α . Stąd $l(A) \subseteq \beta(A)$ i ponieważ $A = l(A)$, więc $\beta(A) = A$.

Rozważmy następujący warunek:

$$(p) \text{ Dla dowolnego ciągu } (a_1, a_2, \dots) \text{ istnieje taki podciąg } (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots), \quad (4.2.2)$$

że iloczyn $a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} = 0$ dla pewnej liczby naturalnej n .

Pokażemy, wykorzystując wyniki z Gardner (1992), że (p) jest warunkiem równoważnym z lewostronną T -nilpotentnością. Potrzebować będziemy pewnych modyfikacji dwóch znanych faktów dotyczących skończonych pokryw grup i pierścieni (por. (Lanski, 1990, Lemat)) oraz (Lanski, 1990, Twierdzenie), których dowody przedstawimy dla kompletności. Ideę dowodu pierwszego z nich zaczerpnęliśmy z (Neumann, 1954, Lemat (4.1)).

Lemat 4.3. (por. (Neumann, 1954, Lemat (4.1))) Niech grupa G będzie sumą mnogościową skończonej liczby warstw względem podgrup $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$G = \bigcup_{i=1}^n C_i g_i. \quad (4.2.3)$$

Wtedy pewna podgrupa C_i ma skończony indeks w G . Ponadto, jeżeli $C_1, \dots, C_k$ są wszystkimi podgrupami skończonego indeksu w grupie G wśród podgrup $C_1, \dots, C_n$,

$$\text{to } G = \bigcup_{i=1}^k C_i g_i.$$

Dowód. Przeprowadzimy dowód ze względu na liczbę r różnych elementów w zbiorze $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. Jeżeli $r = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że $r > 1$ i teza zachodzi, gdy liczba różnych podgrup w pokryciu (4.2.3) jest mniejsza niż r . Możemy tak przenieumerować elementy zbioru C , że $C_n = C_{n-1} = \dots = C_{l+1}$ i w zbiorze $\{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ podgrupa C_n nie występuje. Rozważmy:

$$H = \bigcup_{i=l+1}^n C_n g_i. \quad (4.2.4)$$

Jeżeli $H = G$, to C_n jest podgrupą skończonego indeksu w grupie G i teza zachodzi. Załóżmy, że dla pewnego $h \in G$ mamy, że $h \notin H$. Wtedy $C_n h \cap C_n g_i = \emptyset$ dla każdego $i = l+1, \dots, n$. Zatem ze wzoru (4.2.3),

$$C_n h \subseteq \bigcup_{i=1}^l C_i g_i. \quad (4.2.5)$$

Stąd dla każdego $j = l+1, \dots, n$ mamy, że $C_n g_j \subseteq \bigcup_{i=1}^l C_i g_i h^{-1} g_j$. Wobec tego:

$$G = \bigcup_{i=1}^l C_i g_i \cup \bigcup_{j=l+1}^n \bigcup_{i=1}^l C_i g_i h^{-1} g_j$$

i na mocy założenia indukcyjnego dla pewnego $i = 1, \dots, l$ podgrupa C_i ma skończony indeks w grupie G .

Niech teraz $C_1, \dots, C_k$ będą wszystkimi wśród podgrup $C_1, \dots, C_n$ podgrupami skończonego indeksu w grupie G . Wtedy $D = C_1 \cap \dots \cap C_k$ też jest podgrupą skończonego indeksu w grupie G . Załóżmy, że $G \neq \bigcup_{i=1}^k C_i g_i$. Wtedy istnieje $h \in G$ takie, że

$h \notin \bigcup_{i=1}^k C_i g_i$. Ponadto D jest podgrupą skończonego indeksu w grupie C_i dla każdego

$i = 1, \dots, k$, więc istnieją $x_1, \dots, x_t \in G$, gdzie $t \in \mathbb{N}$, takie, że $\bigcup_{i=1}^k C_i g_i = \bigcup_{j=1}^t D x_j$.

Stąd $Dh \cap D x_j = \emptyset$ dla każdego $j = 1, \dots, t$, więc ze wzoru (4.2.3), $Dh \subseteq \bigcup_{i=k+1}^n C_i g_i$,

skąd $D x_j \subseteq \bigcup_{i=k+1}^n C_i g_i h^{-1} x_j$. To oznacza, że grupa G jest skończoną sumą pew-

nych warstw względem podgrup $C_{l+1}, \dots, C_n$, z których każda ma nieskończony indeks w grupie G . Ale to przeczy pierwszej części naszego lematu. Wobec tego

$$G = \bigcup_{i=1}^k C_i g_i. \quad \square$$

Ponieważ ideały (ideały lewostronne lub prawostronne) dowolnego pierścienia są podgrupami jego grupy addytywnej, to Lemat 4.3 oraz powyższy wniosek można zastosować również w przypadku ideałów pierścieni. Dokładniej, jeżeli pierścień R jest skończoną sumą mnogościową ideałów, to przecięcie tych ideałów jest podgrupą skończonego indeksu w grupie $(R, +)$.

Lemat 4.4. (por. (Lanski, 1990, Twierdzenie) Niech R będzie nil-pierścieniem oraz $B_1, \dots, B_n$ jego niepustymi podzbiorami takimi, że $B_i \neq \{0\}$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Jeżeli $R = \bigcup_{i=1}^n r_R(B_i)$, to $l_R(R) \neq \{0\}$.

Dowód. Na podstawie Lematu 4.2.5 możemy bez zmniejszania ogólności zakładać, że każda z podgrup $r_R(B_i)$ ma skończony indeks w grupie $(R, +)$. Stąd $D = \bigcap_{i=1}^n r_R(B_i)$ też ma skończony indeks w grupie $(R, +)$. Ponadto $D <_r R$, bo $r_R(B_i) <_r R$ dla każdego $i = 1, \dots, n$. Zatem grupa $(R/D, +)$ jest skończona i w konsekwencji tego pierścień $\text{End}(R/I, +)$ jej endomorfizmów jest skończony. Weźmy dowolne

$a, x \in R$ i niech $(x + D)F(a) = xa + D$. Standardowe sprawdzenie pokazuje, że $F(a)$ jest dobrze określoną funkcją ze zbioru R/D w siebie, a nawet $F(a) \in \text{End}(R/D, +)$. Ponadto F jest homomorfizmem pierścienia R w pierścień $\text{End}(R/D, +)$ o jądrze $I = \text{Ker} F = \{a \in R \mid xa \in D \text{ dla każdego } x \in R\}$. Stąd $RI \subseteq D$ oraz pierścień R/I jest skończony. Dodatkowo R/I jest nil-pierścieniem, więc $(R/I)^m = 0$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, czyli $R^m \subseteq I$ i w konsekwencji $R^{m+1} \subseteq D$. W szczególności $B_1 R^{m+1} = 0$. Istnieje zatem najmniejsza liczba naturalna k taka, że $B_1 R^k = 0$. Jeżeli $k = 1$, to $\{0\} \neq B_1 \subseteq l_R(R)$, skąd $l_R(R) \neq \{0\}$, a jeżeli $k > 1$, to $\{0\} \neq B_1 R^{k-1} \subseteq l_R(R)$, więc też $l_R(R) \neq \{0\}$. $\square$

Przedstawimy teraz zapowiadaną wcześniej charakteryzację pierścieni lewostronnie T -nilpotentnych.

Twierdzenie 4.2.1. (Gardner, 1992, Twierdzenie 1) Pierścień R jest lewostronnie T -nilpotentny wtedy i tylko wtedy, gdy elementy pierścienia R spełniają warunek (p).

Dowód. Niech S będzie dowolnym niezerowym obrazem homomorficznym pierścienia R spełniającego warunek (p). Wówczas warunek (p) jest spełniony w S . Oczywiście S jest nil-pierścieniem. Przypuśćmy, że $l_S(S) = 0$. Wtedy na mocy Lematu 4.4 dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych niezerowych $x_1, \dots, x_n \in S$ mamy, że $S \neq \bigcup_{i=1}^n r_S(\{x_i\})$. Niech a_1 będzie dowolnym niezerowym elementem pierścienia S . Ponieważ $S \neq r_S(\{a_1\})$, więc istnieje $a_2 \in S$ takie, że $a_1 a_2 \neq 0$. Przypuśćmy, że dla pewnej liczby naturalnej $n \geq 2$ skonstruowaliśmy już niezerowe elementy $a_1, a_2, \dots, a_n$ pierścienia S takie, że dla każdego $k \leq n$ i dla dowolnych liczb naturalnych $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ mamy, że $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \neq 0$. Wtedy zbiór X wszystkich takich iloczynów $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$ jest skończony, więc na mocy Lematu 4.4 mamy, że $S \neq \bigcup_{x \in X} r_S(\{x\})$. Zatem istnieje $a_{n+1} \in S$ takie, że $xa_{n+1} \neq 0$ dla każdego $x \in X$. Stąd dla dowolnej liczby naturalnej $k \leq n + 1$ i dla dowolnych liczb naturalnych $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n + 1$ mamy, że $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} \neq 0$. Wobec tego przez indukcję mamy skonstruowany ciąg $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ elementów pierścienia S , który nie spełnia warunku (p), co prowadzi do sprzeczności. Wobec tego $l_S(S) \neq 0$ i z dowolności S wynika, że pierścień R jest lewostronnie T -nilpotentny.

Na odwrót. Załóżmy, że pierścień R jest lewostronnie T -nilpotentny i niech $(a_1, a_2, \dots)$ będzie dowolnym ciągiem jego elementów. Przypuśćmy, że każdy element zbioru $A = \{a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \dots\}$ jest niezerowy. Ponieważ $R = l(R) = l_\alpha(R)$ dla pewnej liczby porządkowej α , więc istnieje najmniejsza liczba porządkowa $\beta \leq \alpha$ taka, że $a = a_1 a_2 \dots a_n \in l_\beta(R)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście liczba β nie jest graniczna, więc $aR \subseteq l_{\beta-1}(R)$, skąd $aa_{n+1} \in l_{\beta-1}(R)$, co przeczy minimalności β . Wobec tego nie każdy element zbioru A jest niezerowy, a to oznacza, że $a_1 a_2 \dots a_m = 0$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, skąd w szczególności ciąg $(a_1, a_2, \dots)$ spełnia warunek (p). $\square$

Wykażemy, że analogiczna teza, jak dla β radykału w Twierdzeniu 4.1, zachodzi dla klasy pierścieni T -nilpotentnych.

Twierdzenie 4.2.2. Niech R_1 będzie podpierścieniem, a R_2 będzie podgrupą grupy addytywnej pierścienia R oraz $R = R_1 + R_2$. Jeżeli R_1 jest pierścieniem lewostronnie T -nilpotentnym oraz $R_2^2 \subseteq R_1$, to R jest pierścieniem lewostronnie T -nilpotentnym.

Dowód. Jeżeli $R_1 = \{0\}$, to teza jest oczywista, bo wtedy $R = R_2$ i $R_2^2 = \{0\}$. Niech dalej $R_1 \neq \{0\}$. Rozważmy $P = R_1 + R_1R$. Oczywiście $P <_r R$ i $P = R_1 + R_1R_2$. Ponadto z modularności kraty podgrup grupy $(R, +)$ mamy, że $P = R_1 + (R_2 \cap P)$. Zatem $R = P + R_2$. Przypuśćmy, że $R_1 \not\subseteq l(P)$. Wtedy $l(P) \neq P$ i pierścień $\bar{P} = P/l(P)$ ma zerowy lewostronny anihilator. Ale $\bar{R}_1 = (R_1 + l(P))/l(P) \neq 0$ i $\bar{P} = \bar{R}_1 + \bar{R}_1 \bar{R}_2$ dla $\bar{R}_2 = (R_2 + l(P))/l(P)$ oraz lewostronny anihilator L pierścienia $\bar{R}_1$ jest niezerowy, gdyż $\bar{R}_1$ jest niezerowym obrazem homomorficznym lewostronnie T -nilpotentnego pierścienia R_1 , więc stąd $L\bar{P} = \{0\}$, co prowadzi do sprzeczności. Wobec tego $R_1 \subseteq l(P)$. Dalej, $(P \cap R_2)P = (P \cap R_2)R_1 + (P \cap R_2)^2$ i $(P \cap R_2)R_1 \subseteq l(P)$, gdyż $R_1 \subseteq l(P) \triangleleft P$ oraz $(P \cap R_2)^2 \subseteq R_2^2 \subseteq R_1 \subseteq l(P)$, więc $(P \cap R_2)P \subseteq l(P)$, skąd $P \cap R_2 \subseteq l(P)$. Ale $P = R_1 + (P \cap R_2)$, więc $P \subseteq l(P)$, czyli $P = l(P)$.

Ponieważ $R = P + R_2$, więc $R_2P \subseteq P + R_2$, skąd $R_2PR_2 \subseteq PR_2 + R_2^2$. Ale $P <_r R$ i $R_2^2 \subseteq P$, więc mamy stąd:

$$R_2PR_2 \subseteq P. \quad (4.2.6)$$

Weźmy dowolny ciąg (a_n) elementów pierścienia R . Wtedy $a_n = x_n + y_n$, gdzie $x_n \in P$ oraz $y_n \in R_2$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Weźmy dowolne $k \in \mathbb{N}$. Z dowodu Twierdzenia 4.2.1 wynika, że istnieje $m = m(k) \in \mathbb{N}$ takie, że $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdot \dots \cdot x_{k+m} = 0$. Zauważmy, że $a_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{k+m} = x_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{k+m} + y_k \cdot x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_{k+m} + x$, gdzie x jest skończoną sumą elementów postaci $y_k \cdot \dots \cdot y \cdot \dots$, gdzie $y \in R_2$, więc ponieważ $R_2^2 \subseteq P <_r R$, to na mocy (4.2.6) $x \in P$ oraz $x_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{k+m} \in P$ i $y_k \cdot x_{k+1} \cdot \dots \cdot x_{k+m} = 0$. Wobec tego $c_k = a_k \cdot a_{k+1} \cdot \dots \cdot a_{k+m} \in P$. Z dowolności k możemy skonstruować zatem ciąg (c_k) elementów pierścienia P i na mocy dowodu Twierdzenia 3.4 oraz konstrukcji c_k otrzymujemy stąd, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wobec tego na mocy Twierdzenia 4.2.1 pierścień R jest lewostronnie T -nilpotentny. $\square$

4.3 Półkratowe sumy pierścieni

Przypomnijmy, że półgrupą nazywamy zbiór $(S, \cdot)$ dwuargumentowym multiplikatywnym działaniem łącznym $\cdot$. Element $x \in S$ taki, że $x^2 = x$ nazywamy idempotentem półgrupy $(S, \cdot)$. Natomiast półgrupę, której wszystkie elementy są idempotentami nazywamy pasem.

Definicja 4.4. Półkratą nazywamy dowolny pas przemienny.

Niech S będzie półgrupą. Przypomnijmy, że pierścień A jest pierścieniem z S -gradacją jeżeli $A = \bigoplus_{s \in S} A_s$ oraz $A_s A_t \subseteq A_{st}$ dla dowolnych $s, t \in S$. Ponadto dla każdego

$t \in S$, A_t jest podgrupą grupy $(A, +)$. W naszych dalszych rozważaniach zaprezentujemy ogólniejsze podejście. Niech R_s będzie podgrupą addytywną pierścienia R dla dowolnego $s \in S$. Sumę $\sum_{s \in S} R_s$ definiujemy następująco:

$$\sum_{s \in S} R_s = \{x_{s_1} + \dots + x_{s_n} \mid x_{s_i} \in R_{s_i}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Definicja 4.3.1. Pierścień R jest sumą półkratową podgrup addytywnych R_s pierścienia R względem półkrataty S , gdzie $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R = \sum_{s \in S} R_s$ oraz $R_s R_t \subseteq R_{st}$ dla dowolnych $s, t \in S$.

Niech P będzie półkratą. Możemy w P określić następującą relację podzielności:

$$\forall_{x,y \in P} y \mid x \Leftrightarrow \exists_{z \in P} x = yz.$$

Powiemy, że element α jest zerem w P , jeżeli $\forall_{x \in P} x\alpha = \alpha$.

Pokażemy teraz, że każdy pierścień, który jest sumą półkratową można przedstawić w postaci innej sumy półkratowej dwóch podpółścieni, z których jeden jest ideałem. Niech P będzie taką półkratą, że $|P| > 1$. Weźmy niezerowy element $\alpha \in P$. Niech $Q_\alpha = \{\beta \in P : \beta \mid \alpha\}$. Oczywiście $\beta\gamma \in Q_\alpha$ implikuje $\beta \in Q_\alpha$, $\gamma \in Q_\alpha$. Z drugiej strony, jeżeli $\beta \in Q_\alpha$ oraz $\gamma \in Q_\alpha$, to istnieją $\delta, \omega \in P$ takie, że $\beta\delta = \alpha$ i $\gamma\omega = \alpha$. Stąd $(\beta\delta)(\gamma\omega) = (\beta\gamma)(\delta\omega) = \alpha^2 = \alpha$. Zatem $\beta\gamma \in Q_\alpha$. To pokazuje, że Q_α oraz $Q = P \setminus Q_\alpha$ są podpółkratami P oraz $P = Q_\alpha \cup Q$. Dodatkowo Q jest ideałem w P . Możemy również zakładać, że $\{Q_\alpha, Q\}$ jest półkratą z działaniami $Q_\alpha^2 = Q_\alpha$, $Q^2 = Q$ oraz $Q_\alpha Q = QQ_\alpha = Q$. Dowiedliśmy zatem następujący

Lemat 4.5. (por. (Janeski i Weissglass, 1973, Lemat 3)) Niech R będzie sumą półkratową $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$, gdzie $|P| > 1$. Wtedy istnieją takie rozłączne podpółkraty A i B półkrataty P , że $P = A \cup B$. Ponadto:

1. $R_A = \sum_{\alpha \in A} R_\alpha$ jest sumą półkratową oraz $R_{\alpha_0} \triangleleft R_A$ dla pewnego $\alpha_0 \in A$.
2. $R_B = \sum_{\alpha \in A} R_\alpha$ jest sumą półkratową oraz $R_B \triangleleft R$.
3. $R = R_A + R_B$ jest sumą półkratową, gdzie $A^2 = A$, $B^2 = B$ oraz $AB = BA = B$.

Żeby sformułować kolejne wyniki w tym rozdziale potrzebujemy ogólnego pojęcia klasy radykalnej.

Definicja 4.3.2. Powiemy, że klasa pierścieni $\mathcal{T}$ jest klasą radykalną wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia następujące warunki:

1. $\mathcal{T}$ jest zamknięta na obrazy homomorficzne, tzn. jeżeli $R \in \mathcal{T}$, to dla dowolnego $I \triangleleft R$, $R/I \in \mathcal{T}$,
2. $\mathcal{T}$ jest zamknięta na rozszerzenia, tzn. jeżeli $I \triangleleft R$, $I \in \mathcal{T}$ oraz $R/I \in \mathcal{T}$, to $R \in \mathcal{T}$.
3. $\mathcal{T}$ jest zamknięta na sumy ideałów, tzn. jeżeli $I_t \in \mathcal{T}$ dla dowolnego zbioru T , to $\sum_{t \in T} I_t \in \mathcal{T}$.

Klasę radykalną $\mathcal{T}$ nazywamy radykałem, natomiast $R \in \mathcal{T}$ pierścieniem $\mathcal{T}$ -radykalnym. Największy $\mathcal{T}$ -radykalny ideał pierścienia R nazywamy radykałem R i oznaczamy przez $\mathcal{T}(R)$. Jeżeli $\mathcal{T}(R) = 0$ pierścień R nazywamy $\mathcal{T}$ -półprostym. Przykładami radykałów są klasy β , $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$.

Udowodnimy teraz następujące:

Stwierdzenie 4.3.3. Niech $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$ będzie sumą półkratową względem skończonej półkraty P oraz $\mathcal{T}$ jest dowolnym radykałem. Jeżeli dla dowolnego α , $R_\alpha \in \mathcal{T}$, to $R \in \mathcal{T}$.

Dowód. Zastosujemy indukcję względem $|P|$. W przypadku $|P| = 1$ teza jest oczywista. Załóżmy, że $|P| = s > 1$ i teza zachodzi dla każdej półkraty Ω , dla której $|\Omega| < s$. Z Lematu 4.5, $R = R_A + R_B$ oraz $R_B \triangleleft R$, gdzie R_A, R_B są sumami półkratowymi względem półkrat A oraz B , odpowiednio. Dodatkowo A i B są rozłącznymi niezerowymi podpółkratami takimi, że $P = A \cup B$. Ponieważ $|A|, |B| < |P|$, z założenia indukcyjnego dostajemy $R_A, R_B \in \mathcal{T}$. Zatem ponieważ $R/R_B = (R_A + R_B)/R_B \approx R_A/R_A \cap R_B$, R/R_B jest obrazem homomorficznym pierścienia R_A . Stąd $R/R_B \in \mathcal{T}$, co w konsekwencji daje $R \in \mathcal{T}$ i kończy dowód. $\square$

Oczywiście powyższe stwierdzenie ma zastosowanie, gdy $\mathcal{T} = \beta, \mathcal{L}, \mathcal{K}$. Łatwo również zauważyć, że Stwierdzenie 4.3.3 ma zastosowanie dla każdej klasy pierścieni $\mathcal{T}$, która jest zamknięta na obrazy homomorficzne i rozszerzenia. W szczególności zachodzi więc również dla $\mathcal{T} = \mathcal{N}$ oraz klasy pierścieni lewostronnie (prawostronnie) T -nilpotentnych.

Problem 4.3.4. Czy założenie o skończoności P w Stwierdzeniu 4.3.3 można pominąć?

Zauważmy, że nie jest to możliwe dla $\mathcal{T} = \mathcal{N}$. Niech P będzie dowolną nieskończoną półkratą oraz $M = \{e_1, e_2, \dots\}$ dowolnym nieskończonym zbiorem jej idempotentów. Połóżmy, jak w Przykładzie 4.1, $R_{e_i} = xF[x]/(x^i)$, gdzie $e_i \in M$ oraz $R_s = 0$ dla pozostałych elementów α z P . Rozważmy sumę półkratową $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$. Oczywiście $R \notin \mathcal{N}$.

W przypadku klasy $\mathcal{L}$ odpowiedź jest pozytywna nawet gdy założymy, że P jest dowolnym pasem. Zachodzi bowiem następujące

Twierdzenie 4.3.5. (Kelarev i McConnell, 1995, Twierdzenie 2.2) Następujące warunki są równoważne:

1. dla dowolnej S -sumy $R = \sum_{\alpha \in S} R_\alpha$, jeżeli wszystkie podpierścienie spośród R_α są lokalnie nilpotentne, to pierścień R jest lokalnie nilpotentny,
2. S jest pasem.

Żeby odpowiedzieć na pytanie 4.3.4 w przypadku klasy nil-pierścieni $\mathcal{K}$ potrzebujemy pewnych przygotowań. Niech $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$ będzie sumą półkratową oraz $r \in R$.

Nośnikiem $\text{Supp}_P(r)$ elementu r nazywamy następujący zbiór:

$$\text{Supp}_P(r) = \left\{ \alpha \in P \mid r = \sum_{\alpha \in P} r_\alpha, r_\alpha \neq 0 \right\}.$$

W każdej półkracie P można w następujący sposób określić porządek częściowy:

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha = \alpha\beta.$$

Oczywiście relacja $\leq$ jest zwrotna i antysymetryczna. Załóżmy, że $x \leq y$ oraz $y \leq z$ dla pewnych $x, y, z \in P$. Stąd $x = xy = x(yz) = (xy)z = xz$. Zatem $x \leq z$, co pokazuje, że $\leq$ jest relacją przechodnią w P . Porządek $\leq$ nazywa się naturalnym porządkiem półkraty P .

Przykład 4.3.6. Niech $(2^X, \cap)$ będzie półkratą wszystkich podzbiorów 2^X ustalonego zbioru X . Jeżeli $A, B \in 2^X$, to $A \leq B \iff A = A \cap B \iff A \subseteq B$.

Przedstawimy teraz pewne proste własności naturalnego porządku półkraty P :

- a) $\forall_{a,b \in P} (ab \leq a \wedge ab \leq b)$,
- b) $\forall_{a,b,c \in P} (ab \leq c) \Rightarrow (a \leq c \wedge b \leq c)$,
- c) $\forall_{a,b,c \in P} (a \leq b) \Rightarrow (ac \leq bc)$.

Niech $a, b, c \in P$. Oczywiście $ab = (ab)a = (ab)b$. Stąd $ab \leq b$ oraz $ab \leq a$, co daje a). Własność b) wynika wprost z a). Jeżeli $a \leq b$, to $a = ab$. Stąd $ac = acb = ac^2b = = acbc$, co implikuje $ac \leq bc$.

Podamy teraz zapowiadaną odpowiedź na pytanie 4.3.4 w przypadku klasy nil-pierścieni $\mathcal{K}$.

Stwierdzenie 4.3.7. Niech R będzie sumą półkratową $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$. Jeżeli $R_\alpha \in \mathcal{K}$ dla każdego $\alpha \in P$, to $R \in \mathcal{K}$.

Dowód. Załóżmy, że R nie jest nil-pierścieniem. Wybierzmy element $x \in R$, który ma następujące własności:

1. x nie jest nilpotentny,
2. podpółkrata $\Omega = \langle \text{Supp}_P(x) \rangle$ generowana przez $\text{Supp}_P(x)$ w P jest minimalna.

Niech α_0 będzie elementem maksymalnym w $\text{Supp}_P(x)$ względem porządku naturalnego $\leq$ półkraty P . Ponadto $x = a + b$, gdzie $a \in R_{\alpha_0}$ oraz $b \in \sum_{\alpha \in \text{Supp}_P(x) \setminus \{\alpha_0\}} R_\alpha$. Na podstawie własności a) oraz b) łatwo zauważyć, że α_0 jest także elementem maksymalnym w Ω . Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $a^n = 0$. Zatem $\alpha_0 \notin \text{Supp}_P(x^n)$. Niech Ω' będzie podpółkratą w P generowaną przez $\text{Supp}_P(x^n)$. Oczywiście $\alpha_0 \notin \Omega'$. Stąd $\Omega' \subsetneq \Omega$. Ponieważ x^n nie jest elementem nilpotentnym otrzymujemy sprzeczność z minimalnością podpółgrupy Ω . Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

W świetle przedstawionych wyników możemy sformułować następujący

Problem 4.3.8. Niech $R = \sum_{\alpha \in S} R_\alpha$ będzie sumą półkratową. Czy jeżeli $R_\alpha \in \beta$ dla każdego $\alpha \in S$, to $R \in \beta$?

Odpowiedź jest pozytywna w przypadku, gdy naturalny porządek $\leq$ półkraty P jest dodatkowo artinowski i wąski.

Definicja 4.3.9. Niech $(S, \leq)$ będzie zbiorem uporządkowanym.

1. $(S, \leq)$ jest artinowski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ściśle malejący ciąg elementów jest skończony.
2. $(S, \leq)$ jest wąski wtedy i tylko wtedy, gdy każdy antyłańcuch w S jest skończony.

Stwierdzenie 4.3.10. Niech $R = \sum_{\alpha \in S} R_\alpha$ będzie taką sumą półkratową, że naturalny porządek $(P, \leq)$ jest artinowski i wąski. Ponadto $\mathcal{T}$ dowolnym radykałem. Wtedy, jeżeli $R_\alpha \in \mathcal{T}$ dla każdego $\alpha \in S$, to $R \in \mathcal{T}$.

Dowód. Oczywiście możemy założyć, że $|P| > 1$. Stosując Lemat 4.5 otrzymujemy, że $R = R_A + R_B$, gdzie A oraz B są rozłącznymi podpółkratami P . Ponadto $R_B \triangleleft R$, $A^2 = A$ oraz $R_\alpha \triangleleft R_A$ dla pewnego różnego od zera $\alpha \in A$. Jeżeli B zawiera taki element β , że zbiór $\{\alpha, \beta\}$ jest antyłańcuchem, to pierścień R_B można analogicznie rozłożyć na sumę dwóch podpierścieni. Stąd $R = R_A + R_C + R_D$, gdzie R_A , R_B oraz R_D są podpierścieniami R . Ponadto $B^2 = B$ oraz $R_D \triangleleft R$. Opisaną konstrukcję można kontynuować względem R_D jeżeli w B istnieje element δ , że $\{\alpha, \beta, \delta\}$ tworzą antyłańcuch.

Ponieważ każdy antyłańcuch w P jest skończony, to istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $R = R_{A_1} + R_{A_2} + \dots + R_{A_n} + R_S$, gdzie R_{A_i} jest podpierścieniem R oraz $A_i^2 = A_i$ dla dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ponadto $S \triangleleft P$ oraz $R_{\alpha_n} \triangleleft R_S$. Pierścień R_S można analogicznie rozłożyć na sumę dwóch podpierścieni względem elementu $s_1 \in S$ takiego, że $s_1 < \alpha_n$. Wtedy $R_S = R_{S_1} + R_{S_2}$. Ponieważ porządek $(P, \leq)$ jest artinowski, tę konstrukcję również można powtarzać skończoną liczbę razy, odpowiednio definiując kolejne elementy łańcucha $s_m < s_{m-1} < \dots < s_1$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Zatem $R = R_{A_1} + R_{A_2} + \dots + R_{A_n} + R_{S_1} + R_{S_2} + \dots + R_{S_m}$. Stąd $I = R_{\alpha_1} + R_{\alpha_2} + \dots + R_{\alpha_n} + R_{s_1} + R_{s_2} + \dots + R_{s_m}$ jest ideałem pierścienia R . Stosując Stwierdzenie 4.3.3 dostajemy, że $\beta(I) = I$. Zatem $I \subseteq \beta(R)$. W szczególności $R_{\alpha_1} \subseteq \beta(R)$. Ponieważ α_1 jest elementem różnym od zera wybranym dowolnie, więc otrzymujemy, że $R_\alpha \subseteq \beta(R)$ dla dowolnego różnego od zera $\alpha \in P$. Zatem $\beta(R) = R$, co należało dowieść. $\square$

Powiemy, że radykał $\mathcal{T}$ jest dziedziczny (na ideały) jeżeli dowolny ideał pierścienia $\mathcal{T}$ -radykalnego jest $\mathcal{T}$ -radykalny. Przykładami radykałów dziedzicznych są β , $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{H}$. Zakończymy ten rozdział wykazując, że dla dowolnego radykału dziedzicznego $\mathcal{T}$ klasa $\mathcal{T}$ -półprosta jest zamknięta na sumy półkratowe.

Twierdzenie 4.3.11. (por. (Teplý i in., 1980, Twierdzenie 1)) Niech $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$ będzie sumą półkratową podpierścieni oraz $\mathcal{T}$ dziedzicznym radykałem. Jeżeli dla dowolnego $\alpha \in P$, R_α jest pierścieniem $\mathcal{T}$ -półprostym, to R jest również $\mathcal{T}$ -półprosty.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $I \in \mathcal{T}$ jest różnym od zera ideałem pierścienia R . Niech $0 \neq x \in I$ oraz X będzie zbiorem elementów maksymalnych w $\text{Supp}_P(x)$. Ponadto $P' = \{\alpha \in P \mid \alpha \leq \beta \text{ dla } \beta \in X\}$. Oczywiście P' jest podpółkratą, $G = \sum_{\alpha \in P'} R_\alpha$ jest ideałem w R oraz $x \in G$. Rozważmy $H = G \cap I$. Ponieważ $\mathcal{T}$ jest dziedziczny, $0 \neq H \in \mathcal{T}$.

Niech γ będzie pewnym ustalonym elementem ze zbioru X . Zauważmy, że każdy element y z G ma postać $y = a_\gamma + b_\gamma$, gdzie $a_\gamma \in R_\gamma$ oraz $b_\gamma \in \sum_{\alpha \in P' \setminus \{\gamma\}} R_\alpha$. Rozważmy następujący zbiór $G' = \{(a_\gamma, y) \mid y \in G\}$. Oczywiście G' jest zamknięty na dodawanie. Ponieważ γ jest elementem maksymalnym w P' , zbiór G' jest zamknięty również na mnożenie, co implikuje, że jest podpierścieniem w $R_\gamma \oplus G$. Łatwo zauważyć, że G' jest izomorficzny z G . Analogicznie możemy zdefiniować ideał H' pierścienia G' izomorficzny z H . Mamy więc $H' \triangleleft G'$ oraz $H' \in \mathcal{T}$. Niech $\phi : G \rightarrow R_\gamma$ będzie rzutowaniem G' na R_γ . Łatwo pokazać, że odwzorowanie ϕ jest zamknięte na dodawanie. Ponieważ γ jest elementem maksymalnym w P' , to odwzorowanie ϕ jest również zamknięte na mnożenie, czyli jest homomorfizmem. Ponieważ $H' \in \mathcal{T}$ i $(a_x, x) \in H'$, to $0 \neq \phi(H') \in \mathcal{T}$. Ale $\phi(H') \triangleleft R_\gamma$, co daje sprzeczność, gdyż R_γ jest $\mathcal{T}$ -półprosty. $\square$

Dowód powyższego twierdzenia oparliśmy na dowodzie (Teplý i in., 1980, Twierdzenia 1) sformułowanego analogicznie, ale przy silniejszym założeniu dotyczącym sumy półkratowej $R = \sum_{\alpha \in P} R_\alpha$. Rozważa się tam sumę półkratową (supplementary semilattice sum) spełniającą dodatkowo następujący warunek: $R_\alpha \cap \sum_{\alpha \in P \setminus \{\alpha\}} R_\alpha = \{0\}$ dla dowolnego $\alpha \in P$.

4.4 Półgrupowe sumy pierścieni

Rozpocznijmy od definicji tytułowego pojęcia.

Definicja 4.4.1. Pierścień R jest sumą półgrupową podgrup addytywnych R_s pierścienia R względem półgrupy S , gdzie $s \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $R = \sum_{s \in S} R_s$ oraz $R_s R_t \subseteq R_{st}$ dla dowolnych $s, t \in S$.

Oczywiście każdy pierścień z S -gradacją jest sumą półgrupową.

Przykład 4.4.2. Przedstawimy zaprezentowaną w Puczyłowski (1999) modyfikację ciekawego i ważnego przykładu algebry nad ciałem z Salwa (1996), która jest sumą półgrupową. Niech W będzie półgrupą wolną wyznaczoną przez symbole $\bar{x} = x_\alpha$ oraz $\bar{y} = y_\beta$, gdzie α i β są dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $\frac{\alpha}{\beta}$ jest liczbą niewymierną. Rozważmy ideał I półgrupy W generowany przez zbiór $M = \{w \in W : |\beta \deg_{\bar{y}}(w) - \alpha \deg_{\bar{x}}(w)| \geq \alpha + \beta\}$ oraz algebrę ściągniętą $R = F_0[M/I]$ nad ciałem F . Zauważmy, że jeżeli $w \in W \setminus I$ oraz $w\bar{x} \in I$, to istnieją $u', u \in M$ takie, że $w = u'u$ oraz $ux \in M$. Oczywiście $u \notin M$.

Zatem $\beta \deg_{\bar{y}}(u) - \alpha \deg_{\bar{x}}(u) < \alpha + \beta$ oraz $\beta \deg_{\bar{y}}(u) - \alpha \deg_{\bar{x}}(u) - \alpha = \beta \deg_{\bar{y}}(u\bar{x}) + (-\alpha) \deg_{\bar{x}}(u\bar{x}) < \beta < \alpha + \beta$. Stąd, ponieważ $u\bar{x} \in M$, mamy więc $\beta \deg_{\bar{y}}(u\bar{x}) + (-\alpha) \deg_{\bar{x}}(u\bar{x}) \leq -\alpha - \beta$. Zatem $\beta \deg_{\bar{y}}(u) - \alpha \deg_{\bar{x}}(u) \leq -\beta$. Symetrycznie, jeżeli $w\bar{y} \in I$, to istnieją $v', v \in M$ takie, że $w = v'v$ oraz $\beta \deg_{\bar{y}}(v) - \alpha \deg_{\bar{x}}(v) \geq \alpha$.

Załóżmy, że jednocześnie $w\bar{x} \in I$ oraz $w\bar{y} \in I$. W konsekwencji $u = tv$ lub $v = tu$ dla pewnego $t \in W$. Jeżeli $v = tu$, to $\alpha \leq \beta \deg_{\bar{y}}(tu) - \alpha \deg_{\bar{x}}(tu) = \beta(\deg_{\bar{y}}(t) + \deg_{\bar{y}}(u)) + (-\alpha)(\deg_{\bar{x}}(t) + \deg_{\bar{x}}(u)) \leq \beta \deg_{\bar{y}}(t) - \alpha \deg_{\bar{x}}(t) - \beta$. Stąd $\alpha + \beta \leq \beta \deg_{\bar{y}}(t) - \alpha \deg_{\bar{x}}(t)$, co implikuje $w \in I$ i daje sprzeczność. Analogicznie $\beta \deg_{\bar{y}}(t) - \alpha \deg_{\bar{x}}(t) \leq -\alpha - \beta$ jeżeli $u = tv$. Stąd jeszcze raz $w \in I$ prowadzi do sprzeczności. Zatem obraz homomorficzny z elementu $\bar{x} + \bar{y}$ w algebrze $R = F_0[M/I]$ jest prawostronnie regularny. W szczególności z nie jest nilpotentny, co pociąga, że R nie jest nil.

Niech $M_1 = \{w \in M : \beta \deg_{\bar{y}}(w) - \alpha \deg_{\bar{x}}(w) < 0\}$ oraz niech $M_2 = \{w \in M : \beta \deg_{\bar{y}}(w) - \alpha \deg_{\bar{x}}(w) > 0\}$. Zauważmy, że $M = M_1 \cup M_2$. W konsekwencji $R = R_1 + R_2$ jest sumą dwóch podpierścieni $R_1 = F_0[M_1 \cup I/I]$ oraz $R_2 = F_0[M_2 \cup I/I]$. Łatwo pokazać, że $R_1 = W(R_1)$ oraz $R_2 = W(R_2)$. Zatem R jest przykładem pierścienia będącego sumą dwóch podpierścieni β -radykalnych, który nie jest nil. W Salwa (1996) pokazano dodatkowo, że R jest pierścieniem prymitywnym.

Położmy $R_w = Fs$ dla $w \in W \setminus I$ oraz $R_w = 0$ dla $w \in I$. Wynika stąd, że R jest sumą półgrupową względem W , której wszystkie podpierścienie spośród R_w są równe zero.

W dowodzie następnego twierdzenia wykorzystywać będziemy opis struktury pewnych półgrup prostych. Następujący przykład półgrupy macierzowej wykorzystany jest w tym opisie. Oznaczmy przez $M_{xy}(G)$ zbiór macierzy o elementach z danej grupy G o indeksach z dwóch (niekoniecznie skończonych) zbiorów X oraz Y . Niech e_{xy} będzie macierzą, w której na miejscu xy stoi 1, a poza tym same zera.

Definicja 4.4.3. Niech dana będzie grupa G , dwa niepuste zbiory X, Y oraz macierz $A \in M_{xy}(G)$. Półgrupą macierzową Reesa nazywamy zbiór $G \times X \times Y$ z następującym działaniem:

$$(g_1, x_1, y_1) \cdot (g_2, x_2, y_2) = (g_1 a_{y_1 x_2} g_2, x_1, y_2). \quad (4.4.1)$$

Półgrupę tę oznacza się standardowo przez $\mathcal{M}(G; X, Y; A)$.

Zauważmy, że jeżeli (g, x, y) utożsamimy z macierzą ge_{xy} , to iloczyn (4.4.1) odpowiada macierzy $BAC = g_1 e_{x_1 y_1} A g_2 e_{x_2 y_2} = g_1 a_{y_1 x_2} g_2 e_{x_1 y_2}$.

Przez S^0 oznaczamy półgrupę z dołączonym zerem. W półgrupie $\mathcal{M}^0(G^0; X, Y; A)$ utożsamia się wszystkie elementy postaci $(0, x, y)$.

Niech S będzie półgrupą z zerem. Powiemy, że S jest 0-prosta jeżeli jedynymi jej ideałami są $\{0\}$ i S . Półgrupę S nazwiemy kompletnie 0-prostą jeżeli S posiada zarówno lewostronny jak i prawostronny ideał 0-minimalny.

Wielokrotnie wykorzystywać będziemy dalej następujący znany wynik L. N. Shevrina:

Twierdzenie 4.4.4. Załóżmy, że torsyjna półgrupa S zawiera skończenie wiele elementów idempotentnych, każdy obraz homomorficzny S , który jest nil jest nilpotentny oraz każda podgrupa S jest skończona. Wtedy S posiada skończony łańcuch ideałów:

$$\emptyset = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = S \quad (4.4.2)$$

taki, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$, S_{i+1}/S_i jest nilpotentny albo skończony.

Dowód. Niech $H \neq S$ będzie ideałem w S i załóżmy, że dla półgrupy H można skonstruować skończony łańcuch postaci (4.4.2). Zachodzi teraz jeden z dwóch następujących przypadków:

1. Półgrupa $Q = S/H$ posiada nil ideał.

Wtedy niech H_1/H będzie maksymalnym nil ideałem w S/H . Z założenia H_1/H jest nilpotentny.

2. Półgrupa $Q = S/H$ nie posiada nil ideałów.

Ponieważ Q jest półgrupą torsyjną, każdy ideał właściwy w Q zawiera idempotent. Niech J będzie ideałem minimalnym w Q . Na podstawie (Clifford i Preston, 1961, Twierdzenia 2.29), J jest 0-prosty lub prosty. Rozumowanie w obu przypadkach jest analogiczne. Załóżmy zatem, że J jest półgrupą 0-prostą. Ponieważ J jest półgrupą torsyjną z (Clifford i Preston, 1961, Corollary 2.56) dostajemy, że J jest kompletnie 0-prosty. Stąd i z (Clifford i Preston, 1961, Twierdzenia 3.5), $J = \mathcal{M}^0(G^0; X, Y; A)$ dla pewnej grupy G^0 oraz macierzy A . Rozważmy odwzorowanie $\phi : G \rightarrow \mathcal{M}^0(G^0; X, Y; A)$ dane wzorem $\phi(g) = (gh^{-1}, x, y)$, gdzie $h \in G$ jest elementem grupy G , który stoi na głównej przekątnej macierzy A dla pewnego $x \in X$ oraz $y \in Y$. Łatwo sprawdzić, że ϕ jest izomorfizmem grupy G . Zatem J zawiera podgrupę izomorficzną z G . Z założenia G jest grupą skończoną. Ponieważ J zawiera skończenie wiele idempotentów, zbiory X i Y muszą być skończone. Zatem J jest skończonym ideałem w Q . W konsekwencji $J = H_1/H$ dla pewnego ideału H_1 półgrupy S .

Zatem w obu przypadkach istnieje ideał w S , którego półgrupa ilorazowa względem H jest nilpotentna albo skończona. Każde zastosowanie metody opisanej w 2. wymaga dołączenia kolejnego idempotentu z S . Ponieważ z założenia idempotentów w S jest skończenie wiele, konstrukcja ta może być wykonana skończenie wiele razy. Oczywiście wydłużenia łańcucha (4.4.2) metodą opisaną w 1. nie można wykonać dwa razy pod rząd. Zatem S posiada skończony łańcuch (4.4.2), co kończy dowód. $\square$

Powiemy, że półgrupa S jest nil ograniczonego indeksu jeżeli istnieje taka liczba naturalna m , że dla każdego $s \in S$, $s^m = 0$.

Uwaga 4.4.5. Zauważmy, że analogiczną tezę jak w Twierdzeniu 4.4.4 otrzymujemy, gdy zamiast nilpotentności założymy, że każdy obraz homomorficzny S , który jest nil jest nil ograniczonego indeksu. Wtedy S posiada skończony łańcuch (4.4.2) taki,

że dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$, iloraz S_{i+1}/S_i jest nil ograniczonego indeksu albo skończony.

Definicja 4.4.6. Powiemy dla półgrupy S , że klasa pierścieni $\mathcal{M}$ jest S -zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy do $\mathcal{M}$ należą wszystkie sumy półgrupowe $R = \sum_{s \in S} R_s$ takie, że jeżeli każdy podpierścień spośród R_s dla $s \in S$ należy do $\mathcal{M}$, to $R \in \mathcal{M}$.

Lemat 4.6. Klasa pierścieni $\mathcal{M}$, która jest zamknięta na sumy jednostronnych ideałów, obrazy homomorficzne, podpierścienie oraz zawierająca klasę wszystkich pierścieni z zerowym mnożeniem, jest G -zamknięta dla dowolnej grupy skończonej G .

Dowód. Niech $G = \{e = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ oraz e jej elementem neutralnym. Rozważmy sumę grupową $R = \sum_{s \in G} R_s$ względem grupy G oraz załóżmy, że $R_e \in \mathcal{M}$. Niech T będzie następującym pierścieniem macierzowym:

$$T = \begin{pmatrix} R_e & R_{g_1 g_2^{-1}} & \cdots & R_{g_1 g_n^{-1}} \\ R_{g_2 g_1^{-1}} & R_e & \cdots & R_{g_2 g_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{g_n g_1^{-1}} & R_{g_n g_2^{-1}} & \cdots & R_e \end{pmatrix}.$$

Ponieważ T jest sumą lewostronnych ideałów z $\mathcal{M}$ postaci:

$$L_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & R_{g_1 g_i^{-1}} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & R_{g_2 g_i^{-1}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & R_{g_n g_i^{-1}} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

więc $T \in \mathcal{M}$. Niech $a = \sum_{g \in G} a_g$, gdzie $a_g \in R_g$ dla dowolnego $g \in G$. Zdefiniujmy następujący element pierścienia T :

$$a_T = \begin{pmatrix} a_e & a_{g_1 g_2^{-1}} & \cdots & a_{g_1 g_n^{-1}} \\ a_{g_2 g_1^{-1}} & a_e & \cdots & a_{g_2 g_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{g_n g_1^{-1}} & a_{g_n g_2^{-1}} & \cdots & a_e \end{pmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Łatwo sprawdzić, że zbiór M wszystkich elementów pierścienia T uzyskanych w ten sposób tworzy podpierścień w T . Zdefiniujmy odwzorowanie $\phi : M \rightarrow R$ następująco: jeżeli a_T jest postaci (4.4.3), to $\phi(a_T) = a_e + a_{g_2 g_1^{-1}} + \dots + a_{g_n g_1^{-1}}$. Można pokazać, że ϕ jest homomorfizmem, którego obrazem jest R . Ponieważ $M \subseteq T$ jest podpierścieniem T , więc $M \in \mathcal{M}$. Skąd $R \in \mathcal{M}$. $\square$

Powyższy lemat można uogólnić w następujący sposób:

Lemat 4.7. (por. (Kelarev, 1993, Lemat 5.)) Niech $\mathcal{M}$ będzie klasą pierścieni zamkniętą na grupy skończone, na sumy jednostronnych ideałów oraz rozszerzenia. Ponadto niech $\mathcal{M}$ zawiera klasę pierścieni z zerowym mnożeniem. Wtedy klasa $\mathcal{M}$ jest S -zamknięta dla dowolnej półgrupy skończonej S .

Dowód. Stosując rozumowanie indukcyjne względem liczby elementów S oraz fakt, że $\mathcal{M}$ jest zamknięta na rozszerzenia, wystarczy wykazać tezę przy założeniu, że S jest półgrupą prostą lub 0-prostą. Jeżeli $S^2 = 0$, to $R^2 = 0$. Zatem $R \in \mathcal{M}$.

Wystarczy bez straty ogólności założyć, że S jest półgrupą 0-prostą. Stąd, analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 4.4.4, $S = \mathcal{M}^0(G^0; X, Y; A)$ dla pewnej grupy G^0 . Kolumny półgrupy macierzowej $\mathcal{M}^0(G^0; X, Y; A)$ są prawostronnymi ideałami S . Wynika stąd, że R jest sumą prawostronnych ideałów, które są sumami półgrupowymi o mniejszej liczbie elementów niż S . Z założenia indukcyjnego R jest sumą lewostronnych ideałów z $\mathcal{M}$. Stąd $R \in \mathcal{M}$, co kończy dowód. $\square$

Przykładami klas $\mathcal{M}$ spełniających założenia powyższych dwóch lematów są klasa pierścieni lewostronnie (prawostronnie) T -nilpotentnych, β -radykałnych oraz PI -pierścieni.

Skoncentrujemy się teraz na klasie PI -pierścieni. Przedstawimy jedną z wielu równoważnych definicji tej klasy. Rozważmy pierścień wielomianów $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ od nieprzemiennych zmiennych o współczynnikach z pierścienia liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Powiemy, że wielomian $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ jest unormowany, jeżeli przynajmniej jeden współczynnik jednomianu najwyższego stopnia z nośnika f jest równy 1.

Definicja 4.4.7. Pierścień A jest PI -pierścieniem wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$ taki, że dla dowolnego homomorfizmu ϕ , gdzie $\phi : \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots] \rightarrow A$ oraz $\phi(f) = 0$. Powiemy wtedy, że $f = 0$ jest tożsamością wielomianową na A lub że A spełnia f . Stopień wielomianu f nazywa się stopniem tożsamości wielomianowej $f = 0$.

Wiadomo, że jeżeli pierścień A spełnia tożsamość wielomianową stopnia d , to spełnia również tożsamość wieloliniową:

$$g = x_1 \cdots x_d + \sum_{id \neq \pi \in S_d} \alpha_\pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(d)} = 0, \quad (4.4.4)$$

gdzie S_d grupą permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, d\}$ oraz $\alpha_\pi \in \mathbb{Z}$.

Bardzo ważną informację o klasie PI -pierścieni podaje następujące

Twierdzenie 4.4.8. (Kępczyk i Puczyłowski, 2001, Twierdzenie 3) Przypuśćmy, że $\mathfrak{F}$ jest homomorficznie zamkniętą klasą pierścieni, która dodatkowo jest zamknięta na potęgi proste. Jeżeli dowolny niezerowy pierścień z $\mathfrak{F}$ zawiera niezerowy jednostronny PI ideał, to $\mathfrak{F}$ składa się z PI pierścieni.

Stąd dostajemy następujący

Wniosek 4.4.9. Niech pierścień $R = R_1 + R_2$ będzie sumą dwóch PI -podpierścieni R_1 oraz R_2 . Jeżeli R_1 jest jednostronnym ideałem pierścienia R , to R jest PI -pierścieniem.

Oznaczmy klasę wszystkich PI -pierścieni przez $\mathcal{P}$.

Następujące przykłady pochodzące z Kelarev (1993), których pewne modyfikacje teraz przedstawimy, zawężają klasę półgrup S , dla których klasa $\mathcal{P}$ jest S -zamknięta.

Przykład 4.4.10. Niech G będzie dowolną grupą nieskończoną. Pokażemy, że klasa $\mathcal{P}$ nie jest G -zamknięta. W G istnieje nieskończony ciąg elementów $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ taki, że dla dowolnych liczb naturalnych $m \leq n$, $g_m g_{m+1} \cdots g_n \neq e$. Rzeczywiście, niech $g_1 \neq e$. Załóżmy, że wyznaczono elementy $g_1, g_2, \dots, g_n$ tego ciągu dla $n > 1$. Rozważmy zbiór $C = \{(g_m g_{m+1} \cdots g_n)^{-1} \mid m \leq n\} \cup \{e\}$. Wystarczy teraz za g_{n+1} przyjąć dowolny element ze zbioru $G \setminus C$. Rozważmy F -algebrę B generowaną przez elementy $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ z następującymi relacjami: $a_i a_j = 0$ dla dowolnych liczb naturalnych i oraz j takich, że $j \neq i + 1$. Możemy zdefiniować następującą podalgebrę z gradacją $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ algebry B . Niech $A_g = 0$ dla $g \in G \setminus C$ oraz A_g będzie podprzestrzenią liniową algebry B generowaną przez iloczyny $a_m a_{m+1} \cdots a_n$, dla których $g_m g_{m+1} \cdots g_n = g$. Oczywiście wszystkie podalgebry wśród A_g są algebrami z zerowym mnożeniem. Łatwo zauważyć, że A nie spełnia jednak tożsamości wieloliniowej (4.4.4) dla żadnego stopnia d . Zatem A nie jest PI -algebrą.

Przykład 4.4.11. Niech S będzie dowolną nil półgrupą. Pokażemy, że jeżeli klasa PI -pierścieni jest S -zamknięta, to S jest półgrupą nilpotentną. Załóżmy, że S nie jest nilpotentna. Zatem dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje niepusty podzbiór półgrupy S postaci $M_n = \{s_{in} \mid s_{1n} s_{2n} \cdots s_{nn} \neq 0\}$. Rozważmy F -algebrę A generowaną przez różne elementy a_{ij} gdzie $i, j \in \mathbb{N}$. Dodatkowo niech generatory A spełniają następujące relacje: $a_{im} a_{jn} = 0$ jeżeli tylko $m \neq n$ lub $j \neq i + 1$. Przez A_s oznaczmy podprzestrzeń liniową A generowaną przez iloczyny $a_{kn} a_{(k+1)n} \cdots a_{mn}$, gdzie $k \leq m \leq n$, takie, że $s_{kn} s_{(k+1)n} \cdots s_{mn} = s$. Oczywiście $A = \bigoplus_{s \in S} A_s$ jest algebrą z S -gradacją. Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $s \in S$, A_s jest podalgebrą, to $A_s^2 \subseteq A_s \cap A_{s^2}$. Ale S jest nil, więc $s \neq s^2$. Stad $A_s^2 = 0$. Jednakże dla dowolnego $d \in \mathbb{N}$, elementy $a_{1d}, a_{2d}, \dots, a_{dd}$ nie spełniają tożsamości wieloliniowej (4.4.4). Zatem A nie jest PI -algebrą. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że nil półgrupa S musi być nilpotentna w tym przypadku.

Przykład 4.4.12. Zauważmy, że klasa $\mathcal{P}$ nie jest S -zamknięta w przypadku półgrup S zawierających nieskończenie wiele idempotentów $I = \{e_1, e_2, \dots\}$. Niech $R_{e_i} = F_i$, gdzie F_i jest pierścieniem macierzy wymiaru $i \times i$ nad ustalonym ciałem F dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $R_s = 0$ dla każdego $s \in S \setminus I$. Oczywiście pierścień $R = \bigoplus_{s \in S} R_s$ nie jest PI -pierścieniem.

Następny przykład dotyczy także klas pierścieni, którymi zajmowaliśmy się wcześniej. Oznaczmy przez $\mathcal{TN}$ klasę pierścieni lewostronnie T -nilpotentnych.

Przykład 4.4.13. Rozważmy F -algebrę wolną $A = F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ o współczynnikach z ciała F od nieprzemiennych zmiennych $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, gdzie $n > 1$. Podalgebra XA algebry A posiada naturalną gradację względem stopnia jednomianów z XA . Niech S będzie dowolną półgrupą, która nie jest torsyjna oraz a jej niecyklicznym elementem. Niech P_{a^n} będzie podgrupą grupy addytywnej XA generowaną przez jednomiany stopnia n . W przypadku, gdy $t \in S \setminus \{a, a^2, \dots\}$ połączmy $P_t = 0$. Oczywiście $XA = \bigoplus_{s \in S} P_s$ jest algebrą z gradacją względem S , wszystkie podalgebry spośród P_s są pierścieniami z zerowym mnożeniem oraz $XA \notin \mathcal{P} \cup \beta \cup \mathcal{T}\mathcal{N}$.

Jesteśmy przygotowani do podania głównego wyniku w tym rozdziale, który jest uogólnieniem (Kelarev, 1993, Twierdzenie 1).

Twierdzenie 4.4.14. Klasa $\mathcal{P}$ jest S -zamknięta wtedy i tylko wtedy, gdy półgrupa S posiada skończony łańcuch ideałów:

$$\emptyset = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = S \quad (4.4.5)$$

taki, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$, każdy iloraz S_{i+1}/S_i jest nilpotentny albo skończony.

Dowód. Załóżmy, że klasa $\mathcal{P}$ jest S -zamknięta. Pokażemy, że S posiada skończony łańcuch (4.4.5). Przykład 4.4.10 pokazuje, że S nie zawiera grup skończonych. Z Przykładów 4.4.12 oraz 4.4.13 dostajemy, że półgrupa S jest torsyjna oraz zawiera skończoną liczbę idempotentów. Z założenia oraz Przykładu 4.4.11 wynika, że każdy obraz homomorficzny S , który jest nil jest nilpotentny. Stosując Twierdzenia 4.4.4 dostajemy tezę.

Założmy, że S posiada skończony łańcuch (4.4.6) oraz $R = \sum_{s \in S} R_s$ jest sumą półgrupową taką, że wszystkie podpierścienie spośród podgrup addytywnych R_s pierścienia R są z $\mathcal{P}$. Niech $I_i = \sum_{s \in S_i} R_s$ dla $1 < i \leq n$. Oczywiście $I_i \triangleleft R$ oraz $I_i = \sum_{s \in S_i} R_s$. Zauważmy, że $I_{i+1}/I_i = \sum_{s \in S_{i+1}/S_i} P_s$, gdzie podpierścienie spośród P_s dla $s \in S_{i+1}/S_i$ są izomorficzne z odpowiednimi podpierścieniami R_s dla $s \neq 0$ oraz $P_0 = 0$, zatem są PI -pierścieniami. Z założenia iloraz S_{i+1}/S_i jest skończony lub nilpotentny. Na podstawie Lematu 4.7, I_{i+1}/I_i jest PI -pierścieniem, gdy S_{i+1}/S_i jest skończona. W przypadku, gdy S_{i+1}/S_i jest nilpotentna, I_{i+1}/I_i jest również PI -pierścieniem. Zatem dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $I_{i+1}/I_i \in \mathcal{P}$, co implikuje (po n krokach), że $R \in \mathcal{P}$. $\square$

Implikację (i) $\Rightarrow$ (ii) powyższego twierdzenia możemy rozszerzyć na klasę β oraz $\mathcal{T}\mathcal{N}$.

Stwierdzenie 4.4.15. Niech półgrupa S posiada skończony łańcuch ideałów:

$$\emptyset = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = S \quad (4.4.6)$$

taki, że dla dowolnego $1 \leq i \leq n-1$, każdy iloraz S_{i+1}/S_i jest nilpotentny albo skończony. Wtedy klasa $\mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U} = \beta$ lub $\mathcal{U} = \mathcal{T}\mathcal{N}$ jest S -zamknięta.

Dowód. Załóżmy, że półgrupa S spełnia założenia powyższego stwierdzenia oraz $R = \sum_{s \in S} R_s$ jest sumą półgrupową taką, że wszystkie podpierścienie spośród podgrup addytywnych R_s pierścienia R są z $\mathcal{U}$. Niech $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Istnieją takie ideały $I_i, I_{i+1} \triangleleft R$, wyznaczone przez półgrupy S_i, S_{i+1} z łańcucha (4.4.6), że I_{i+1}/I_i . Ponieważ S_{i+1}/S_i jest nilpotentny albo skończony, więc na mocy Lematów 4.6 oraz 4.7, $I_{i+1}/I_i \in \mathcal{U}$. Ponieważ klasa $\mathcal{U}$ jest zamknięta na rozszerzenia, więc $I_{i+1} \in \mathcal{U}$. W konsekwencji $I_n = R \in \mathcal{U}$, co należało udowodnić. $\square$

Pojawia się naturalne pytanie:

Problem 4.4.16. Czy implikację w Stwierdzeniu 4.4.15 można odwrócić?

4.5 S-sumy pierścieni

Zakończymy przedstawieniem następującego uogólnienia pojęcia sumy półgrupowej:

Definicja 4.5.1. Powiemy, że pierścień $R = \sum_{\alpha \in S} R_\alpha$ jest S -sumą, gdzie R_s są podgrupami grupy abelowej R oraz S jest dowolną półgrupą wtedy i tylko wtedy, gdy $R_s R_t \subseteq \sum_{q \in \langle st \rangle} R_q$, gdzie $\langle st \rangle$ oznacza podpółgrupę w S generowaną przez st .

Oczywiście każdy pierścień, który jest sumą półgrupową jest S -sumą.

Naszym celem jest uogólnienie Twierdzenia 4.4.5 na przypadek S -sum. Potrzebować będziemy następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.5.2. (Kępczyk, 2021, Twierdzenie 4) Niech R_1 będzie PI -podpierścieniem pierścienia R oraz R_2 podgrupą grupy addytywniej R taką, że $R = R_1 + R_2$ oraz R_2 spełnia tożsamość wielomianową. Wtedy:

1. jeżeli $R_2^t \subseteq R_1$ dla pewnej liczby całkowitej t , to R jest PI -pierścieniem;
2. jeżeli $(R_1 R_2)^k \subseteq R_1$ dla pewnej liczby całkowitej k , to R jest PI -pierścieniem.

Potrzebować też będziemy następujących lematów:

Lemat 4.8. Niech G będzie skończoną 2-grupą oraz $R = \sum_{s \in G} R_s$ G -sumą. Jeżeli $R_e \in \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U} = \mathcal{P}$ lub $\mathcal{U} = \beta$ lub $\mathcal{U} = \mathcal{TN}$, to $R \in \mathcal{U}$.

Dowód. Każda skończona 2-grupa posiada ciąg centralny o ilorazach rzędu dwa. Ponadto jeżeli N jest dzielnikiem normalnym grupy G , to $R = \sum_{gN \in G/N} R_{gN}$ G/N -sumą, której składnikiem początkowym jest R_N . Zatem jeżeli $R_N \in \mathcal{U}$ oraz G/N jest grupą rzędu dwa, to na podstawie Twierdzeń 4.5.2, 4.1 oraz 4.2.2, $R \in \mathcal{U}$. Wykorzystując rozumowanie indukcyjne względem rzędu grupy G otrzymujemy tezę. $\square$

Lemat 4.9. Niech S będzie skończoną półgrupą oraz $R = \sum_{s \in S} R_s$ jest S -sumą, jedy-nymi podgrupami S są 2-grupy. Jeżeli wszystkie podpierścienie spośród R_s są PI -pierścieniami, to R jest PI -pierścieniem.

Dowód. Teza wynika z Lematów 4.7 oraz 4.8. $\square$

Lemat 4.10. Dla dowolnej grupy torsyjnej G , która nie jest 2-grupą, istnieje G -suma $R = \sum_{s \in G} R_s$ taka, że wszystkie podpierścienie spośród R_s są pierścieniami z zerowym mnożeniem, ale $R \notin \mathcal{P} \cup \beta \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{N}$.

Dowód. Niech $A = XB[X]$ będzie pierścieniem wielomianów przemiennych zmiennych ze zbioru $X = \{x, y, z\}$ o współczynnikach z pierścienia B bez wyrazów stałych. Załóżmy, że $B \notin \mathcal{P} \cup \beta \cup \mathcal{T}$. Niech I będzie ideałem A generowanym przez x^3, y^3, xy, xz oraz yz . Rozważmy pierścień $R = A/I$. Niech $R_g = (zB[z] + xB + y^2B + I)/I$, $R_{g^2} = (x^2B + yB + I)/I$ oraz $R_s = 0$ dla dowolnego $s \in G \setminus \{g, g^2\}$. Zauważmy, że $R_g R_{g^2} = R_{g^2} R_g = 0$. Ponadto, ponieważ $g, g^2 \in \langle g \rangle$, więc $R_g^2 = (zB[z] + x^2B + I)/I \subseteq \sum_{s \in \langle g \rangle} R_s$ oraz $R_{g^2}^2 = (y^2B + I)/I \subseteq \sum_{s \in \langle g \rangle} R_s$. Stąd R jest G -sumą, wszystkie podpierścienie spośród R_s są pierścieniami z zerowym mnożeniem oraz $R \notin \mathcal{P} \cup \beta \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{N}$. $\square$

Twierdzenie 4.5.3. (por. (Kępczyk, 2020, Twierdzenie 5.3)) Następujące warunki są równoważne:

- (i) dla dowolnej S -sumy $R = \sum_{s \in S} R_s$, jeżeli wszystkie podpierścienie spośród R_s są PI -pierścieniami, to R jest PI -pierścieniem;
- (ii) S^0 posiada skończony łańcuch ideałów taki, że:

$$0 = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = S^0,$$

gdzie każdy S_i/S_{i-1} jest nilpotentny lub skończony dla $i = 1, \dots, n$ oraz każda podgrupa S jest 2-grupą.

Dowód. (i) $\Rightarrow$ (ii). Podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 4.4.14, wykorzystując Przykłady 5.9 - 5.12 oraz Twierdzenie 4.4.4 dostajemy, że S posiada skończony łańcuch (4.4.2). Ponadto na podstawie Lematu 4.10, każda podgrupa S jest 2-grupą.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Wystarczy zastosować Lemat 4.9 oraz rozumowanie indukcyjne względem długości łańcucha (4.4.2) analogiczne jak w dowodzie Twierdzenia 4.4.14. $\square$

Problem 4.5.4. Czy klasę PI -pierścieni w Twierdzeniu 4.10 można zastąpić klasą β lub $\mathcal{T} \cup \mathcal{N}$?

Przedstawione w pracy Kelarev i McConnell (1995) wyniki, które stanowią główną motywację dla tematyki tego rozdziału, dotyczą S -sum pierścieni przy ogólniejszej definicji tego pojęcia. Nazwiemy te sumy, dla odróżnienia, S_∞ -sumami pierścieni. Zasadnicza różnica wyraża się w definicji sumy $\sum_{\alpha \in S} R_\alpha$, w której do tej pory dopuszczaliśmy jedynie skończone liczby składników. Rozważmy teraz następujący przypadek:

$$\sum_{s \in S} R_s = \{x_s + x_t + \dots \mid x_s \in R_s, x_t \in R_t, \dots\}. \quad (4.5.1)$$

Definicja 4.5.5. Powiemy, że pierścień $R = \sum_{\alpha \in S} R_\alpha$ z sumą (4.5.1), jest S_∞ -sumą względem półgrupy S wtedy i tylko wtedy, gdy $R_s R_t \subseteq \sum_{q \in \langle st \rangle} R_q$, gdzie $\langle st \rangle$ oznacza podpółgrupę w S generowaną przez st .

Oczywiście każdy pierścień, który jest S -sumą półgrupową jest S_∞ -sumą półgrupową, ale nie na odwrót. Wystarczy rozważyć pierścień wielomianów $F[x]$ oraz pierścień szeregów formalnych $F\{x\}$ zmiennej x nad dowolnym ciałem F . Są to pierścienie z naturalnymi gradacjami względem półgrupy $\mathbb{N}$. Różnicę między pojęciami S -sum dobrze widać także, gdy rozważymy pierścień $R = \bigoplus_{s \in S} R_s$ oraz $R = \prod_{s \in S} R_s$, gdzie S jest nieskończoną półgrupą z zerowym mnożeniem oraz R_α są dla $s \in S$ podgrupami grupy abelowej R .

Zauważmy, że w przypadku S_∞ -sum zachodzi analogiczne do 4.5.3 twierdzenie.

Twierdzenie 4.5.6. (Kępczyk, 2020, Twierdzenie 5.3) Następujące warunki są równoważne:

- (i) dla dowolnej S_∞ -sumy $R = \sum_{s \in S} R_s$, jeżeli wszystkie podpierścienie spośród R_s są PI -pierścieniami, to R jest PI -pierścieniem;
- (ii) S^0 posiada skończony łańcuch ideałów taki, że:

$$0 = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = S^0,$$

gdzie każdy S_i/S_{i-1} jest nilpotentny lub skończony dla $i = 1, \dots, n$ oraz każda podgrupa S jest 2-grupa.

Zaprezentujemy, w kilku następujących lematach, wyniki dotyczące klas $\mathcal{TN}$ oraz β , których nie udało się nam uzyskać w przypadku S -sum, a które zachodzą dla S_∞ -sum pierścieni.

Lemat 4.11. Jeżeli półgrupa S ma nieskończenie wiele idempotentów, to istnieje S_∞ -suma $R = \sum_{s \in S} R_s$ taka, że wszystkie podpierścienie spośród R_s są nilpotentne, ale R nie jest nil-pierścieniem.

Dowód. Niech $\{e_1, e_2, \dots\}$ będzie dowolnym nieskończonym zbiorem idempotentów półgrupy S . Połóżmy $R_{e_i} = xF[x]/(x^i)$. Niech $R_s = 0$ dla pozostałych elementów s z S . Oczywiście $R = \prod_{s \in S} R_s$ jest S_∞ -sumą, która nie jest nil. $\square$

Lemat 4.12. Jeżeli nil półgrupa S , która nie jest półgrupą nil ograniczonego indeksu, to istnieje S_∞ -suma $R = \sum_{s \in S} R_s$ taka, że wszystkie podpierścienie spośród R_s są nilpotentne, ale R nie jest nil-pierścieniem.

Dowód. Z założenia istnieje w S ciąg elementów $s_1, s_2, \dots$ taki, że $\langle s_i \rangle$ są półgrupami nilpotentnymi o coraz większym stopniu nilpotentności dla kolejnych $i \in \mathbb{N}$. Ponadto $\langle s_i \rangle \cap \langle s_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$. Bez straty ogólności możemy założyć, że dla każdej liczby naturalnej i , $\langle s_i \rangle$ jest półgrupą nilpotentną o stopniu nilpotentności równym $i + 1$. Niech dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, $R_{s_i^m} = (xF[x]/(x^{i+1}))^m$, gdzie $1 \leq$

$m < i + 1$. Przyjmijmy $R_s = 0$ dla pozostałych elementów $s \in S$. Łatwo zauważyć, że $R = \prod_{i \in \mathbb{N}} xF[x]/(x^{i+1}) = \sum_{s \in S} R_s$ jest S_∞ -sumą. Oczywiście R nie jest nilpierścieniem. $\square$

Lemat 4.13. Jeżeli G jest nieskończoną grupą torsyjną, to istnieje G_∞ -suma $R = \sum_{s \in G} R_s$ taka, że wszystkie podpierścienie spośród $R_s \in \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U} = \beta$ lub $\mathcal{U} = \mathcal{TN}$, ale $R \notin \mathcal{U}$.

Dowód. Niech:

$$R_e = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} xF[x]/(x^i),$$

gdzie e jest elementem neutralnym grupy G . Połóżmy $R_{g_i} = xF[x]/(x^i)$ dla $e \neq e_i \in G$ oraz $R_g = 0$ dla pozostałych elementów $g \in G$. Łatwo zauważyć, że $R = \prod_{g \in G} R_g$ jest G_∞ -sumą, która nie jest nil. $\square$

Powyższe fakty prowadzą do następującego stwierdzenia:

Stwierdzenie 4.5.7. Niech dla pewnej półgrupy S , $R = \sum_{s \in S} R_s$ będzie S_∞ -sumą taką, że jeżeli wszystkie podpierścienie spośród $R_s \in \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U} = \beta$ lub $\mathcal{U} = \mathcal{TN}$, to $R \in \mathcal{U}$. Wtedy S^0 posiada skończony łańcuch ideałów taki, że:

$$0 = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots \subseteq S_n = S^0,$$

gdzie każdy iloraz S_i/S_{i-1} jest nil ograniczonego indeksu lub jest skończony dla $i = 1, \dots, n$ oraz każda podgrupa S jest 2-grupa.

Dowód. Załóżmy, że $\mathcal{U} = \mathcal{TN}$ lub $\mathcal{U} = \beta$. Wykorzystując Przykład 4.4.13 oraz Lematy 4.10 oraz 4.13 dostajemy, że dowolna podgrupa w S jest skończoną 2-grupa. Z Lematu 4.11 S ma skończenie wiele idempotentów. Stosując Lemat 4.12 otrzymujemy dodatkowo, że każdy nil obraz homomorficzny S jest nil ograniczonego indeksu. Teza wynika teraz z Twierdzenia 4.4.4, Uwagi 4.4.5 oraz Lematu 4.8. $\square$

Nasuwa się pytanie, czy można odwrócić implikację w Stwierdzeniu 4.5.7. Wobec Lematu 4.7 sprowadza się ono do następującej kwestii:

Problem 4.5.8. Niech dla pewnej półgrupy S , $R = \sum_{s \in S} R_s$ będzie S_∞ -sumą taką, że wszystkie podpierścienie spośród $R_s \in \mathcal{U}$, gdzie $\mathcal{U} = \beta$ lub $\mathcal{U} = \mathcal{TN}$. Czy jeżeli S jest nil półgrupą ograniczonego indeksu, to $R \in \mathcal{U}$?

Podsumowanie

Przedstawiliśmy własności kilku klas pierścieni, które są bezpośrednimi uogólnieniami klasy pierścieni nilpotentnych ze szczególnym uwzględnieniem pierścieni

T -nilpotentnych oraz pierścieni radykalnych w sensie radykału pierwszego. Bezpośrednią motywacją do zajęcia się tymi klasami był znany wynik Kegela mówiący, że pierścienie, które są sumami dwóch podpierścieni nilpotentnych są nilpotentne. Poszukiwanie uogólnienia tego rezultatu, gdzie zamiast dwóch rozważa się dowolną skończoną liczbę podpierścieni o własnościach bliskich nilpotentności, doprowadziło do zajęcia się pierścieniami z różnego typu S -gradacjami, gdzie S jest półgrupą. W pracy zaprezentowaliśmy aktualny stan wiedzy związany z tego rodzaju sumami podpierścieni. Na tej podstawie przedstawiliśmy także nowe wyniki oraz szereg pytań, które stanowić mogą materiał do dalszych badań.

Bibliografia

- Bahturin, Y., i Giambruno, A. (1994). Identities of sums of commutative subalgebras. *Rend. Mat. Palermo*, 43, 250–258.
- Beidar, K., i Mikhalev, A. (1995). Generalized polynomial identities and rings which are sums of two subrings. *Algebra and Logic*, 34, 3–11.
- Bokut, L. (1976). Imbeddings into simple associative algebra. *Algebra i Logika*, 15, 117–147.
- Chebotar, M., Lee, P. i Puczyłowski, E. (2010). A note on termination of the Baer construction of the prime radical. *Arch. Math. (Basel)*, 95 no. 4, 325–332.
- Clifford, A., i Preston, G. (1961). The algebraic theory of semigroups, Vol. I. *Math. Surveys No. 7*, Amer. Math. Soc. Providence.
- Felzenszwalb, B., Giambruno, A. i Leal, G. (2003). On rings which are sums of two PI -subrings: a combinatorial approach. *Pacific J. Math.*, 209 no. 1, 17–30.
- Ferrero, M., i Puczyłowski, E. (1989). On rings which are sums of two subrings. *Arch. Math.*, 53, 4–10.
- Gardner, B. J. (1992). Some nil ring properties related to T -nilpotence. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 46, 519–523.
- Janeski, J., i Weissglass, J. (1973). Regularity of semilattice sums of rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 39, 479–482.
- Kępczyk, M. (2015). Note on algebras which are sums of two PI subalgebras. *J. Algebra Appl.*, 14 no 10., 1550149, 10 pp.
- Kępczyk, M. (2016). A note on algebras which are sums of two subalgebras. *Canad. Math. Bull.*, 59 no. 2, 340–345.
- Kępczyk, M. (2017). A ring which is a sum of two PI subrings is always a PI ring. *Israel J. Math.*, 221 no. 1, 481–487.
- Kępczyk, M. (2020). Rings which are sums of PI subrings. *J. Algebra Appl.*, 19 no. 8, 2050157, 12 pp.
- Kępczyk, M. (2021). Note on rings which are sums of a subring and an additive subgroup. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 32 no. 3, 359–364.

- Kępczyk, M., i Puczyłowski, E. (1996). On radicals of rings which are sums of two subrings. *Arch. Math.*, 66, 8–12.
- Kępczyk, M., i Puczyłowski, E. (2001). Rings which are sums of two subrings satisfying polynomial identities. *Comm. Algebra*, 29, 2059–2065.
- Kegel, O. (1962/63). Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe. *Math. Ann.*, 149, 258–260.
- Kelarev, A. (1993). On semigroup graded PI-algebras. *Semigroup Forum*, 47, 294–298.
- Kelarev, A., i McConnell, N. (1995). Two version of graded rings. *Publ. Math. Debrecen*, 47, 219–227.
- Lam, T. (1991). *A first course in noncommutative rings* (131). New York: Springer-Verlag, BerlinHeidelberg-New York.
- Lanski, C. (1990). Can a semi-prime ring be a finite union of right annihilators? *Canad. Math. Bull. Vol.*, 33 no. 1, 126–128.
- Neumann, B. (1954). Groups covered by permutable subsets. *J. Lond. Math. Soc.*, 29, 236–248.
- Puczyłowski, E. (1999). Some results and questions on nil rings. *Mat. Contemp.*, 16, 265–280.
- Salwa, A. (1996). Rings that are sums of two locally nilpotent subrings. *Comm. Algebra*, 24 no. 12, 3921–3931.
- Teply, M., Turman, E. i Quesada, A. (1980). On semisimple semigroup rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 79, 157–163.
- Weissglass, J. (1973). Semigroup rings and semilattice sums of rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, 471–478.