Rozdział 2

O ADDYTYWNYCH GRUPACH (ŁĄCZNYCH) PIERŚCIENI PRZEMIENNYCH

Mateusz Woronowicz*

Streszczenie Jednymi z ważnych zagadnień algebraicznych znajdujących praktyczne zastosowanie w naukach informatycznych są przemienność oraz łączność pierścieni konstruowanych na grupach abelowych. Wykorzystywane są one, między innymi, w kryptografii oraz algorytmach związanych z segmentacją i rozpoznawaniem obrazów cyfrowych. Niniejszy rozdział stanowi przegląd aktualnej wiedzy dotyczącej struktury $(A)CR$-grup, czyli grup abelowych, na których każde (łączne) mnożenie pierścieniowe jest przemienne. Stanowi ona teoretyczny fundament, na którym można budować struktury algebraiczne potrzebne do konstrukcji algorytmów. W szczególności, niniejsze opracowanie zawiera: klasyfikacje torsyjnych $(A)CR$-grup oraz beztorsyjnych całkowicie rozkładalnych CR-grup, opis wszystkich beztorsyjnych CR-grup rangi dwa pozwalający sklasyfikować beztorsyjne grupy abelowe rangi dwa, na których istnieje struktura nieprzemiennego i jednocześnie niełącznego pierścienia, opis wszystkich beztorsyjnych ACR-grup rangi dwa, klasyfikację beztorsyjnych ACR-grupy rangi dwa niebędących CR-grupami wraz z konstrukcją $2^{\aleph_0}$ nieizomorficznych grup posiadających tę własność w każdym z dwóch możliwych przypadków związanych ze zbiorem typów takiej grupy oraz częściowy opis struktury mieszanych $(A)CR$-grup.

Słowa kluczowe: grupy addytywne pierścieni, pierścień przemienny, pierścień łączny, pierścień nieprzemienny, pierścień niełączny, typ.

Wprowadzenie

Teoria pierścieni posiada szerokie spektrum zastosowań w naukach informatycznych. Przejawia się ono, między innymi, w kryptografii oraz rozpoznawaniu obrazów (zob. Lidl i Harald (1994)). Szczególnym przypadkiem zastosowania teorii pierścieni w informatyce są algorytmy związane z segmentacją obrazów cyfrowych (zob. Garcés, Torres, Pereira i Rodríguez (2014)). Opierają się one na arytmetyce

* Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, Wiejska 45A, 15-351 Białystok, m.woronowicz@pb.edu.pl

DOI 10.24427/978-83-67185-18-9_2

pierścieni $\mathbb{Z}_n$ reszt modulo n. Klasycznymi przykładami zastosowań tych pierścieni są algorytmy dodawania liczb n-bitowych (zob. Cormen, Leiserson i Rivest (1990); Karatsuba (1995); Knuth (1997); K. Woronowicz (2015)). Arytmetyka modularna znajduje zastosowanie także w licznych językach programowania i kalkulatorach. Ważnymi własnościami wielu mnożeń pierścieniowych stosowanych w informatyce są więc przemienność oraz łączność. W tym kontekście pojawia się naturalne pytanie o strukturę grup abelowych, które mogą być grupami addytywnymi wyłącznie pierścieni o tych własnościach. W niniejszym rozdziale zostaną zaprezentowane najważniejsze wyniki z tego zakresu - zarówno klasyczne, jak i najnowsze. W szczególności omówiona zostanie struktura $(A)CR$-grup, czyli grup abelowych, na których każde (łączne) mnożenie pierścieniowe jest przemienne. Pojęcia te zostały wprowadzone w pracy Feigelstock (2000). Jej autor zamieścił tam wiele interesujących rezultatów – opisał on, między innymi, strukturę torsyjnych $(A)CR$-grup, wykazując jednocześnie równoważność warunków CR i ACR dla torsyjnych grup abelowych, częściowo scharakteryzował mieszane CR-grupy, podał przykład beztorsyjnej ACR-grupy, która nie jest CR-grupą oraz zauważył, że każdy pierścień, którego grupa addytywna jest torsyjną $(A)CR$-grupą jest łączny (zob. (Feigelstock, 2000, Theorems 5 & 10, Example, Corollary 4)). Ta ostatnia obserwacja przyczyniła się niedawno do wprowadzenia i częściowego zbadania pojęcia AR-grupy, czyli takiej grupy abelowej, która może być grupą addytywną jedynie pierścieni łącznych (zob. Andruszkiewicz i Woronowicz (2017); Najafizadeh i Woronowicz (2017); M. Woronowicz (2020)). Zagadnienia badane w cytowanym artykule Feigelstocka poruszane były także w znacznie wcześniejszych pracach Beaumont i Wisner (1959); Jackett (1979); Schultz (1973) oraz w nowych i stosunkowo nowych pracach Aghdam (2006); Aghdam i Najafizadeh (2008); Andruszkiewicz i Woronowicz (2017); Najafizadeh i Woronowicz (2017); M. Woronowicz (2020).

Zasadniczym celem niniejszego rozdziału jest przegląd aktualnego stanu wiedzy z zakresu grup addytywnych (łącznych) pierścieni przemiennych w kontekście potencjalnych zastosowań w naukach informatycznych. Wyniki składające się na ten rozdział pochodzą z cytowanych wyżej prac. Niektóre z nich są prezentowane z nowymi dowodami. Uwaga ta dotyczy w szczególności dowodu twierdzenia klasyfikacyjnego dla beztorsyjnych całkowicie rozkładalnych CR-grup, wykorzystującego zdecydowanie bardziej elementarne techniki niż dowód znany dotychczas (por. Twierdzenie 2.4 i (Feigelstock, 2000, Theorem 8)). Szczegółowe informacje na temat historii badań $(A)CR$-grup dostępne są w M. Woronowicz (2019).

2.1 Oznaczenia

Wszystkie grupy występujące w niniejszej pracy są abelowe. Stosujemy tradycyjny dla nich zapis addytywny. Ze względu na fakt rozważania grup abelowych w kon-

tekście grup addytywnych pierścieni, przemienność grup będzie za każdym razem podkreślana w sformułowaniach twierdzeń.

Dla dowolnej grupy abelowej A, symbole $\mathbb{P}(A)$, $T(A)$ i $\mathscr{D}(A)$ oznaczają odpowiednio zbiór tych wszystkich liczb pierwszych p, dla których p-komponent A_p grupy A jest nietrywialny, oraz część torsyjną i podzielną otoczkę grupy A. Grupa $\mathscr{D}(A)$ i jej własności omówione są w (Fuchs, 1970, §24). Ranga i ranga beztorsyjna grupy A oznaczane są odpowiednio przez $r(A)$ i $r_0(A)$. Najmniejszą liczbę naturalną m taką, że $mA = \{0\}$ nazywamy wykładnikiem grupy A i oznaczamy przez $\exp(A)$. Jeśli taka liczba m nie istnieje, to przyjmujemy, że $\exp(A) = \infty$. Zbiór wszystkich elementów a grupy A, które dla ustalonej liczby naturalnej n spełniają warunek $na = 0$ oznaczamy symbolem $A[n]$. Jeżeli p jest liczbą pierwszą, to zbiór $\bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$ będziemy zapisywać jako $p^\infty A$. Symbole $h_p^A(a)$ i $o(a)$ oznaczają odpowiednio p-wysokość elementu a w grupie A oraz jego rząd. Podgrupę grupy A generowaną przez zbiór X zawarty w A oznaczamy przez $\langle X \rangle$. Jeżeli X jest podzbiorem beztorsyjnej grupy abelowej A, zaś a jest elementem tej grupy, to symbole $\langle X \rangle_*$ i $\mathfrak{t}(a)$ oznaczają odpowiednio czystą podgrupę grupy A generowaną przez X oraz typ elementu a. Chcąc podkreślić, że typ elementu a jest rozważany w grupie A będziemy pisali $\mathfrak{t}_A(a)$ zamiast $\mathfrak{t}(a)$. Zbiór typów wszystkich niezerowych elementów grupy A oznaczamy przez $\mathscr{T}[A]$. Pojęcie typu elementu grupy zostało szczegółowo omówione w (Fuchs, 1973, §85). Symbolem $\mathfrak{R}(A)$ oznaczamy rdzeń beztorsyjnej grupy abelowej A, tzn. zbiór wszystkich liczb wymiernych q, dla których $qA \subseteq A$. Jest on unitarnym podpierścieniem w ciele liczb wymiernych (zob. Stratton (n.d.)). Jeżeli grupa abelowa A jest sumą prostą grup A_i, przy czym i przebiega pewien niepusty zbiór I, to dla dowolnego elementu j zbioru I symbolem $\overline{A}_j$ oznaczamy zbiór tych wszystkich elementów a grupy A, których nośnik $\operatorname{supp}(a)$ zawiera się w zbiorze $\{j\}$. Na każdej grupie abelowej A można w trywialny sposób określić strukturę pierścienia definiując mnożenie: $a \cdot b = 0$ dla wszystkich $a, b \in A$. Taki pierścień nazywamy pierścieniem z zerowym mnożeniem i oznaczamy symbolem A^0. Jeśli jest to jedyny (łączny) pierścień możliwy do określenia grupie A, to mówimy, że A jest $\mathrm{nil}_{(a)}$-grupą. Wiedza dotycząca zależności między tymi pojęciami dla grup torsyjnych, mieszanych i beztorsyjnych uwzględniająca wyniki najnowszych badań z tego zakresu dostępna jest w M. Woronowicz (2019, 2020). Symbolem $\square A$ oznaczamy podgrupę kwadratową grupy abelowej A generowaną przez kwadraty wszystkich możliwych pierścieni o grupie addytywnej A (zob. Aghdam (1987); Andruszkiewicz i Woronowicz (2016a, 2016b); Najafizadeh (2015); M. Woronowicz (2019). W szczególności grupa A jest nil-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $\square A = \{0\}$. Pierścień endomorfizmów grupy abelowej A oznaczamy przez $\mathrm{E}(A)$. Grupę addytywną i obustronny anihilator pierścienia R oznaczamy odpowiednio przez R^+ oraz $\mathfrak{a}(R)$. W drodze wyjątku, grupę addytywną pierścienia $\mathrm{E}(A)$ oznaczamy tradycyjnie przez $\mathrm{End}(A)$.

Symbole $\mathbb{P}(R)$, R_p, $T(R)$ i $p^\infty R$ odnoszą się do grupy addytywnej pierścienia R w sposób wyjaśniony w poprzednim akapicie. Jeżeli X jest podzbiorem w R, to $\langle X \rangle$ i $[X]$ oznaczają odpowiednio podgrupę grupy R^+ generowaną przez X oraz podpier-

ścień pierścienia R generowany przez X. Fakt, że niepusty podzbiór I pierścienia R jest obustronnym ideałem w R zapisujemy symbolicznie jako $I \lhd R$. Rozważając dowolny pierścień R nie zakładamy ani jego łączności, ani przemienności, ani też unitarności. Przyjmujemy jedynie, że mnożenie pierścienia R jest obustronnie rozdzielne względem dodawania. Przez podpierścień pierścienia R rozumiemy podzbiór w R, który jest podgrupą w R^+ i jest zamknięty ze względu na mnożenie pierścienia R. W szczególności, jeśli S jest podpierścieniem unitarnego pierścienia R, to nie zakładamy, że jedynka pierścienia R należy do S. Grupę elementów odwracalnych unitarnego pierścienia R oznaczamy przez R^*. Jeśli R jest dziedziną całkowitości, to $\Pi(R)$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych p takich, że $R \neq pR$.

Symbole $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_0$ oznaczają odpowiednio ciało liczb wymiernych, pierścień liczb całkowitych oraz zbiory wszystkich liczb: pierwszych, naturalnych (rozumianych jako dodatnie liczby całkowite) i całkowitych nieujemnych. Ponadto dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej liczby naturalnej n, symbole $Z(p^\infty)$, $Z(n)$ i $\mathbb{Z}_n$ oznaczają kolejno: p-grupę quasicykliczną, grupę cykliczną rzędu n oraz pierścień reszt modulo n, którego mnożenie oznaczane jest przez $\odot_n$. Najmniejszą wspólną wielokrotność ustalonych liczb całkowitych k i l oznaczamy przez $\mathrm{NWW}(k,l)$.

Wszystkie pozostałe oznaczenia są zgodne z notacją stosowaną w klasycznej dwutomowej monografii Fuchs (1970, 1973) poświęconej grupom abelowym lub zostaną wprowadzone i wyjaśnione w dalszej części tej pracy.

2.2 Wiadomości wstępne

W rozważaniu struktury pierścienia na grupie abelowej, która nie jest beztorsyjna wielokrotne zastosowanie będzie miała następująca, dobrze znana:

Uwaga 2.1. W dowolnym pierścieniu $(R,+,\cdot,0)$:

(i) $R_p \lhd R$ dla dowolnej liczby pierwszej p;
(ii) $T(R) \lhd R$;
(iii) $T(R) = \bigoplus_{p\in\mathbb{P}(R)} R_p$;
(iv) $R_p \cdot R_q = \{0\}$ dla dowolnych różnych liczb pierwszych p i q.

Jednym z ważnych narzędzi używanych do konstruowania mnożeń pierścieniowych na grupach abelowych jest produkt tensorowy takich grup (zob. (Fuchs, 1970, §59) i por. np. z Feigelstock (2000)). Fundamentalny związek struktury pierścienia na dowolnej grupie abelowej A z produktem tensorowym grup abelowych ilustruje poniższe, znane

Twierdzenie 2.1. Niech A będzie grupą abelową. Wówczas:

(i) $\mathrm{Mult}(A) \cong \mathrm{Hom}(A \otimes A, A)$;

(ii) $\mathrm{Mult}(A) \cong \mathrm{Hom}\big(A, \mathrm{End}(A)\big)$.

Dowód. Zob. (Fuchs, 1973, Theorem 118.1).

Podamy teraz szereg technicznych lematów, które znacznie ułatwią przeprowadzenie dowodów zasadniczych rezultatów dotyczących struktury $(A)CR$-grup.

Lemat 2.1. Niech A i B będą grupami abelowymi takimi, że $A = T(A)$, $\exp(A_p) < \infty$, $B = pB$ oraz $B_p = \{0\}$ dla wszystkich $p \in \mathbb{P}(A)$. Jeżeli R jest pierścieniem o grupie addytywnej $A \oplus B$, to $R = R_1 \times R_2$ dla pewnych pierścieni R_1 i R_2 odpowiednio o grupach addytywnych A i B.

Dowód. Rozważmy dowolny pierścień $R = (A \oplus B, *)$ i oznaczmy $G = A \oplus \{0\}$ oraz $H = \{0\} \oplus B$. Wtedy $G * H = H * G = \{0\}$, gdyż $G = T(G)$ i $H = pH$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(G)$. Rozważmy dowolne $g_1, g_2 \in G$ i $h_1, h_2 \in H$. Wtedy $g_1 * g_2 = g_3 + h$ dla pewnych $g_3 \in G$, $h \in H$. Niech $m = \mathrm{NWW}\big(o(g_1), o(g_2), o(g_3)\big)$. Wówczas $0 = m(g_1 * g_2) = m(g_3 + h) = mh$, skąd $h \in T(H)$. Weźmy dowolne $p \in \mathbb{P}$. Jeżeli $p \mid o(h)$, to $p \mid m$, więc z określenia liczby m wynika, że $p \in \mathbb{P}(G)$. Ale $H_p = \{0\}$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(G)$, więc $h = 0$. Zatem $G * G \subseteq G$. Dalej, $h_1 * h_2 = g + h_3$ dla pewnych $g \in G$, $h_3 \in H$. Niech P będzie skończonym podzbiorem w $\mathbb{P}(G)$ takim, że $g \in \bigoplus_{p \in P} G_p$. Wtedy dla $n = \prod_{p \in P} \exp(G_p)$ otrzymujemy, że $n\big(\bigoplus_{p \in P} G_p\big) = \{0\}$. Ponadto $H = pH$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(G)$, więc $h_1 = nh_1'$, $h_2 = nh_2'$ i $h_3 = n^2 h_3'$ dla pewnych $h_1', h_2', h_3' \in H$. Zatem $n^2(h_1' * h_2') = g + n^2 h_3'$, skąd $g = n^2\big((h_1' * h_2') - h_3'\big) \in \in n^2(G \oplus H)$. Ale $\big(n^2(G \oplus H)\big)_p = \{0\}$ dla każdego $p \in P$, więc $g = 0$. Wobec tego $h_1 * h_2 \in H$. Stąd $H * H \subseteq H$. W ten sposób pokazaliśmy, że $G, H \lhd R$ i $R = G \oplus H$. Niech $R_1 = (A, \circledast)$ oraz $R_2 = (B, \star)$ będą pierścieniami z mnożeniami w naturalny sposób indukowanymi odpowiednio z podpierścieni G i H pierścienia R. Wtedy $R = R_1 \times R_2$.

Lemat 2.2. Niech $G = A \oplus H$, gdzie A i H są takimi grupami abelowymi, że $A_p \neq \neq \{0\}$, $H_p = \{0\}$ oraz $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH > 1$ dla pewnego $p \in \mathbb{P}$. Istnieją wówczas łączny pierścień $R = (G, *)$ oraz $x, y \in H$ takie, że $(0,y)^2 = (0,x) * (0,y) = (0,0)$ oraz $(0,y) * \\ *(0,x) = (a,0)$ i $(0,x)^2 = (b,0)$ dla pewnych $a, b \in A \setminus \{0\}$.

Dowód. Rozważmy diagram:

$$G \xrightarrow{\pi_1} H \xrightarrow{\pi_2} H/pH \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_p^+,$$

gdzie π_1 jest naturalnym rzutowaniem grupy G na grupę H, π_2 jest epimorfizmem kanonicznym, zaś φ jest izomorfizmem. Niech $f = \varphi \circ \pi_2 \circ \pi_1$. Z przyjętych założeń wynika istnienie takiego $x \in H \setminus pH$, że $\big|\operatorname{supp} \varphi(x + pH)\big| \geq 2$. Weźmy dowolne $i_1, i_2 \in \operatorname{supp} \varphi(x + pH)$ takie, że $i_1 \neq i_2$. Niech $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in I}$ będzie elementem grupy $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_p^+$ takim, że:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1 \text{ , dla } i = i_1 \\ 0 \text{ , dla } i \neq i_1 \end{cases}.$$

Niech ponadto $c = \varepsilon \cdot \varphi(x+pH)$, przy czym $\cdot$ oznacza mnożenie pierścienia $\prod_{i\in I}\mathbb{Z}_p$. Wówczas $\varphi^{-1}(c) = y + pH$ dla pewnego $y \in H \setminus pH$. Dla $t = 1,2$, epimorfizmy $\mu_t \colon \bigoplus_{i\in I}\mathbb{Z}_p^+ \to \mathbb{Z}_p^+$ definiujemy w sposób następujący:

$$\mu_1\left((k_i)_{i\in I}\right) = k_{i_1}, \quad \mu_2\left((k_i)_{i\in I}\right) = k_{i_2}.$$

Wtedy:

$$\mu_1\Big(f\big((0,y)\big)\Big) \odot_p \mu_2\Big(f\big((0,y)\big)\Big) = 0,\ \mu_1\Big(f\big((0,x)\big)\Big) \odot_p \mu_2\Big(f\big((0,y)\big)\Big) = 0,$$

$$\mu_1\Big(f\big((0,y)\big)\Big) \odot_p \mu_2\Big(f\big((0,x)\big)\Big) \neq 0,\ \mu_1\Big(f\big((0,x)\big)\Big) \odot_p \mu_2\Big(f\big((0,x)\big)\Big) \neq 0.$$

Bezpośrednio z przyjętych założeń wynika istnienie zanurzenia $\iota \colon \mathbb{Z}_p^+ \to A$. Rozważmy odwzorowanie $* \colon G \times G \to G$ dane wzorem:

$$g_1 * g_2 = \left(\iota\Big(\mu_1\big(f(g_1)\big) \odot_p \mu_2\big(f(g_2)\big)\Big), 0\right)$$

dla wszystkich $g_1, g_2 \in G$. Ponieważ przekształcenia ι, μ_1, μ_2 i f są homomorfizmami grup oraz $\odot_p$ jest mnożeniem pierścieniowym, to $R = (G, *)$ jest pierścieniem. Ponadto $f(A) = \{0\}$, więc $A \subseteq \mathfrak{a}(R)$. Stąd oraz na mocy inkluzji $R^2 \subseteq A$ otrzymujemy, że $(G*G)*G = G*(G*G) = \{0\}$. Wobec tego pierścień R jest łączny. Ostatecznie otrzymujemy więc, że $(0,y)^2 = (0,x)*(0,y) = (0,0)$ oraz $(0,y)*(0,x) = (a,0)$ i $(0,x)^2 = (b,0)$ dla pewnych $a, b \in A \setminus \{0\}$.

Lemat 2.3. Niech p będzie liczbą pierwszą, zaś n liczbą naturalną. Niech ponadto H będzie nil_a-grupą taką, że $H_p = \{0\}$. Jeżeli R jest łącznym pierścieniem o grupie addytywnej $Z(p^n) \oplus H$, to $R^2 \subseteq Z(p^n) \oplus \{0\}$. W szczególności, jeśli $n = 1$ oraz $R^2 \neq \neq \{0\}$, to $R^2 = Z(p) \oplus \{0\}$.

Dowód. Niech $I = Z(p^n) \oplus \{0\}$ i niech $B = \{0\} \oplus H$. Ponieważ $B_p = \{0\}$, to $I = \neq R_p \lhd R$. Załóżmy nie wprost, że $B^2 \nsubseteq I$. Wtedy $(R/I)^2 \neq \{0+I\}$. Ale $(R/I)^+ \cong H$, więc H nie jest nil_a-grupą, sprzeczność. Zatem $R^2 \subseteq Z(p^n) \oplus \{0\}$. Jeśli więc $n = 1$ i $R^2 \neq \{0\}$, to R^2 jest nietrywialną podgrupą w $Z(p) \oplus \{0\}$, skąd $R^2 = Z(p) \oplus \{0\}$.

Lemat 2.4. Niech H będzie nil_a-grupą taką, że $H_p = \{0\}$ oraz $H = \langle h_0 \rangle + pH$ dla pewnych $p \in \mathbb{P}$ i $h_0 \in H$. Jeżeli R jest łącznym pierścieniem o grupie addytywnej $Z(p) \oplus H$ i $R^2 \neq \{0\}$, to $R \cong \mathbb{Z}_p \times H^0$ lub $R = \big\langle (0,h_0) \big\rangle + \mathfrak{a}(R)$, przy czym $o\big((0,h_0)^2\big) = p$ i $R^3 = \{0\}$.

Dowód. Niech $I = Z(p) \oplus \{0\}$ i niech $B = \{0\} \oplus H$. Wtedy $I = R_p$, więc $I \lhd R$. Ponadto $R^2 = I$ na mocy Lematu 2.3. Weźmy dowolne $a \in I \setminus \{0\}$. Wówczas $o(a) = \neq p$, skąd $\langle a \rangle = I$. Mamy do rozważenia dwa przypadki:

(i). $a^2 \neq 0$. Wtedy $I \cong \mathbb{Z}_p$. Zatem pierścień I posiada jedynkę. Istnieje więc ideał J pierścienia R taki, że $R = I \oplus J$ (por. (Gardner i Wiegandt, 2004, Szendrei's Theorem 1.2.5)). Stąd $H \cong (R/I)^+ \cong J^+$. Ponadto H jest nil_a-grupą, więc $J^2 = \{0\}$. Zatem $R \cong \mathbb{Z}_p \times H^0$.

(ii). $a^2 = 0$. Wtedy $R^4 = I^2 = \langle a^2 \rangle = \{0\}$. Załóżmy nie wprost, że $R^3 \neq \{0\}$. Ponieważ $R^2 \lhd R$, to $R^3 \subseteq R^2$. Ale R^3 jest podpierścieniem w R, $R^2 = I$ oraz $|I| = p$, więc $R^3 = R^2$. Stąd $R^3 = R^2 \cdot R = R^3 \cdot R = R^4 = \{0\}$, sprzeczność. Zatem $R^3 = \{0\}$. Weźmy dowolne $b \in B$. Wtedy $ab \in I$, więc istnieje $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $ab = ka$. Stąd $(ab)b = (ka)b = k(ab) = k(ka) = k^2a$. Ale $R^3 = \{0\}$, więc $k^2a = 0$. Zatem $p \mid k^2$, skąd $p \mid k$. Wobec tego $ka = 0$, czyli $ab = 0$. Stąd $aB = \{0\}$. Podobnie pokazuje się, że $Ba = \{0\}$. Ponadto $a^2 = 0$, więc $a \in \mathfrak{a}(R)$. Dalej, $(pB)R = p(BR) \subseteq pR^2 = pI = \{0\}$, skąd $(pB)R = \{0\}$. Analogicznie $R(pB) = \{0\}$. Zatem $pB \subseteq \mathfrak{a}(R)$. Ponadto $H = \langle h_0 \rangle + pH$ dla pewnego $h_0 \in H$, więc $R = \big\langle (0,h_0) \big\rangle + \mathfrak{a}(R)$. Ale $R^2 \neq \{0\}$, więc $(0,h_0)^2 \neq 0$. Stąd oraz na mocy równości $R^2 = I$ otrzymujemy, że $o\big((0,h_0)^2\big) = p$.

Lemat 2.5. Niech A, B i C będą beztorsyjnymi grupami abelowymi i niech G będzie czystą podgrupą w A.

(1.) Jeżeli a_1 i a_2 są zależnymi elementami w A, to $\mathfrak{t}(a_1) = \mathfrak{t}(a_2)$.
(2.) $\mathfrak{t}(a) \cdot \mathfrak{t}(b) \geq \mathfrak{t}(a)$ dla wszystkich $a, b \in A$.
(3.) Jeżeli $R = (A, \star)$ jest pierścieniem, to $\mathfrak{t}(a \star b) \geq \mathfrak{t}(a) \cdot \mathfrak{t}(b)$ dla wszystkich $a, b \in A$.
(4.) Jeżeli $R = (A, \star)$ jest pierścieniem, to $\mathfrak{t}(a \star b) \geq \mathfrak{t}(a) \vee \mathfrak{t}(b)$ dla wszystkich $a, b \in A$.
(5.) Jeżeli A i B są podgrupami w $\mathbb{Q}^+$, to $\mathfrak{t}(A \cdot B) = \mathfrak{t}(A) \cdot \mathfrak{t}(B)$.

Dowód. Własność (1.) udowodniona jest w (Fuchs, 1973, p. 108-109). Dowód własności (2.) wynika wprost z (Feigelstock, 1983, Consequence 1.3.2). Własność (3.) jest bezpośrednią konsekwencją równości $(p^n x) \star y = p^n (x \star y) = x \star (p^n y)$, które są prawdziwe dla wszystkich $x, y \in A$, $p \in \mathbb{P}$ i $n \in \mathbb{N}$, oraz określenia iloczynu typów (zob. (Fuchs, 1973, p. 110)). Własność (4.) wynika wprost z (3.) i (2.). Pozostało udowodnić własność (5.). Jeżeli $A = \{0\}$ lub $B = \{0\}$, to teza jest oczywista. Niech dalej $A \neq \{0\}$ i $B \neq \{0\}$. Wtedy bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $1 \in A \cap B$ (zob. (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2)). Wówczas $h_p^{A \cdot B}(1) = h_p^A(1) + h_p^B(1)$ (jeśli którakolwiek p-wysokość jest nieskończona, to przyjmujemy, że ich suma jest nieskończona). Stąd $\mathfrak{t}_{A \cdot B}(1) = \mathfrak{t}_A(1) \cdot \mathfrak{t}_B(1)$. Ponadto $\mathfrak{t}(A \cdot B) = \mathfrak{t}_{A \cdot B}(1)$, $\mathfrak{t}(A) = \mathfrak{t}_A(1)$ i $\mathfrak{t}(B) = \mathfrak{t}_B(1)$ (por. (Fuchs, 1973, p. 109)), więc $\mathfrak{t}(A \cdot B) = \mathfrak{t}(A) \cdot \mathfrak{t}(B)$.

Lemat 2.6. Niech A i B będą nietrywialnymi podgrupami grupy $\mathbb{Q}^+$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) B jest obrazem homomorficznym grupy A;
(ii) $B = q \cdot A$ dla pewnego $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$;
(iii) $mA = nB$ dla pewnych $m, n \in \mathbb{N}$;
(iv) $B \cong A$.

Dowód. Załóżmy, że istnieje homomorfizm f grupy A na grupę B. Weźmy dowolne $b \in B \setminus \{0\}$. Istnieje wówczas $a \in A \setminus \{0\}$ takie, że $b = f(a)$. Ponieważ $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \neq \neq \{0\}$, to istnieje $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takie, że $b = q \cdot a$. Rozważmy dowolne $x \in A$. Wtedy $x = \frac{k}{n} \cdot a$ dla pewnych $k \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Zatem $nf(x) = f(nx) = f(ka) = kf(a) = = kb = k(q \cdot a)$, skąd $f(x) = q \cdot \left(\frac{k}{n} \cdot a\right) = q \cdot x$. Wobec tego $B = f(A) = q \cdot A$. W ten sposób wykazaliśmy implikację $(i) \Rightarrow (ii)$. Implikacje $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (iv)$ oraz $(iv) \Rightarrow (i)$ są trywialne.

Bezpośrednią konsekwencją (Fuchs, 1973, Proposition 85.4), Lematu 2.6 oraz punktu (5.) Lematu 2.5 jest następujący

Wniosek 2.1. Dla dowolnych podgrup A, B, C grupy $\mathbb{Q}^+$ następujące warunki są równoważne:

(i) $n(A \cdot C) \subseteq B$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $\mathfrak{t}(A) \cdot \mathfrak{t}(C) \leq \mathfrak{t}(B)$.

W poniższej definicji zamieszczamy zwięzłe zestawienie głównych pojęć związanych z tematyką niniejszego rozdziału.

Definicja 2.1. Grupę abelową A nazywamy CR-grupą, gdy każdy pierścień o grupie addytywnej A jest przemienny. Jeżeli A spełnia warunek CR ograniczony do klasy pierścieni łącznych, to mówimy, że A jest ACR-grupą. W przypadku, gdy A może być grupą addytywną jedynie pierścieni łącznych, to A nazywamy AR-grupą.

Bezpośrednią konsekwencją powyższej definicji jest następująca

Uwaga 2.2. Każda CR-grupa jest ACR-grupą.

Okazuje się, że zachodzi także zdecydowanie mniej oczywista zależność.

Twierdzenie 2.2. Każda CR-grupa jest AR-grupą.

Dowód. Rozważmy dowolną CR-grupę A. Weźmy dowolne $* \in \mathrm{Mult}(A)$ oraz $a \in A$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że mnożenie $x_1 \circledast x_2 = x_1 * (a * x_2)$ określone dla wszystkich $x_1, x_2 \in A$, wprowadza na A strukturę pierścienia. Rozważmy dowolne $x, y \in A$. Ponieważ A jest CR-grupą, to $x \circledast y = y \circledast x$, czyli $x * (a * y) = y * (a * x)$. Ale również mnożenie $*$ jest przemienne, skąd $x * (a * y) = (a * x) * y = (x * a) * y$. Ponadto elementy x, y oraz a zostały wybrane w sposób dowolny, więc pierścień $(A, *)$ jest łączny. Zatem A jest AR-grupą.

Jeżeli G jest grupą abelową postaci $G = A \oplus B$ i R jest pierścieniem o grupie addytywnej A, to $S = R \times B^0$ jest pierścieniem o grupie addytywnej izomorficznej z grupą G. Stąd otrzymujemy natychmiast następujące:

Stwierdzenie 2.1. Składnik prosty $(A)CR$-grupy (AR-grupy) jest $(A)CR$-grupą (AR-grupą).

Poniższe stwierdzenie charakteryzuje rozkładalne *ACR*-grupy.

Stwierdzenie 2.2. Niech $\{G_i\colon i\in I\}$, gdzie $I\neq\emptyset$, będzie rodziną grup abelowych. Jeżeli $\bigoplus_{i\in I}G_i$ jest *ACR*-grupą, to $\mathrm{Hom}(G_i\otimes G_j,G_k)=\{0\}$ dla wszystkich parami różnych $i,j,k\in I$.

Dowód. Załóżmy, że dla pewnych parami różnych $i,j,k\in I$ istnieje niezerowy homomorfizm $f\colon G_i\otimes G_j\to G_k$. Niech ϕ_k będzie naturalną injekcją grupy G_k w grupę G i niech π_t będzie naturalnym rzutowaniem grupy G na grupę G_t dla $t\in i,j$. Wówczas $(G,*)$, gdzie $g_1*g_2=\phi_k\Big(f\big(\pi_i(g_1)\otimes\pi_j(g_2)\big)\Big)$, jest pierścieniem takim, że $G*(G*G)=(G*G)*G=\{0\}$. W szczególności wynika stąd, że pierścień $(G,*)$ jest łączny. Ponieważ $f\neq 0$, odwzorowania π_i oraz π_j są surjektywne i ϕ_k jest injekcją, to istnieją $a,b\in G$ takie, że $a*b\neq 0$. Elementy $x=(x_s)_{s\in I}$ oraz $y=(y_s)_{s\in I}$ definiujemy następująco:

$$x_s=\begin{cases}\pi_i(a)\text{ , gdy }s=i\\ 0_s\quad\text{ , gdy }s\neq i\end{cases}\text{ oraz }y_s=\begin{cases}\pi_j(b)\text{ , gdy }s=j\\ 0_s\quad\text{ , gdy }s\neq j\end{cases}.$$

Wówczas $x,y\in G$, $x*y=a*b\neq 0$ oraz $y*x=0$. Zatem łączny pierścień $(G,*)$ nie jest przemienny, skąd wynika, że G nie jest *ACR*-grupą.

2.3 Klasyfikacja torsyjnych *CR*-, *ACR*- i *AR*-grup

Poniższy lemat okaże się pomocny przy klasyfikacji torsyjnych *CR*-, *ACR*- i *AR*-grup przeprowadzonej w Twierdzeniu 2.3.

Lemat 2.7. Niech R będzie łącznym pierścieniem o grupie addytywnej A i niech M będzie lewostronnym R-modułem.

(i) Jeżeli $R^2\circ M\neq\{0\}$, to $A\oplus M$ nie jest *AR*-grupą.
(ii) Jeżeli $R\circ M\neq\{0\}$, to $A\oplus M$ nie jest *ACR*-grupą.

Dowód. Niech $G=A\oplus M$. Mnożenie pierścienia R oznaczmy standardową kropką.

(i). Rozważmy funkcję $*\colon G\times G\to G$ daną wzorem:

$$(a_1,m_1)*(a_2,m_2)=(0,a_1\circ m_2),$$

dla wszystkich $a_1,a_2\in A$ i $m_1,m_2\in M$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że $S=(G,*)$ jest pierścieniem. Ponieważ $R^2\circ M\neq\{0\}$, to istnieją $r_1,r_2\in R$ oraz $m\in M$ takie, że $(r_1\cdot r_2)\circ m\neq 0$. Stąd $(r_1,0)*\big((r_2,0)*(0,m)\big)=(r_1,0)*(0,r_2\circ m)=\big(0,r_1\circ(r_2\circ m)\big)=\big(0,(r_1r_2)\circ m\big)\neq(0,0)$. Ale $\big((r_1,0)*(r_2,0)\big)*(0,m)=(0,0)*(0,m)=(0,0)$, więc pierścień jest niełączny. Zatem G nie jest *AR*-grupą.

(ii). Niech $\star\colon G\times G\to G$ będzie funkcją określoną za pomocą wzoru:

$$(a_1,m_1)\star(a_2,m_2)=(a_1\cdot a_2,a_1\circ m_2),$$

dla wszystkich $a_1,a_2\in A$ i $m_1,m_2\in M$. Na mocy standardowego sprawdzenia otrzymujemy wówczas, że $P=(G,\star)$ jest pierścieniem. Dla dowolnych $a_1,a_2,a_3\in A$ oraz $m_1,m_2,m_3\in M$ zachodzi $\big((a_1,m_1)\star(a_2,m_2)\big)\star(a_3,m_3)=(a_1\cdot a_2,a_1\circ m_2)\star$ $\star(a_3,m_3)=\big((a_1\cdot a_2)\cdot a_3,(a_1\cdot a_2)\circ m_3\big)=\big(a_1\cdot(a_2\cdot a_3),a_1\circ(a_2\circ m_3)\big)=(a_1,m_1)\star$ $\star(a_2\cdot a_3,a_2\circ m_3)=(a_1,m_1)\star\big((a_2,m_2)\star(a_3,m_3)\big)$, więc pierścień P jest łączny. Ponieważ $R\circ M\neq\{0\}$, to $r\circ m\neq 0$ dla pewnych $r\in R$ i $m\in M$. Stąd $(r,0)\star(0,m)=$ $=(0,r\circ m)\neq(0,0)$ oraz $(0,m)\star(r,0)=(0,0)$ i w konsekwencji łączny pierścień P nie jest przemienny. Zatem G nie jest ACR-grupą.

Wniosek 2.2. Dla wszystkich $m,n\in\mathbb{N}$ oraz dowolnej nietrywialnej grupy abelowej G ani $Z(p^m)\oplus Z(p^n)$, ani $\mathbb{Z}^+\oplus G$ nie jest AR-grupą. Grupy te nie są również ACR-grupami.

Twierdzenie 2.3. Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G następujące warunki są równoważne:

(i) G jest CR-grupą;
(ii) G jest AR-grupą;
(iii) G jest ACR-grupą;
(iv) $G=\bigoplus_{p\in\mathbb{P}(G)}\Big(Z(p^{n_p})\oplus\big(\bigoplus_{i\in I_p}Z(p^\infty)\big)\Big)$, gdzie $n_p\in\mathbb{N}_0$ oraz I_p jest pewnym zbiorem dla każdego $p\in\mathbb{P}(G)$.

Dowód. Z Uwagi 2.1 wynika, że wystarczy udowodnić twierdzenie dla p-grup. Rozważmy więc dowolne $p\in\mathbb{P}$ oraz dowolną p-grupę abelową G. Jeżeli $G=\{0\}$, to równoważność warunków $(i)-(iv)$ jest oczywista. Niech dalej $G\neq\{0\}$.

Implikacje $(i)\Rightarrow(ii)$ oraz $(i)\Rightarrow(iii)$ są bezpośrednimi konsekwencjami odpowiednio Twierdzenia 2.2 i Uwagi 2.2.

Aby udowodnić implikacje $(ii)\Rightarrow(iv)$ oraz $(iii)\Rightarrow(iv)$ załóżmy, że nietrywialna p-grupa G nie jest postaci $Z(p^n)\oplus D$, gdzie n jest pewną nieujemną liczbą całkowitą, zaś D jest pewną podzielną p-grupą. Z (Fuchs, 1970, Corollary 27.3) wynika wówczas istnienie takich $m,s\in\mathbb{N}$, że grupa $Z(p^m)\oplus Z(p^s)$ jest składnikiem prostym w G. Zatem G nie jest ani AR-grupą, ani ACR-grupą na mocy Wniosku 2.2 i Stwierdzenia 2.1.

Przypuśćmy, że $G=Z(p^n)\oplus D$, gdzie n jest pewną nieujemną liczbą całkowitą, zaś D jest pewną podzielną p-grupą. Rozważmy dowolny pierścień R taki, że $R^+=G$. Ponieważ $D=p^nD$ i D jest nil-grupą, to $\{0\}\oplus D\subseteq\mathfrak{a}(R)$. Stąd, dla $A=Z(p^n)\oplus\{0\}$ otrzymujemy, że $R^2=A^2$. Ponadto $A\cong\mathbb{Z}^+_{p^n}$ i każde mnożenie pierścieniowe $*$ określone na grupie $\mathbb{Z}^+_{p^n}$ jest zdeterminowane przez wartość $1*1$, więc pierścień R jest łączny i przemienny. Wobec tego warunek (iv) implikuje każdy spośród warunków $(i)-(iii)$.

2.4 Klasyfikacja beztorsyjnych całkowicie rozkładalnych *CR*-grup

Ponieważ każda beztorsyjna grupa abelowa rangi jeden zanurza się w grupę $\mathbb{Q}^+$, to poniższe twierdzenie klasyfikuje beztorsyjne całkowicie rozkładalne *CR*-grupy.

Twierdzenie 2.4. Niech $\{G_i\colon i\in I\}$, gdzie $I\neq\emptyset$, będzie rodziną nietrywialnych podgrup grupy $\mathbb{Q}^+$ i niech $G=\bigoplus_{i\in I}G_i$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) G jest *CR*-grupą;
(ii) $n(G_i\cdot G_j)\not\subseteq G_k$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ oraz $i,j,k\in I$ takich, że $i\neq j$;
(iii) $\mathfrak{t}(G_i)\cdot\mathfrak{t}(G_j)\not\leq\mathfrak{t}(G_k)$ dla wszystkich $i,j,k\in I$ takich, że $i\neq j$.

Dowód. Równoważność warunków (ii) oraz (iii) jest bezpośrednią konsekwencją Wniosku 2.1. Udowodnimy równoważność warunków (i) oraz (ii). Załóżmy najpierw, że $n(G_i\cdot G_j)\subseteq G_k$ dla pewnych $n\in\mathbb{N}$ oraz $i,j,k\in I$ takich, że $i\neq j$. Mamy do rozważenia dwa przypadki:

(I). $i\neq j$ oraz $k=i$. Wówczas $(G_i\oplus G_j,*)$, gdzie $(a_1,c_1)*(a_2,c_2)=\big(n(a_1\cdot\cdot c_2),0\big)$, jest pierścieniem, w którym dla dowolnych niezerowych $a\in G_i$ oraz $c\in G_j$ jest $(a,0)*(0,c)=\big(n(a\cdot c),0\big)\neq(0,0)$ i $(0,c)*(a,0)=(0,0)$. Zatem $G_i\oplus G_j$ nie jest *CR*-grupą. Ponadto grupa G ma składnik prosty izomorficzny z $G_i\oplus G_j$, więc ze Stwierdzenia 2.1 wynika, że G nie jest *CR*-grupą.

(II). Elementy i,j,k są parami różne. Analogicznie jak w punkcie (I) uzasadnia się, że $(G_i\oplus G_j\oplus G_k,\star)$, gdzie $(a_1,b_1,c_1)\star(a_2,b_2,c_2)=\big(0,0,n(a_1\cdot b_2)\big)$ jest nieprzemiennym pierścieniem i w związku z tym G nie jest *CR*-grupą.

Na odwrót. Przypuśćmy teraz, że $n(G_i\cdot G_j)\not\subseteq G_k$, dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ oraz $i,j,k\in I$ takich, że $i\neq j$. Rozważmy dowolne $*\in\mathrm{Mult}(G)$. Niech $S=(G,*)$. Jeżeli $G*G=\{0\}$, to oczywiście pierścień S jest przemienny. Niech dalej $G*G\neq\{0\}$. Istnieją wówczas $a,c\in G$ oraz $i,j\in I$ takie, że $\pi_i(a)*\pi_j(c)\neq 0$, gdzie π_t jest naturalną projekcją grupy G na podgrupę $\overline{G_t}$ dla $t=i,j$. Z (Fuchs, 1973, Theorem 119.1) wynika istnienie pierścienia $R=\big(\mathscr{D}(G),\circledast\big)$ takiego, że S jest podpierścieniem w R. Weźmy dowolne $k\in\operatorname{supp}\big(\pi_i(a)*\pi_j(c)\big)$. Niech φ_t będzie naturalnym zanurzeniem grupy $\mathbb{Q}^+$ w grupę $\mathscr{D}(G)$ takim, że $\varphi_t(\mathbb{Q}^+)$ jest t-tym składnikiem prostym Q_t w $\mathscr{D}(G)$ dla $t=i,j$. Niech ponadto ψ_k będzie naturalnym rzutowaniem grupy $\mathscr{D}(G)$ na jej k-ty składnik prosty $Q_k\cong\mathbb{Q}^+$, niech $\phi\colon Q_k\to\mathbb{Q}^+$ będzie naturalnym izomorfizmem i niech $\vartheta=\phi\circ\psi_k$. Dla wszystkich $q_1,q_2\in\mathbb{Q}^+$ definiujemy $q_1\odot q_2=\vartheta\big(\varphi_i(q_1)\circledast\varphi_j(q_2)\big)$. Ponieważ ϑ, φ_i, φ_j są addytywnymi homomorfizmami oraz $\circledast$ jest niezerowym mnożeniem pierścieniowym, to mnożenie $\odot$ wprowadza na grupie $\mathbb{Q}^+$ strukturę pierścienia z niezerowym mnożeniem. Z (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) wynika więc istnienie takiego $q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, że $q_1\odot q_2=q_1\cdot q\cdot q_2$ dla wszystkich $q_1,q_2\in\mathbb{Q}^+$. Zatem dla wszystkich $x\in G_i$ i $y\in G_j$ otrzymujemy, że:

$$q\cdot x\cdot y=x\odot y=\vartheta\big(\varphi_i(x)*\varphi_j(y)\big)\in G_k, \tag{2.4.1}$$

skąd $q(G_i \cdot G_j) \subseteq G_k$. Istnieje więc $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n(G_i \cdot G_j) \subseteq G_k$, co wobec przyjętego założenia oznacza równość $j = i$. Z (2.4.1) oraz określenia funkcji ϑ wynika więc, że:

$$\psi_k\big(\varphi_i(g_1) * \varphi_i(g_2)\big) = \phi^{-1}(g_1 \cdot q \cdot g_2)$$

dla wszystkich $g_1, g_2 \in G_i$. Zatem:

$$\psi_k\big(\varphi_i(g_1) * \varphi_i(g_2)\big) = \psi_k\big(\varphi_i(g_2) * \varphi_i(g_1)\big) \tag{2.4.2}$$

dla wszystkich $g_1, g_2 \in G_i$. Ponadto uzyskana wcześniej równość $j = i$ implikuje, iż mnożenie $*$ jest całkowicie zdeterminowane przez wartości $\psi_k\big(\varphi_i(g_1) * \varphi_i(g_2)\big) \neq 0$, gdzie $i,k \in I$ i $g_1, g_2 \in G_i$, więc pierścień S jest przemienny. Wobec tego G jest CR-grupą.

2.5 Beztorsyjne $(A)CR$-grupy rangi dwa

Uwaga 2.3. Jeżeli A nie jest CR-grupą, to istnieje $\circ \in \mathrm{Mult}(A)$ takie, że $a_1 \circ a_2 \neq \neq a_2 \circ a_1$ dla pewnych $a_1, a_2 \in A$. Zatem $(A, \cdot)$, gdzie $a \cdot b = a \circ b - b \circ a$ dla wszystkich $a, b \in A$, jest pierścieniem z niezerowym mnożeniem, który jest antyprzemienny.

Twierdzenie 2.5. Każda beztorsyjna nierozkładalna grupa abelowa rangi dwa jest CR-grupą.

Dowód. Rozważmy dowolną beztorsyjną nierozkładalną grupę abelową A rangi dwa. Jeśli $\square A = \{0\}$, to teza jest oczywista. Niech dalej $\square A \neq \{0\}$. Załóżmy nie wprost, że A nie jest CR-grupą. Z Uwagi 2.3 wynika wówczas istnienie takiego antyprzemiennego pierścienia $R = (A, \cdot)$, że $R^2 \neq \{0\}$. Istnieją więc $a, b \in A$ takie, że $a^2 = b^2 = 0$, $ba = -ab$ i $ab \neq 0$. Załóżmy nie wprost, że elementy a i b są zależne. Wówczas $b = qa$ dla pewnego $q \in \mathbb{Q}$. Stąd $ab = qa^2 = 0$, sprzeczność. Wobec tego elementy a i b są niezależne. Ponadto $r(A) = 2$, więc istnieją $n \in \mathbb{N}$ oraz $k, l \in \mathbb{Z}$ takie, że $n(ab) = ka + lb$, przy czym $k^2 + l^2 > 0$. Ze względu na antyprzemienność pierścienia R, bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $l \neq 0$. Wtedy, po obustronnym lewostronnym pomnożeniu ostatniej równości przez a, otrzymujemy, że $(na)(ab) = l(ab)$. Niech $\alpha = na$ i niech $\beta = ab$. Wówczas $\alpha\beta = l\beta$. Aby wykazać niezależność elementów α i β rozważmy dowolne $K, L \in \mathbb{Z}$ oraz załóżmy, że $K\alpha + L\beta = 0$. Wtedy $Kna + L(ab) = 0$, więc $Kn^2a + Ln(ab) = 0$. Stąd oraz na mocy uzasadnionej wcześniej równości $n(ab) = ka + lb$ otrzymujemy, że $(Kn^2 + Lk)a + Llb = 0$. Ale elementy a i b są niezależne oraz $l \neq 0$ i $n \in \mathbb{N}$, więc $L = K = 0$. Zatem elementy α i β są niezależne. Weźmy dowolne $x \in A$. Wtedy $sx = h\alpha + t\beta$ dla pewnych $s \in \mathbb{N}$ i $h, t \in \mathbb{Z}$. Zatem $s(\alpha x) = t(\alpha\beta) = (tl)\beta = l(t\beta) = l(sx - h\alpha)$, czyli $s(lx - \alpha x) = = (lh)\alpha$. Stąd $lx - \alpha x \in \langle\alpha\rangle_*$. Ponadto $s(\alpha x) = (tl)\beta$, więc $\alpha x \in \langle\beta\rangle_*$. Wobec tego $lx = (lx - \alpha x) + \alpha x \in \langle\alpha\rangle_* + \langle\beta\rangle_*$. Stąd oraz na mocy dowolności wyboru elementu x

i niezależności elementów α oraz β otrzymujemy, że $lA \subseteq \langle\alpha\rangle_* \oplus \langle\beta\rangle_* \subseteq A$. Ponadto $\mathfrak{t}(\alpha) \leq \mathfrak{t}(\beta)$ na mocy definicji elementów α i β oraz punktów (1.) i (4.) Lematu 2.5. Zatem (Arnold, 1982, Theorem 2.3) implikuje rozkładalność grupy A, sprzeczność.

Lemat 2.8. Niech $\{A_i\colon i \in I\}$, gdzie $|I| \geq 2$, będzie rodziną nietrywialnych podgrup grupy $\mathbb{Q}^+$ i niech $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$. Jeżeli istnieją $i, j \in I$ takie, że $i \neq j$ oraz $\mathfrak{t}(A_i)\cdot\mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_i)$, to A nie jest AR-grupą.

Dowód. Z (Fuchs, 1973, Propositions 85.3 & 85.4) wynika, że warunek $\mathfrak{t}(A_i)\cdot\mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_i)$ równoważny jest warunkowi $\mathrm{Hom}\,(A_i \otimes A_j, A_i) \neq \{0\}$. Istnieją więc $a \in A_i$, $b \in A_j$ oraz homomorfizm $f\colon A_i \otimes A_j \to A_i$ takie, że $f(a\otimes b) \neq 0$. Dla $s \in \{i, j\}$ niech π_s będzie naturalną projekcją grupy A na grupę A_s i niech ι_s będzie naturalnym zanurzeniem grupy A_s w grupę A. Ponadto definiujemy $F = \iota_i \circ f$, $\alpha = \iota_i(a)$ oraz $\beta = \iota_j(b)$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że funkcja $*\colon A \times A \to A$ dana wzorem:

$$x * y = F\big(\pi_i(x) \otimes \pi_j(y)\big)$$

dla wszystkich $x, y \in A$, wprowadza na grupie A strukturę pierścienia, w którym $\alpha * *\beta \neq 0$ i $\beta * \beta = 0$. Niech $c = \pi_i(\alpha * \beta)$. Wtedy $c \in A_i \setminus \{0\}$, więc $c = \frac{k}{n}a$ dla pewnych $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $f(c\otimes b) = 0$, to $kf(a\otimes b) = f\big((ka)\otimes b\big) = f\big((nc)\otimes b\big) = nf(c\otimes b) = 0$, co jest niemożliwe, gdyż $k \neq 0$, $f(a\otimes b) \neq 0$ i $T(A_i) = \{0\}$. Stąd $f(c\otimes b) \neq 0$. Wobec tego $(\alpha * \beta) * \beta \neq 0$. Ale $\alpha * (\beta * \beta) = 0$, więc pierścień $(A, *)$ nie jest łączny. Zatem A nie jest AR-grupą.

Możemy teraz podać opis CR-grup rangi dwa. Udowodnimy mianowicie następujące

Twierdzenie 2.6. Niech A będzie beztorsyjną grupą abelową rangi dwa. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) A nie jest AR-grupą;
(ii) A nie jest CR-grupą;
(iii) $A = A_1 \oplus A_2$, przy czym $A_1 \neq \{0\}$, $A_2 \neq \{0\}$ oraz $\mathfrak{t}(A_i)\cdot\mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;
(iv) $A \cong B \oplus C$, gdzie B i C są takimi nietrywialnymi podgrupami w $\mathbb{Q}^+$, że $n(B\cdot C) \subseteq \subseteq C$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;
(v) A jest grupą addytywną pewnego niełącznego i jednocześnie nieprzemiennego pierścienia.

Dowód. Implikacja $(i) \Rightarrow (ii)$ jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 2.2. Jeżeli A nie jest CR-grupą, to z Twierdzenia 2.5 wynika, że grupa A jest rozkładalna. Istnieją więc nietrywialne podgrupy A_1 i A_2 grupy A takie, że $A = A_1 \oplus A_2$. W szczególności wynika stąd, że $r(A_1) = r(A_2) = 1$. Stąd oraz na mocy Twierdzenia 2.4 i punktu (2.) Lematu 2.5 otrzymujemy, że $\mathfrak{t}(A_i)\cdot\mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$. Kończy to dowód implikacji $(ii) \Rightarrow (iii)$. Równoważność warunków (iii)

oraz (iv) wynika natychmiast z Wniosku 2.1 i znanego faktu, że każda beztorsyjna grupa abelowa rangi jeden zanurza się w $\mathbb{Q}^+$. Jeśli więc zachodzi warunek dany w (iv), to spełnione są założenia Lematu 2.8. Niech $*$ oznacza niełączne mnożenie pierścieniowe skonstruowane w jego dowodzie. Zachowując pozostałe oznaczenia zastosowane we wspomnianym dowodzie otrzymujemy wówczas, że $\alpha * \beta \neq 0$ i $\beta * \alpha = 0$. Zatem niełączny pierścień $(A,*)$ jest jednocześnie nieprzemienny. W ten sposób wykazaliśmy implikację $(iv) \Rightarrow (v)$. Implikacja $(v) \Rightarrow (i)$ jest oczywista.

Wniosek 2.3. Warunki *CR* i *AR* są równoważne dla beztorsyjnych grup abelowych rangi dwa.

Następne twierdzenie opisuje beztorsyjne *ACR*-grupy rangi dwa.

Twierdzenie 2.7. Niech A będzie beztorsyjną grupą abelową rangi dwa. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) A nie jest *ACR*-grupą;
(ii) $A = A_1 \oplus A_2$, gdzie A_1 i A_2 są nietrywialnymi podgrupami grupy A spełniającymi warunki $\mathfrak{t}(A_i)^2 = \mathfrak{t}(A_i)$ oraz $\mathfrak{t}(A_i) \cdot \mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_j)$ dla pewnych $i, j \in \{1,2\}$ takich, że $i \neq j$;
(iii) $A \cong B \oplus C$ dla pewnych nietrywialnych podgrup B i C grupy $\mathbb{Q}^+$ takich, że $\square B \neq \neq \{0\}$ oraz $n(B \cdot C) \subseteq C$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;
(iv) istnieją dwa niezależne elementy $x, y \in A$, łączny pierścień $R = (A, \cdot)$ oraz nietrywialny homomorfizm $f\colon A \to \big(\mathfrak{N}(A)\big)^+$ takie, że $x \cdot y = f(x)y$ lub $x \cdot y = f(y)x$.

Dowód. $(i) \Rightarrow (ii)$. Warunek (i) implikuje, że A nie jest *CR* grupą, więc z Twierdzenia 2.6 i (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) wynika, że bez utraty ogólności możemy przyjąć, iż $A = A_1 \oplus A_2$ dla pewnych podgrup A_1 i A_2 grupy $\mathbb{Q}^+$ zawierających liczbę 1. Niech $x = (1,0)$ i niech $y = (0,1)$. Wtedy $\{x,y\}$ jest maksymalnym podzbiorem niezależnym w A. Dalej, wprost z przyjętego założenia wynika istnienie łącznego pierścienia R o grupie addytywnej A, który nie jest przemienny. Niech $\star$ oznacza mnożenie pierścienia R. Z dowodu (Beaumont i Wisner, 1959, Lemma 2) wynika, że mamy do rozważenia następujące przypadki:

1. $x \star x = ax$, $x \star y = ay$, $y \star x = 0$ i $y \star y = 0$, gdzie $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Odpowiednio na mocy punktów (1.), (3.) i (2.) Lematu 2.5 otrzymujemy wówczas, że $\mathfrak{t}_A(x) = \mathfrak{t}_A(ax) = = \mathfrak{t}_A(x \star x) \geq \mathfrak{t}_A(x)^2 \geq \mathfrak{t}_A(x)$, czyli $\mathfrak{t}_A(x)^2 = \mathfrak{t}_A(x)$. Powołując się ponownie na ten sam zestaw punktów Lematu 2.5 uzyskujemy, że $\mathfrak{t}_A(y) = \mathfrak{t}_A(ay) = \mathfrak{t}_A(x \star y) \geq \geq \mathfrak{t}_A(x) \cdot \mathfrak{t}_A(y) \geq \mathfrak{t}_A(y)$. Zatem $\mathfrak{t}_A(x) \cdot \mathfrak{t}_A(y) = \mathfrak{t}_A(y)$. Ponadto $\langle x \rangle_* \cong A_1$ i $\langle y \rangle_* \cong A_2$, więc $\mathfrak{t}(A_1)^2 = \mathfrak{t}(A_1)$ oraz $\mathfrak{t}(A_1) \cdot \mathfrak{t}(A_2) = \mathfrak{t}(A_2)$.
2. $x \star x = 0$, $x \star y = 0$, $y \star x = bx$ i $y \star y = by$, gdzie $b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Rozumując analogicznie jak w punkcie 1. otrzymujemy stąd, że $\mathfrak{t}(A_2)^2 = \mathfrak{t}(A_2)$ oraz $\mathfrak{t}(A_2) \cdot \mathfrak{t}(A_1) = \mathfrak{t}(A_1)$.

3. $x\star x = ax$, $x\star y = ay$, $y\star x = bx$ i $y\star y = by$, gdzie $a,b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Stosując te same techniki jak w przypadku 1. uzyskujemy wówczas, że $\mathfrak{t}_A(x)^2 = \mathfrak{t}_A(x)$, $\mathfrak{t}_A(x)\cdot \mathfrak{t}_A(y) = \mathfrak{t}_A(y)$, $\mathfrak{t}_A(y)\cdot\mathfrak{t}_A(x) = \mathfrak{t}_A(x)$ i $\mathfrak{t}_A(y)^2 = \mathfrak{t}_A(y)$. Ale $\mathfrak{t}_A(x)\cdot\mathfrak{t}_A(y) = \mathfrak{t}_A(y)\cdot\mathfrak{t}_A(x)$, więc $\mathfrak{t}_A(y) = \mathfrak{t}_A(x)$. Ponadto $\langle x\rangle_* \cong A_1$ i $\langle y\rangle_* \cong A_2$, skąd $\mathfrak{t}(A_1)^2 = \mathfrak{t}(A_1)$ oraz $\mathfrak{t}(A_1)\cdot\mathfrak{t}(A_2) = \mathfrak{t}(A_2)$.
4. $x\star x = ax$, $x\star y = bx$, $y\star x = ay$ i $y\star y = by$, gdzie $a,b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Wtedy, analogicznie jak w punkcie 3. pokazuje się, że $\mathfrak{t}(A_1)^2 = \mathfrak{t}(A_1)$ oraz $\mathfrak{t}(A_1)\cdot\mathfrak{t}(A_2) = \mathfrak{t}(A_2)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że A_1 i A_2 są podgrupami w $\mathbb{Q}^+$ zawierającymi liczbę 1 takimi, że $\mathfrak{t}(A_1)^2 = \mathfrak{t}(A_1)$ oraz $\mathfrak{t}(A_1)\cdot\mathfrak{t}(A_2) = \mathfrak{t}(A_2)$. Z Wniosku 2.1 wynika wówczas istnienie takich $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, że $n_1(A_1\cdot A_1) \subseteq A_1$ oraz $n_2(A_1\cdot A_2) \subseteq A_2$. Niech $n = \mathrm{NWW}(n_1,n_2)$. Wtedy $n \in A_1 \cap A_2$ oraz $n(A_1\cdot A_1) \subseteq A_1$ i $n(A_1\cdot A_2) \subseteq A_2$. Rozważmy funkcję $\circledast\colon A\times A \to A$ daną wzorem:

$$(a_1,a_2)\circledast(b_1,b_2) = (a_1\cdot n\cdot b_1, a_1\cdot n\cdot b_2)$$

dla wszystkich $a_1,b_1 \in A_1$ i $a_2,b_2 \in A_2$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że $\circledast \in \mathrm{Mult}(A)$. Niech $S = (A,\circledast)$. Wtedy dla dowolnych $a_1,b_1,c_1 \in A_1$ i $a_2,b_2,c_2 \in A_2$, $\big((a_1,a_2)\circledast(b_1,b_2)\big)\circledast(c_1,c_2) = \big(n^2\cdot a_1\cdot b_1\cdot c_1, n^2\cdot a_1\cdot b_1\cdot c_2\big) = (a_1,a_2)\circledast\big((b_1,b_2)\circledast (c_1,c_2)\big)$. Zatem pierścień S jest łączny. Ale $(1,0)\circledast(0,1) = (0,n) \neq (0,0)$ oraz $(0,1)\circledast(1,0) = (0,0)$, więc pierścień S nie jest przemienny. Wobec tego A nie jest ACR-grupą.

W ten sposób udowodniliśmy równoważność warunków (i) oraz (ii). Równoważność warunków (ii) oraz (iii) jest bezpośrednią konsekwencją Wniosku 2.1, (M. Woronowicz, 2016, Theorem 4.8) i możliwości zanurzenia każdej beztorsyjnej grupy abelowej rangi jeden w $\mathbb{Q}^+$. Natomiast równoważność warunków (i) oraz (iv) wynika wprost z (Beaumont i Wisner, 1959, Theorem 2).

Bezpośrednią konsekwencją Twierdzeń 2.6 i 2.7 jest następujące

Twierdzenie 2.8. Beztorsyjna grupa abelowa A rangi dwa jest ACR-grupą niebędącą CR-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $A = A_1 \oplus A_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup A_1 i A_2 grupy A takich, że zachodzi dokładnie jeden z dwóch następujących przypadków:

(i) $\mathfrak{t}(A_i)^2 = \mathfrak{t}(A_i)$, $\mathfrak{t}(A_j)^2 > \mathfrak{t}(A_j)$, $\mathfrak{t}(A_i)\cdot\mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_i)$ dla pewnych $i,j \in \{1,2\}$;
(ii) $\mathfrak{t}(A_i)^2 > \mathfrak{t}(A_i)$, $\mathfrak{t}(A_j)^2 > \mathfrak{t}(A_j)$ oraz $\mathfrak{t}(A_i)\cdot\mathfrak{t}(A_j) = \mathfrak{t}(A_i)$ dla pewnych $i,j \in \{1,2\}$ takich, że $i \neq j$.

Uwaga 2.4. Z punktu (2.) Lematu 2.5 wynika ponadto, że jeśli grupa A spełnia warunek (i) powyższego twierdzenia, to $\mathfrak{t}(A_i) > \mathfrak{t}(A_j)$.

Wniosek 2.4. Istnieje $2^{\aleph_0}$ nieizomorficznych ACR-grup rangi dwa niebędących CR-grupami spełniających warunek (i) Twierdzenia 2.8 oraz $2^{\aleph_0}$ nieizomorficznych ACR-grup rangi dwa niebędących CR-grupami spełniających warunek (ii) tego twierdzenia.

Dowód. Niech $\{P_1, P_2, P_3\}$ będzie trójelementowym podziałem zbioru $\mathbb{P}$ takim, że $|P_i| = \aleph_0$ dla każdego $i \in \{1,2,3\}$ i niech P_0 będzie dowolnym podzbiorem zbioru P_3. Ponadto definiujemy:

$$B = \left\langle \frac{1}{p} : p \in P_0 \cup P_1 \right\rangle, \quad B_1 = \left\langle \frac{1}{q} : q \in P_2 \right\rangle, \quad C = \left[\frac{1}{p} : p \in P_0 \cup P_1 \right]^+,$$

$$C_1 = B_1 + C, \quad A = B \oplus C, \quad A_1 = B \oplus C_1.$$

Wtedy $\mathfrak{t}(B)^2 > \mathfrak{t}(B)$, $\mathfrak{t}(C)^2 = \mathfrak{t}(C)$, $\mathfrak{t}(C) > \mathfrak{t}(B)$, $\mathfrak{t}(C) \cdot \mathfrak{t}(B) = \mathfrak{t}(C)$ oraz $\mathfrak{t}(C_1)^2 > \mathfrak{t}(C_1)$ i $\mathfrak{t}(B) \cdot \mathfrak{t}(C_1) = \mathfrak{t}(C_1)$, więc z Twierdzenia 2.8 wynika, że A i A_1 są ACR-grupami niebędącymi CR-grupami.

Ponieważ $|P_3| = \aleph_0$, to P_3 zawiera dokładnie $2^{\aleph_0}$ niepustych podzbiorów różnych od P_0. Niech $P_0^\dagger$ będzie dowolnym takim podzbiorem i niech:

$$B^\dagger = \left\langle \frac{1}{p} : p \in P_0^\dagger \cup P_1 \right\rangle, \quad C^\dagger = \left[\frac{1}{p} : p \in P_0^\dagger \cup P_1 \right]^+, \quad C_1^\dagger = B_1 + C^\dagger,$$

$$A^\dagger = B^\dagger \oplus C^\dagger, \quad A_1^\dagger = B^\dagger \oplus C_1^\dagger.$$

Z poprzedniej części dowodu wynika, że $A^\dagger$ i $A_1^\dagger$ są ACR-grupami niebędącymi CR-grupami. Ponieważ $P_0^\dagger \neq P_0$ i $P_1 \cap P_3 = \emptyset$, to $C^\dagger \ncong C$ i $C_1^\dagger \ncong C_1$. Na mocy (Fuchs, 1973, Proposition 86.1) otrzymujemy więc, że $A^\dagger \ncong A$ oraz $A_1^\dagger \ncong A_1$.

Uwaga 2.5. Twierdzenie 2.6 opisuje w szczególności wszystkie beztorsyjne grupy abelowe rangi dwa, na których istnieje struktura niełącznego i jednocześnie nieprzemiennego pierścienia. Wniosek 2.4 implikuje więc istnienie $2^{\aleph_0}$ nieizomorficznych grup mających tę własność.

2.6 O strukturze mieszanych $(A)CR$-grup

Lemat 2.9. Jeżeli G jest mieszną $(A)CR$-grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to G_p jest $(A)CR$-grupą.

Dowód. Załóżmy, że G_p nie jest $(A)CR$-grupą. Z (Fuchs, 1970, Theorem 24.5 & Corollary 27.3) i Twierdzenia 2.3 wynika wówczas istnienie takich $m,n \in \mathbb{N}$, że $Z(p^m) \oplus Z(p^n)$ jest składnikiem prostym w G. Stąd oraz na mocy Wniosku 2.2, Stwierdzenia 2.1 i Uwagi 2.2 otrzymujemy, że G nie jest $(A)CR$-grupą.

Twierdzenie 2.9. Niech G będzie mieszaną ACR-grupą i niech $p \in \mathbb{P}(G)$. Wówczas G_p jest składnikiem prostym w G. Jeżeli H jest uzupełnieniem prostym podgrupy G_p w grupie G, to $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH \leq 1$. W szczególności $H = pH$, gdy grupa G_p nie jest ani podzielna, ani zredukowana. Ponadto, jeśli grupa G_p nie jest cykliczna, to $r_0(H) = 1$.

Dowód. Niech D będzie największą podzielną podgrupą w G_p. Z (Fuchs, 1970, Theorem 24.5) wynika wówczas, że $G = D \oplus B$ dla pewnej podgrupy B grupy G. Zatem $G_p = D \oplus B_p$ oraz grupa B_p jest zredukowana. Stąd oraz na mocy Lematu 2.9 i Twierdzenia 2.3 otrzymujemy, że $\exp(B_p) < \infty$. Ponadto B_p jest czystą podgrupą w B, więc B_p jest składnikiem prostym w B na mocy (Fuchs, 1970, Theorem 27.5). Wobec tego G_p jest składnikiem prostym w G. Z Twierdzenia 2.3 wynika, że mamy do rozważenia trzy przypadki:

(i). $G_p = Z(p^n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Jeżeli $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH > 1$, to Lemat 2.2 implikuje istnienie łącznego pierścienia o grupie addytywnej G, który nie jest przemienny, sprzeczność. Zatem $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH \leq 1$.

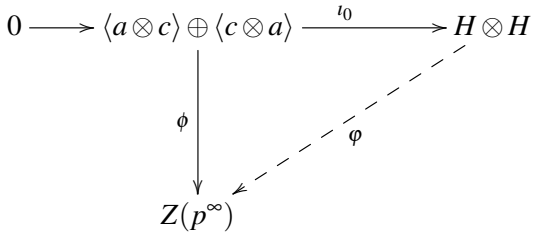
(ii). G_p jest grupą podzielną. Wtedy $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH \leq 1$ na mocy argumentacji identycznej jak w punkcie (i).

(iii). $G_p = Z(p^n) \oplus D$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz D jest nietrywialną podzielną p-grupą. Wtedy grupa G ma składnik prosty izomorficzny z grupą $C = \mathbb{Z}^+_{p^n} \oplus Z(p^\infty) \oplus H$. Stwierdzenie 2.1 implikuje, że C jest ACR-grupą. Załóżmy nie wprost, że $H \neq pH$. Niech $\pi\colon H \to \mathbb{Z}^+_p$ będzie epimorfizmem, zaś $\iota\colon \mathbb{Z}^+_p \to \mathbb{Z}^+_{p^n}$ oraz $\iota\colon \mathbb{Z}^+_{p^n} \to Z(p^\infty)$ – naturalnymi zanurzeniami. Niech ponadto $f = \iota \circ \pi$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że funkcja $*\colon C \times C \to C$ dana za pomocą wzoru:

$$(k_1, d_1, h_1) * (k_2, d_2, h_2) = \Big(0, \iota\big(k_1 \odot_{p^n} f(h_2)\big), 0\Big)$$

dla wszystkich $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+_{p^n}$, $d_1, d_2 \in D$ i $h_1, h_2 \in H$, wprowadza na grupie C strukturę pierścienia. Ponadto $(C * C) * C = C * (C * C) = \{0\}$, więc pierścień $(C, *)$ jest łączny. Z określenia funkcji f wynika istnienie takiego $h \in H$, że $f(h) \neq 0$. Stąd $(1,0,0) * (0,0,h) = \Big(0, \iota\big(1 \odot_{p^n} f(h)\big), 0\Big) \neq (0,0,0)$. Ale $(0,0,h) * (1,0,0) = (0,0,0)$, więc pierścień $(C, *)$ nie jest przemienny. Zatem C nie jest ACR-grupą, sprzeczność. Wobec tego $H = pH$.

Jeżeli grupa G_p nie jest cykliczna, to zachodzi przypadek (ii) lub (iii). W obu tych przypadkach $E = Z(p^\infty) \oplus H$ jest składnikiem prostym w G. Załóżmy nie wprost, że $r_0(H) > 1$. Istnieją wówczas $a, c \in H \setminus T(H)$ takie, że $\langle a \rangle + \langle c \rangle = \langle a \rangle \oplus \langle c \rangle$. Stąd oraz na mocy (Feigelstock, 1974, Theorem 2) i podstawowych własności produktu tensorowego grup abelowych otrzymujemy, że $\langle a \otimes c \rangle \oplus \langle c \otimes a \rangle$ jest wolną podgrupą grupy $H \otimes H$. Weźmy dowolne $d \in Z(p^\infty) \setminus \{0\}$. Wówczas $\langle d \rangle = Z(p^s)$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\langle a \otimes c \rangle / p^s \langle a \otimes c \rangle \cong Z(p^s)$, to istnieje epimorfizm $\psi\colon \langle a \otimes c \rangle \to Z(p^s)$ taki, że $\psi(a \otimes c) = d$. Niech $\vartheta\colon \langle a \otimes c \rangle \oplus \langle c \otimes a \rangle \to \langle a \otimes c \rangle$ będzie naturalnym rzutowaniem i niech $\phi = \psi \circ \vartheta$. Wtedy $\phi \in \operatorname{Hom}\big(\langle a \otimes c \rangle \oplus \langle c \otimes a \rangle, Z(p^\infty)\big)$ oraz $\phi(a \otimes c) = d$ i $\phi(c \otimes a) = 0$. Niech ι_0 będzie restrykcją odwzorowania identycznościowego na $H \otimes H$ do podgrupy $\langle a \otimes c \rangle \oplus \langle c \otimes a \rangle$. Z injektywności grupy $Z(p^\infty)$ (zob. (Fuchs, 1970, Theorem 24.5)) wynika wówczas istnienie takiego homomorfizmu $\varphi\colon H \otimes H \to Z(p^\infty)$, że $\phi = \varphi \circ \iota_0$. Opisaną sytuację ilustruje poniższy diagram:



Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że funkcja $\star\colon E\times E\to E$ dana wzorem:

$$(d_1,h_1)\star(d_2,h_2)=\big(\varphi(h_1\otimes h_2),0\big)$$

dla wszystkich $d_1,d_2\in Z(p^\infty)$ i $h_1,h_2\in H$, wprowadza na grupie E strukturę pierścienia, w którym $(0,a)\star(0,c)=(d,0)$ i $(0,c)\star(0,a)=(0,0)$. Ale $(E\star E)\star E=\{0\}$ oraz $E\star(E\star E)=\{0\}$. Zatem $(E,\star)$ jest pierścieniem łącznym, który nie jest przemienny. Wobec tego E nie jest *ACR*-grupą. Stąd oraz na mocy Stwierdzenia 2.1, również G nie jest *ACR*-grupą, sprzeczność.

Następne twierdzenie charakteryzuje mieszane *CR*-grupy i jest wynikiem komplementarnym względem Twierdzenia 2.9. W celu uproszczenia zapisów, w jego dowodzie stosowana będzie notacja związana z zewnętrznymi sumami prostymi.

Twierdzenie 2.10. Niech G będzie mieszaną *CR*-grupą i niech $p\in\mathbb{P}(G)$. Wówczas $G=G_p\oplus H$ dla pewnej p-podzielnej podgrupy H grupy G. Jeżeli grupa G_p nie jest cykliczna, to $r_0(H)=1$.

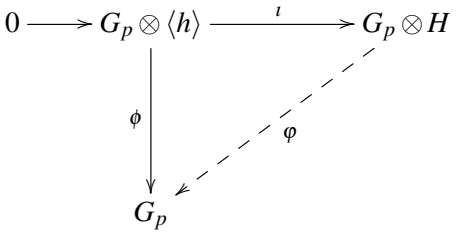
Dowód. Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 2.9 uzasadnia się, że $G=G_p\oplus H$ dla pewnej podgrupy H grupy G. Z Uwagi 2.2 wynika, że G jest *ACR*-grupą, więc Twierdzenie 2.9 implikuje równość $r_0(H)=1$ warunkowaną brakiem cykliczności grupy G_p oraz nierówność $\dim_{\mathbb{Z}_p}H/pH\leq 1$. Załóżmy nie wprost, że $\dim_{\mathbb{Z}_p}H/pH=$ $=1$. Powołując się ponownie na Twierdzenie 2.9 otrzymujemy wówczas, że grupa G_p jest zredukowana albo podzielna.

Jeżeli zachodzi pierwszy przypadek, to ze Stwierdzenia 2.1 i Twierdzenia 2.3 wynika, że bez utraty ogólności możemy przyjąć, iż $G_p=\mathbb{Z}^+_{p^n}$ dla pewnego $n\in\mathbb{N}$. Wtedy $p^{n-1}G_p\cong\mathbb{Z}^+_p$, więc warunek $\dim_{\mathbb{Z}_p}H/pH=1$ implikuje istnienie epimorfizmu $f\colon H\to p^{n-1}G_p$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że odwzorowanie $*\colon G\times G\to G$ dane wzorem:

$$(g_1,h_1)*(g_2,h_2)=\big(g_1\odot_{p^n}f(h_2),0\big),$$

gdzie $g_1,g_2\in G_p$, $h_1,h_2\in H$, wprowadza na grupie G strukturę pierścienia. Ponieważ f jest epimorfizmem, to istnieje $h\in H$ takie, że $f(h)=p^{n-1}$. Stąd $(1,0)*(0,h)=$ $=\big(p^{n-1},0\big)\neq(0,0)$ oraz $(0,h)*(1,0)=(0,0)$. Zatem $(1,0)*(0,h)\neq(0,h)*(1,0)$, skąd wynika, że G nie jest *CR*-grupą, sprzeczność. Zatem zachodzi drugi przypadek,

czyli grupa G_p jest nietrywialną podzielną p-grupą. Weźmy dowolne $h \in H \setminus pH$. Wtedy $o(h) = \infty$, więc $\langle h \rangle \cong \mathbb{Z}^+$ i w konsekwencji istnieje izmorfizm $\phi\colon G_p \otimes \langle h \rangle \to$ $\to G_p$ (por. (Fuchs, 1970, p. 255, (G))). Niech $\iota\colon G_p \otimes \langle h \rangle \to G_p \otimes H$ będzie naturalną injekcją. Ponieważ grupa G_p jest injektywna (por. (Fuchs, 1970, Theorem 24.5)), to istnieje homomorfizm $\varphi\colon G_p \otimes H \to G_p$ spełniający warunek $\phi = \varphi \circ \iota$. Opisaną sytuację przedstawia diagram:



Standardowe sprawdzenie uzasadnia, że funkcja $\star\colon G \times G \to G$ określona za pomocą wzoru:

$$(g_1, h_1) \star (g_2, h_2) = \big(\varphi(g_1 \otimes h_2), 0\big),$$

dla wszystkich $g_1, g_2 \in G_p$ oraz $h_1, h_2 \in H$, wprowadza na grupie G strukturę pierścienia. Oznaczmy ten pierścień przez R i weźmy dowolne $g \in G_p \setminus \{0\}$. Wtedy $(0,h) \star (g,0) = \big(\varphi(0 \otimes 0), 0\big) = (0,0)$ oraz $(g,0) \star (0,h) = \big(\varphi(g \otimes h), 0\big) \neq (0,0)$, gdyż $\varphi(g \otimes h) = \varphi\big(\iota(g \otimes h)\big) = \phi(g \otimes h)$, $\ker(\phi) = \{0\}$ i $g \otimes h \neq 0$ (por. (Fuchs, 1970, p. 255, (G))). Zatem pierścień R nie jest przemienny, skąd wynika, że G nie jest *CR*-grupą, sprzeczność. Wobec tego $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH = 0$, czyli $H = pH$.

Następny rezultat będzie pomocny we wskazaniu przykładu mieszanej *ACR*-grupy niebędącej *CR*-grupą (zob. Przykład 2.1).

Stwierdzenie 2.3. Niech H będzie nil_a-grupą taką, że $H_p = \{0\}$ dla pewnej liczby pierwszej p. Jeżeli istnieje $h_0 \in H$ takie, że $H = \langle h_0 \rangle + pH$, to $A = Z(p) \oplus H$ jest *ACR*-grupą.

Dowód. Niech $\xi = (0, h_0)$. Rozważmy dowolny łączny pierścień R o grupie addytywnej A. Z Lematu 2.4 wynika, że jeśli $R^2 \neq \{0\}$ i $R \ncong \mathbb{Z}_p \times H^0$, to $R = \langle \xi \rangle + \mathfrak{a}(R)$, przy czym $o\left(\xi^2\right) = p$. Weźmy dowolne $a, b \in R$. Wtedy $a = k\xi + x$ oraz $b = l\xi + y$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$ i $x, y \in \mathfrak{a}(R)$. Stąd $ab = (kl)\xi^2 = ba$. Zatem pierścień R jest przemienny w każdym z możliwych przypadków. Wobec tego A jest *ACR*-grupą.

Przykład 2.1. Niech H będzie nietrywialną nil-podgrupą grupy $\mathbb{Q}^+$. Wtedy $H \neq pH$ dla pewnego $p \in \mathbb{P}$. Z (Arnold, 1982, Theorem 1.4) wynika więc, że H spełnia założenia Stwierdzenia 2.3. Zatem $A = Z(p) \oplus H$ jest *ACR*-grupą. Jednak A nie jest *CR*-grupą na mocy Twierdzenia 2.10. W szczególności wynika stąd, że A nie jest *AR*-grupą.

Na mocy Twierdzenia 2.3, Przykładu 2.1 i Wniosku 2.4 otrzymujemy następujący

Wniosek 2.5. Warunki *CR* i *ACR* są równoważne wyłącznie w klasie torsyjnych grup abelowych.

Ponieważ warunek $H \neq pH$ implikuje istnienie epimorfizmu $f\colon H \to Z(p)$, to fakt, że grupa A z Przykładu 2.1 nie jest *CR*-grupą można uzasadnić również w oparciu o następujące

Stwierdzenie 2.4. Niech A i H będą grupami abelowymi. Jeżeli A nie jest nil-grupą oraz A jest obrazem homomorficznym grupy H, to $A \oplus H$ nie jest *CR*-grupą.

Dowód. Niech $f\colon H \to A$ będzie epimorfizmem i niech $R = (A, \cdot)$ będzie dowolnym pierścieniem takim, że $R^2 \neq \{0\}$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że odwzorowanie $*\colon (A \oplus H) \times (A \oplus H) \to (A \oplus H)$ dane wzorem:

$$(a_1, h_1) * (a_2, h_2) = \big(a_1 \cdot f(h_2), 0\big),$$

dla wszystkich $a_1, a_2 \in A$ i $h_1, h_2 \in H$, wprowadza na grupie $A \oplus H$ strukturę pierścienia. Ponieważ $R^2 \neq \{0\}$, to istnieją $a, b \in A$ takie, że $a \cdot b \neq 0$. Weźmy dowolne $h \in f^{-1}\big(\{b\}\big)$. Wtedy $(a,0) * (0,h) \neq (0,0)$ oraz $(0,h) * (a,0) = (0,0)$, więc $A \oplus H$ nie jest *CR*-grupą.

Okazuje się, że twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 2.2 nie jest prawdziwe, tj. istnieją *AR* grupy niebędące *CR*-grupami (zob. Przykład 2.2). Aby się o tym przekonać udowodnimy najpierw następujące

Twierdzenie 2.11. Jeżeli C jest nietrywialną torsyjną *AR*-grupą oraz A beztorsyjną nil-grupą taką, że $A = pA$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(C)$, to $G = C \oplus A$ jest *AR*-grupą.

Dowód. Niech D będzie największą podzielną podgrupą grupy C i niech K będzie zredukowanym składnikiem prostym w C komplementarnym względem D. Wówczas $G = K \oplus D \oplus A$ oraz Twierdzenia 2.1 i 2.3 wraz z podstawowymi własnościami produktu tensorowego grup abelowych i grupy homomorfizmów addytywnych implikują, że $G \otimes G \cong K \oplus (A \otimes A)$ oraz $\mathrm{Mult}(G) \cong \mathrm{Mult}(K) \oplus \mathrm{Hom}\big((K \oplus \oplus A) \otimes (K \oplus A), D\big)$ (por. (Fuchs, 1970, p. 255: (I), (D) & (H)) oraz (Fuchs, 1970, Theorems 43.1 & 43.2); w szczególności $\mathrm{Hom}(A \otimes A, K) = \{0\}$, gdyż grupa $A \otimes A$ jest p-podzielna oraz grupa K_p jest p-zredukowana dla każdego $p \in \mathbb{P}(K)$). Ponadto z Twierdzenia 2.3 wynika, że K jest *CR*-grupą, więc jeśli $* \in \mathrm{Mult}(G)$, to istnieją łączne i przemienne mnożenie pierścieniowe $\diamond\colon K \times K \to K$ oraz homomorfizm $\xi\colon (K \oplus A) \otimes (K \oplus A) \to D$ takie, że:

$$(k_1, d_1, a_1) * (k_2, d_2, a_2) = \Big(k_1 \diamond k_2, \xi\big((k_1, a_1) \otimes (k_2, a_2)\big), 0\Big),$$

dla wszystkich $k_1,k_2 \in K$, $d_1,d_2 \in D$ oraz $a_1,a_2 \in A$ (w celu ujednolicenia zapisu grupę C traktujemy jak zewnętrzną sumę prostą grup K i D). Dla dowolnych $k_1,k_2,k_3 \in K$ oraz $a_1,a_2,a_3 \in A$ otrzymujemy, że $\xi\big((k_1 \diamond k_2,0)\otimes(k_3,a_3)\big) = \xi\big((k_1\diamond \diamond k_2,0)\otimes(k_3,0)\big)$. Ponadto istnieje taki składnik prosty H grupy K, że $k_1,k_2,k_3 \in H$ oraz $H \cong \mathbb{Z}_m^+$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Niech h będzie generatorem grupy cyklicznej H. Dla $i = 1,2,3$ istnieje wówczas $l_i \in \mathbb{Z}$ takie, że $k_i = l_i h$. Stąd $\xi\big((k_1 \diamond k_2,0)\otimes \otimes(k_3,0)\big) = (l_1l_2l_3)\xi\big((h\diamond h,0)\otimes(h,0)\big)$. Z określenia grupy H, Twierdzenia 2.3 i Uwagi 2.1 wynika, że $h\diamond h \in H$, skąd $h\diamond h = lh$ dla pewnego $l \in \mathbb{Z}$. Zatem $\xi\big((k_1\diamond k_2,0)\otimes(k_3,a_3)\big) = (ll_1l_2l_3)\xi\big((h,0)\otimes(h,0)\big)$. Analogicznie, $\xi\big((k_1,a_1)\otimes(k_2\diamond \diamond k_3,0)\big) = (ll_1l_2l_3)\xi\big((h,0)\otimes(h,0)\big)$. Wobec tego pierścień $(G,*)$ jest łączny. Zatem G jest AR-grupą.

Przykład 2.2. Niech $A = \left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle + \left[\frac{1}{2}\right]^+$, niech $H = A \oplus A$ i niech $G = Z(2^\infty)\oplus \oplus H$. Wtedy H jest beztorsyjną grupą abelową rangi dwa. Ponadto, z (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.5 & Theorem 4.8) i (Andruszkiewicz i Woronowicz, 2016a, Proposition 2.10) wynika, że H jest 2-podzielną nil-grupą. Stąd oraz na mocy Twierdzeń 2.10 i 2.11 otrzymujemy, że G jest AR-grupą niebędącą CR-grupą. W szczególności G nie jest ACR-grupą.

Bezpośrednią konsekwencją Twierdzenia 2.2 oraz Przykładu 2.2 jest następujące

Twierdzenie 2.12. Klasa CR-grup jest właściwą podklasą klasy AR-grup.

Ponadto z Przykładów 2.2 i 2.1 wynika natychmiast poniższy

Wniosek 2.6. Istnieją mieszane AR-grupy niebędące ACR-grupami oraz istnieją mieszane ACR-grupy niebędące AR-grupami.

Stwierdzenie 2.5. Jeżeli C jest nietrywialną torsyjną CR-grupą oraz A jest podgrupą grupy $\mathbb{Q}^+$ taką, że $A = pA$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(C)$, to $G = C \oplus A$ jest CR-grupą.

Dowód. Niech D będzie największą podzielną podgrupą grupy C i niech K będzie zredukowanym składnikiem prostym w C komplementarnym względem D. Załóżmy najpierw, że A jest nil-grupą. Zachowując wszystkie oznaczenia z dowodu Twierdzenia 2.11 otrzymujemy, że $\xi\big((k_1,a_1)\otimes(k_2,a_2)\big) = \xi\big((k_1,0)\otimes(k_2,0)\big) + \xi\big((0,a_1)\otimes \otimes(0,a_2)\big)$. Ponieważ $a_1,a_2 \in \mathbb{Q}$, to $(0,a_1)\otimes(0,a_2) = (0,a_2)\otimes(0,a_1)$. Ponadto istnieje taki składnik prosty H grupy K, że $k_1,k_2 \in H$ i $H \cong \mathbb{Z}_m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$. Istnieją więc $h \in H$ oraz $l_1,l_2 \in \mathbb{Z}$ takie, że $H = \langle h\rangle$ oraz $k_1 = l_1h$ i $k_2 = l_2h$. Stąd $\xi\big((k_1,0)\otimes(k_2,0)\big) = (l_1l_2)\xi\big((h,0)\otimes(h,0)\big) = (l_2l_1)\xi\big((h,0)\otimes(h,0)\big) = \xi\big((k_1,0)\otimes \otimes(k_2,0)\big)$. Zatem pierścień $(G,*)$, gdzie $*$ jest mnożeniem opisanym w dowodzie Twierdzenia 2.11, jest przemienny. Wobec tego G jest CR-grupą.

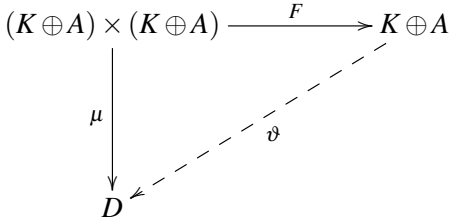
Przypuśćmy teraz, że A nie jest nil-grupą. Bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $1 \in A$ (por. (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2)). Mamy do rozważenia trzy przypadki:

(i) $C = K$. Wtedy teza jest bezpośrednią konsekwencją Lematu 2.1 oraz (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2).

(ii). $C = K \oplus D$, gdzie $K \neq \{0\}$ i $D \neq \{0\}$. Wówczas Twierdzenia 2.3 i (M. Woronowicz, 2016, Theorem 4.8) wraz (Fuchs, 1973, Proposition 85.3) i (Fuchs, 1973, Theorem 85.1) oraz podstawowymi własnościami produktu tensorowego grup abelowych i grupy homomorfizmów addytywnych implikują, że $\mathrm{Mult}(G) \cong \mathrm{Mult}(K) \oplus \oplus \mathrm{Hom}(K \oplus A, D) \oplus \mathrm{Mult}(A)$ ($\mathrm{Hom}(A,K) = \{0\}$, gdyż $A = pA$ oraz grupa K_p jest p-zredukowana dla każdego $p \in \mathbb{P}(K)$). W szczególności istnieje izomorfizm $f\colon (K \oplus \oplus A) \otimes (K \oplus A) \to K \oplus A$, więc $\mathrm{Hom}(K \oplus A, D) \cong \mathrm{Hom}\big((K \oplus A) \otimes (K \oplus A), D\big)$. Ponadto ze Stwierdzenia 2.1 wynika, że K jest CR-grupą. Stąd oraz na mocy (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) otrzymujemy, że jeśli $* \in \mathrm{Mult}(G)$, to istnieją łączne i przemienne mnożenie pierścieniowe $\diamond\colon K \times K \to K$, dwuliniowa funkcja $\mu\colon (K \oplus A) \times (K \oplus A) \to D$ oraz $c_4 \in A$ takie, że:

$$(k_1, d_1, a_1) * (k_2, d_2, a_2) = \Big(k_1 \diamond k_2, \mu\big((k_1, a_1), (k_2, a_2)\big), a_1 \cdot c_4 \cdot a_2\Big),$$

dla wszystkich $k_1, k_2 \in K$, $d_1, d_2 \in D$ i $a_1, a_2 \in A$ (w celu zachowania przejrzystości zapisu, grupę C traktujemy jak zewnętrzną sumę prostą grup K i D). Ponadto istnieje określone jednoznacznie $\varphi \in \mathrm{Hom}\big((K \oplus A) \otimes (K \oplus A), D\big)$ takie, że $\mu = \varphi \circ e$, gdzie $e\colon (K \oplus A) \times (K \oplus A) \to (K \oplus A) \otimes (K \oplus A)$ jest funkcją tensorową (por. (Fuchs, 1970, Theorem 59.1)). Stąd, dla $F = f \circ e$ i $\vartheta = \varphi \circ f^{-1}$ otrzymujemy, że $\mu = \vartheta \circ F$. Opisaną sytuację ilustruje poniższy diagram:



W szczególności wynika stąd, że $F \in \mathrm{Mult}(K \oplus A)$. Powołując się na Twierdzenie 2.3, Lemat 2.1 oraz (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) uzyskujemy, iż istnieją przemienne mnożenie pierścieniowe $\star\colon K \times K \to K$ oraz $c_3 \in A$ takie, że:

$$F\big((k_1, a_1), (k_2, a_2)\big) = (k_1 \star k_2, a_1 \cdot c_3 \cdot a_2),$$

dla wszystkich $k_1, k_2 \in K$ oraz $a_1, a_2 \in A$. Stąd, dla dowolnych $k_1, k_2 \in K$, $d_1, d_2 \in D$ i $a_1, a_2 \in A$ otrzymujemy:

$$(k_1, d_1, a_1) * (k_2, d_2, a_2) = \big(k_1 \diamond k_2, \vartheta(k_1 \star k_2, a_1 \cdot c_3 \cdot a_2), a_1 \cdot c_4 \cdot a_2\big).$$

Przemienność mnożenia $*$ wynika więc z przemienności mnożeń $\diamond$, $\star$ oraz $\cdot$. Zatem każdy pierścień $(G, *)$ jest przemienny, skąd wynika, że G jest CR-grupą.

(iii). $C = D$. Wtedy dowód przebiega analogicznie jak rozumowanie przedstawione w punkcie (ii).

Uwaga 2.6. Z Przykładu 2.1 i Stwierdzenia 2.5 wynika, że każdy spośród przypadków (i) – (iii) analizowanych w dowodzie Twierdzenia 2.9 jest realizowany przez pewną mieszaną *ACR*-grupę.

Uwaga 2.7. Jeżeli A jest mieszaną *ACR*-grupą taką, że $\mathbb{P}(A) = \{p\}$ i grupa A_p nie jest cykliczna, to z Twierdzeń 2.9 i 2.3 wynika, że $A = Z(p^n) \oplus D \oplus H$ albo $A = D \oplus H$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, D jest nietrywialną podzielną p-grupą, zaś H jest beztorsyjną grupą abelową rangi jeden. Ponadto, jeżeli zachodzi pierwsza ewentualność, to $H = pH$ na mocy Twierdzenia 2.9. Zatem wszystkie mieszane *ACR*-grupy A takie, że $\mathbb{P}(A) = \{p\}$ i grupa A_p nie jest ani podzielna, ani zredukowana są opisane w Stwierdzeniu 2.5. W szczególności są one *CR*-grupami.

2.7 *E*-grupy i *CRM*-grupy jako szczególne przypadki *CR*-grup

Definicja 2.2. Grupę abelową A nazywamy *CRM*-grupą, jeśli istnieje przemienny i łączny pierścień $R = (A, \circ)$ taki, że każde mnożenie pierścieniowe $*$ na A, różne od $\circ$, jest stowarzyszone z pewnym elementem c grupy A w taki sposób, że dla wszystkich $a, b \in A$ zachodzi $a * b = a \circ c \circ b$.

Uwaga 2.8. Z dowodu (Schultz, 1973, Lemma 8) wynika, że każda grupa abelowa będąca grupą addytywną przemiennego unitarnego pierścienia R spełniającego warunek $R \cong \mathrm{E}(R^+)$ jest *CRM*-grupą. Pierścienie R o takich własnościach określa się mianem E-pierścieni, zaś ich grupy addytywne nazywa się E-grupami (zob. (Schultz, 1973, p. 65, Definition)). Pojęcie E-pierścienia zostało wprowadzone w związku z Problemem 45 postawionym przez L. Fuchsa w Fuchs (1958). Badania takich pierścieni były kontynuowane m. in. w pracach Dugas, Mader i Vinsonhaler (1987); Göbel, Herden i Shelah (2011). E-pierścienie mają zastosowanie, między innymi w topologii algebraicznej (zob. (Göbel i in., 2011, Introduction)).

Ponieważ dla każdej nietrywialnej nil-grupy A zachodzi $A^0 \ncong \mathrm{E}(A)$, to istnieją *CRM*-grupy niebędące E-grupami.

Bezpośrednią konsekwencją obserwacji poczynionych w Uwadze 2.8 jest następujący

Wniosek 2.7. Klasa E-grup jest właściwą podklasą klasy *CRM*-grup.

Dwa następne lematy będą pomocne w klasyfikacji torsyjnych *CRM*-grup.

Lemat 2.10. Niech A i B będą grupami abelowymi takimi, że $A = T(A)$, $\exp(A_p) < \infty$, $B = pB$ oraz $B_p = \{0\}$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(A)$. Jeżeli $\left|\mathbb{P}(A)\right| = \infty$, to $G = A \oplus B$ nie jest *CRM*-grupą.

Dowód. Wystarczy wykazać, że nie istnieje łączny pierścień $P = (G, \circ)$ taki, że dla każdego $* \in \mathrm{Mult}(G) \setminus \{\circ\}$ istnieje takie $c \in G$, że dla wszystkich $a, b \in G$ zachodzi $a * b = a \circ c \circ b$. Załóżmy nie wprost, że taki pierścień istnieje. Z Lematu 2.1 wynika, że $P = R \times H$ dla pewnych pierścieni R i H takich, że $R^+ = A$ oraz $H^+ = B$. Dla każdego pierścienia U o grupie addytywnej A definiujemy $\mathbb{P}^0_U = \big\{p \in \mathbb{P}(A) \colon U^2_p = \{0\}\big\}$ i $\mathbb{P}^1_U = \mathbb{P}(A) \setminus \mathbb{P}^0_U$.

Przypuśćmy najpierw, że $\big|\mathbb{P}^1_R\big| = \infty$. Niech $*$ oznacza mnożenie pierścienia $S \times H$, gdzie S jest pierścieniem takim, że $S^+ = A$, $\mathbb{P}^1_S \subsetneq \mathbb{P}^1_R$, $\big|\mathbb{P}^1_S\big| = \infty$ oraz $*_{|A_p \times A_p} = \circ_{|A_p \times A_p}$ dla każdego $p \in \mathbb{P}^1_S$. Niech ponadto $c_1 = \pi(c)$, gdzie π jest naturalną projekcją grupy G na grupę A. Wtedy $* \neq \circ$ oraz warunek $a * b = a \circ c \circ b$ implikuje, że $\big|\operatorname{supp}(c_1)\big| = \infty$, sprzeczność.

Załóżmy teraz, że $\big|\mathbb{P}^1_R\big| < \infty$. Wtedy $\mathbb{P}^0_R \neq \emptyset$, bo $\big|\mathbb{P}(A)\big| = \infty$. Weźmy dowolne $p \in \mathbb{P}^0_R$. Ponieważ grupa A_p jest zredukowana, to z (Feigelstock, 1983, Theorem 2.1.1) wynika istnienie takiego pierścienia N, że $N^+ = A$ i $p \in \mathbb{P}^1_N$. Niech teraz $*$ oznacza mnożenie pierścienia $N \times H$. Istnieją wówczas $x, y \in G$ takie, że p-ta współrzędna elementu $x * y$ jest niezerowa. Ale $x * y = x \circ c \circ y$ oraz $p \in \mathbb{P}^0_R$, więc p-ta współrzędna elementu $x * y$ jest zerowa, sprzeczność.

Lemat 2.11. Niech p będzie liczbą pierwszą, niech n będzie liczbą naturalną i niech D będzie nietrywialną podzielną p-grupą. Wtedy $A = \mathbb{Z}^+_{p^n} \oplus D$ nie jest *CRM*-grupą.

Dowód. Ponieważ $\{0\} \oplus D$ anihiluje dowolny pierścień o grupie addytywnej A, to każde mnożenie pierścieniowe $*$ określone na grupie A jest całkowicie zdeterminowane przez wartość $(1,0) * (1,0)$. Ponadto z (Andruszkiewicz i Woronowicz, 2016a, Lemma 2.1) wynika, że $\Box A \cong \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}^+_{p^n}$, przy czym $|I| = 1 + \dim_{\mathbb{Z}_p} D[p]$. Jeśli więc A jest *CRM*-grupą, to istnieje łączny pierścień $R = (A, \circ)$ taki, że $(1,0) \circ (1,0) = (k,x)$ dla pewnych $k \in \mathbb{Z}^+_{p^n}$ i $x \in \bigoplus_{i \in J} Z(p^n) \subseteq D$, przy czym $|J| = |I| - 1$, oraz dla każdego $* \in \mathrm{Mult}(A) \setminus \{\circ\}$ istnieje $c \in A$ takie, że dla wszystkich $a, b \in A$ zachodzi $a * b = a \circ c \circ b$. Oczywiście każde takie c jest postaci $c = (c_1, c_2)$, gdzie $c_1 \in \mathbb{Z}_{p^n}$ i $c_2 \in D$, oraz $(0, c_2)$ i $(0, x)$ należą do anihilatora dowolnego pierścienia o grupie addytywnej A.

Symbolem $*$ oznaczmy najpierw mnożenie pierścienia $\mathbb{Z}_{p^n} \times D^0$. Ponieważ $|I| \geq 2$, to $R \neq \mathbb{Z}_{p^n} \times D^0$. Zatem $(1,0) = (1,0) * (1,0) = (1,0) \circ (c_1, c_2) \circ (1,0) = (1,0) \circ (c_1, 0) \circ (1,0) = c_1\big((1,0) \circ (1,0) \circ (1,0)\big) = c_1\big((k,x) \circ (1,0)\big) = c_1\big((k,0) \circ (1,0)\big) = c_1 k\big((1,0) \circ (1,0)\big) = c_1 k(k,x)$, skąd $c_1 k^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$ oraz $(c_1 k)x = 0$. Wobec tego $c_1, k \in \mathbb{Z}^*_{p^n}$ i $o(x) \mid c_1 k$. Stąd $p \nmid o(x)$. Ale x jest elementem p-grupy D, więc $o(x) = 1$ i w konsekwencji $x = 0$.

Niech $\iota \colon \mathbb{Z}^+_{p^n} \to D$ będzie dowolnym monomorfizmem i niech $* \colon A \times A \to A$ oznacza teraz funkcję daną wzorem:

$$(k_1, d_1) * (k_2, d_2) = \big(0, \iota(k_1 \odot_{p^n} k_2)\big)$$

dla wszystkich $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+_{p^n}$ i $d_1, d_2 \in D$. Wtedy $* \in \mathrm{Mult}(A)$ oraz $(A*A)*A = A*$ $*(A*A) = \{0\}$. Ponadto $\mathbb{Z}_{p^n} \times D^0$ jest pierścieniem o grupie addytywnej A, więc $R \neq (A,*)$. Stąd oraz na mocy uzasadnionej wcześniej równości $x = 0$ i rachunków analogicznych jak w poprzednim akapicie otrzymujemy, że dla $d = \iota(1)$ zachodzi i $(0,d) = (1,0)*(1,0) = (1,0) \circ (c_1,c_2) \circ (1,0) = c_1 k^2 (1,0)$. Ale $d \neq 0$, sprzeczność. Ostatecznie uzyskujemy więc, że A nie jest *CRM*-grupą.

Możemy teraz udowodnić twierdzenie klasyfikacyjne dla torsyjnych *CRM*-grup.

Twierdzenie 2.13. Torsyjna grupa abelowa A jest *CRM*-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $A = Z(m) \oplus D$, gdzie D jest torsyjną grupą podzielną taką, że $D_p = \{0\}$ dla każdego dzielnika pierwszego p liczby naturalnej m.

Dowód. Załóżmy, że A jest *CRM*-grupą. Jeżeli $A = \{0\}$, to wystarczy przyjąć $m = 1$ i $D = \{0\}$. Niech dalej $A \neq \{0\}$. Weźmy dowolne $p \in \mathbb{P}(A)$. Niech $D_{(p)}$ będzie największą podzielną podgrupą w A_p. Wtedy $A_p = D_{(p)} \oplus B$ dla pewnej zredukowanej podgrupy B grupy A_p. Jeżeli grupa B nie jest cykliczna, to z (Fuchs, 1970, Corollary 27.3) wynika, że $Z(p^n) \oplus Z(p^r)$ jest składnikiem prostym w A_p dla pewnych $n, r \in \mathbb{N}$. Stąd oraz na mocy Wniosku 2.2 i Twierdzenia 2.3 otrzymujemy, że A_p nie jest *AR*-grupą. Powołując się teraz na Stwierdzenie 2.1 uzyskujemy więc, że A nie jest *AR*-grupą. Zatem A nie jest *CRM*-grupą, sprzeczność. Wobec tego $B = Z(p^s)$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}_0$. Z Lematu 2.11 wynika więc, że $D_{(p)} = \{0\}$ albo $s = 0$. Dalej, niech $P_1 = \{p \in \mathbb{P}(A) \colon A_p = Z(p^{n_p}) \text{ dla pewnego } n_p \in \mathbb{N}\}$ i niech $P_2 = \mathbb{P}(A) \setminus P_1$. Wtedy $A = \left(\bigoplus_{p \in P_1} Z(p^{n_p})\right) \oplus D$, gdzie $D = \bigoplus_{p \in P_2} A_p$ jest grupą podzielną. Stąd oraz na mocy Lematu 2.10 uzyskujemy, że $|P_1| < \infty$. Zatem $A = Z(m) \oplus D$, przy czym $m = \prod_{p \in P_1} p^{n_p}$ oraz $D_p = \{0\}$ dla każdej liczby pierwszej p dzielącej m.

Na odwrót. Jeżeli $m = 1$, to grupa A jest podzielna. Wówczas A jest nil-grupą na mocy (Feigelstock, 1983, Theorem 2.1.1), skąd wynika, że A jest *CRM*-grupą. Załóżmy teraz, że $m > 1$. Rozważmy dowolny pierścień R o grupie addytywnej A. Z Uwagi 2.1 i (Feigelstock, 1983, Theorem 2.1.1) wynika wtedy, że $R \cong S \times D^0$, gdzie S jest pewnym pierścieniem o grupie addytywnej $\mathbb{Z}^+_m$. Niech $*$ oznacza mnożenie pierścienia S i niech $c = 1*1$. Wtedy $c \in \mathbb{Z}^+_m$ oraz dla dowolnych $k, l \in \mathbb{Z}^+_m$ otrzymujemy, że $k*l = (kl)(1*1) = (kl)c = (k \odot_m l) \odot_m c = k \odot_m c \odot_m l$. Zatem $S^+ \oplus D$ jest *CRM*-grupą, przy czym rolę mnożenia $\circ$ z Definicji 2.2 odgrywa mnożenie pierścienia $\mathbb{Z}_m \times D^0$. Ponadto $A \cong S^+ \oplus D$, więc A jest *CRM*-grupą.

Bezpośrednią konsekwencją Twierdzeń 2.3 i 2.13 jest następujący

Wniosek 2.8. Torsyjne *CRM*-grupy tworzą właściwą podklasę w klasie torsyjnych *CR*-grup.

Uwaga 2.9. Z (Fuchs, 1973, p. 216, Example 4), (M. Woronowicz, 2016, Theorem 4.8), Wniosku 2.7 i faktu, że każda nil-grupa jest *CRM*-grupą wynika, że każda beztorsyjna grupa abelowa rangi jeden jest *CRM*-grupą. Ponieważ każda beztorsyjna

grupa abelowa rangi jeden zanurza się w $\mathbb{Q}^+$, to opis podgrup grupy $\mathbb{Q}^+$, które nie są nil-grupami przeprowadzony w (M. Woronowicz (2016)) pozwala uzyskać ten rezultat w przejrzysty i bardzo elementarny sposób. Istotnie, z (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) wynika, że wystarczy rozważyć sytuację, w której A jest podgrupą grupy $\mathbb{Q}^+$ zawierającą liczbę 1. Jeżeli A nie jest nil-grupą, to z (M. Woronowicz, 2016, Theorem 4.8) wynika, że bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $A = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle + S^+$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i pewnego unitarnego podpierścienia S ciała $\mathbb{Q}$. Wtedy $(A, *)$, gdzie $x * y = x \cdot n \cdot y$ dla wszystkich $x, y \in A$, jest łącznym pierścieniem przemiennym. Rozważmy dowolne $\circledast \in \mathrm{Mult}(A)$ takie, że $\circledast \neq *$. Z (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) wynika wówczas istnienie takiego $a \in A$, że $x \circledast y = x \cdot a \cdot y$ dla wszystkich $x, y \in A$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że dla $c = \frac{1}{n} \circledast \frac{1}{n}$ oraz wszystkich $x, y \in A$ zachodzi $x \circledast y = x * c * y$. Ponadto $c \in A$, więc rolę mnożenia $\circ$ opisanego w Definicji 2.2 spełnia $*$. Ostatecznie otrzymujemy więc, że A jest *CRM*-grupą.

Przykład 2.3. Oznaczmy $A_1 = \left[\frac{1}{2}\right]^+$, $A_2 = \left[\frac{1}{3}\right]^+$ oraz $A = A_1 \oplus A_2$. Niech $\circ$ oznacza mnożenie pierścienia $\left[\frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{1}{3}\right]$, niech $* \in \mathrm{Mult}(A)$ i niech $R = (A, *)$. Niech ponadto $x = (1,0)$, $y = (0,1)$ oraz $z = x + y$. Wtedy $\mathfrak{t}(x) = \mathfrak{t}(A_1)$, $\mathfrak{t}(y) = \mathfrak{t}(A_2)$ i $\mathfrak{t}(z) = \mathfrak{t}(\mathbb{Z}^+)$, skąd $\mathfrak{t}(z) < \mathfrak{t}(x)$, $\mathfrak{t}(z) < \mathfrak{t}(y)$ i $\mathfrak{t}(x) \neq \mathfrak{t}(y)$. Zatem $\left|\mathscr{T}[A]\right| \geq 3$. Ponadto $\square A \neq \{0\}$, więc z (Feigelstock, 1983, Theorem 2.1.7) wynika, że $\left|\mathscr{T}[A]\right| = 3$. Stąd oraz na mocy (Aghdam, 2006, Theorem 2) istnieją $a, b \in \mathbb{Q}$ takie, że $x * x = ax$, $x * y = y * x = 0$ i $y * y = by$. Zatem istnieją takie pierścienie R_1 i R_2, że $R_1^+ = A_1$, $R_2^+ = A_2$ oraz $R = R_1 \times R_2$. Ponadto A_1 i A_2 są *CRM*-grupami na mocy Uwagi 2.9. Istnieją więc $c_1 \in A_1$ oraz $c_2 \in A_2$ takie, że dla wszystkich $a_1, b_1 \in A_1$ oraz $a_2, b_2 \in A_2$ zachodzi $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 \cdot c_1 \cdot b_1, a_2 \cdot c_2 \cdot b_2) = (a_1, a_2) \circ (c_1, c_2) \circ (b_1, b_2)$. Zatem A jest *CRM*-grupą.

Następne rezultaty wiążą się z własnościami pierścieni filialnych i ich grup addytywnych badanych od lat 80-tych XX wieku, między innymi przez G. Ehrlich, E. R. Puczyłowskiego, R. R. Andruszkiewicza, K. Pryszczepko i M. Woronowicza (zob. np. Andruszkiewicz (2003); Andruszkiewicz, Mączyński i Pryszczepko (2016); Andruszkiewicz i Puczyłowski (1988); Andruszkiewicz i Woronowicz (2014); Ehrlich (1983/1984); M. Woronowicz (2019)). Przypomnijmy więc, że łączny pierścień R nazywamy filialnym, gdy każdy ideał dowolnego ideału pierścienia R jest ideałem w R.

Twierdzenie 2.14. Każda filialna dziedzina całkowitości R charakterystyki zero taka, że $\Pi(R) \neq \emptyset$ jest E-pierścieniem. W szczególności, R^+ jest *CRM*-grupą.

Dowód. Rozważmy dowolne $f \in \mathrm{E}(R^+)$, $p \in \Pi(R)$, $x \in R$ i $n \in \mathbb{N}$. Z (Andruszkiewicz, 2003, Theorem 3.1) wynika wówczas, że $x = k_n 1 + p^n x_n$ dla pewnych $k_n \in \mathbb{Z}$ oraz $x_n \in R$. Niech $a = f(1)$. Wtedy $f(x) = k_n a + p^n f(x_n)$ oraz $ax = k_n a + p^n a x_n$, skąd $f(x) - ax \in p^n R$. Ponadto n było wybrane dowolnie, więc $f(x) - ax \in p^\infty R$. Ale $p^\infty R = \{0\}$ na mocy (Andruszkiewicz, 2003, Propositions 3.4 & 3.6), skąd $f(x) = ax$.

Wobec tego funkcja φ przyporządkowująca dowolnemu elementowi $y \in R$ endomorfizm l_y grupy R^+ dany wzorem $l_y(r) = yr$ dla każdego $r \in R^+$, jest surjektywna. Standardowe sprawdzenie pokazuje, że jest ona również zanurzeniem pierścieni. Zatem $R \cong \mathrm{E}(R^+)$. Wobec tego R jest E-pierścieniem, skąd R^+ jest E-grupą. Na mocy Wniosku 2.7 otrzymujemy więc, że R^+ jest CRM-grupą.

Uwaga 2.10. Zauważmy, że fakt, iż grupa addytywna filialnej dziedziny całkowitości R charakterystyki zero takiej, że $\Pi(R) \neq \emptyset$ jest CRM-grupą można uzasadnić odwołując się również do (Andruszkiewicz, 2003, Theorem 3.1, Propositions 3.4 & 3.6). Istotnie, niech $A = R^+$ i niech standardowa kropka oznacza mnożenie pierścienia R. Weźmy dowolne $p \in \Pi(R)$, $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, b \in A$. Z (Andruszkiewicz, 2003, Theorem 3.1) przez prostą indukcję wynika, że $A = \langle 1 \rangle + p^s A$ dla każdego $s \in \mathbb{N}$. Stąd $a = k_n 1 + p^n a_n$ oraz $b = l_n 1 + p^n b_n$ dla pewnych $k_n, l_n \in \mathbb{Z}$ i $a_n, b_n \in A$. Zatem $a \cdot b = (k_n l_n)1 + p^n\big(k_n b_n + l_n a_n + p^n(a_n \cdot b_n)\big)$. Rozważmy dowolne $* \in \mathrm{Mult}(A)$. Wtedy $a * b = (k_n l_n)(1 * 1) + p^n\big(k_n(1 * b_n) + l_n(a_n * 1) + p^n(a_n * b_n)\big)$. Niech $c = 1 * 1$ i niech $c_n = k_n(1 * b_n) + l_n(a_n * 1) + p^n(a_n * b_n)$. Wówczas $a * b = (k_n l_n)c + p^n c_n$ oraz $a \cdot c \cdot b = (a \cdot b) \cdot c = (k_n l_n)c + p^n\big(k_n(b_n \cdot c) + l_n(a_n \cdot c) + p^n(a_n \cdot b_n \cdot c)\big)$. Zatem $a * b - a \cdot c \cdot b \in p^n A$. Stąd oraz na mocy dowolności wyboru liczby naturalnej n, otrzymujemy, że $a * b - a \cdot c \cdot b \in p^\infty A$. Wobec tego $a * b = a \cdot c \cdot b$ na mocy (Andruszkiewicz, 2003, Propositions 3.4 & 3.6). Ponadto $c \in A$, więc A jest CRM-grupą.

Wniosek 2.9. Niech $A = \bigoplus_{p \in P} Z(p^{n_p})$, gdzie P jest niepustym podzbiorem w $\mathbb{P}$ oraz $n_p \in \mathbb{N}$ dla każdego $p \in P$, i niech R będzie filialną dziedziną całkowitości charakterystyki zero taką, że $\Pi(R) \neq \emptyset$ i $\Pi(R) \cap P = \emptyset$. Niech ponadto $B = R^+$ albo $B = \mathbb{Q}^+$. Wówczas $G = A \oplus B$ jest CR-grupą. Ponadto G jest CRM-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $|P| < \infty$.

Dowód. Rozważmy dowolny pierścień $S = (G, *)$. Z Lematu 2.1 wynika wówczas istnienie pierścieni S_1 oraz S_2 takich, że $S_1^+ = A$, $S_2^+ = B$ oraz $S = S_1 \times S_2$. Pierścień S_1 jest przemienny na mocy Twierdzenia 2.3. Przemienność pierścienia S_2 jest natomiast konsekwencją Twierdzenia 2.14, gdy $B = R^+$, albo (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2), gdy $B = \mathbb{Q}^+$. Zatem pierścień S jest przemienny, skąd wynika, że G jest CR-grupą. Jeżeli $|P| = \infty$, to A nie jest CRM-grupą na mocy Lematu 2.10. Jeśli natomiast $|P| < \infty$, to istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $A = Z(m)$. Zatem A jest CRM-grupą i bez utraty ogólności możemy przyjąć, że $A = \mathbb{Z}_m^+$. Ponadto B jest CRM-grupą – dla $B = R^+$ fakt ten wynika z Twierdzenia 2.14, zaś dla $B = \mathbb{Q}^+$ jest on konsekwencją Uwagi 2.9. Jeżeli $B = R^+$, to definiujemy $U = R$. Jeśli natomiast $B = \mathbb{Q}^+$, to określamy $U = \mathbb{Q}$. Niech $\circ$ oznacza mnożenie pierścienia $\mathbb{Z}_m \times U$, zaś standardowa kropka – mnożenie pierścienia U. Z Uwagi 2.10 i (M. Woronowicz, 2016, Remark 4.2) wynika wówczas istnienie takich $c_1 \in A$ i $c_2 \in B$, że dla wszystkich $a_1, a_2 \in A$ oraz $b_1, b_2 \in B$ zachodzi $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \odot_m c_1 \odot_m a_2, b_1 \cdot c_2 \cdot b_2) =$ $= (a_1, b_1) \circ (c_1, c_2) \circ (a_2, b_2)$. Zatem G jest CRM-grupą.

Podsumowanie

Kończąc rozważania na temat struktury $(A)CR$-grup podsumujemy krótko stan obecnej wiedzy na ich temat. Znana jest pełna klasyfikacja torsyjnych *CR*-grup, będąca jednocześnie klasyfikacją torsyjnych *ACR*-grup i *AR*-grup (zob. Twierdzenie 2.3). W świetle Twierdzenia (Fuchs, 1973, Theorem 85.1), sklasyfikowane z dokładnością do izomorfizmu są także beztorsyjne całkowicie rozkładalne *CR*-grupy (zob. Twierdzenie 2.4). Istnieją również dosyć szczegółowe opisy beztorsyjnych *CR*- i *ACR*--grup rangi dwa pozwalające sklasyfikować z dokładnością do izomorfizmu wszystkie beztorsyjne grupy abelowe rangi dwa, które nie są *CR*-grupami oraz wszystkie beztorsyjne grupy abelowe rangi dwa, które nie są *ACR*-grupami (zob. Twierdzenia 2.6 oraz 2.7 i por. (Fuchs, 1973, Theorem 85.1)). Dwa ostatnie wyniki bezpośrednio przyczyniły się do podania pełnej klasyfikacji beztorsyjnych *ACR*-grup rangi dwa niebędących *CR*-grupami (zob. Twierdzenie 2.8 i por. (Fuchs, 1973, Theorem 85.1)). Ważnymi przykładami beztorsyjnych *CR*-grup są grupy addytywne filialnych dziedzin całkowitości charakterystyki zero (zob. Twierdzenie 2.14 i por. Andruszkiewicz (2003) oraz M. Woronowicz (2019)). Wyniki dotyczące mieszanych $(A)CR$-grup mają charakter cząstkowy. Niemniej, Twierdzenia 2.9 i 2.10 opisujące ich strukturę są na tyle precyzyjne, że wraz z dodatkowymi, często bardzo technicznymi rezultatami zamieszczonymi w tym rozdziale, pozwalają konstruować mieszane $(A)CR$-grupy (zob. Uwaga 2.6 i Wniosek 2.9). Znane są także niemal wszystkie zależności między warunkami *CR*, *ACR* oraz *AR* rozważanymi w klasach torsyjnych, beztorsyjnych i mieszanych grup abelowych (zob. Uwaga 2.2, Twierdzenie 2.12 oraz Wnioski 2.3, 2.5 i 2.6).

Bibliografia

Aghdam, A. M. (1987). Square subgroup of an abelian group. Acta. Sci. Math., 51, 343–348.

Aghdam, A. M. (2006). Rings on indecomposable torsion free groups of rank two. Int. Math. Forum, 1, 141–146.

Aghdam, A. M., i Najafizadeh, A. (2008). On torsion free rings with indecomposable additive group of rank two. SEA Bull. Math., 32, 199–208.

Andruszkiewicz, R. R. (2003). The classification of integral domains in which the relation of being an ideal is transitive. Comm. Algebra., 31, 2067–2093.

Andruszkiewicz, R. R., Mączyński, M. i Pryszczepko, K. (2016). Imbedding a filial ring with identity. Comm. Algebra, 44, 2067–2074.

Andruszkiewicz, R. R., i Puczyłowski, E. R. (1988). On filial rings. Portugal. Math., 45, 139–149.

Andruszkiewicz, R. R., i Woronowicz, M. (2014). On ti-groups. W: A. Gomolińska

i inni. (red.), Recent results in pure and applied mathematics, podlasie 2014 Bialystok University of Technology Publishing Office, 33–41.
Andruszkiewicz, R. R., i Woronowicz, M. (2016a). Some new results for the square subgroup of an abelian group. Comm. Algebra, 44, 2351–2361.
Andruszkiewicz, R. R., i Woronowicz, M. (2016b). A torsion-free abelian group exists whose the quotient group modulo the square subgroup is not a nil-group. Bull. Aust. Math. Soc., 94, 449–456.
Andruszkiewicz, R. R., i Woronowicz, M. (2017). On additive groups of associative and commutative rings. Quaest. Math., 40, 527–537.
Arnold, D. M. (1982). Finite rank torsion free abelian groups and rings. Berlin, Heidelberg, New York,: Springer-Verlag.
Beaumont, R. A., i Wisner, R. J. (1959). Rings with additive group which is a torsion-free group of rank two. Acta. Sci. Math. Szeged, 20, 105–116.
Cormen, T. H., Leiserson, C. E. i Rivest, R. L. (1990). Introduction to algorithms. Cambridge (Massachusetts), London: MIT Press and McGraw-Hill.
Dugas, M., Mader, A. i Vinsonhaler, C. (1987). Large e-rings exist. J. Algebra, 108, 88–101.
Ehrlich, G. (1983/1984). Filial rings. Portugal. Math., 42, 185–194.
Feigelstock, S. (1974). On the tensor product of exact sequences of modules over a dedekind ring. Archiv der Math., 25, 598–601.
Feigelstock, S. (1983). Additive groups of rings. vol. 1. Boston: Pitman Advanced Publishing Program.
Feigelstock, S. (2000). Additive groups of commutative rings. Quest. Math., 23, 241–245.
Fuchs, L. (1958). Abelian groups. Budapest: Publ. House Hungar. Acad. Sci.
Fuchs, L. (1970). Infinite abelian groups. vol. 1. New York, London: Academic Press.
Fuchs, L. (1973). Infinite abelian groups. vol. 2. New York, London: Academic Press.
Garcés, Y., Torres, E., Pereira, O. i Rodríguez, R. (2014). Application of the ring theory in the segmentation of digital image. IJSCMC, 3.
Gardner, B. J., i Wiegandt, R. (2004). Radical theory of rings. New York, Basel: Marcel Dekker, INC.
Göbel, R., Herden, D. i Shelah, S. (2011). Absolute e-rings. Adv. Math., 226, 235–253.
Jackett, D. R. (1979). The type set of torsion free abelian group of rank two. J. Austral. Math. Soc. (Series A), 27, 507–510.
Karatsuba, A. (1995). The complexity of computations. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 211, 169-183.
Knuth, D. E. (1997). The art of computer programming, vol. 2. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.
Lidl, R., i Harald, N. (1994). Introduction to finite fields and their applications. New

York: Cambridge University Press.
Najafizadeh, A. (2015). On the square submodule of a mixed module. Gen. Math. Notes, 27, 1-8.
Najafizadeh, A., i Woronowicz, M. (2017). A note on additive groups of some specific torsion-free rings of rank three and mixed associative rings. Discuss. Math. Gen. Algebra Appl., 37, 223–232.
Schultz, P. (1973). The endomorphism ring of the additive group of a ring. J. Austral. Math. Soc., 15, 60–69.
Stratton, A. E. (n.d.). Type sets of torsion free rings of finite rank. Comment. Math. Univ. St. Pauli.
Woronowicz, K. (2015). Algorithm of adding the m-bite numbers. AiCSR, 12, 95–108.
Woronowicz, M. (2016). A note on additive groups of some specific associative rings. Ann. Math. Sil., 30, 219–229.
Woronowicz, M. (2019). Grupy addytywne pierścieni łącznych. Unpublished doctoral dissertation, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki.
Woronowicz, M. (2020). A note on feigelstock's conjecture on the equivalence of the notions of nil and associative nil groups in the context of additive groups of rings of finite rank. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 27, 509–519.