

Rozdział 3

Dobór optymalnego pobudzenia w zadaniu identyfikacji układu dynamicznego w czasie swobodnym

Wiktor Jakowluk

Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka

Streszczenie: Identyfikacja systemu dynamicznego polega na doborze optymalnego sygnału wejściowego, który jest wykorzystywany do pobudzania układu w celu maksymalizacji informacji o dynamice systemu. W niniejszej pracy przeprowadzono dobór optymalnego sygnału wejściowego w czasie swobodnym, który następnie wykorzystano w zadaniu estymacji parametrów modelu układu dynamicznego. Rozwiązanie problemu doboru optymalnego sygnału wejściowego polega na minimalizacji rozszerzonego wektora stanu o współczynnik skalowania czasu swobodnego. Funkcjonał celu sformułowano w postaci funkcji Bolzy z ograniczeniem na D-efektywność oraz energię sygnału sterującego. Ograniczenia uwzględnione podczas projektowania sygnału wejściowego powinny umożliwić operatorowi estymację parametrów modelu układu w przyjazny sposób. W eksperymencie wykorzystano optymalny sygnał wejściowy, uzyskany w czasie swobodnym, do celów weryfikacji aspektów ekonomicznych procesu identyfikacji (tj. związku pomiędzy nałożonymi ograniczeniami a czasem trwania eksperymentu). Przedstawiona metoda może być stosowana dla ogólnej klasy systemów i została zweryfikowana przykładami numerycznymi.

Słowa kluczowe: D-efektywność, identyfikacja w czasie swobodnym, optymalny sygnał wejściowy, optymalne sterowanie

Wprowadzenie

Identyfikacja układu dynamicznego jest zwykle przeprowadzana przez poddanie go pobudzeniu w trakcie procesu technologicznego. Wybór sygnału wejściowego wykorzystywanego do pobudzenia układu ma fundamentalne znaczenie w przypadku estymacji parametrów modelu układu. Zasadniczym celem projektowania eksperymentu identyfikacyjnego jest jak najdokładniejsze oszacowanie parametrów, które określa się minimalną zmiennością wartości parametrów przy obecności zakłóceń losowych oddziałujących na system w rzeczywistych warunkach pracy [1]. W rzeczywistości pobudza się system wykorzystując optymalny sygnał wejściowy, a uzyskane

dane wykorzystuje się do zbudowania modelu układu z maksymalną dokładnością [2, 3]. Niedokładny model układu może powodować pogorszenie wydajności pętli sterowania i ostatecznie wpłynąć na finalny produkt. Celem prac związanych ze sterowaniem procesów przemysłowych jest stabilizacja warunków pracy, które mają wpływ na wyniki ekonomiczne. Oszacowano, że około 66%–80% rozważanych układów sterowania nie osiąga pożądaných wyników pracy [4]. Z drugiej strony procesy technologiczne są przeprowadzane w stanie ustalonym, a każda zmiana warunków pracy powoduje, że wydajność zaawansowanego systemu sterowania zmniejsza się. W konsekwencji adekwatność identyfikowanego modelu układu dynamicznego rośnie przez wykorzystanie optymalnego sygnału wejściowego [1, 5].

Dobór optymalnego sygnału wejściowego, z wykorzystaniem metody „ang. Model-based,” który jest wykonywany podczas trwania procesu sterowania, przedstawiono w wielu pracach [6–8]. Wykazano, że dobór dokładnego modelu układu pochłania około trzech czwartych kosztów związanych z projektami sterowania [9]. Z tego powodu wartość ekonomiczna eksperymentu identyfikacyjnego powinna być jak najniższa, ale eksperyment powinien nadal zapewniać wysoką dokładność oszacowań parametrów modelu układu. Rozpatrując metodę „ang. Least-costly,” koszt eksperymentu identyfikacyjnego określa się również jako degradację wydajności procesu, w układzie zamkniętym, podczas pobudzenia układu w normalnych warunkach pracy [10, 11].

W wielu praktycznych zastosowaniach, takich jak przemysł petrochemiczny, sygnały pobudzające przyjazne modelowi układu są stosowane do estymacji parametrów systemu w czasie rzeczywistym. Sygnały przyjazne modelowi to takie, które powodują minimalne zakłócenia warunków pracy, ograniczają czas trwania eksperymentu oraz amplitud sygnałów wejściowych i wyjściowych [12–14]. Stwierdzono, iż ograniczenia stawiane sygnałom przyjaznym modelowi są często sprzeczne z wymogiem dokładnej estymacji parametrów modelu układu [3, 15]. Okazuje się, że liniowa kombinacja harmonicznych sygnału sinusoidalnego, o dużych wartościach międzyszczytowych, może prowadzić do uszkodzenia identyfikowanego systemu. Dlatego rozważa się sygnały wymuszające „bezpieczne”, które mają za zadanie zapewnić akceptowalną dokładność oszacowań parametrów modelu układu [16, 17]. W pracy [18] zaproponowano odporne sformułowanie problemu doboru przyjaznego sygnału sterującego z ograniczeniami amplitudy sygnału wejściowego oraz mocy sygnału wyjściowego. Taki rodzaj eksperymentu jest kompilacją problemu sekwencyjnego i odpornego. Metodologia rozwiązywania problemów identyfikacji w ramach ekonomicznych, której celem jest minimalizacja kosztów eksperymentu, została przedstawiona w pracy [19]. Dane dotyczące wielokryterialnych zadań optymalizacji w zastosowaniu do identyfikacji oraz procesu sterowania zamieszczono w [20, 21].

W omówionych powyżej publikacjach przedstawiono metody doboru optymalnych sygnałów wejściowych dla ustalonego czasu końcowego eksperymentu identyfikacyjnego. W tej pracy, przedstawiono problem doboru optymalnego sygnału wejściowego, w czasie swobodnym, w celu minimalizacji kosztów ekonomicznych związanych z eksperymentem identyfikacyjnym. Ograniczenia nałożone na funkcję

celu powinny pozwolić na uzyskanie niewielkiej utraty dokładności estymat parametrów modelu układu dynamicznego. Zaprojektowane w ten sposób sygnały pobudzające następnie wykorzystano w procedurze estymacji parametrów modelu układu zakłócanego szumem białym o różnej wariancji.

W artykule autora przedstawiono kontynuację prac własnych dotyczących identyfikacji układów opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Wyniki doboru optymalnego sygnału wejściowego z wykorzystaniem kanonicznego sformułowania Mayera funkcji celu dla układu skrętnego oraz inercyjnego zaprezentowano w pracach [22–24].

Artykuł jest zorganizowany w następujący sposób. W rozdziale 1 przeprowadzono transkrypcję doboru optymalnego sterowania dla czasu swobodnego. W rozdziale 2 opisano problem doboru optymalnego sygnału wejściowego z ograniczeniami, w celu estymacji parametrów modelu układu. Sformułowanie problemu przedstawiono w rozdziale 3. Wyniki eksperymentów symulacyjnych z wykorzystaniem modelu układu inercyjnego przedstawiono w rozdziale 4. Wnioski końcowe zamieszczono w podsumowaniu.

3.1. Sformułowanie problemu czasu swobodnego

W celu doboru optymalnego sygnału wejściowego, w czasie swobodnym, wykorzystano bibliotekę narzędziową „ang. Recursive Integral Optimal Trajectory Solver” RIOTS_95 [25]. Zestaw narzędzi Riots został opracowany do rozwiązywania problemów związanych z problemami optymalnego sterowania w czasie skończonym, które obejmują: ograniczenia trajektorii, ograniczenia na stan końcowy, zmienne warunki początkowe oraz zadania swobodnego czasu końcowego. Biblioteka narzędziowa jest przeznaczona do rozwiązywania problemów optymalnego sterowania w postaci funkcji Bolzy:

$$\min_{(u, \zeta) \in L_{\infty}^m[a, b] \times \mathbb{R}^n} \left\{ f(u, \zeta) \doteq g_0(\zeta, x(b)) + \int_a^b l_0(t, x, u) dt \right\}, \quad (3.1)$$

gdzie: $\dot{x} = h(t, x, u)$, $x(a) = \zeta$, $t \in [a, b]$,

przy następujących ograniczeniach:

$$u_{\min}^j(t) \leq u^j(t) \leq u_{\max}^j(t), j = 1, \dots, m, t \in [a, b], \quad (3.2)$$

$$\zeta_{\min}^j(t) \leq \zeta^j(t) \leq \zeta_{\max}^j(t), j = 1, \dots, n, t \in [a, b], \quad (3.3)$$

$$l_{ii}^v(t, x(t), u(t)) \leq 0, v \in \mathbf{q}_{ii}, t \in [a, b], \quad (3.4)$$

$$g_{ei}^v(\zeta, x(b)) \leq 0, v \in \mathbf{q}_{ei}, \quad (3.5)$$

$$g_{ee}^v(\zeta, x(b)) = 0, v \in \mathbf{q}_{ee}, \quad (3.6)$$

gdzie: x jest zmienną stanu, $t \in [a, b]$ jest przedziałem czasu, $q = \{1, \dots, q\}$ oraz l, g, h są arbitralnie dobranymi funkcjami. Indeksy o, ti, ei oraz ee funkcji $g(\cdot, \cdot)$ i $l(\cdot, \cdot, \cdot)$ oznaczają odpowiednio: funkcję celu, ograniczenie trajektorii, ograniczenie nierównościowe na stan końcowy oraz ograniczenie równościowe na stan końcowy.

Rozwiązanie problemu doboru optymalnego sterowania w czasie swobodnym odbywa się poprzez rozszerzenie wektora stanu o dodatkowe zmienne stanu, tj. jeden stan dla każdego autonomicznego problemu. Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w rozdziale 2 podręcznika użytkownika [26], ogólną ideą jest zdefiniowanie nominalnego przedziału czasu $[a, b]$ i zastąpienie problemu swobodnego czasu końcowego przypadkiem ustalonego czasu końcowego. Współczynnik skalowania czasu swobodnego definiowany jest jako dodatkowa zmienna stanu skalująca czas trwania eksperymentu. Z tego powodu współczynnik skalowania i czas końcowy wyrażone są dodatkowymi zmiennymi stanu. Procedura zaimplementowana w bibliotece Riots_95 pozwala na minimalizację więcej niż jednego stanu początkowego w celu optymalizacji czasu trwania eksperymentu:

$$\min_{u, T} \tilde{g}(T, y(T)) + \int_a^{a+T} \tilde{l}(t, y, u) dt, \quad (3.7)$$

gdzie: $\dot{y} = \tilde{h}(t, y, u)$, $y(a) = \zeta$, $t \in [a, a+T]$.

Następnie problem można łatwo przekształcić do postaci alternatywnej, problemu optymalnego sterowania w czasie swobodnym, z rozszerzonym wektorem stanu $x \doteq (y, x^{n-1}, x^n)$ w postaci:

$$\min_{u, \zeta^n} g(\zeta, x(b)) + \int_a^b l(t, x, u) dt, \quad (3.8)$$

$$\text{Przyjmując, że: } \dot{x} = h(t, x, u) \doteq \begin{pmatrix} x^n \tilde{h}(x^{n-1}, y, u) \\ x^n \\ 0 \end{pmatrix}, x(a) = \zeta = \begin{pmatrix} \zeta \\ a \\ \zeta^n \end{pmatrix}, t \in [a, b], x$$

zawiera $n-2$ składowe y , $g(\zeta, x(b)) \doteq \tilde{g}(a+T\zeta^n, y(b))$, $l(t, x, u) \doteq \tilde{l}(x^{n-1}, y, u)$ oraz $b = a+T$. W powyższej notacji x^{n-1} jest zmienną stanu reprezentującą czas, a ζ^n jest współczynnikiem skalowania czasu trwania eksperymentu. Dla każdego $t \in [a, b]$, $x^n(t) = \zeta^n$, $x^{n-1}(t) = a + (t-a)\zeta^n$ rozwiązanie problemu czasu swobodnego jest następujące $t_f = x^{n-1}(b) = a + (b-a)\zeta^n = T\zeta^n$. Rozważając systemy dynamiczne

autonomiczne, dodatkowa zmienna stanu x^{n-1} nie jest wymagana. Dlatego problemy autonomiczne ze swobodnym czasem końcowym można rozwiązać poprzez rozszerzenie wektora stanu tylko jedną zmienną, reprezentującą współczynnik skalowania czasu końcowego zapisaną w następujący sposób:

$$h(t, x, u) = \tilde{h}(tx^n, y, u). \quad (3.9)$$

Problem doboru optymalnego sygnału wejściowego można przedstawić w formie wskaźnika jakości o postaci funkcjonału Bolzy, czyli sumy wartości końcowych zmiennych stanu i całki za okres sterowania, która jest minimalizowana. Taki rodzaj zadania optymalizacji umożliwia wyznaczenie optymalnego sygnału wejściowego w obecności wprowadzonych ograniczeń.

3.2. Sformułowanie problemu doboru optymalnego pobudzenia

Rozważaniom poddano układ dynamiczny opisany poniższą zależnością:

$$z(t) = f(u, t, \theta, v), \quad (3.10)$$

gdzie: $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$ oraz θ są odpowiednio: wyjściem, wejściem, szumem oraz wektorem parametrów systemu. Identyfikacja systemu to proces tworzenia dokładnego modelu matematycznego układu dynamicznego na podstawie danych eksperymentalnych i wiedzy 'a priori' o systemie. Dokładność oszacowań parametrów modelu zależy przede wszystkim od doboru odpowiedniego sygnału pobudzającego. Dobierając optymalne sygnały wejściowe w celu szacowania parametrów modelu układu, jako kryterium optymalizacji należy wybrać odpowiednią normę skalarną macierzy informacyjnej Fishera (FIM). Macierz FIM może zostać zdefiniowana w następujący sposób:

$$M = E \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(z | \theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(z | \theta) \right)^T \right]. \quad (3.11)$$

W praktyce często wykorzystywane jest kryterium D-optymalności, w którym wyznacznik macierzy informacyjnej Fishera $\det M$ jest maksymalizowany lub $\det(M^{-1})$ jest minimalizowany. Wybrane kryteria jakości optymalizacji zamieszczono w [27]:

- A-optymalność: $\text{tr}(M^{-1})$, minimalizuje ślad odwrotności macierzy FIM,
- E-optymalność: $\lambda_{\max}(M^{-1})$, minimalizuje maksymalną wartość własną macierzy FIM,
- D-optymalność: maksymalizuje wyznacznik macierzy FIM oraz minimalizuje objętość elipsoidy ufności estymat parametrów.

W celu wyznaczenia optymalnego sygnału pobudzającego, należy rozpatrzeć nie-obciążony estymator parametrów θ . W takim przypadku kowariancja estymat parametrów jest określona przez nierówność Cramera-Rao, czyli odwrotność macierzy FIM. Kowariancję estymat parametrów θ można zapisać jako:

$$\text{cov}(\check{\theta}) = E\left[(\check{\theta} - \theta)(\check{\theta} - \theta)^T\right] \geq M^{-1} \quad (3.12)$$

Metodę ważonej funkcji celu do zadań projektowania sygnałów pobudzających, w dziedzinie czasu, przedstawiono w pracy [28].

Chociaż określenie kryterium optymalizacji jest niezbędne, to sygnały pobudzające zaprojektowane na podstawie niektórych z nich mogą powodować małą dokładność estymat parametrów modelu układu [2]. Sygnał wejściowy wybrany do pobudzenia modelu układu powinien jednocześnie spełniać dwa warunki: akceptowalną dokładność estymat parametrów modelu oraz model układu powinien być pobudzany w najbardziej bezpieczny sposób. Te warunki można zapewnić, stosując podejście oparte na definicji D-efektywności sterowania [27]. Funkcjonał D-efektywności (3.13) jest wyrażony jako miara względnej jakości dowolnego eksperymentu frakcyjnego e w porównaniu z eksperymentem optymalnym e^* , który wykonano wcześniej. Wskaźnik D-efektywności często jest wyrażany w procentach i może być traktowany jako miara optymalności dowolnego sygnału wejściowego:

$$E_D(e) = 100\% \left\{ \frac{\det(M(e))}{\det(M(e^*))} \right\}^{1/k}, \quad (3.13)$$

gdzie: k jest liczbą parametrów do zidentyfikowania, a e^* oznacza eksperyment D-optymalny. Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w pracy [28], nakładamy ograniczenie nierównościowe na wartość funkcji D-efektywności:

$$E_D(e) \geq \mu, \quad (3.14)$$

gdzie: $\mu < 1$ i nierówność (3.14) jest równoznaczna następującemu ograniczeniu:

$$\Psi[M(e)] \leq D, \quad (3.15)$$

oraz $\Psi[M(e)] = \log(\det M(e))$.

Ogólnie rzecz biorąc, zadanie doboru optymalnych sygnałów wejściowych jest formułowane poprzez maksymalizację wyznacznika macierzy FIM (tj. kryterium D-optymalności) i powinno uwzględniać ograniczenia fizyczne. Tak zaprojektowany eksperyment powinien zapewnić bezpieczną identyfikację układu dynamicznego. Wybrane ograniczenia zdefiniowano poniżej:

- nierównościowe ograniczenie D-efektywności zdefiniowane na podstawie (3.15),

- ograniczenia amplitudy sygnałów wejściowych, wyjściowych i zmiennych stanu w postaci:

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max}. \quad (3.16)$$

- ograniczenia energii sygnałów wejściowych:

$$\int_0^T u^T(t)u(t)dt \leq E. \quad (3.17)$$

Celem tego eksperymentu jest zaprojektowanie sygnału pobudzającego o ograniczonym czasie trwania, który następnie wykorzystywany jest w eksperymencie identyfikacyjnym. W takim przypadku wskaźnik jakości formułowany jest poprzez minimalizację współczynnika skalowania czasu końcowego, z ograniczeniami na D-efektywność sterowania oraz energię sygnału wejściowego. W ten sposób (tj. biorąc pod uwagę powyższe ograniczenia) możemy uzyskać suboptymalny sygnał sterujący, który jest bezpieczny w zadaniach identyfikacji układu dynamicznego.

3.3. Dobór optymalnego sygnału wejściowego

W pracy zaprezentowano syntezę sygnału wejściowego, w czasie swobodnym, do celów estymacji parametrów modelu układu dynamicznego. Idea polega na zdefiniowaniu nominalnego czasu eksperymentu $[0, T]$ i zastąpieniu problemu swobodnego czasu końcowego problemem klasycznym, który wykorzystuje współczynnik skalujący jako zmienną rozszerzonego wektora stanu. Problem rozwiązano wykorzystując transkrypcję powyższego problemu optymalnego sterowania na zadanie optymalnego sterowania w postaci Lagrange'a z zestawem ograniczeń. W celu weryfikacji takiego podejścia do estymacji parametrów modelu układu dynamicznego, wykorzystano obiekt inercyjny pierwszego rzędu w postaci:

$$G(s) = \frac{k_p}{Ts + 1}. \quad (3.18)$$

Zadanie doboru optymalnego pobudzenia dla układu inercyjnego można opisać następującym modelem w przestrzeni stanów, z jednym wejściem i jednym wyjściem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0, \\ z(t) &= x(t) + v(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

gdzie: $x(t)$ jest wektorem stanu, $u(t)$ jest wektorem wymuszeń, $z(t)$ jest wektorem wyjścia, a i b są stałymi parametrami modelu natomiast $v(t)$ jest wektorem białego szumu pomiarowego opisanego następującą zależnością:

$$\begin{aligned} E[v(t)] &= 0, \\ E[v(t)v^T(\tau)] &= R\delta(t-\tau) = \sigma_n^2 \delta(t-\tau). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Podstawowym celem zadania identyfikacji parametrów modelu układu jest maksymalizacja wrażliwości zmiennej stanu na estymowany parametr [1]. Motywacją do takiego eksperymentu jest twierdzenie Cramera-Rao, w którym wariancja dowolnego nieobciążonego estymatora parametru jest ograniczona z dołu przez odwrotność macierzy informacyjnej Fishera. Stosując powyższą definicję do celów doboru optymalnego sterowania, otrzymujemy następującą zależność:

$$\text{cov}([a, b]) \geq M^{-1}. \quad (3.21)$$

Macierz informacyjną Fishera (FIM) dla układu inercyjnego opisanego równaniami stanu można przedstawić w następującej formie:

$$M(T) = \int_0^T X_\theta^T R^{-1} X_\theta dt = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_0^T \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} dt = \frac{1}{\sigma_n^2} \int_0^T \begin{bmatrix} x_a^2 & x_a x_b \\ x_a x_b & x_b^2 \end{bmatrix} dt, \quad (3.22)$$

gdzie: $x_a = \partial x / \partial a$, $x_b = \partial x / \partial b$ i R jest macierzą 2×2 o postaci:

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma_n^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Podstawiając równanie (3.22) do (3.21) otrzymujemy:

$$\text{cov}([a, b]) \geq \frac{\sigma_n^2}{M(T)}. \quad (3.24)$$

W dalszych rozważaniach przyjęto $\sigma_n = 1$, w celu uzyskania optymalnego sygnału pobudzającego w zadaniu estymacji parametrów modelu układu. Aby zmaksymalizować wyznacznik macierzy FIM, zdefiniowano rozszerzony wektor stanu w postaci [1]:

$$\dot{x}_a = x + ax_a, \quad x_a(0) = 0, \quad (3.25)$$

$$\dot{x}_b = ax_b + u, \quad x_b(0) = 0. \quad (3.26)$$

Dobór optymalnego sygnału wejściowego w zadaniu estymacji parametrów modelu układu inercyjnego jest formułowany poprzez minimalizację dodatkowej zmiennej stanu, reprezentującej współczynnik skalowania czasu końcowego, w obecności fizycznych ograniczeń systemu.

Współczynniki macierzy FIM uzyskują następującą postać:

$$\dot{m}_{11}(t) = x_a^2(t), \quad m_{11}(0) = 0, \quad (3.27)$$

$$\dot{m}_{12}(t) = \dot{m}_{21}(t) = x_a(t)x_b(t), \quad m_{12}(0) = 0, \quad (3.28)$$

$$\dot{m}_{22}(t) = x_b^2(t), \quad m_{22}(0) = 0, \quad (3.29)$$

gdzie:

$$M(t) = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Rozszerzony wektor stanu (3.25), (3.26) i (3.27–3.29), uwzględniający dodatkową zmienną stanu reprezentującą współczynnik skalowania czasu końcowego ζ , opisano poniższą zależnością:

$$\begin{aligned} x_1 &= x; & \dot{x}_1 &= x_7(ax_1 + bu); & x_1(0) &= x_{10}; \\ x_2 &= x_a; & \dot{x}_2 &= x_7(x_1 + ax_2); & x_2(0) &= 0; \\ x_3 &= x_b; & \dot{x}_3 &= x_7(ax_3 + u); & x_3(0) &= 0; \\ x_4 &= m_{11}; & \dot{x}_4 &= x_7x_2^2; & x_4(0) &= 0; \\ x_5 &= m_{12} = m_{21}; & \dot{x}_5 &= x_7x_2x_3; & x_5(0) &= 0; \\ x_6 &= m_{22}; & \dot{x}_6 &= x_7x_3^2; & x_6(0) &= 0; \\ x_7 &= \zeta; & \dot{x}_7 &= 0; & x_7(0) &= \zeta_{70}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ostatecznie, zadanie optymalnego sterowania opartego na kanonicznym sformułowaniu Bolzy, które minimalizuje funkcję celu (3.1) przy ograniczeniu wartości D-efektywności (3.6), a także ograniczeniach wejścia (3.2) i wyjścia (3.4), jest następujące:

$$J(u) = \zeta + q \int_0^T u(t)^T u(t) dt, \quad (3.32)$$

biorąc pod uwagę:

$$\begin{aligned} -1 &\leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, T], \\ 0,1 &\leq \zeta \leq 10, \\ x_1(t) &\leq 1, \quad t \in [0, T], \\ (-x_4(T)x_6(T) + x_5^2(T)) &= D, \end{aligned} \quad (3.33)$$

gdzie: D jest wymaganą wartością D-efektywności, q jest współczynnikiem energii sygnału wejściowego, a ζ_{70} jest optymalizowanym warunkiem początkowym. Należy zauważyć, że nałożono dodatkowe ograniczenie na zmienną stanu $x_1(t)$, które ma uniemożliwić nieoczekiwane zmiany sygnału sterującego $u(t)$. Rozważając metodologię określoną równaniami (3.31–3.33), optymalnym rozwiązaniem czasu swobodnego jest $t_f = T\zeta$.

3.4. Wyniki eksperymentów numerycznych

Przedstawiony powyżej problem może zostać rozwiązany z wykorzystaniem dostępnych bibliotek narzędziowych dotyczących problemów optymalnego sterowania, takich jak: RIOTS_95 [29], DIRCOL [30] lub MISER [31]. Do rozwiązania problemu opisanego w niniejszej pracy wykorzystano zestaw narzędzi zawartych w bibliotece RIOTS_95. Oprogramowanie to zaprojektowano do implementacji w pakiecie Matlab, jako oddzielny moduł, posiadający narzędzia rozwiązywania problemów optymalnego sterowania z ograniczeniami dla ustalonych lub swobodnych warunków początkowych.

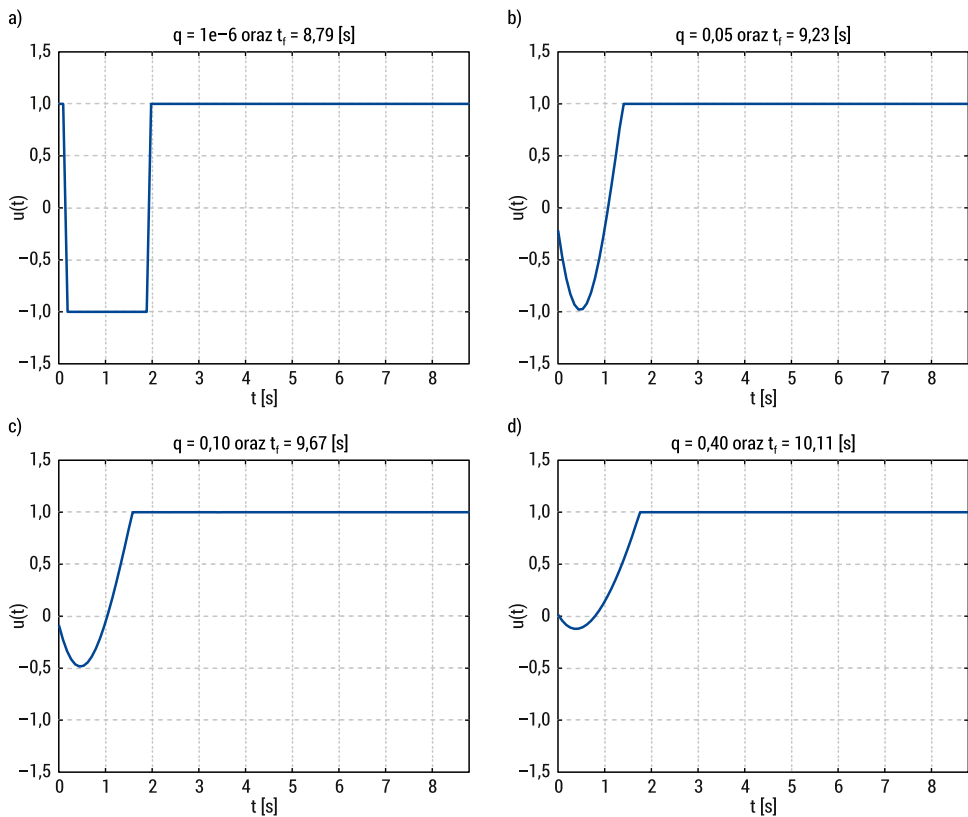
Problem doboru optymalnego sygnału wejściowego w zadaniu estymacji parametrów modelu układu inercyjnego, dla ustalonych nominalnych wartości parametrów: $a = -1$, $b = 1$ oraz arbitralnie ustalonego przedziału czasu eksperymentu $t = [0, 10]$ sekund, rozwiązano wykorzystując sekwencyjny algorytm programowania kwadratowego (SQP). Warunki początkowe modelu układu inercyjnego wybrano jako: $x_1(0) = 5$, $x_7(0) = 1$ oraz warunek początkowy sygnału wejściowego ustalono na $u(0) = 1$. Współczynnik skalowania czasu trwania eksperymentu ζ jest optymalizowany w przedziale $0,1 \leq \zeta \leq 10$, (tj. czas eksperymentu zawarty jest w przedziale od 1 do 100 sekund). Wyniki numeryczne uzyskano wykorzystując metodę Runge-Kutty, czwartego rzędu, o stałej wielkości kroku co 0,2 sekundy. Funkcję celu opisaną zależnością (3.32) przekształcono do następującej postaci:

$$J(u) = J_1 + qJ_2, \quad (3.34)$$

gdzie: J_1 oznacza współczynnik skalowania czasu końcowego ζ , a J_2 jest całką z kwadratu sygnału wejściowego.

Optymalny sygnał wejściowy otrzymany przy braku ograniczenia wartości energii sygnału sterującego (tj. $q \approx 0$ w nierówności (3.32)) przedstawiono na rysunku 3.1(a). Odpowiada on D-optymalnemu eksperymentowi e , gdzie wartość wyznacznika macierzy FIM (zgodnie z (3.13)) uzyskuje $D_{\text{eff}} = 90\%$ jej optymalnej wartości. Suboptymalne sygnały pobudzające uzyskane przy różnych wartościach współczynnika kosztu energii sterowania q i stałej wartości D-efektywności równej $D_{\text{eff}} = 90\%$ przedstawiono na rysunkach 3.1(b-d).

Optymalny sygnał wejściowy otrzymany przy braku ograniczenia na składową kosztu energii sygnału wejściowego (tj. $J_1 = 0,88$, $qJ_2 = 1,0 \times 10^{-4}$ i $t_f = 8,79$ [s]) przedstawiono na rysunku 3.1(a). Powiększono wartość kosztu energii sterowania (rysunek 3.1(b)) w celu uzyskania suboptymalnego sterowania, które odpowiada następującym wartościom składowych wskaźnika jakości: $J_1 = 0,92$, $qJ_2 = 5,00$ i $t_f = 9,23$ [s]. Dla porównania, na rysunku 3.1(c) przedstawiono sygnał wejściowy, który wygenerowano dla następujących wartości funkcji celu: $J_1 = 0,97$, $qJ_2 = 8,70$ oraz $t_f = 9,67$ [s]. Po zwiększeniu kosztu energii sterowania do wartości $q = 0,40$, otrzymano sygnał pobudzający przedstawiony na rysunku 3.1(d) uzyskując kolejne wartości wskaźnika jakości: $J_1 = 1,01$, $qJ_2 = 33,44$, $t_f = 10,11$ [s].



RYSUNEK 3.1. Sygnały pobudzające w czasie swobodnym: (a) Optymalny sygnał wejściowy dla $q \approx 0$ i $D_{\text{eff}} = 90\%$; (b) Suboptymalny sygnał wejściowy dla $q = 0,05$ i $D_{\text{eff}} = 90\%$; (c) Suboptymalny sygnał wejściowy dla $q = 0,10$ i $D_{\text{eff}} = 90\%$; (d) Suboptymalny sygnał wejściowy dla $q = 0,40$ i $D_{\text{eff}} = 90\%$

Można zauważyć, że gdy wartość współczynnika kosztu energetycznego wzrasta, kształt optymalnego sygnału wejściowego znacznie się zmienia. Podczas gdy dla optymalnego eksperymentu (w sensie (3.14)) występują gwałtowne zmiany sygnału wejściowego, sygnały sterujące otrzymane dla $D_{\text{eff}} < 100\%$ są bardziej przyjazne w procesie identyfikacji systemu, dopóki wyznacznik macierzy FIM nie zostanie zdominowany przez składnik odpowiadający za koszt energii sterowania we wskaźniku jakości. Porównanie składowych funkcji celu otrzymanych dla rosnących wartości współczynnika energii sygnału wejściowego i malejących wartości współczynnika D -efektywności z przedziału $[100\%, 80\%]$ przedstawiono w tabelach 3.1, 3.2, 3.3.

TABELA 3.1. Porównanie komponentów wskaźnika jakości przy $D_{\text{eff}} = 100\%$

$D_{\text{eff}}/D_{\text{opt}}$	FIM	J_1	q	qJ_2	t_r [s]
100%	-43,87	1,00	1,0e-6	1,0e-4	10,00
		1,06	0,05	4,79	10,57
		1,10	0,10	8,99	11,00
		1,13	0,20	17,42	11,36
		1,15	0,30	25,91	11,53
		1,16	0,40	34,44	11,62
		1,17	0,50	42,97	11,70

TABELA 3.2. Porównanie komponentów wskaźnika jakości przy $D_{\text{eff}} = 90\%$

$D_{\text{eff}}/D_{\text{opt}}$	FIM	J_1	q	qJ_2	t_r [s]
90%	-35,60	0,880	1,0e-6	1,0e-4	8,79
		0,923	0,05	5,00	9,23
		0,967	0,10	8,70	9,67
		0,991	0,20	16,86	9,91
		1,041	0,30	25,14	10,04
		1,011	0,40	33,44	10,11

TABELA 3.3. Porównanie komponentów wskaźnika jakości przy $D_{\text{eff}} = 80\%$

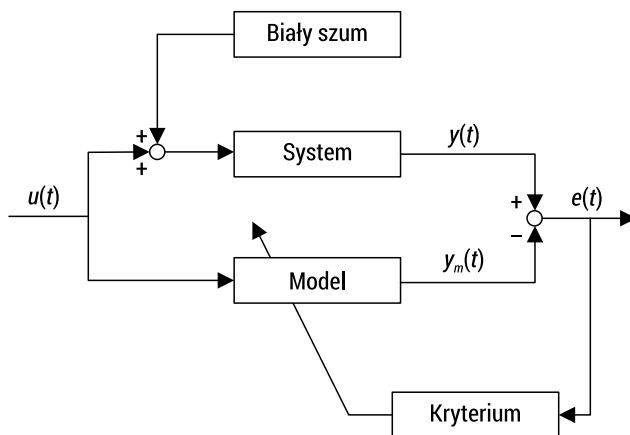
$D_{\text{eff}}/D_{\text{opt}}$	FIM	J_1	q	qJ_2	t_r [s]
80%	-28,10	0,763	1,0e-6	1,0e-4	7,63
		0,807	0,05	4,35	8,07
		0,837	0,10	8,27	8,37
		0,858	0,20	16,25	8,58
		0,866	0,30	24,22	8,66

Na podstawie powyższych danych można stwierdzić, że wraz ze wzrostem wartości współczynnika kosztu energii sterowania zwiększa się również czas trwania eksperymentu. Gdy założona wartość współczynnika D-efektywności z przedziału [100%, 80%] maleje, zmniejsza się czas trwania pobudzenia. Na podstawie wyników eksperymentów zamieszczonych w tabeli 3.1, odczytano optymalny czas trwania sygnału pobudzającego, który dla układu inercyjnego wynosi 10 sekund.

Sygnały wejściowe $u(t_p)$, wyznaczone jako rozwiązania problemów optymalizacji w czasie swobodnym (3.32) i (3.33), zostały następnie wykorzystane jako pobudzenia w procesie estymacji parametrów modelu układu inercyjnego. Model układu (3.19), używany w procedurze identyfikacji systemu, może zostać opisany następującym modelem w przestrzeni stanów z jednym wejściem i jednym wyjściem:

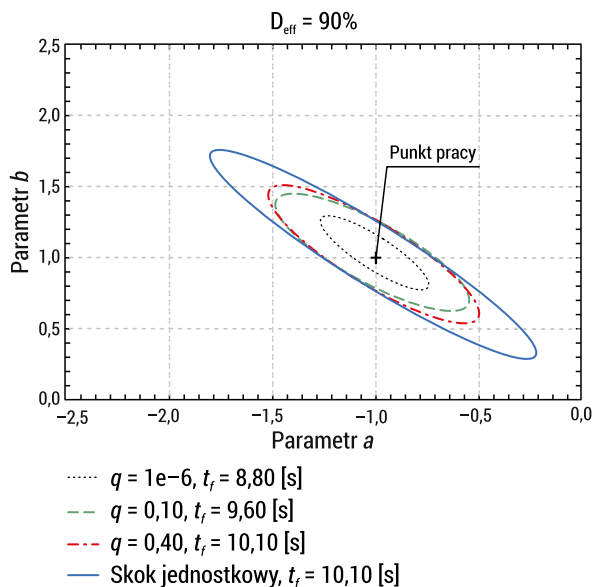
$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t_f) &= ax_1(t_f) + bu(t_f) + v(t_f), \quad x_1(0) = x_{10}, \\ z(t_f) &= x_1(t_f),\end{aligned}\tag{3.35}$$

Schemat blokowy na rysunku 3.2 przedstawia proces estymacji parametrów modelu układu inercyjnego: pobudzamy wejście układu $u(t_p)$ i zbieramy pomiary z jego wyjścia $y(t_p)$. Biały szum pomiarowy o różnych wartościach wariancji z przedziału $0,0 \leq \sigma^2 \leq 0,8$ zakłóca wejście sterujące systemu. Model układu (3.35) zależy od wektora nieznanych parametrów $\theta = [a, b]$. Celem takiego eksperymentu jest estymowanie nieznanych wartości parametrów modelu układu, które powinny być jak najbardziej zbliżone do rzeczywistych wartości parametrów systemu. W tym celu różnica kwadratów pomiędzy wyjściem systemu $y(t_p)$ a wyjściem modelu $y_m(t_p)$ jest minimalizowana. Warunki początkowe modelu układu inercyjnego ustalono w przedziale $5 \leq x_1(0) \leq 5$ a czas trwania eksperymentu uzależniono od wybranego sygnału wejściowego zgodnie z tabelą 3.2. Wyniki numeryczne otrzymano wykorzystując sympleksową metodę Nelder-Meada.



RYSUNEK 3.2. Schemat blokowy estymacji parametrów modelu układu dynamicznego

Rozkład estymowanych parametrów modelu układu inercyjnego a i b otrzymanych w trakcie eksperymentu identyfikacyjnego przy wymuszeniu różnymi sygnałami wejściowymi przedstawiono na rysunku 3.3. Wykonano dziewięćdziesiąt dziewięć pętli obliczeniowych, podczas gdy model układu inercyjnego startował z różnych warunków początkowych oraz szum pomiarowy zakłócający wejście systemu miał różne wariancje.



RYSUNEK 3.3. Elipsoidalne obszary ufności estymat parametrów dla różnych sygnałów wejściowych: Optymalny sygnał pobudzający (czarna linia kropkowana, $D_{\text{eff}} = 90\%$, $q = 1,0e-6$), Suboptymalny sygnał wejściowy (zielona linia przerywana, $D_{\text{eff}} = 90\%$, $q = 0,10$), Suboptymalny sygnał wejściowy (czerwona linia kreska-kropka, $D_{\text{eff}} = 90\%$, $q = 0,40$), Skok jednostkowy (niebieska linia ciągła)

Na rysunku 3.3 przedstawiono obszary ufności estymat parametrów (czarna linia kropkowana) wyznaczonych przy wymuszeniu sygnałem wejściowym, który uzyskano dla minimalnej wartości współczynnika kosztu energii sterowania (tj. $q \approx 0$ i $D_{\text{eff}} = 90\%$). Kolejne obszary ufności parametrów przedstawiają wyniki przeprowadzonych eksperymentów (dla tych samych warunków początkowych i wariancji szumu) z sygnałami pobudzającymi uzyskanymi, gdy współczynnik kosztu energetycznego zwiększa swoją wartość (tj. $q = 0,10$ – zielona linia przerywana oraz $q = 0,40$ – czerwona linia kreska-kropka). W celu porównania wyników eksperymentu, na rysunku 3.3, zamieszczono wizualizację elipsoidalnego obszaru ufności estymat parametrów otrzymanego z wykorzystaniem skoku jednostkowego (niebieska linia ciągła). Porównanie wyznaczonych obszarów ufności estymat parametrów modelu układu inercyjnego wykazuje pewne podobieństwa. Wymuszenie optymalnym sygnałem wejściowym (tj. dla $q \approx 0$) powoduje minimalny czas trwania eksperymentu identyfikacyjnego oraz minimalną objętość elipsoidalnego obszaru ufności estymat parametrów. Gdy wartość współczynnika kosztu energetycznego wzrasta, obszar ufności zwiększa swoją objętość dla tych samych warunków początkowych oraz wariancji szumu. Zwiększanie współczynnika kosztu energetycznego powoduje również wzrost czasu trwania eksperymentu identyfikacyjnego ale zakłócenie warunków pracy jest łagodniejsze. W ten sposób można uniknąć gwałtownych zmian sygnału sterującego w empirycznych zadaniach identyfikacji.

Minimalizacja czasu trwania eksperymentu pozwala obniżyć koszt ekonomiczny identyfikacji podczas eksploatacji systemu w czasie rzeczywistym. Z drugiej strony, koszt eksperymentu identyfikacyjnego może być również wyrażany poprzez utratę dokładności estymat parametrów w związku z zastosowanym pobudzeniem. Na podstawie danych zamieszczonych w tabelach 3.1, 3.2, 3.3, można stwierdzić, iż wymagania dotyczące minimalnego czasu trwania eksperymentu identyfikacyjnego i przyjazności sygnału sterującego są w pewnym sensie sprzeczne.

Podsumowanie

Celem tej pracy było zaprojektowanie sygnałów pobudzających w czasie swobodnym, z ograniczeniami dotyczącymi kosztu energii sterowania i wartości D-efektywności, które następnie wykorzystano w eksperymentach estymacji parametrów modelu układu inercyjnego. Eksperyment doboru sygnału sterującego przeprowadzono wykonując minimalizację dodatkowej zmiennej stanu, reprezentującej współczynnik skalowania czasu, w obecności zestawu ograniczeń. Wybrane sygnały sterujące otrzymane jako rozwiązanie problemu optymalizacji czasu swobodnego wykorzystano jako pobudzenie w procedurze estymacji parametrów modelu układu. Eksperymenty identyfikacyjne przeprowadzono w obecności białego szumu pomiarowego zakłócającego wejście sterujące systemu. Nałożone ograniczenia umożliwiają uzyskanie przyjaznych sygnałów wejściowych, jednocześnie zapewniając akceptowalne obszary ufności estymat parametrów modelu układu.

Kolejnym założeniem tej pracy było zbadanie zależności pomiędzy nałożonymi ograniczeniami na dobór optymalnego sygnału sterującego, a czasem trwania eksperymentu identyfikacyjnego. Wyniki przeprowadzonych eksperymentów potwierdzają założenie, iż sygnał sterujący uzyskany dla wartości współczynnika kosztu energii sterowania $q \approx 0$, gwarantuje minimalny czas trwania eksperymentu identyfikacyjnego oraz minimalną objętość obszaru ufności estymat parametrów. Gdy procentowa wartość współczynnika D-efektywności zmniejsza się, to zmniejsza się również czas trwania eksperymentu oraz koszt ekonomiczny procesu identyfikacji. Należy jednak stwierdzić, że suboptymalne sygnały pobudzające otrzymane dla różnych wartości współczynnika kosztu energii sterowania skutkują degradacją dokładności oszacowań estymowanych parametrów modelu układu (obserwowaną jako zwiększona objętość obszarów ufności parametrów).

Uzyskane podczas eksperymentów identyfikacyjnych wyniki pozwalają stwierdzić, iż istnieje kompromis pomiędzy czasem trwania eksperymentu identyfikacyjnego (związanego z czasem trwania pobudzenia) a dokładnością estymowanych parametrów, która zależy od przyjazności sygnału wykorzystanego do wzbudzenia modelu układu. Zatem ekonomiczny koszt identyfikacji można traktować jako czas trwania eksperymentu albo jako miarę dokładności uzyskiwanych estymat parametrów modelu układu.

Bibliografia

- [1] Kalaba, R. and Spingarn, K., *Control, identification, and input optimization*. Plenum Press, New York, USA, 1982
- [2] Ljung, L.: *System identification: Theory for the user*. Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey, USA, 1999
- [3] Pintelon, R. and Schoukens, J., *System identification: A frequency domain approach*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2012
- [4] Hugo, A. J., *Process controller performance monitoring and assessment*. Control. Arts Inc., 2001. Available online: <http://www.controlarts.com/>
- [5] Hildebrand, R. and Gevers, M., *Identification for control: Optimal input design with respect to worst-case v -gap cost function*. „SIAM Journal on Control Optimization” 2003, 41, 1586–1608
- [6] Antoulas, A. and Anderson, B., *On the choice of inputs in identification for robust control*. „Automatica” 1999, 35, 1009–103
- [7] Gevers, M. and Ljung, L., *Optimal experiments designs with respect to the intended model application*. „Automatica” 1986, 22, 543–554
- [8] Pronzato, L., *Optimal experimental design and some related control problems*. „Automatica” 2008, 44, 303–325
- [9] Hussain, M., *Review of the applications of neural networks in chemical process control–simulation and on–line implementation*. „Artificial Intelligence in Engineering” 1999, 13, 55–68
- [10] Bombois, X., Scorletti, G., Van den Hof, P.M.J. and Gevers, M., *Least costly identification experiment for control: a solution based on a high-order model approximation*. [w:] CD-ROM Proc. American Control Conference, Boston, Massachusetts, USA, 2004, 2818–2823
- [11] Bombois, X., Scorletti, G., Gevers, M., Van den Hof, P.M.J. and Hildebrand, R., *Least costly identification experiment for control*. „Automatica” 2006, 42, 1651–1662
- [12] Narasimhan, S. and Rengaswamy, R., *Multi-objective input signal design for plant friendly identification of process systems*. Proceeding of the American Control Conference, Boston, Massachusetts, USA, 2004, 4891–4896
- [13] Narasimhan, S. and Rengaswamy, R., *Multi-objective optimal input design for plant friendly identification*. Proceeding of the American Control Conference, Seattle, Washington, USA, 2008, 1304–1309
- [14] Rivera, D., Braun, M. and Mittelman, H., *Constrained multisine inputs for plant friendly identification of chemical processes*. [w:] 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, vol. 15, part 1, 2002, 480–485
- [15] Rivera, D., Lee, H., Braun, M. and Mittelman, H., *Plant friendly system identification: A challenge for the process industries*. [w:] 13th IFAC Symposium on System Identification (SYSID 2003), Rotterdam, Netherlands, 2003
- [16] Rafajłowicz, E. and Rafajłowicz, W., *A variational approach to optimal input signals for parameter estimation in systems with spatio-temporal dynamics*. [w:] 10th Int. Workshop in Model-Oriented Design and Analysis, Springer, Heidelberg, 2013, 219–227
- [17] Rafajłowicz, E. and Rafajłowicz, W., *More safe optimal input signals for parameter estimation of linear systems described by ODE*. System modelling and optimization, IFIP AICT, vol. 443, Springer, Heidelberg, 2014, 267–277
- [18] Kumar, A. and Narasimhan, S., *Robust plant friendly optimal input design*. [w:] 10th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, Mumbai, India, 2013, 553–558
- [19] Kumar, A., Nabil, M. and Narasimhan, S., *Economical and plant friendly input design for system identification*. European Control Conference, Strasbourg, France, 2014, 732–737

- [20] Steenis, R. and Rivera, D., *Plant-Friendly Signal Generation for System Identification Using a Modified Simultaneous Perturbation Stochastic Approximation (SPSA) Methodology*. „IEEE Transactions on Control Systems Technology” 2011, 19, 1604–1612
- [21] Rivera, D., Lee, H., Mittelmann, H. and Braun, M., *High-Purity Distillation-Using plant-friendly multisine signals to identify a strongly interactive process*. „IEEE Control Systems Magazine” 2007, 27 (5), 72–89
- [22] Jakowluk, W., *Design of an optimal input signal for plant-friendly identification of inertial systems*. „Przegląd Elektrotechniczny” 2009, 85 (6), 125–129
- [23] Jakowluk, W., *Design of an optimal actuation signal for identification of a torsional spring system*. „Przegląd Elektrotechniczny” 2011, 87 (6), 154–160
- [24] Jakowluk, W., *Optimal input signal design for a second order dynamic system identification subject to D-efficiency constraints*. [w:] 14th IFIP TC8 Int. Conference in Computer Information Systems and Industrial Management, Springer, Heidelberg, 2015, 351–362
- [25] Schwartz, A., Polak, E. and Chen, Y., *Riots – a Matlab toolbox for solving optimal control problems*. Version 1.0 for Windows, May 1997, available at: <http://www.schwartz-home.com/RIOTS/>
- [26] Tricaud, C. and Chen, Y., *Solving fractional order optimal control problems in riots_95 a general-purpose optimal control problem solver*. [w:] 3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Ankara, Turkey, 2008
- [27] Atkinson, A., Donev, A. and Tobias, R., *Optimum experimental design with SAS*. Oxford University Press, Oxford 2007
- [28] Jakowluk, W., *Plant friendly input design for parameter estimation in an inertial system with respect to D-efficiency constraints*. „Entropy” 2014, 16(11), 5822–5837
- [29] Uciński, D. and Chen, Y., *Sensor Motion Planning in Distributed Parameter Systems Using Turing’s Measure of Conditioning*. Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, San Diego, USA, 2006, 759–764
- [30] Stryk, O., *User’s guide for DIRCOL, a direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems*. Version 2.1, Technische Universität Darmstadt, November 1999, available at: <http://www.sim.informatik.tu-darmstadt.de/index/leftnav.html>.
- [31] Jennings, L., Fisher, M., Teo, K. and Goh, C., *MISER 3: Optimal control software. Theory and user manual*. Version 2.0, Dept. of Mathematics, University of Western Australia, Nedlands, 2002, available at: school.maths.uwa.edu.au/~les/miser/Misermanual.pdf.

Free final time optimal input design for process system identification

Abstract: Input design is the process of designing an optimal input signal that is used for the actuation of the system to maximize the information about system dynamics. The novelty of this work is to design the free final time constraint input signals which are then used in the system identification experiments. The solution of constrained optimal input design problem is based on the minimization of the extra state variable representing the free final time scaling factor, formulated in the Bolza functional form, subject to the D-efficiency constraints as well as input energy constraints. The constraints imposed on input signal design should allow the operator for model parameter estimation in the safest way. An innovative contribution of this work is to use obtained free terminal time inputs to examine the economic aspects between the imposed constraints on the input signal

design and the experiment duration while undertaking an identification experiment. The presented methodology could be utilized for a general class of systems and is illustrated using numerical examples.

Keywords: D-efficiency, free final time problem, input signal design, optimal control