Rozdział 3

PROBABILISTYCZNE I ALGEBRAICZNE ASPEKTY ZAOKRĄGLANIA LICZB

Ryszard Mazurek*

Streszczenie Niniejszy rozdział jest poświęcony probabilistycznym i algebraicznym zagadnieniom związanym z zaokrąglaniem liczb rzeczywistych. Dla każdej liczby rzeczywistej a, która może być zapisana w układzie dziesiętnym z dwoma miejscami po przecinku wyznaczono częstość, z jaką dla stu kolejnych liczb naturalnych x zaokrąglenia iloczynów ax do najbliższej liczby całkowitej są zaokrągleniami w dół. Ponadto zbadano dwa grupoidy zdefiniowane z wykorzystaniem, odpowiednio, zaokrągleń liczb naturalnych do setek i zaokrągleń liczb rzeczywistych do części całkowitej. W każdym z tych grupoidów wyznaczono wszystkie podgrupoidy cykliczne będące półgrupami.

Słowa kluczowe: zaokrąglenie liczby rzeczywistej, grupoid, półgrupa

Wprowadzenie

Z zaokrągleniami liczb często mamy do czynienia w życiu codziennym (na przykład gdy wyliczona kwota podatku VAT wynosi 1234,5678 zł i trzeba ją zaokrąglić do pełnych groszy, albo gdy mówimy, że spotkanie trwało około 30 minut, a w rzeczywistości trwało 27 minut i 42 sekundy). Konieczność zaokrąglania liczb często pojawia się również przy pomiarach lub wyliczeniach wielkości fizycznych w nauce i technice.

W niniejszym rozdziale rozważane są trzy rodzaje zaokrągleń liczb rzeczywistych nieujemnych: zaokrąglanie do najbliższej liczby całkowitej (tzn. zaokrąglanie względem cyfry jedności), zaokrąglanie względem cyfry setek i zaokrąglanie do części całkowitej (nazywane także obcinaniem, gdyż polega ono na „obcięciu" cyfr po przecinku w zapisie dziesiętnym liczby). W pierwszej części rozdziału badane są pewne probabilistyczne aspekty zaokrąglania do najbliższej liczby całkowitej. W części tej, dla każdej liczby rzeczywistej nieujemnej a, która może być zapisana w układzie dziesiętnym z dwoma miejscami po przecinku, wyznaczono prawdopodobieństwo

* Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, Wiejska 45A, 15-351 Białystok, r.mazurek@pb.edu.pl

DOI 10.24427/978-83-67185-18-9_3

wylosowania ze zbioru $\{1,2,\dots,100\}$ takiej liczby x, że zaokrąglenie iloczynu ax do najbliższej liczby całkowitej jest zaokrągleniem w dół. W drugiej części rozdziału zbadano dwa grupoidy zdefiniowane z wykorzystaniem, odpowiednio, zaokrągleń liczb naturalnych względem cyfry setek i zaokrągleń liczb rzeczywistych do części całkowitej. W każdym z tych grupoidów wyznaczono wszystkie podgrupoidy cykliczne, które są półgrupami.

3.1 Probabilistyczne aspekty zaokrąglania liczb

W tej części rozdziału rozważymy prawdopodobieństwa zdarzeń związanych z zaokrąglaniem liczb rzeczywistych do najbliższej liczby całkowitej. Punktem wyjścia jest następujący przykład.

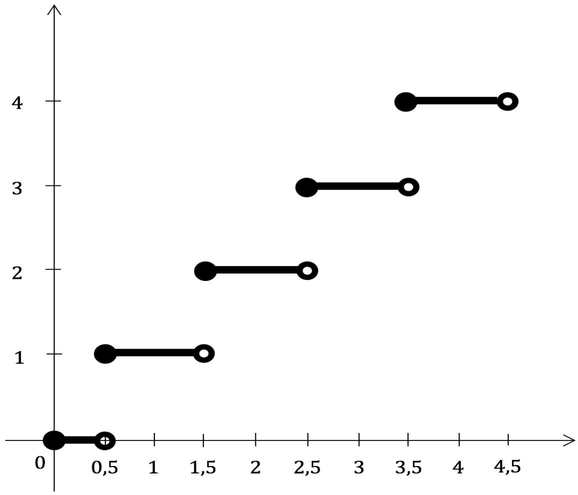
Przykład 3.1.1. Bank oferuje roczną lokatę, na którą klienci banku mogą wpłacać w pełnych złotych dowolną kwotę nieprzekraczającą 1000 zł. Lokata jest oprocentowana roczną stopą procentową 5% z roczną kapitalizacją odsetek. Po roku bank wypłaca klientom należną kwotę zaokrągloną do pełnych złotych. Zakładając, że rozkład wpłacanych kwot jest jednostajny, należy rozstrzygnąć, co jest bardziej prawdopodobne dla losowej wpłaty: to że należna kwota będzie zaokrąglona w dół, czy że będzie zaokrąglona w górę.

Oznaczmy przez x kwotę (w złotych), którą klient lokuje w banku. Dopuszczalne jest lokowanie kwot tylko w pełnych złotych, więc x jest liczbą naturalną nie większą niż 1000. Ponieważ lokata jest oprocentowana roczną stopą procentową 5% z kapitalizacją roczną, więc stan lokaty po roku wynosi $1,05x$ zł i jest to kwota należna klientowi. Jednak zgodnie z przedstawionymi zasadami, bank wypłaca klientowi nie kwotę $1,05x$ zł, lecz jej zaokrąglenie do pełnych złotych.

Zasada zaokrąglania kwot do pełnych złotych jest dobrze znana (stosuje się ją np. w prawie podatkowym): końcówki kwot wynoszące mniej niż 50 groszy pomija się, a końcówki kwot wynoszące 50 i więcej groszy podwyższa się do pełnych złotych, przy czym przez końcówkę kwoty rozumiemy nadwyżkę kwoty ponad liczbę pełnych złotych, które się w tej kwocie mieszczą. Aby rozwiązanie rozważanego problemu przedstawić w sposób zwarty, wprowadzimy funkcję opisującą proces zaokrąglania liczby rzeczywistej nieujemnej r do najbliższej liczby całkowitej, odpowiadający rozważanemu w naszym przykładzie zaokrąglaniu do pełnych złotych. Oznaczmy przez t końcówkę liczby r, tzn. $r = [r] + t$, gdzie $[r]$ jest częścią całkowitą liczby r, a t jest liczbą z przedziału $[0,1)$. Wówczas zaokrągleniem liczby r jest liczba $(r)_0$ zdefiniowana następująco:

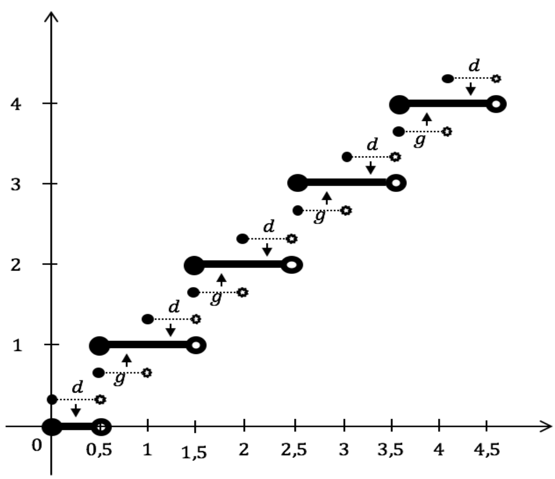
$$(r)_0 = \begin{cases} [r], & \text{jeśli } t < 0,5, \\ [r] + 1, & \text{jeśli } t \geq 0,5. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Początkowy fragment wykresu funkcji $(r)_0$ jest przedstawiony na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Wykres funkcji $(r)_0$

W pierwszym z przypadków wyróżnionych w definicji (3.1.1), tzn. gdy $t < 0,5$, mówimy, że liczba r jest zaokrąglana w dół, a w drugim (gdy $t \geq 0,5$) – że liczba r jest zaokrąglana w górę. Na przykład, zaokrąglenia liczb $2,4$ i $1,9$ są takie same i wynoszą 2, ale dla liczby $2,4$ jest to zaokrąglenie w dół, a dla liczby $1,9$ – w górę. Ponieważ w rozważanym przykładzie interesuje nas nie wartość zaokrąglenia, lecz to, czy ta wartość jest wynikiem zaokrąglenia w dół, czy w górę, więc na wykresie funkcji zaokrąglania $(r)_0$ (przedstawionym na rysunku 3.1) dodatkowo wyodrębniamy przypadki zaokrągleń w dół (oznaczone przez d) i w górę (oznaczone przez g), otrzymując rysunek 3.2.



Rysunek 3.2: Wykres funkcji $(r)_0$ z podziałem na zaokrąglenia w dół (d) i w górę (g)

Rozważmy dla przykładu lokaty w wysokości kolejno od 1 zł do 40 zł (przy efektywnej stopie rocznej 5%). W tabeli 3.1 pokazano, dla których z nich należne kwoty są zaokrąglane w dół, a dla których w górę.

Lokowana kwota x	Należna kwota $1{,}05 \cdot x$	Rodzaj zaokrąglenia	Lokowana kwota x	Należna kwota $1{,}05 \cdot x$	Rodzaj zaokrąglenia
1	1,05	*d*	21	22,05	*d*
2	2,10	*d*	22	33,10	*d*
3	3,15	*d*	23	24,15	*d*
4	4,20	*d*	24	25,20	*d*
5	5,25	*d*	25	26,25	*d*
6	6,30	*d*	26	27,30	*d*
7	7,35	*d*	27	28,35	*d*
8	8,40	*d*	28	29,40	*d*
9	9,45	*d*	29	30,45	*d*
10	10,50	*g*	30	31,50	*g*
11	11,55	*g*	31	32,55	*g*
12	12,60	*g*	32	33,60	*g*
13	13,65	*g*	33	34,65	*g*
14	14,70	*g*	34	35,70	*g*
15	15,75	*g*	35	36,75	*g*
16	16,80	*g*	36	37,80	*g*
17	17,85	*g*	37	38,85	*g*
18	18,90	*g*	38	39,90	*g*
19	19,95	*g*	39	40,95	*g*
20	21,00	*d*	40	42,00	*d*

Tabela 3.1: Rodzaje zaokrągleń dla lokat w wysokości od 1 zł do 40 zł przy rocznej stopie procentowej 5%

Jak pokazuje tabela 3.1, dla lokowanych kwot w wysokości (w złotych) od 1 do 20 otrzymujemy taki sam ciąg rodzajów zaokrągleń

$$d,d,d,d,d,d,d,d,d,g,g,g,g,g,g,g,g,g,g,d, \tag{3.1.2}$$

jak dla lokowanych kwot w wysokości od 21 do 40. Sugeruje to, że ciąg rodzajów zaokrągleń (w dół lub w górę) jest okresowy, o okresie długości 20. I rzeczywiście tak jest, gdyż dla dowolnej lokowanej kwoty x zł otrzymujemy równość

$$1,05(x+20) = 1,05x+21,$$

a więc rodzaj zaokrąglenia dla lokowanych kwot $x+20$ zł i x zł jest taki sam.

Jesteśmy już gotowi, aby udzielić odpowiedzi na pytanie z przykładu 3.1.1. Kwoty możliwych wpłat (w złotych), czyli zbiór liczb $\{1,2,\ldots,1000\}$ dzielimy na 50 rozłącznych podzbiorów 20-elementowych w ten sposób, że pierwszy podzbiór zawiera wpłaty w wysokości od 1 do 20, drugi - od 21 do 40, trzeci - od 41 do 60, itd. Ponieważ ciąg rodzajów zaokrągleń dla kolejnych kwot z danego podzbioru jest taki sam jak dla kwot od 1 do 20, czyli jest ciągiem (3.1.2), w którym jest tyle samo zaokrągleń w dół co w górę, więc jeśli wysokości lokowanych kwot (w pełnych złotych) są jednakowo prawdopodobne, to dla losowej lokowanej kwoty jest tak samo prawdopodobne, że kwota należna (po roku trwania lokaty) będzie zaokrąglona w dół, jak i w górę.

Rozważmy lokatę bankową podobną do tej z przykładu 3.1.1, lecz z nieco niższą stopą procentową. Również w tym przypadku będziemy zakładać, że rozkład lokowanych kwot jest jednostajny.

Przykład 3.1.2. Bank oferuje roczną lokatę, na którą klienci banku mogą wpłacać dowolną kwotę w pełnych złotych nieprzekraczającą 1000 zł. Lokata jest oprocentowana roczną stopą procentową 4% z kapitalizacją roczną. Po roku bank wypłaca klientowi należną kwotę zaokrągloną do pełnych złotych. Co jest bardziej prawdopodobne dla losowej wpłaty: zaokrąglenie należnej kwoty w górę, czy w dół?

Poszukując odpowiedzi na powyższe pytanie, tym razem rozpoczniemy od wyznaczenia liczby naturalnej n takiej, że dla każdej liczby naturalnej x zaokrąglenie kwoty $x+n$ zł jest tego samego rodzaju jak kwoty x zł. Ponieważ

$$1,04(x+n) = 1,04x + 1,04n,$$

więc aby zaokrąglenia kwot $x+n$ zł i x zł były tego samego rodzaju, wystarczy aby liczba $1,04n$ była naturalna. Zatem szukamy liczby naturalnej n takiej, że

$$1,04n = m \text{ dla pewnej liczby naturalnej } m. \tag{3.1.3}$$

Równanie (3.1.3) jest równoważne równaniu

$$104n - 100m = 0,$$

które chcemy rozwiązać w liczbach naturalnych. W tym celu skorzystamy z przytoczonego niżej znanego twierdzenia o rozwiązaniach równania diofantycznego pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

Twierdzenie 3.1.3. (Sierpiński, 1987, Twierdzenie 12) Jeżeli para liczb całkowitych (x_0, y_0) jest rozwiązaniem równania $ax + by = c$, gdzie a, b, c są danymi liczbami całkowitymi, to wszystkie rozwiązania tego równania w liczbach całkowitych x, y są zawarte we wzorach:

$$x = x_0 + \frac{b}{NWD(a;b)}t;\ y = y_0 - \frac{a}{NWD(a;b)}t,$$

gdzie t jest dowolną liczbą całkowitą.

Z twierdzenia 3.1.3 wynika, że najmniejszą „dobrą” wartością n jest

$$n = \frac{100}{NWD(104;100)} = \frac{100}{4} = 25.$$

Zatem ciąg rodzajów zaokrągleń kwot rozważanych w przykładzie 3.1.2 jest okresowy, o okresie długości 25. Aby zobaczyć, który z rodzajów zaokrągleń przeważa w pełnych okresach, wystarczy wyznaczyć rodzaje zaokrągleń dla lokat w wysokości (w złotych) od 1 do 25. Rodzaje zaokrągleń dla tych kwot są przedstawione w tabeli 3.2.

Lokowana kwota x	Należna kwota $1{,}04 \cdot x$	Rodzaj zaokrąglenia
1	1,04	d
2	2,08	d
3	3,12	d
4	4,16	d
5	5,20	d
6	6,24	d
7	7,28	d
8	8,32	d
9	9,36	d
10	10,40	d
11	11,44	d
12	12,48	d
13	13,52	g

Lokowana kwota x	Należna kwota $1{,}04 \cdot x$	Rodzaj zaokrąglenia
14	14,56	g
15	15,60	g
16	16,64	g
17	17,68	g
18	18,72	g
19	19,76	g
20	20,80	g
21	21,84	g
22	22,88	g
23	23,92	g
24	24,96	g
25	26,00	d

Tabela 3.2: Rodzaje zaokrągleń dla lokat w wysokości od 1 zł do 25 zł przy rocznej stopie procentowej 4%

Jak widzimy w tabeli 3.2, dla wpłat w wysokości (w złotych) od 1 do 25, należne kwoty są w trzynastu przypadkach zaokrąglane w dół, a w dwunastu - w górę.

Aby odpowiedzieć na pytanie sformułowane w przykładzie 3.1.2, przy założeniu, że każda z możliwych kwot wpłaty jest tak samo prawdopodobna, postąpimy analogicznie jak w przykładzie 3.1.1. Ponieważ możliwych kwot wpłaty jest 1000 i długość okresu rodzajów zaokrągleń jest równa 25, a ponadto 25 dzieli 1000, więc, podobnie jak w przykładzie 3.1.1, możemy zbiór możliwych wartości wpłat rozbić na sumę rozłączną 25-elementowych podzbiorów w taki sposób, że w każdym podzbiorze rodzaje zaokrągleń są takie same jak dla kwot od 1 zł do 25 zł. Zatem dla kwot z każdego z tych podzbiorów mamy 13 zaokrągleń w dół i 12 zaokrągleń w górę. Wynika stąd, że dla losowej lokaty bardziej prawdopodobne jest zaokrąglenie należnej kwoty w dół – wynosi ono $\frac{13}{25} = 0,52$.

Dotychczasowe rozważania skłaniają do sformułowania następującego ogólniejszego problemu:

Problem 3.1.4. Dana jest liczba rzeczywista nieujemna a, która w zapisie dziesiętnym może być przedstawiona z dwoma miejscami po przecinku (np. $a = 3,00$ lub $a = 3,10$, lub $a = 3,12$). Dla liczb całkowitych nieujemnych x rozważamy zaokrąglenia iloczynów ax do najbliższej liczby całkowitej (według zasady przedstawionej w przykładzie 3.1.1). Co jest bardziej prawdopodobne dla losowo wybranej liczby x: zaokrąglenie liczby ax w dół, czy w górę?

Szczególne przypadki tego problemu rozważaliśmy w przykładzie 3.1.1 (dla $a = 1,05$) i w przykładzie 3.1.2 (dla $a = 1,04$) dla liczb naturalnych x nieprzekraczających 1000. Wyjaśnijmy, dlaczego w problemie 3.1.4 dopuszczamy wartość $x = 0$. Otóż, jak się niebawem okaże, w rozwiązaniu tego problemu ważne będą nie wartości x, lecz reszty z dzielenia tych wartości przez 100, a te zaczynają się od 0, a nie od 1.

Aby rozwiązać problem 3.1.4, zauważmy najpierw, że ponieważ x jest liczbą całkowitą nieujemną, więc wystarczy ograniczyć się do liczb a z przedziału $[0,1)$. Rzeczywiście, a można zapisać jako $a = k + r$, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą i r jest liczbą rzeczywistą z przedziału $[0,1)$, a wtedy $ax = (k+r)x = kx + rx$. Ponieważ kx jest liczbą całkowitą nieujemną, więc rodzaj zaokrąglenia liczb ax i rx jest taki sam. Zatem bez straty ogólności rozważań możemy zakładać, że a należy do przedziału $[0,1)$, a ponieważ w zapisie dziesiętnym liczby a dopuszczamy tylko dwa miejsca po przecinku, więc a jest jedną z liczb ze 100-elementowego zbioru

$$S = \{0,00; 0,01; 0,02; ...; 0,97; 0,98; 0,99\}. \tag{3.1.4}$$

Kolejną upraszczającą obserwacją jest spostrzeżenie, że przy danym czynniku a rodzaj zaokrąglenia (w dół lub w górę) jest dla liczb x i $x+100$ taki sam, gdyż $a(x+100) = ax + 100a$ i $100a$ jest liczbą całkowitą nieujemną (ponieważ liczba a może być w zapisie dziesiętnym przedstawiona z dwoma miejscami po przecinku). Zatem aby rozstrzygnąć, który rodzaj zaokrąglenia (w dół, czy w górę) jest dla danej liczby a bardziej prawdopodobny, wystarczy dla tej liczby wyznaczyć ciąg rodzajów zaokrągleń (d lub g) iloczynów ax dla wartości x od 0 do 99 (lub jakichkolwiek stu kolejnych liczb naturalnych x).

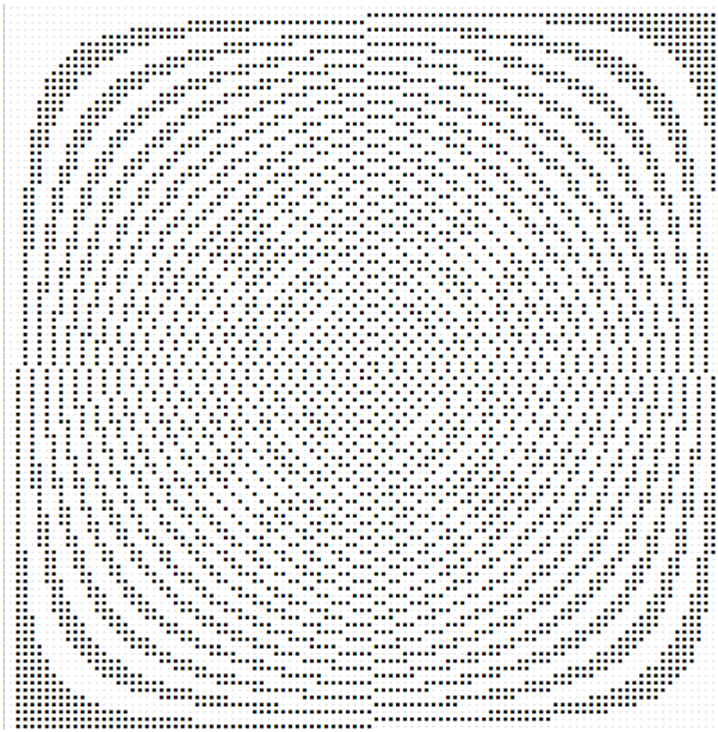
Na rysunku 3.3 przedstawiono w formie graficznej rodzaje zaokrągleń iloczynów ax do najbliższej liczby całkowitej dla wszystkich par (a,x), gdzie

$$a \in \{0,00; 0,01; \ldots; 0,99\} \text{ i } x \in \{0,1,\ldots,99\}.$$

Na rysunku tym widzimy tablicę o wymiarach 100×100, której wiersze (od góry w dół) odpowiadają kolejnym wartościom a, czyli kolejno liczbom

$$0,00; 0,01; 0,02; \ldots; 0,98; 0,99,$$

natomiast kolumny (od lewej strony do prawej) odpowiadają kolejnym wartościom x, czyli kolejno liczbom $0,1,\dots,99$. Jeżeli liczba ax jest zaokrąglana w górę, to na pozycji (a,x) znajduje się czarny kwadracik, a jeśli w dół, to biały. Rysunek 3.3 jest wynikiem prostego programu komputerowego.



Rysunek 3.3: Graficzne przedstawienie rodzajów zaokrągleń iloczynów ax dla par (a,x), gdzie $0 \le a \le 0,99$ i $0 \le x \le 99$

Rozważmy dowolną liczbę a ze zbioru S opisanego w (3.1.4). Policzymy, ile jest takich liczb $x \in \{0,1,\dots,99\}$, że iloczyn ax jest zaokrąglany w dół. Oczywiście liczba ax jest zaokrąglana w dół wtedy i tylko wtedy, gdy w zapisie dziesiętnym tej liczby pierwsza cyfra po przecinku jest mniejsza niż 5, czyli gdy przedostatnia cyfra liczby całkowitej nieujemnej $100ax$ jest mniejsza od 5, a więc gdy reszta z dzielenia liczby $100ax$ przez 100 jest mniejsza lub równa 49. Zapisując iloczyn $100ax$ w postaci Ax, gdzie $A = 100a$ jest liczbą całkowitą nieujemną, stwierdzamy zatem, że dla iloczynów ax liczba zaokrągleń w dół jest równa liczbie takich $x \in \{0,1,2,\dots,99\}$, że reszta z dzielenia liczby Ax przez 100 jest mniejsza niż 50. Aby zbadać, ile jest takich liczb x, skorzystamy z następującego znanego twierdzenia o rozwiązaniach kongruencji pierwszego stopnia.

Twierdzenie 3.1.5. (Narkiewicz, 1997, Twierdzenie 1.22) Niech m będzie liczbą naturalną i niech a, b będą liczbami całkowitymi takimi, że a nie dzieli się przez m. Wówczas kongruencja

$$ax \equiv b \ (mod\ m) \tag{3.1.5}$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy b dzieli się przez $NWD(a;m)$. Gdy warunek ten jest spełniony, to kongruencja (3.1.5) ma $NWD(a;m)$ różnych rozwiązań w zbiorze $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ i wszystkie one przystają do siebie $(mod\ \frac{m}{NWD(a;m)})$.

Policzymy, ile jest liczb $x \in \{0,1,2,\ldots,99\}$ takich, że $Ax \equiv b\ (mod\ 100)$ i $0 \leq b \leq 49$, gdzie $a \in \{0,00;0,01;\ldots;0,99\}$ i $A = 100a$. Jeżeli $a \neq 0$, to z twierdzenia 3.1.5 wynika, że ta kongruencja ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $b = k \cdot NWD(A;100)$ dla pewnej liczby całkowitej k spełniającej warunek $0 \leq k \cdot NWD(A;100) \leq 49$, a więc takich liczb b jest $[\frac{49}{NWD(A;100)})] + 1$. Zgodnie z twierdzeniem 3.1.5, dla każdej takiej liczby b kongruencja $Ax \equiv b\ (mod\ 100)$ ma $NWD(A;100)$ rozwiązań w zbiorze $\{0,1,\ldots,99\}$. Wynika stąd, że dla $a \neq 0$ liczba przypadków, gdy iloczyn ax jest zaokrąglany w dół, wynosi

$$\left(\left[\frac{49}{NWD(A;100)}\right]+1\right)\cdot NWD(A;100), \tag{3.1.6}$$

gdzie $A = 100a$. Jeżeli $a = 0$, to liczba zaokrągleń w dół jest równa 100 i taką samą wartość otrzymujemy ze wzoru (3.1.6) zastosowanego do liczby $a = 0$. Udowodniliśmy więc następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 3.1.6. Dla liczby nieujemnej a, która w zapisie dziesiętnym może być przedstawiona z dwoma miejscami po przecinku, dla dowolnego ciągu stu kolejnych liczb całkowitych nieujemnych x, wśród zaokrągleń liczb ax do najbliższej liczby całkowitej jest dokładnie

$$\left(\left[\frac{49}{NWD(100a;100)}\right]+1\right)\cdot NWD(100a;100) \tag{3.1.7}$$

zaokrągleń w dół, a więc prawdopodobieństwo zaokrąglenia liczby ax w dół jest równe

$$\frac{([\frac{49}{NWD(100a;100)}]+1)\cdot NWD(100a;100)}{100}. \tag{3.1.8}$$

Wróćmy do przykładu 3.1.1. Rozważaliśmy w nim lokatę w kwocie (w pełnych złotych) od 1 zł do 1000 zł, oprocentowaną roczną stopą procentową 5%, z której po roku jest wypłacana należna kwota zaokrąglona do pełnych złotych. W przykładzie tym pytaliśmy, co jest bardziej prawdopodobne: zaokrąglenie należnej kwoty w górę, czy w dół? Załóżmy, że kwoty możliwych wpłat są jednakowo prawdopodobne. Kwoty te dzielimy na 10 grup po 100 elementów: wpłaty w kwocie (w złotych) od 1 do 100, od 101 do 200, od 201 do 300, itd. Zgodnie ze stwierdzeniem

3.1.6, w każdej z tych 100-elementowych grup liczba zaokrągleń w dół jest równa

$$\left(\left[\frac{49}{NWD(100\cdot 1,05;100)}\right]+1\right)\cdot NWD(1,05\cdot 100;100) =$$

$$=\left(\left[\frac{49}{NWD(105;100)}\right]+1\right)\cdot NWD(105;100) =$$

$$=\left(\left[\frac{49}{5}\right]+1\right)\cdot 5 = (9+1)\cdot 5 = 50,$$

a więc prawdopodobieństwo, że wypłacana kwota będzie zaokrąglona w dół wynosi

$$\frac{50\cdot 10}{100\cdot 10} = 0,5.$$

Zatem w przykładzie 3.1.1, tak jak już wcześniej stwierdziliśmy, zaokrąglenia w dół są tak samo prawdopodobne, jak zaokrąglenia w górę.

Zastosujmy stwierdzenie 3.1.6, aby jeszcze raz (ale inną metodą niż poprzednio) wyliczyć prawdopodobieństwo zaokrąglenia w dół w przykładzie 3.1.2. W tym celu w stwierdzeniu 3.1.6 przyjmujemy $a = 1,04$ i otrzymujemy wartość tego prawdopodobieństwa:

$$\frac{([\frac{49}{NWD(104;100)}]+1)\cdot NWD(104;100)}{100} = \frac{([\frac{49}{4}]+1)\cdot 4}{100} = \frac{(12+1)\cdot 4}{100} = \frac{13}{25} = 0,52.$$

Zatem w przypadku lokaty rozważanej w przykładzie 3.1.2, bardziej prawdopodobne jest zaokrąglenie wypłaty w dół, niż w górę.

Wracamy do problemu 3.1.4. Z definicji części całkowitej wynika, że

$$\left[\frac{s}{t}\right]+1 > \frac{s}{t} \text{ dla dowolnych liczb rzeczywistych } s,t \text{ takich, że } t \neq 0. \tag{3.1.9}$$

Zakładając, że liczba t jest dodatnia, po pomnożeniu nierówności (3.1.9) obustronnie przez t, otrzymujemy nierówność

$$\left(\left[\frac{s}{t}\right]+1\right)t > s. \tag{3.1.10}$$

W szczególności, jeśli a jest liczbą nieujemną taką jak w stwierdzeniu 3.1.6, to

$$\left(\left[\frac{49}{NWD(100a;100)}\right]+1\right)\cdot NWD(100a;100) > 49,$$

a więc na mocy stwierdzenia 3.1.6, wśród dowolnych stu kolejnych liczb całkowitych nieujemnych x jest co najmniej 50 takich, dla których liczba ax jest zaokrąglana w dół. Zatem nigdy liczba zaokrągleń w górę nie będzie większa niż liczba zaokrągleń w dół.

Zastanówmy się jeszcze, jaka może być liczba zaokrągleń w dół iloczynów ax, gdy rozważamy sto kolejnych liczb całkowitych nieujemnych x? Jak widzieliśmy w przykładach 3.1.1 i 3.1.2, możliwe są wartości 50 i 52, ale czy oprócz nich możliwe są inne? Aby odpowiedzieć na to pytanie, wystarczy wyznaczyć wartości iloczynu (3.1.7) dla wszystkich możliwych wartości $NWD(100a;100)$. Wyniki rachunków przedstawione są w tabeli 3.3 (w której jest również zawarta odpowiedź na pytanie z problemu 3.1.4). Jak widzimy z tej tabeli, liczba zaokrągleń w dół może przyjąć tylko cztery wartości: 50, 52, 60 i 100, przy czym liczba zaokrągleń w dół jest większa niż 50 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $NWD(100a;100)$ jest podzielna przez 4, czyli gdy liczba $100a$ dzieli się przez 4.

$NWD(100a, 100)$	1	2	4	5	10	20	25	50	100
Liczba zaokrągleń w dół	50	50	52	50	50	60	50	50	100
Prawdopodobieństwo zaokrąglenia w dół	0,5	0,5	0,52	0,5	0,5	0,6	0,5	0,5	1

Tabela 3.3: Liczby i prawdopodobieństwa zaokrągleń w dół w zależności od $NWD(100a;100)$

W przykładzie 3.1.2 rozważaliśmy lokatę bankową, na którą klient może wpłacić w pełnych złotych kwotę $x \leq 1000$, a po roku bank wypłaca mu kwotę $1,04x$ zł zaokrągloną do pełnych złotych. Stwierdziliśmy już, że przy wpłatach w wysokości kolejno od 1 zł do 1000 zł, kwota $1,04x$ zł będzie częściej zaokrąglana w dół, niż w górę. Może to sugerować, że fikcyjny bank z przykładu 3.1.2 „zarabia" na takim sposobie zaokrąglania należnych kwot wypłat. Sprawdźmy, czy rzeczywiście tak jest.

Dla konkretnej wpłaty x zł różnica między należną kwotą a jej zaokrągleniem jest równa $1,04x-(1,04x)_0$. Policzymy, jaka jest całkowita różnica między należnymi kwotami a ich zaokrągleniami, przy założeniu, że każda z kwot od 1 zł do 1000 zł pojawia się jednokrotnie jako wpłata, tzn. obliczymy sumę

$$\sum_{x=1}^{1000}(1,04x-(1,04x)_0).$$

W świetle wcześniejszych rozważań jest oczywiste, że

$$\sum_{x=1}^{1000}(1,04x-(1,04x)_0) = 10\sum_{x=1}^{100}(1,04x-(1,04x)_0)$$

i dlatego wystarczy obliczyć sumę

$$\sum_{x=1}^{100}(1,04x-(1,04x)_0).$$

Postawimy sobie zadanie ogólniejsze.

Problem 3.1.7. Dana jest liczba rzeczywista nieujemna a, która w zapisie dziesiętnym może być przedstawiona z dwoma miejscami po przecinku. Obliczyć sumę

$$S_{100}(a) = \sum_{x=1}^{100} (ax - (ax)_0).$$

Oczywiście dla dowolnej liczby naturalnej m mamy równość

$$S_{100}(a+m) = S_{100}(a).$$

Zatem, aby wyznaczyć wszystkie możliwe wartości sumy $S_{100}(a)$, wystarczy je wyznaczyć dla $a < 1$. W tabeli 3.4 podane są te wartości, wyliczone w arkuszu kalkulacyjnym Excel (z wykorzystaniem formuły matematycznej ZAOKR z parametrem „liczba_cyfr” równym 0).

a	$S_{100}(a)$	a	$S_{100}(a)$	a	$S_{100}(a)$	a	$S_{100}(a)$
0,00	0	0,25	−12,5	0,50	−25	0,75	−12,5
0,01	−0,5	0,26	−1	0,51	−0,5	0,76	0
0,02	−1	0,27	−0,5	0,52	0	0,77	−0,5
0,03	−0,5	0,28	0	0,53	−0,5	0,78	−1
0,04	0	0,29	−0,5	0,54	−1	0,79	−0,5
0,05	−2,5	0,30	−5	0,55	−2,5	0,80	0
0,06	−1	0,31	−0,5	0,56	0	0,81	−0,5
0,07	−0,5	0,32	0	0,57	−0,5	0,82	−1
0,08	0	0,33	−0,5	0,58	−1	0,83	−0,5
0,09	−0,5	0,34	−1	0,59	−0,5	0,84	0
0,10	−5	0,35	−2,5	0,60	0	0,85	−2,5
0,11	−0,5	0,36	0	0,61	−0,5	0,86	−1
0,12	0	0,37	−0,5	0,62	−1	0,87	−0,5
0,13	−0,5	0,38	−1	0,63	−0,5	0,88	0
0,14	−1	0,39	−0,5	0,64	0	0,89	−0,5
0,15	−2,5	0,40	0	0,65	−2,5	0,90	−5
0,16	0	0,41	−0,5	0,66	−1	0,91	−0,5
0,17	−0,5	0,42	−1	0,67	−0,5	0,92	0
0,18	−1	0,43	−0,5	0,68	0	0,93	−0,5
0,19	−0,5	0,44	0	0,69	−0,5	0,94	−1
0,20	0	0,45	−2,5	0,70	−5	0,95	−2,5
0,21	−0,5	0,46	−1	0,71	−0,5	0,96	0
0,22	−1	0,47	−0,5	0,72	0	0,97	−0,5
0,23	−0,5	0,48	0	0,73	−0,5	0,98	−1
0,24	0	0,49	−0,5	0,74	−1	0,99	−0,5

Tabela 3.4: Wartości $S_{100}(a)$ w zależności od a

W przykładzie 3.1.2 rozważyliśmy lokatę roczną oprocentowaną efektywną stopą roczną 4% i stwierdziliśmy, że przy jednostajnym rozkładzie wpłat i zaokrąglaniu wypłat do pełnych złotych, wypłaty będą częściej zaokrąglane w dół, niż w górę, a więc bank częściej będzie wypłacać kwoty niższe niż wynikające z oprocentowania. Mogłoby się wydawać, że taki sposób zaokrąglania wypłat przyniesie bankowi korzyść (przy założeniu jednostajnego rozkładu wpłat). Tak jednak nie jest, gdyż jak widzimy w tabeli 3.4, suma $S_{100}(0,04)$ jest równa zero. Warto przy okazji zauważyć, że dla żadnego a suma $S_{100}(a)$ nie jest dodatnia.

Pokażemy, jak wartość $S_{100}(a)$ może być obliczona bez sumowania kolejnych stu składników. W tym celu skorzystamy z następującej obserwacji.

Lemat 3.1.8. Niech $\mathbb{U}$ bedzie zbiorem liczb postaci $\frac{k}{2}$, gdzie k jest liczbą naturalną nieparzystą, tzn. $\mathbb{U} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\}$. Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej r takiej, że $0 \leq r \leq n$ mamy równość

$$(n-r)_0 = \begin{cases} n-(r)_0, & \text{jeśli } r \notin \mathbb{U}, \\ n-(r)_0+1, & \text{jeśli } r \in \mathbb{U}. \end{cases} \tag{3.1.11}$$

Dowód. Jeśli r jest liczbą całkowitą, to $r \notin \mathbb{U}$ i oczywiście $(n-r)_0 = n-r = n-(r)_0$. Załóżmy więc, że liczba r nie jest całkowita i oznaczmy $t = r-[r]$. Ponieważ $r \leq n$ i liczba r nie jest całkowita, więc $[r]+1 \leq n$ i dlatego $n-[r]-1 \geq 0$. Ponadto

$$n-r = n-([r]+t) = (n-[r]-1)+(1-t). \tag{3.1.12}$$

Musi zachodzić jeden z poniższych trzech przypadków:

1) $t < 0,5$. Wówczas $r \notin \mathbb{U}$ i $(r)_0 = [r]$. Ponadto $1-t > 0,5$, więc korzystając z (3.1.12), otrzymujemy $(n-r)_0 = (n-[r]-1)+1 = n-[r] = n-(r)_0$.

2) $t = 0,5$. Wówczas $r \in \mathbb{U}$ i $(r)_0 = [r]+1$. Ponadto $1-t = 0,5$, więc z (3.1.12) otrzymujemy $(n-r)_0 = (n-[r]-1)+1 = n-[r] = n-(r)_0+1$.

3) $t > 0,5$. Wówczas $r \notin \mathbb{U}$ i $(r)_0 = [r]+1$. Ponadto $1-t < 0,5$, więc korzystając z (3.1.12), otrzymujemy $(n-r)_0 = n-[r]-1 = n-([r]+1) = n-(r)_0$.

W każdym z możliwych przypadków otrzymaliśmy wartość $(n-r)_0$ zgodną z (3.1.11), a więc dowód jest zakończony. □

Przypomnijmy, że dla liczby nieujemnej a, która może być zapisana z dwoma miejscami po przecinku, chcemy obliczyć sumę $S_{100}(a) = \sum_{x=1}^{100}(ax-(ax)_0)$. Oczywiście $S_{100}(0) = 0$. Aby obliczyć sumę $S_{100}(a)$ dla $a \neq 0$, zaczynamy od wyznaczenia najmniejszej liczby naturalnej n takiej, że an jest liczbą naturalną. Używając analogicznej argumentacji jak w przykładzie 3.1.2 stwierdzamy, że poszukiwaną liczbą jest

$$n = \frac{100}{NWD(A;100)}, \text{ gdzie } A = 100a.$$

Teraz rozważmy dowolną liczbę naturalną x taką, że $x < \frac{n}{2}$. Zauważmy, że $ax \notin \mathbb{U}$. Rzeczywiście, jeśli $ax \in \mathbb{U}$, to $a \cdot 2x$ jest liczbą naturalną i z wyboru liczby n wynika, że $2x \geq n$, czyli $x \geq \frac{n}{2}$, sprzeczność. Dalej, dla każdego $x < \frac{n}{2}$ mamy $\frac{n}{2} < n - x \leq n - 1$, więc w sumie

$$S_n(a) = \sum_{x=0}^{n} (ax - (ax)_0)$$

możemy składnik odpowiadający liczbie $x < \frac{n}{2}$ połączyć w parę ze składnikiem odpowiadającym liczbie $n - x$, przy czym $\frac{n}{2} < n - x \leq n - 1$. Ponieważ, jak już wcześniej zauważyliśmy, $ax \notin \mathbb{U}$, więc z lematu 3.1.8 wynika, że

$$(a(n-x))_0 = (an - ax)_0 = an - (ax)_0,$$

a więc suma składników odpowiadających liczbom x i $n - x$ jest równa

$$\Big(ax - (ax)_0\Big) + \Big(a(n-x) - (a(n-x))_0\Big) = ax - (ax)_0 + an - ax - (an - (ax)_0) = 0.$$

Oprócz już rozważonych składników, w sumie $S_n(a)$ występuje jeszcze składnik odpowiadający liczbie $x = n$, który oczywiście jest równy 0 (gdyż wtedy $ax = an$ jest liczbą naturalną), oraz ewentualnie składnik odpowiadający liczbie $x = \frac{n}{2}$. Jest jasne, że ten ostatni składnik pojawi się wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Podsumowując, jeśli n jest liczbą nieparzystą, to $S_n(a) = 0$, a jeśli liczba n jest parzysta, to $S_n(a) = a \cdot \frac{n}{2} - (a \cdot \frac{n}{2})_0$. Pozostaje wyznaczyć wartość $a \cdot \frac{n}{2} - (a \cdot \frac{n}{2})_0$ dla parzystego n. Z wyboru liczby n wynika, że liczba an jest nieparzysta, więc liczba $a \cdot \frac{n}{2} = \frac{an}{2}$ ma w zapisie dziesiętnym cyfrę 5 na pierwszym miejscu po przecinku. Zatem liczba ta jest zaokrąglana w górę i dlatego dla $x = \frac{n}{2}$ (gdy n jest parzyste) mamy

$$a \cdot \frac{n}{2} - (a \cdot \frac{n}{2})_0 = -0,5,$$

a więc gdy n jest parzyste, to $S_n(a) = -0,5$.

Ponieważ $n = \frac{100}{NWD(100a;100)}$ i $S_{100}(a) = \frac{100}{n} \cdot S_n(a)$, więc otrzymujemy równość

$$S_{100}(a) = NWD(100a;100) \cdot S_n(a).$$

Ponadto $n = \frac{100}{NWD(100a;100)}$ jest liczbą parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $NWD(100a;100)$ nie dzieli się przez 4, czyli gdy 4 nie dzieli liczby $100a$. Zatem udowodniliśmy następujące stwierdzenie, rozwiązujące problem 3.1.7.

Stwierdzenie 3.1.9. Jeżeli a jest liczbą rzeczywistą nieujemną, która w zapisie dziesiętnym może być przedstawiona z dwoma miejscami po przecinku, to

$$S_{100}(a) = \begin{cases} -NWD(100a;100) \cdot 0,5, & \text{jeśli 4 nie dzieli } 100a, \\ 0, & \text{jeśli 4 dzieli } 100a. \end{cases}$$

3.2 Algebraiczne aspekty zaokrąglania liczb

W tej części rozdziału rozważymy dwa grupoidy zdefiniowane przy pomocy zaokrąglania liczb, odpowiednio do setek i do części całkowitej. W każdym z tych grupoidów wyznaczymy wszystkie podgrupoidy cykliczne będące półgrupami.

Przypomnijmy, że grupoidem nazywamy zbiór W z określonym w nim działaniem dwuargumentowym $\diamond$. Podgrupoidem grupoidu $(W,\diamond)$ nazywamy podzbiór V zbioru W taki, że V z działaniem $\diamond$ ograniczonym do elementów zbioru V jest grupoidem. Podgrupoidem grupoidu $(W,\diamond)$ generowanym przez podzbiór $Z \subseteq W$ nazywamy najmniejszy (ze względu na relację inkluzji) podgrupoid grupoidu $(W,\diamond)$ zawierający Z; podgrupoid ten oznaczamy symbolem $\langle Z\rangle$ (jest on przekrojem wszystkich podgrupoidów zawierających Z). Podgrupoidem cyklicznym nazywamy podgrupoid $\langle x\rangle$ generowany przez pojedynczy element $x \in W$.

Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Dla elementu x grupoidu $(W,\diamond)$ i liczby $n \in \mathbb{N}$ definiujemy indukcyjnie element $x^{(n)} \in W$ następująco:

$$x^{(1)} = x,\ x^{(n)} = x^{(n-1)} \diamond x \text{ dla } n > 1.$$

Zatem

$$x^{(1)} = x,\ x^{(2)} = x\diamond x,\ x^{(3)} = (x\diamond x)\diamond x,\ x^{(4)} = ((x\diamond x)\diamond x)\diamond x, \text{ itd.}$$

Element $x^{(n)}$ będziemy nazywać n-tą potęgą elementu x, a zbiór wszystkich potęg elementu x będziemy oznaczać przez $P(x)$, tzn. $P(x) = \{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$.

Niech $(W,\diamond)$ będzie grupoidem. Mówimy, że działanie $\diamond$ jest łączne w niepustym podzbiorze Z zbioru W, jeśli $(a\diamond b)\diamond c = a\diamond(b\diamond c)$ dla dowolnych elementów $a,b,c \in Z$. Jeżeli działanie $\diamond$ jest łączne w zbiorze W, to grupoid $(W,\diamond)$ nazywamy półgrupą.

3.2.1 Grupoid zdefiniowany przy pomocy zaokrąglania do setek

Zaokrąglenie liczby całkowitej nieujemnej x (zapisanej w układzie dziesiętnym) do setek polega na zastąpieniu jej cyfr jedności i dziesiątek zerami, a ponadto dodaniu 100 do tak otrzymanej liczby, jeśli cyfra dziesiątek przed wyzerowaniem była większa lub równa 5. Otrzymane w ten sposób zaokrąglenie liczby x będziemy oznaczać symbolem $(x)_{-2}$ (indeks -2 w tym symbolu jest liczbą, której należy użyć w Excelu jako wartość parametru „liczba_cyfr" w formule matematycznej ZAOKR, aby otrzymać zaokrąglenie do setek). Zauważmy, że jeśli $[x]_{100}$ jest resztą z dzielenia liczby x przez 100, to

$$(x)_{-2} = \begin{cases} x - [x]_{100}, & \text{jeśli } [x]_{100} < 50, \\ x - [x]_{100} + 100, & \text{jeśli } [x]_{100} \geq 50. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Pokażemy, że zaokrąglanie do setek zachowuje nierówności, tzn. ma następującą własność.

Stwierdzenie 3.2.1. Niech x i y będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Jeżeli $x \leq y$, to $(x)_{-2} \leq (y)_{-2}$.

Dowód. Niech $k = [x]_{100}$ i $l = [y]_{100}$. Wtedy $x = 100m + k$ i $y = 100n + l$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych m, n. Ponieważ $x \leq y$, więc

$$100m \leq x \leq y < 100(n+1)$$

i dlatego $m < n+1$, tzn. $m \leq n$. Jeżeli $m \leq n-1$, to

$$(x)_{-2} < 100(m+1) \leq 100n \leq (y)_{-2},$$

a więc spełniona jest nierówność, którą dowodzimy.

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy $m = n$. Wtedy $k \leq l$ i musi zachodzić jeden z poniższych trzech przypadków:

1) $k \leq l < 50$. Wówczas $(x)_{-2} = 100m = 100n = (y)_{-2}$.
2) $k < 50 \leq l$. Wówczas $(x)_{-2} = 100m = 100n < 100(n+1) = (y)_{-2}$.
3) $50 \leq k \leq l$. Wówczas $(x)_{-2} = 100(m+1) = 100(n+1) = (y)_{-2}$.

W każdym z tych przypadków otrzymaliśmy nierówność $(x)_{-2} \leq (y)_{-2}$, więc dowód jest zakończony. □

Niech $T = \{0, 1, \ldots, 99\}$ i $x, y \in T$. Wtedy iloczyn xy jest liczbą całkowitą nieujemną nieprzekraczającą liczby $99^2 = 9801$. Zatem zaokrąglenie iloczynu xy do setek nie przekracza liczby 9800, a więc po podzieleniu tego zaokrąglenia przez 100 jako wynik otrzymujemy liczbę ze zbioru T, którą będziemy oznaczać przez $x \circ y$. Wynika stąd, że zbiór T jest grupoidem z działaniem

$$x \circ y = \frac{(xy)_{-2}}{100}. \tag{3.2.2}$$

Łącząc (3.2.2) z (3.2.1) otrzymujemy następującą definicję działania $\circ$ w zbiorze T, odwołującą się do reszt z dzielenia przez 100:

$$x \circ y = \begin{cases} \frac{xy - [xy]_{100}}{100}, & \text{jeśli } [xy]_{100} < 50, \\ \frac{xy - [xy]_{100}}{100} + 1, & \text{jeśli } [xy]_{100} \geq 50. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Oczywiście działanie $\circ$ jest przemienne. Pokażemy, że nie ma ono elementu neutralnego. Przypuśćmy, że $e \in T$ jest elementem neutralnym. Wtedy $51 \circ e = 51$, a więc musi być $51e \geq 5050$, skąd wynikają nierówności

$$e \geq \frac{5050}{51} = 99\frac{1}{51} > 99.$$

Zatem $e \notin T$, tzn. otrzymaliśmy sprzeczność.

Zauważmy, że działanie $\circ$ zachowuje nierówności, tzn. $\circ$ ma następującą własność.

Wniosek 3.2.2. Jeżeli $x, y, z \in T$ i $x \leq y$, to $x \circ z \leq y \circ z$.

Dowód. Ponieważ $x \leq y$ i $z \geq 0$, więc $xz \leq yz$ i dlatego na mocy stwierdzenia 3.2.1 zachodzi nierówność $(xz)_{-2} \leq (yz)_{-2}$. Stąd i z (3.2.2) wynika, że

$$x \circ z = \frac{(xz)_{-2}}{100} \leq \frac{(yz)_{-2}}{100} = y \circ z,$$

co kończy dowód. □

Pokażemy, że dla każdego $x \in T$ ciąg kolejnych potęg elementu x jest nierosnący.

Stwierdzenie 3.2.3. Jeżeli $m, n \in \mathbb{N}$ i $m \leq n$, to $x^{(m)} \geq x^{(n)}$ dla każdego $x \in T$.

Dowód. Niech $x \in T$. Wystarczy udowodnić, że $x^{(n)} \geq x^{(n+1)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zastosujemy metodę indukcji matematycznej. Ponieważ $x < 100$, więc $x^2 \leq 100x$ i ze stwierdzenia 3.2.1 wynika, że $(x^2)_{-2} \leq (100x)_{-2} = 100x$. Zatem

$$x^{(2)} = x \circ x = \frac{(x^2)_{-2}}{100} \leq \frac{100x}{100} = x = x^{(1)}.$$

Udowodniliśmy już, że $x^{(1)} \geq x^{(2)}$. Stąd i z wniosku 3.2.2 otrzymujemy

$$x^{(2)} = x^{(1)} \circ x \geq x^{(2)} \circ x = x^{(3)}.$$

Kontynując w ten sposób, stwierdzamy że

$$x^{(1)} \geq x^{(2)} \geq x^{(3)} \geq \dots,$$

skąd wynika dowodzona własność. □

Odnotujmy jeszcze jedną zależność między potęgami $x^{(1)} = x$ i $x^{(2)}$ elementu $x \in T$, z której skorzystamy w dalszej części rozdziału.

Stwierdzenie 3.2.4. Jeżeli $x \in T \setminus \{0\}$, to $x^{(2)} < x$.

Dowód. Niech s będzie resztą z dzielenia x^2 przez 100. Jeżeli $s < 50$, to $x \circ x = \frac{x^2 - s}{100} \leq \frac{x^2}{100}$. W przeciwnym przypadku $s \geq 50$ i wówczas $x \circ x = \frac{x^2 - s}{100} + 1 \leq \frac{x^2+50}{100}$. Zatem w każdym przypadku mamy $x^{(2)} = x \circ x \leq \frac{x^2+50}{100}$ i dlatego wystarczy pokazać, że

$$\frac{x^2 + 50}{100} < x \text{ (tzn. } x^2 - 100x + 50 < 0) \text{ dla każdej liczby naturalnej } x \leq 99. \qquad (3.2.4)$$

Ponieważ $1 \leq x \leq 99$, więc $-49 \leq x - 50 \leq 49$ i dlatego $(x-50)^2 \leq 49^2$. Zatem $x^2 - 100x = (x-50)^2 - 50^2 \leq 49^2 - 50^2 = (49-50)(49+50) = -99 < -50$, czyli jest spełniony warunek (3.2.4). $\square$

Ze stwierdzenia 3.2.3 wynika, że dla każdego $x \in T$ istnieje liczba naturalna k taka, że $x^{(k)} = x^{(k+1)}$. Najmniejszą liczbę k o tej własności oznaczmy przez $\ell(x)$. Bezpośrednią konsekwencją stwierdzenia 3.2.3 jest nierówność $\ell(x) \leq x + 1$.

Przypomnijmy, że dla $x \in T$ symbol $P(x)$ oznacza zbiór potęg elementu x, czyli $P(x) = \{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$. Jest jasne, że zbiór $P(x)$ ma $\ell(x)$ elementów. Z definicji liczby $\ell(x)$ wynika, że elementami zbioru $P(x)$ są kolejne potęgi liczby x, do potęgi $x^{(\ell(x))}$ włącznie, tzn. kolejne wyrazy ciągu potęg $(x^{(n)})$ dla wykładników od $n = 1$ do $n = \ell(x)$. Poniżej przedstawiono algorytm wyznaczający ten ciąg potęg.

Algorytm 3.1 $findPowers(x)$ - algorytm wyznaczania ciągu potęg $(x^{(n)})$

INPUT: x - liczba ze zbioru T
OUTPUT: $powers_x$ - kolejne potęgi liczby x

$powers_x \leftarrow \emptyset$
$previous \leftarrow -1$
$current \leftarrow x$
while $previous \neq current$ **do**
    $powers_x \leftarrow powers_x \cup \{current\}$
    $previous \leftarrow current$
    $current \leftarrow current \circ x$
end while
return $powers_x$

Kolejny algorytm korzysta z algorytmu 3.1, aby wyznaczyć ciągi potęg $(x^{(n)})$ dla kolejnych liczb $x \in T$ i $n = 1, 2, \ldots, \ell(x)$.

Algorytm 3.2 Algorytm wyznaczania ciągów potęg $(x^{(n)})$

OUTPUT: c - ciągi $(x^{(n)})$

$c \leftarrow \emptyset$
for $x \leftarrow 0$ **to** 99 **do**
    $c \leftarrow c \cup findPowers(x)$
end for
return c

W tabelach 3.5 i 3.6 przedstawiono wartości $\ell(x)$ i kolejne wartości $x^{(n)}$ dla wszystkich $x \in T = \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ i $n \leq \ell(x)$, otrzymane jako wynik działania algorytmu 3.2.

x	$\ell(x)$	ciąg $(x^{(n)})$
0	1	0
1	2	1,0
2	2	2,0
3	2	3,0
4	2	4,0
5	2	5,0
6	2	6,0
7	2	7,0
8	3	8,1,0
9	3	9,1,0
10	3	10,1,0
11	3	11,1,0
12	3	12,1,0
13	3	13,2,0
14	3	14,2,0
15	3	15,2,0
16	3	16,3,0
17	4	17,3,1,0
18	4	18,3,1,0
19	4	19,4,1,0
20	4	20,4,1,0
21	4	21,4,1,0
22	4	22,5,1,0
23	4	23,5,1,0
24	4	24,6,1,0
25	5	25,6,2,1,0
26	5	26,7,2,1,0
27	5	27,7,2,1,0
28	5	28,8,2,1,0
29	5	29,8,2,1,0
30	5	30,9,3,1,0
31	5	31,10,3,1,0
32	5	32,10,3,1,0
33	5	33,11,4,1,0
34	5	34,12,4,1,0
35	5	35,12,4,1,0
36	6	36,13,5,2,1,0
37	6	37,14,5,2,1,0
38	6	38,14,5,2,1,0
39	6	39,15,6,2,1,0

x	$\ell(x)$	ciąg $(x^{(n)})$
40	6	40,16,6,2,1,0
41	6	41,17,7,3,1,0
42	6	42,18,8,3,1,0
43	6	43,18,8,3,1,0
44	7	44,19,8,4,2,1,0
45	7	45,20,9,4,2,1,0
46	7	46,21,10,5,2,1,0
47	7	47,22,10,5,2,1,0
48	7	48,23,11,5,2,1,0
49	7	49,24,12,6,3,1,0
50	7	50,25,13,7,4,2,1
51	7	51,26,13,7,4,2,1
52	7	52,27,14,7,4,2,1
53	7	53,28,15,8,4,2,1
54	8	54,29,16,9,5,3,2,1
55	8	55,30,17,9,5,3,2,1
56	8	56,31,17,10,6,3,2,1
57	8	57,32,18,10,6,3,2,1
58	8	58,34,20,12,7,4,2,1
59	8	59,35,21,12,7,4,2,1
60	9	60,36,22,13,8,5,3,2,1
61	9	61,37,23,14,9,5,3,2,1
62	9	62,38,24,15,9,6,4,2,1
63	10	63,40,25,16,10,6,4,3,2,1
64	10	64,41,26,17,11,7,4,3,2,1
65	10	65,42,27,18,12,8,5,3,2,1
66	11	66,44,29,19,13,9,6,4,3,2,1
67	11	67,45,30,20,13,9,6,4,3,2,1
68	11	68,46,31,21,14,10,7,5,3,2,1
69	12	69,48,33,23,16,11,8,6,4,3,2,1
70	12	70,49,34,24,17,12,8,6,4,3,2,1
71	12	71,50,36,26,18,13,9,6,4,3,2,1
72	13	72,52,37,27,19,14,10,7,5,4,3,2,1
73	13	73,53,39,28,20,15,11,8,6,4,3,2,1
74	14	74,55,41,30,22,16,12,9,7,5,4,3,2,1
75	14	75,56,42,32,24,18,14,11,8,6,5,4,3,2
76	14	76,58,44,33,25,19,14,11,8,6,5,4,3,2
77	14	77,59,45,35,27,21,16,12,9,7,5,4,3,2
78	15	78,61,48,37,29,23,18,14,11,9,7,5,4,3,2
79	16	79,62,49,39,31,24,19,15,12,9,7,6,5,4,3,2

Tabela 3.5: Wartości $\ell(x)$ i ciągi $(x^{(n)})$ dla $x \leq 79$ i $n \leq \ell(x)$

W tabeli 3.6 dla liczb $k > m$ symbol $k \searrow m$ oznacza malejący ciąg liczb naturalnych, zmniejszających się o 1, rozpoczynający się od k i kończący na m, tzn. ciąg

$$k, k-1, k-2, \ldots, m+1, m.$$

x	$\ell(x)$	ciąg $(x^{(n)})$
80	17	80,64,51,41,33,26,21,17,14,11,9,7 ↘ 2
81	17	81,66,53,43,35,28,23,19,15,12,10,8,6 ↘ 2
82	18	82,67,55,45,37,30,25,21,17,14,11,9,7 ↘ 2
83	19	83,69,57,47,39,32,27,22,18,15,12,10,8 ↘ 2
84	19	84,71,60,50,42,35,29,24,20,17,14,12,10,8 ↘ 3
85	21	85,72,61,52,44,37,31,26,22,19,16,14,12,10 ↘ 3
86	22	86,74,64,55,47,40,34,29,25,22,19,16,14,12,8 ↘ 3
87	24	87,76,66,57,50,44,38,33,29,25,22,19,17,15,13,11 ↘ 3
88	24	88,77,68,60,53,47,41,36,32,28,25,22,19,17,15,13,11 ↘ 3
89	26	89,79,70,62,55,49,44,39,35,31,28,25,22,20,18,16,14,12 ↘ 4
90	28	90,81,73,66,59,53,48,43,39,35,32,29,26,23,21,19,17,15 ↘ 5
91	30	91,83,76,69,63,57,52,47,43,39,35,32,29,26,24,22,20,18,16 ↘ 5
92	32	92,85,78,72,66,61,56,52,48,44,40,37,34,31,29,27,25,23,21,19,17 ↘ 6
93	35	93,86,80,74,69,64,60,56,52,48,45,42,39,36,33,31,29,27,25,23,21 ↘ 7
94	39	94,88,83,78,73,69,65,61,57,54,51,48,45,42,39,37,35,33,31,29,27,25 ↘ 8
95	43	95,90,86,82,78,74,70,67,64,61,58,55,52,49,47,45,43,41,39,37,35,33,31,29 ↘ 10
96	48	96,92,88,84,81,78,75,72,69,66,63,60,58,56,54,52,50,48,46,44,42,40,38,36 ↘ 12
97	56	97,94,91,88,85,82,80,78,76,74,72,70,68,66,64,62,60,58,56,54,52,50 ↘ 16
98	62	98,96,94,92,90,88,86,84,82,80,78,76,74 ↘ 25
99	50	99 ↘ 50

Tabela 3.6: Wartości $\ell(x)$ i ciągi $(x^{(n)})$ dla $80 \leq x \leq 99$ i $n \leq \ell(x)$

Przypomnijmy, że podgrupoid V grupoidu $(T, \circ)$ nazywamy cyklicznym, jeżeli jest on generowany przez pojedynczy element grupoidu T, tzn. $V = \langle x \rangle$ dla pewnego $x \in T$. W tej części rozdziału wyznaczymy wszystkie cykliczne podgrupoidy grupoidu T, które są półgrupami. W wykonaniu tego zadania pomocne będzie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.5. Niech zbiór W z działaniem $\diamond$ będzie grupoidem. Dla dowolnego elementu $x \in W$ następujące warunki są równoważne:

(1) $\langle x \rangle$ z działaniem $\diamond$ jest półgrupą.
(2) $P(x)$ z działaniem $\diamond$ jest półgrupą.
(3) Działanie $\diamond$ jest łączne w zbiorze $P(x)$.
(4) $x^{(m)} \diamond x^{(n)} = x^{(m+n)}$ dla dowolnych liczb $m, n \in \mathbb{N}$.

Jeżeli jest spełniony którykolwiek z powyższych (równoważnych) warunków, to $\langle x \rangle = P(x)$.

Dowód. (1) $\Rightarrow$ (3): Ta implikacja jest oczywista.

(3) $\Rightarrow$ (4): Załóżmy, że działanie $\diamond$ jest łączne w zbiorze $P(x)$. Pokażemy, że wtedy spełniony jest warunek (4). W tym celu zastosujemy metodę indukcji ze względu na n. Ponieważ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ mamy $x^{(m)} \diamond x^{(1)} = x^{(m)} \diamond x = x^{(m+1)}$, więc dla

$n = 1$ warunek (4) jest spełniony. Załóżmy, że jest on spełniony dla danej liczby n i dowolnej liczby m. Stąd i z założenia o łączności działania $\diamond$, otrzymujemy dla dowolnej liczby m, że

$$x^{(m)} \diamond x^{(n+1)} = x^{(m)} \diamond (x^{(n)} \diamond x) = (x^{(m)} \diamond x^{(n)}) \diamond x = x^{(m+n)} \diamond x = x^{((m+n)+1)} = x^{(m+(n+1))}.$$

Zatem warunek (4) jest spełniony również dla $n+1$.

(4) $\Rightarrow$ (2): Załóżmy, że jest spełniony warunek (4). Aby pokazać, że spełniony jest warunek (2), wystarczy pokazać, że działanie $\diamond$ jest łączne w zbiorze $P(x)$. W tym celu rozważmy dowolne elementy $a, b, c \in P(x)$. Wówczas $a = x^{(p)}, b = x^{(q)}, c = x^{(r)}$ dla pewnych $p, q, r \in \mathbb{N}$. Korzystając z (4), otrzymujemy równości

$$(a \diamond b) \diamond c = (x^{(p)} \diamond x^{(q)}) \diamond x^{(r)} = x^{(p+q)} \diamond x^{(r)} = x^{((p+q)+r)} = x^{(p+(q+r))} =$$

$$= x^{(p)} \diamond x^{(q+r)} = x^{(p)} \diamond (x^{(q)} \diamond x^{(r)}) = a \diamond (b \diamond c),$$

a więc warunek (2) jest spełniony.

(2) $\Rightarrow$ (1): Załóżmy, że spełniony jest warunek (2). Wtedy $P(x)$ jest podgrupoidem grupoidu W, a ponieważ $x = x^{(1)} \in P(x)$, więc otrzymujemy zawieranie $\langle x \rangle \subseteq P(x)$. Ponieważ odwrotne zawieranie jest oczywiste, więc zachodzi równość $\langle x \rangle = P(x)$, a zatem na mocy (2) zbiór $\langle x \rangle$ jest półgrupą.

Prawdziwość ostatniej części twierdzenia została pokazana w dowodzie implikacji (2) $\Rightarrow$ (1). $\square$

Ponieważ działanie $\circ$ jest przemienne, więc z twierdzenia 3.2.5 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 3.2.6. Dla dowolnego elementu $x \in T$ następujące warunki są równoważne.

(1) $\langle x \rangle$ z działaniem $\circ$ jest półgrupą.
(2) Działanie $\circ$ jest łączne w zbiorze $P(x)$.
(3) $x^{(m)} \circ x^{(n)} = x^{(m+n)}$ dla dowolnych liczb $m, n \in \mathbb{N}$ takich, że $m \leq n \leq \ell(x)$.

Aby sprawdzić dla danej liczby $x \in T$, czy podgrupoid $\langle x \rangle$ jest półgrupą (równoważnie, czy działanie $\circ$ jest łączne w zbiorze $\langle x \rangle$), można zastosować poniższy algorytm, korzystający z wniosku 3.2.6 (algorytm sprawdza, czy spełniony jest warunek (3) z tego wniosku).

Algorytm 3.3 *checkAssociativity*(x) - algorytm sprawdzania łączności działania $\circ$ w zbiorze $\langle x\rangle$

INPUT: $powers_x$ - ciąg potęg $(x^{(n)})$ liczby $x \in T$
OUTPUT: Wynik sprawdzenia łączności działania $\circ$ w zbiorze $\langle x\rangle$

$\ell \leftarrow length(powers_x)$
for $m \leftarrow 1$ **to** ℓ **do**
    for $n \leftarrow m$ **to** ℓ **do**
        $left \leftarrow powers_x[m] \circ powers_x[n]$
        if $m+n > \ell$ **then**
            $right \leftarrow powers_x[\ell]$
        else
            $right \leftarrow powers_x[m+n]$
            if $left \neq right$ **then**
                return $false; m, n$
            end if
        end if
    end for
end for
return $true$

Aby wyznaczyć wszystkie liczby $x \in T$, dla których działanie $\circ$ w zbiorze $\langle x\rangle$ jest łączne, zastosowano poniższy algorytm 3.4.

Algorytm 3.4 Algorytm sprawdzania łączności działania $\circ$ w zbiorze $\langle x\rangle$ dla wszystkich $x \in T$

OUTPUT: *results* - Wynik sprawdzenia łączności działania $\circ$ w zbiorze $\langle x\rangle$ dla kolejnych liczb $x \in T$

$results \leftarrow \emptyset$
for $x \leftarrow 0$ **to** 99 **do**
    $powers_x \leftarrow findPowers(x)$
    $result \leftarrow checkAssociativity(powers_x)$
    $results \leftarrow results \cup \{result\}$
end for
return *results*

W wyniku działania algorytmu 3.4 stwierdzono, że działanie $\circ$ jest łączne w zbiorze $\langle x \rangle$ (tzn. $\langle x \rangle$ jest półgrupą) tylko i wyłącznie dla następujących trzydziestu dziewięciu wartości x:

$$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,$$
$$21,22,23,24,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,44,45,$$

tzn. dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych x mniejszych od 46, z wyjątkiem następujących siedmiu liczb:

$$25,26,27,40,41,42,43.$$

Zatem w zbiorze $\{0,1,\ldots,99\}$ jest 61 liczb x takich, że działanie $\circ$ nie jest łączne w podgrupoidzie cyklicznym $\langle x \rangle$. W tabeli 3.7 dla każdej z tych sześćdziesięciu jeden liczb x podano najmniejszą w porządku leksykograficznym parę uporzadkowaną (m,n) taką, że $x^{(m)} \circ x^{(n)} \neq x^{(m+n)}$.

x	(m,n)	x	(m,n)	x	(m,n)	x	(m,n)	x	(m,n)
25	(2,2)	51	(2,3)	63	(2,6)	75	(2,2)	87	(2,2)
26	(2,2)	52	(2,7)	64	(2,5)	76	(2,2)	88	(2,2)
27	(2,2)	53	(2,7)	65	(2,3)	77	(2,14)	89	(2,5)
40	(2,2)	54	(2,2)	66	(2,4)	78	(2,15)	90	(2,10)
41	(2,4)	55	(2,8)	67	(2,3)	79	(2,2)	91	(2,9)
42	(2,4)	56	(2,3)	68	(2,5)	80	(2,7)	92	(2,9)
43	(2,4)	57	(2,8)	69	(2,6)	81	(2,2)	93	(2,5)
46	(2,2)	58	(2,8)	70	(2,12)	82	(2,6)	94	(2,2)
47	(3,4)	59	(2,8)	71	(2,2)	83	(2,2)	95	(2,2)
48	(2,3)	60	(2,9)	72	(2,11)	84	(2,3)	96	(2,2)
49	(2,5)	61	(2,9)	73	(2,3)	85	(2,5)	97	(2,3)
50	(2,2)	62	(2,2)	74	(2,3)	86	(2,4)	98	(2,7)
								99	(2,25)

Tabela 3.7: Liczby $x \in T$, dla których działanie $\circ$ nie jest łączne w zbiorze $\langle x \rangle$ wraz z najmniejszą (w porządku leksykograficznym) parą (m,n) taką, że $x^{(m)} \circ x^{(n)} \neq x^{(m+n)}$

Zauważmy, że już na podstawie tabel 3.5 i 3.6 można było stwierdzić, że dla każdej liczby $x \geq 50$ podgrupoid generowany przez x nie jest półgrupą. Otóż zgodnie z twierdzeniem 3.2.5, jeżeli dla elementu $x \in T$ podgrupoid $\langle x \rangle$ jest półgrupą, to zbiór $P(x)$ jest zamknięty ze względu na działanie $\circ$, co na mocy poniższego wniosku implikuje, że $x^{(\ell(x))} = 0$. Zatem warunkiem koniecznym, aby podmonoid $\langle x \rangle$ był półgrupą jest równość $x^{(\ell(x))} = 0$, a jak widzimy z tabel 3.5 i 3.6, równość ta nie zachodzi dla żadnej liczby $x \geq 50$.

Wniosek 3.2.7. Jeżeli $x \in T$ i zbiór $P(x)$ jest zamknięty ze względu na działanie $\circ$, to $x^{(\ell(x))} = 0$.

Dowód. Załóżmy, że zbiór $P(x)$ jest zamknięty ze względu na działanie $\circ$ i $x^{(\ell(x))} \neq 0$. Wówczas $x^{(\ell(x))} \circ x^{(\ell(x))} = x^{(k)}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ i ze stwierdzenia 3.2.4 otrzymujemy

$$x^{(k)} = x^{(\ell(x))} \circ x^{(\ell(x))} < x^{(\ell(x))},$$

co jest niemożliwe, gdyż $x^{(\ell(x))}$ jest najmniejszym elementem zbioru $P(x)$. □

3.2.2 *Grupoid zdefiniowany przy pomocy zaokrąglania do części całkowitej*

W tej części rozdziału rozważymy grupoid zdefiniowany przy pomocy zaokrąglania liczb rzeczywistych nieujemnych do części całkowitej, tzn. zaokrąglania w dół do najbliższej liczby całkowitej. Takie zaokrąglanie polega na zastąpieniu liczby nieujemnej x jej częścią całkowitą $[x]$. Jest ono również nazywane obcinaniem, gdyż polega na „obcięciu" cyfr po przecinku w zapisie dziesiętnym zaokrąglanej liczby. W arkuszu kalkulacyjnym Excel zaokrąglenie liczby do jej części całkowitej można wyznaczyć przy pomocy formuły matematycznej ZAOKR.DO.CAŁK.

Niech $\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór nieujemnych liczb rzeczywistych. Oczywiście zbiór $\mathbb{R}_+$ jest grupoidem z działaniem

$$x \circledast y = [xy].$$

Jest jasne, że jeśli iloczyn xy jest liczbą całkowitą (w szczególności, jeśli x i y są liczbami całkowitymi), to $x \circledast y = xy$.

Wyznaczymy wszystkie liczby $x \in \mathbb{R}_+$ takie, że podgrupoid $\langle x \rangle$ grupoidu $(\mathbb{R}_+, \circledast)$ jest półgrupą.

Twierdzenie 3.2.8. Niech $x \in \mathbb{R}_+$. Podgrupoid $\langle x \rangle$ jest półgrupą wtedy i tylko wtedy, gdy x jest liczbą całkowitą lub $x < \sqrt{2}$.

Dowód. Załóżmy, że $\langle x \rangle$ jest półgrupą. Wtedy spełniony jest warunek (4) z twierdzenia 3.2.5 i dlatego

$$x^{(3)} \circledast x^{(3)} = x^{(6)} = x^{(4)} \circledast x^{(2)} = x^{(2)} \circledast x^{(2)} \circledast x^{(2)}, \tag{3.2.5}$$

a ponieważ $x^{(3)}$ i $x^{(2)}$ są liczbami całkowitymi, więc z (3.2.5) wynika następująca równość iloczynów liczb całkowitych nieujemnych:

$$x^{(3)} \cdot x^{(3)} = x^{(2)} \cdot x^{(2)} \cdot x^{(2)}. \tag{3.2.6}$$

Korzystając z jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na iloczyn potęg liczb pierwszych, można łatwo wywnioskować z (3.2.6), że $x^{(2)} = k^2$ i $x^{(3)} = k^3$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej k (wynika to także z (Sierpiński, 1964, str. 29, Corollary 1)). Metodą indukcji matematycznej udowodnimy, że

$$x^{(n)} = k^n \text{ dla każdej liczby naturalnej } n \geq 2. \tag{3.2.7}$$

Wiemy już, że równość w (3.2.7) zachodzi dla $n = 2$ i $n = 3$. Załóżmy więc, że $n \geq 4$ i równość w warunku (3.2.7) zachodzi dla liczby $n-2$. Ponieważ $x^{(2)}$ i $x^{(n-2)}$ są liczbami całkowitymi, więc korzystając z twierdzenia 3.2.5 otrzymujemy równości

$$x^{(n)} = x^{(2)} \circledast x^{(n-2)} = x^{(2)} \cdot x^{(n-2)} = k^2 \cdot k^{n-2} = k^n.$$

Zatem równość w (3.2.7) zachodzi dla liczby n, skąd wynika prawdziwość (3.2.7).

Zauważmy, że

$$[x] = k. \tag{3.2.8}$$

Rzeczywiście, ponieważ $x^{(2)} = k^2$, czyli $[x^2] = k^2$, więc

$$k^2 \leq x^2 < k^2 + 1 \leq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

i dlatego $k \leq x < k+1$, skąd wynika (3.2.8).

Na mocy (3.2.8) mamy równość $x = k + r$, gdzie $0 \leq r < 1$. Pokażemy, że $k \in \{0,1\}$ lub $r = 0$. Ponieważ

$$x^{(2)}x = k^2x = k^2(k+r) = k^3 + k^2r,$$

więc

$$k^3 = x^{(3)} = x^{(2)} \circledast x = [x^{(2)}x] = [k^3 + k^2r] = k^3 + [k^2r]$$

i dlatego $[k^2r] = 0$, skąd wynika, że $k^2r < 1$. Analogicznie można pokazać, że

$$k^n r < 1 \quad \text{dla każdej liczby naturalnej } n.$$

Zatem $r = 0$ lub $k \in \{0,1\}$.

Jeśli $r = 0$, to $x = k$ jest liczbą całkowitą. Pozostaje do rozważenia przypadek, gdy $r \neq 0$. Wtedy $k = 0$ lub $k = 1$. Jeśli $k = 0$, to oczywiście $x = k + r = r < \sqrt{2}$. Załóżmy, że $k = 1$. Wtedy $[x^2] = x^{(2)} = k^2 = 1^2 = 1$. Zatem $x^2 < 2$ i dlatego $x < \sqrt{2}$.

Udowodniliśmy, że jeśli $\langle x \rangle$ jest półgrupą, to x jest liczbą całkowitą lub $x < \sqrt{2}$. Na mocy twierdzenia 3.2.5, aby udowodnić implikację odwrotną, wystarczy pokazać, że jeśli x jest liczbą całkowitą lub $x < \sqrt{2}$, to zbiór $P(x)$ z działaniem $\circledast$ jest półgrupą.

Jeżeli liczba x jest całkowita, to $x^{(n)} = x^n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem w tym przypadku $P(x) = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ i działanie $\circledast$ ograniczone do zbioru $P(x)$ jest zwykłym mnożeniem, a więc $P(x)$ z działaniem $\circledast$ jest półgrupą.

Pozostał do rozważenia przypadek, gdy $x < \sqrt{2}$. Jeżeli $x < 1$, to $x^{(n)} = 0$ dla każdego $n \geq 2$, więc $P(x) = \{x, 0\}$ jest półgrupą z działaniem $\circledast$. Jeśli $1 \leq x < \sqrt{2}$, to

$x^{(n)} = 1$ dla każdego $n \geq 2$, więc $P(x) = \{x, 1\}$ i oczywiście $P(x)$ z działaniem $\circledast$ jest półgrupą. $\square$

Twierdzenie 3.2.8 może sugerować, że zbiór

$$V = \{x \in \mathbb{R}_+ : x < \sqrt{2}\}$$

z działaniem $\circledast$ jest półgrupą. To jednak nie jest prawdą, gdyż, na przykład, liczby $\frac{9}{10}, 1, \frac{12}{10}$ należą do V,

$$\frac{9}{10} \circledast \left(\frac{12}{10} \circledast 1\right) = \frac{9}{10} \circledast 1 = 0$$

oraz

$$\left(\frac{9}{10} \circledast \frac{12}{10}\right) \circledast 1 = 1 \circledast 1 = 1.$$

Zatem działanie $\circledast$ nie jest łączne w zbiorze V.

Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono wybrane zagadnienia dotyczące zaokrąglania liczb, które mogą być rozwiązywane za pomocą narzędzi informatycznych i matematycznych. Pokazano związki między zaokrągleniami liczb a rachunkiem prawdopodobieństwa, algebrą i elementarną teorią liczb. Materiał przedstawiony w rozdziale może być punktem wyjścia do badania bardziej skomplikowanych (pod względem rachunkowym) modyfikacji tych zagadnień.

Bibliografia

Narkiewicz, W. (1997). Teoria liczb. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Sierpiński, W. (1964). Elementary theory of numbers. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

Sierpiński, W. (1987). Wstęp do teorii liczb. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.