

Rozdział 1

Wpływ doboru technik normalizacji kryteriów decyzyjnych na stabilność rankingów uzyskanych algorytmem TOPSIS

Marzena Filipowicz-Chomko

Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka

Streszczenie: Metody wielokryterialnej analizy decyzyjnej dostarczają wielu algorytmów, które mogą być wykorzystywane do rozwiązywania problemów porządkowania rozważanych wariantów decyzyjnych. Jednym z najczęściej stosowanych jest algorytm TOPSIS, w którym ranking wariantów decyzyjnych tworzony jest na podstawie ich odległości od wariantu idealnego i antyidealnego. Procedura ta wymaga zastosowania techniki normalizacji danych, której celem jest przedstawienie wartości kryteriów na wspólnej skali, aby umożliwić ich porównywalność. Ze względu na wielość technik normalizacji funkcjonujących w literaturze przedmiotu, dużym wyzwaniem jest dobór właściwej z nich, dopasowanej do struktury problemu decyzyjnego. Zagadnienie jest istotne, gdyż często w badaniach wykorzystywana jest jedna metoda bez uzasadnienia jej wyboru. Głównym celem niniejszego opracowania będzie dokonanie oceny stabilności rankingów otrzymanych metodą TOPSIS z wykorzystaniem różnych technik normalizacyjnych. Dodatkowo zostanie sprawdzony wpływ zastosowanych dwóch sposobów mierzenia odległości na ocenę globalną i ranking wariantów decyzyjnych.

Słowa kluczowe: problem decyzyjny, metody wielokryterialne, normalizacja danych, TOPSIS, stabilność rankingów, odległość euklidesowa, odległość Mahalanobisa

Wprowadzenie

Metody wielokryterialnej analizy decyzyjnej są ważnymi i użytecznymi narzędziami, pozwalającymi na rozwiązywanie coraz bardziej złożonych problemów w różnych dziedzinach aktywności człowieka. Dostarczają one wielu algorytmów, które między innymi mogą być wykorzystywane przy porządkowaniu i klasyfikacji rozważanych wariantów decyzyjnych. Do najbardziej popularnych algorytmów wielokryterialnego podejmowania decyzji można zaliczyć:

- metody addytywne takie jak SAW (ang. *Simple Additive Weighting Method*), [12], SMART (ang. *Simple Multi-Attribute Ranking Technique*), [14];

- metody analitycznej hierarchizacji, a wśród nich AHP (ang. *Analytical Hierarchy Process*), [41], REMBRANDT (ang. *Ratio Estimation in Magnitudes or deciBells to Rate Alternatives which are Non-Dominated*), [26], ANP (ang. *Analytic Network Process*), [42], MACBETH (ang. *Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation TecHnique*), [3];
- metody ELECTRE (fr. *ELimination Et Choix Traduisant la REalité*), [40];
- metody PROMETHEE (ang. *Preference Ranking Organisation METHod for Enrichment Evaluations*), [5];
- metody wykorzystujące punkty referencyjne takie jak TOPSIS (ang. *Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*), [20], VIKOR (serb. *Višekriterijumska Optimizacija i Kompromisno Resenje*), [31], BIPOLAR [23], BIPOLAR-SD [18].

Mając do dyspozycji tak bogaty zbiór algorytmów, wybór właściwej metody wielokryterialnej sam w sobie staje się problemem wielokryterialnym i temu zagadnieniu poświęconych jest wiele prac [17, 44, 46]. Triantaphyllou w [44] podkreśla jego ważność, ale też zauważa trudność w odnalezieniu odpowiedzi na pytanie: „Jaka metoda jest najlepsza dla danego problemu?”¹ Po dokonaniu wyboru algorytmu, przed badaczami pojawiają się nowe wyzwania, ponieważ zastosowanie konkretnej procedury często wymaga odpowiedniego przygotowania zestawu danych, tak by przebiegała ona w poprawny sposób. Jednym z pierwszych kroków jest normalizacja ocen wariantów decyzyjnych dla analizowanych kryteriów, która pozwala na ujednolicenie ich charakteru oraz sprowadzenie wartości do poziomu umożliwiającego ich porównywanie. W literaturze przedmiotu przedstawiono wiele technik normalizacyjnych [1, 7, 8, 10, 13, 20, 28, 29, 47]. Ich różnorodność skłania więc do postawienia pytań:

- Czy wybór metody normalizacyjnej ma wpływ na ranking końcowy wariantów decyzyjnych?
- Która z metod normalizacyjnych jest najwłaściwsza w kontekście analizowanej sytuacji decyzyjnej?

Próbie odpowiedzi na powyższe pytania, w przypadku jednej z najczęściej wybieranych przez badaczy technik, a mianowicie metodzie TOPSIS, poświęcone jest to opracowanie. Jego głównym celem jest ocena stabilności rankingów otrzymanych metodą TOPSIS w zależności od zastosowanych technik normalizacyjnych. Ponadto, ocenie wpływu stosowanych metod normalizacji została poddana zmodyfikowana metoda TOPSIS, w której zamiast odległości euklidesowej, jest rozważana odległość Mahalanobisa, stosowana w przypadku, gdy zakłada się preferencyjną zależność kryteriów decyzyjnych.

¹ W książce [44] na s. XXIII zapisano “Therefore, the question “Which is the best method for a given problem?” has become one of the most important but also most difficult to answer”.

1.1. Algorytm TOPSIS

Metoda TOPSIS należy do grupy metod szkoły amerykańskiej [16, 45] opartych na kryterium syntetycznym, które wykorzystując funkcję agregującą wartości wariantów decyzyjnych ze względu na poszczególne kryteria pozwalają na utworzenie rankingu rozważanych wariantów. Algorytm TOPSIS został zaproponowany przez Hwanga i Yoona w 1981 r. w pracy [20], choć bardzo podobną metodę przedstawił dużo wcześniej, bo w 1968 r., profesor Zdzisław Hellwig [19]. Główną ideą metody TOPSIS jest ocena wariantów decyzyjnych bazująca na pomiarze odległości tych wariantów od dwóch punktów referencyjnych – rozwiązania idealnego, PIS (ang. *Positive Ideal Solution*) oraz rozwiązania antyidealnego, NIS (ang. *Negative Ideal Solution*). Najkorzystniejszym wariantem decyzyjnym jest ten, który cechuje się najmniejszą odległością od PIS i największą odległością od NIS.

1.1.1. Klasyczny algorytm TOPSIS

Dowolny wielokryterialny problem dyskretny, w którym rozważa się m wariantów decyzyjnych ($A_i, i = 1, \dots, m$) ocenianych na podstawie n kryteriów ($C_j, j = 1, \dots, n$), można przedstawić w postaci macierzy decyzyjnej $X = [x_{ij}]_{m \times n}$ (tabela 1.1), w której x_{ij} jest wartością i – tego wariantu decyzyjnego ze względu na j – te kryterium, zaś $w_j \in [0,1]$ oznacza wagę, czyli istotność j – tego kryterium.

TABELA 1.1. Ogólna postać macierzy decyzyjnej

	w_1	w_2	...	w_j	...	w_n
	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Rozważany zbiór kryteriów dzieli się na dwa rozłączne podzbiory: kryteriów typu zysk² ($Z_j, j = 1, \dots, k$) oraz kryteriów typu strata³ ($S_j, j = k + 1, \dots, n$). Przyjmuje się, że kryteria decyzyjne są niezależne preferencyjnie. Dla tak zdefiniowanego problemu decyzyjnego klasyczny algorytm TOPSIS zaproponowany w [20] przebiega zgodnie z następującymi etapami:

- ETAP 0. Wyznaczenie macierzy decyzyjnej $X=[x_{ij}]$ i wektora wag $w = [w_1, \dots, w_n]$, gdzie $w_1 + \dots + w_n = 1$.

² Im wyższa wartość kryterium, tym lepiej.

³ Im niższa wartość kryterium, tym lepiej.

- ETAP 1. Wyznaczenie znormalizowanej macierzy decyzyjnej $N = [z_{ij}]_{m \times n}$, gdzie z_{ij} jest wartością znormalizowanej oceny wariantu decyzyjnego, zgodnie z formułą:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{ij})^2}},$$

gdzie $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Formuła ta została zaproponowana w oryginalnym algorytmie TOPSIS wprowadzonym przez Hwanga i Yoona. W badaniach wykorzystujących TOPSIS często jest ona zastępowana przez inne techniki normalizacyjne (tabela 1.2).

- ETAP 2. Wyznaczenie znormalizowanej ważonej macierzy decyzyjnej

$$W = [v_{ij}]_{m \times n},$$

gdzie

$$v_{ij} = w_j z_{ij}.$$

- ETAP 3. Wyznaczenie wariantów idealnego A^+ oraz antyidealnego A^- postaci:

$$A^+ = [v_1^+, \dots, v_n^+], \text{ gdzie } v_j^+ = \begin{cases} \max v_{ij}, v_{ij} \in Z \\ \min v_{ij}, v_{ij} \in S \end{cases}$$

$$A^- = [v_1^-, \dots, v_n^-], \text{ gdzie}$$

$$v_j^- = \begin{cases} \min v_{ij}, v_{ij} \in Z \\ \max v_{ij}, v_{ij} \in S \end{cases}.$$

- ETAP 4. Obliczenie odległości⁴ (d_i^+) i -tego wariantu decyzyjnego od A^+ oraz odległości (d_i^-) i -tego wariantu decyzyjnego od A^- ,

$$d_i^+ = \sqrt{(v_{ij} - v_j^+)^2}, d_i^- = \sqrt{(v_{ij} - v_j^-)^2},$$

gdzie $i = 1, \dots, m$.

- ETAP 5. Wyznaczenie wartości syntetycznego miernika oceny (tzw. oceny globalnej) i -tego wariantu decyzyjnego, zgodnie z formułą:

$$T_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-},$$

gdzie $i = 1, \dots, m$.

Wartość miernika $T_i \in [0; 1]$.

⁴ W oryginalnym algorytmie TOPSIS sugerowana była odległość euklidesowa.

- ETAP 6. Budowa rankingu wariantów decyzyjnych ze względu na malejące wartości syntetycznego miernika oceny.
Im wartość miernika oceny jest wyższa, tym wyższą pozycję osiąga wariant decyzyjny w rankingu.

1.1.2. Modyfikacje algorytmu TOPSIS

Do zalet metody TOPSIS zalicza się jej prostotę, zrozumiałość oraz gwarancję łatwej interpretacji wyników [34, 38]. Zakres jej aplikacyjności jest bardzo szeroki i obejmuje między innymi zagadnienia związane z zarządzaniem łańcuchem dostaw i logistyką [11, 51], inżynierią i systemami produkcji [33], zarządzaniem w biznesie i marketingu [39], ochroną zdrowia [2], zrównoważonym rozwojem [36], wspomaganiem negocjacji [37, 38, 50]. Obszerny przegląd literaturowy dotyczący zastosowań metody TOPSIS w różnych obszarach został zawarty w [4, 53].

W literaturze przedmiotu wskazywane są również pewne ograniczenia tej metody [34, 49] oraz problemy związane z jej stosowaniem [1, 53], które zaowocowały modyfikacjami klasycznego algorytmu TOPSIS.

Kluczowe pytania dotyczące stosowania procedury TOPSIS są z jednej strony związane z charakterem i skalą pomiaru danych, a z drugiej z implementacją algorytmów obliczeniowych na poszczególnych etapach procedury. Przystępując do obliczeń, pyta się między innymi o wybór:

- metody normalizacji [1, 8, 28];
- metody pomiaru odległości przy założeniu preferencyjnej niezależności i zależności kryteriów [6, 22, 48];
- metody wyznaczania wag, czyli stopnia istotności kryteriów [15, 30, 35];
- sposobu wyznaczania wektorów PIS i NIS [36, 37].

Każdy z zasygnalizowanych powyżej problemów prowadzi do pytania o wpływ zastosowanych rozwiązań (modyfikacji oryginalnej procedury) na ocenę globalną oraz ranking wariantów decyzyjnych otrzymanych algorytmem TOPSIS.

W niniejszej pracy badania koncentrują się na próbie odpowiedzi na pytanie dotyczące wpływu wyboru metody normalizacji na ranking wariantów otrzymany metodą TOPSIS. Modyfikacja klasycznej procedury w tym przypadku będzie polegała na zastąpieniu formuły normalizacyjnej (ETAP 1) zaproponowanej w [20], kolejno jedną z sześciu metod opisanych poniżej (tabela 1.2). Dodatkowo zbadany zostanie wpływ sposobu mierzenia odległości na stabilność rankingów przy zastosowanych różnych technikach normalizacyjnych. Modyfikacja, w tym przypadku będzie polegała na zastąpieniu odległości euklidesowej (ETAP 4) odległością Mahalanobisa [27], która uwzględnia zależności pomiędzy kryteriami decyzyjnymi.

1.1.3. Techniki normalizacji kryteriów

W pracy uwzględniono sześć najczęściej wykorzystywanych technik normalizacyjnych [1, 32, 47], które zastąpiły formułę oryginalnego algorytmu TOPSIS (ETAP 1). Badaniom symulacyjnym zostały poddane: normalizacja wektorowa, normalizacje liniowe oparte na max (dwa warianty), max-min i sumie oraz normalizacja logarytmiczna. Formuły normalizacyjne zostały zebrane w tabeli 1.2.

TABELA 1.2. Formuły zastosowanych w pracy technik normalizacyjnych

Technika normalizacji (oznaczenie)	Formuła dla kryteriów typu zysk	Formuła dla kryteriów typu strata
wektorowa (N1) [7, 21, 29]	$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_{ij})^2}}$	$z_{ij} = \frac{1/x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (1/x_{ij})^2}}$
liniowa oparta na max typ 1 (N2) [1, 7, 8, 47]	$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max x_{ij}}$	$z_{ij} = 1 - \frac{x_{ij}}{\max x_{ij}}$
liniowa oparta na max typ 2 (N3) [24, 43]	$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\max x_{ij}}$	$z_{ij} = \frac{\min x_{ij}}{x_{ij}}$
liniowa oparta na max-min (N4) [1, 7, 8, 47]	$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \min x_{ij}}{\max x_{ij} - \min x_{ij}}$	$z_{ij} = \frac{\max x_{ij} - x_{ij}}{\max x_{ij} - \min x_{ij}}$
liniowa oparta na sumie (N5) [1, 8, 21, 47]	$z_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^m x_{ij}}$	$z_{ij} = \frac{1/x_{ij}}{\sum_{i=1}^m (1/x_{ij})}$
logarytmiczna (N6) [21, 29, 53]	$z_{ij} = \frac{\ln(x_{ij})}{\ln(\prod_{i=1}^m x_{ij})}$	$z_{ij} = \frac{1}{m-1} \left(1 - \frac{\ln(x_{ij})}{\ln(\prod_{i=1}^m x_{ij})} \right)$

1.1.4. TOPSIS-M

Klasyczny algorytm TOPSIS zakłada preferencyjną niezależność kryteriów, nie uwzględnia zatem zależności pomiędzy kryteriami. Rozwiązaniem tego problemu, a tym samym alternatywą dla odległości euklidesowej, może być modyfikacja ETAPU 4 przez zastosowanie miary Mahalanobisa jako odległości od rozwiązania idealnego i antyidealnego. W algorytmie TOPSIS z odległością Mahalanobisa (TOPSIS-M), ETAP 4 i ETAP 5 klasycznej procedury będą przebiegały w następujący sposób [9]:

- ETAP 4a. Obliczenie odległości (dm_i^+ i dm_i^-) i -tego wariantu od A^+ oraz A^- zgodnie z formułami:

$$dm_i^+ = \sqrt{(A_i - A^+)^T R^{-1} (A_i - A^+)},$$

$$dm_i^- = \sqrt{(A_i - A^-)^T R^{-1} (A_i - A^-)},$$

gdzie $A_i = [z_{i1}, \dots, z_{in}]$, z_{ij} jest znormalizowaną wartością wariantu decyzyjnego a ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$), R^{-1} jest odwrotnością macierzy kowariancji wyznaczonej dla znormalizowanej macierzy decyzyjnej.

- ETAP 5a. Wyznaczenie wartości syntetycznego miernika oceny (tzw. oceny globalnej) każdego wariantu decyzyjnego, zgodnie z formułą:

$$TM_i = \frac{dm_i^-}{dm_i^+ + dm_i^-},$$

gdzie $i = 1, \dots, m$.

1.2. Metody oceny stabilności rankingów

W literaturze przedmiotu można spotkać różne podejścia do oceny stabilności rankingów. Według Chakraborty i Yeha [8] właściwą procedurą normalizacyjną jest ta, dzięki której otrzymuje się rankingi podobne do tych stworzonych za pomocą innych procedur. Oczywiście ocena wzrokowa podobieństwa rankingów może być tu niewystarczająca. Dlatego też w tym opracowaniu wzmocniono ją przez zastosowanie analizy korelacyjnej oraz miary podobieństwa rankingów.

Do oceny spójności ocen globalnych uzyskanych algorytmem TOPSIS w przypadku sześciu technik normalizacyjnych zastosowano korelację Pearsona [7], a oceny stabilności rankingów dokonano, posługując się współczynnikiem korelacji rang Spearmana [52].

Ponadto, w pracy zastosowano procedurę wspomagającą wybór metody normalizacji. Uzyskanych sześć rankingów porównano za pomocą współczynnika podobieństwa, zaproponowanego w pracy [25], który jest wyznaczany zgodnie z następującą procedurą:

- ETAP 1. Wyznaczenie miary podobieństwa rankingów μ_{pq} zgodnie z formułą:

$$\mu_{pq} = 1 - \frac{2 \sum_{i=1}^m |c_{ip} - c_{iq}|}{m^2 - z},$$

gdzie v jest liczbą rankingów, c_{ip} – pozycją i -tego wariantu w rankingu o numerze p , c_{iq} – pozycją i -tego wariantu w rankingu o numerze q , dla $p, q = 1, 2, \dots, v$. Ponadto,

$$z = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \in P \\ 1 & \text{dla } m \notin P \end{cases}, P - \text{zbiór liczb naturalnych parzystych}.$$

Wartość współczynnika μ_{pq} mieści się w przedziale $[0; 1]$.

- ETAP 2. Określenie stopnia podobieństwa dla każdego rankingu p w stosunku do pozostałych rankingów zgodnie z formułą:

$$u_p = \frac{1}{v-1} \sum_{\substack{q=1 \\ p \neq q}}^v \mu_{pq}$$

gdzie $p, q = 1, 2, \dots, v$.

- ETAP 3. Wybór metody, dla której $u_p = \max_p u_p$.

1.3. Przykład obliczeniowy i schemat badania

Do realizacji głównego celu opracowania, czyli oceny wpływu sześciu przedstawionych w tabeli 1.2 technik normalizacji na stabilność rankingów otrzymanych algorytmami TOPSIS i TOPSIS-M, posłużono się przykładem obliczeniowym, opartym na danych umownych.

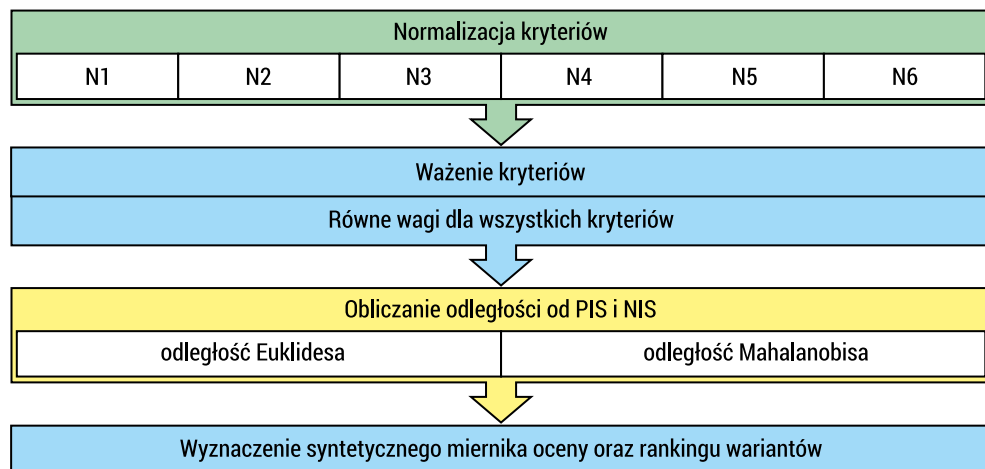
Rozważono wielokryterialny problem decyzyjny, na który składa się:

- zbiór dziesięciu wariantów decyzyjnych: $A_1, A_2, \dots, A_{10}$;
- zbiór czterech kryteriów: C_1, C_2, C_3, C_4 , gdzie C_1, C_2 są kryteriami typu zysk, zaś C_3, C_4 – kryteriami typu strata;
- macierz decyzyjna (tabela 1.3).

TABELA 1.3. Macierz decyzyjna

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	690	7	3,10	0,45
A_2	590	6	4,00	0,16
A_3	600	10	3,50	0,08
A_4	620	5	3,20	0,25
A_5	700	7	2,80	0,80
A_6	650	9	1,00	0,56
A_7	500	10	4,50	0,17
A_8	640	8	4,00	1,50
A_9	580	6	3,00	0,15
A_{10}	520	7	2,60	0,25

Kolejne etapy procedury TOPSIS pozwoliły na wyznaczenie znormalizowanych macierzy decyzyjnych z wykorzystaniem sześciu formuł normalizacyjnych N1-N6 (tabela 1.2), wartości wektorów PIS (A^+) i NIS (A^-), wartości syntetycznych mierników oceny (T_i / TM_i) na podstawie wyznaczonych odległości od PIS i NIS mierzonych odległością euklidesową i Mahalanobisa oraz rankingów wariantów. W rozważanym problemie przyjęto, że wszystkie kryteria są tak samo istotne, dlatego zastosowano równe wagi, co pozwoliło na pominięcie drugiego etapu procedury. Schemat przeprowadzonego badania został przedstawiony na rysunku 1.1.



RYSUNEK 1.1. Schemat badania

Algorytm TOPSIS z kolejno wykorzystywanymi sześcioma technikami normalizacji oraz odległością euklidesową oznaczany będzie w dalszej części pracy przez T_Ni (gdzie $i = 1, \dots, 6$), a z zastosowaną odległością Mahalanobisa – przez TM_Ni (gdzie $i = 1, \dots, 6$).

1.4. Wyniki badania

1.4.1. Rankingi wariantów decyzyjnych uzyskane za pomocą TOPSIS z wykorzystaniem różnych formuł normalizacyjnych

Uzyskane za pomocą dwóch podejść (odległość euklidesowa, odległość Mahalanobisa) wyniki zostały zawarte w tabelach 1.4–1.9.

Normalizacja wektorowa (N1)

TABELA 1.4. Macierz decyzyjna po normalizacji wektorowej N1, współrzędne wektorów: idealnego (A^+) i antyidealnego (A^-), wartości ocen globalnych oraz rankingi wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N1	TM_i	Ranking TM_N1
A_1	0,356	0,288	0,238	0,125	0,182	8	0,414	4
A_2	0,305	0,247	0,184	0,351	0,321	5	0,321	8
A_3	0,310	0,412	0,210	0,703	0,570	1	0,577	2
A_4	0,320	0,206	0,230	0,225	0,223	7	0,300	9
A_5	0,362	0,288	0,263	0,070	0,174	9	0,419	3
A_6	0,336	0,371	0,736	0,100	0,500	2	0,594	1
A_7	0,258	0,412	0,164	0,331	0,342	4	0,390	5
A_8	0,331	0,330	0,184	0,037	0,143	10	0,357	6
A_9	0,300	0,247	0,245	0,375	0,364	3	0,337	7
A_{10}	0,269	0,288	0,283	0,225	0,260	6	0,254	10
A^+	0,362	0,412	0,736	0,703				
A^-	0,258	0,206	0,164	0,037				

Klasyczna metoda TOPSIS z normalizacją wektorową N1 (T_N1) wyłoniła ranking wariantów $A_3 > A_6 > A_9 > A_7 > A_2 > A_{10} > A_4 > A_1 > A_5 > A_8$. W przypadku TOPSIS-M (TM_N1) ranking był następujący $A_6 > A_3 > A_5 > A_1 > A_7 > A_8 > A_9 > A_2 > A_4 > A_{10}$ i wskazywał na znaczące zmiany pozycji wariantów decyzyjnych w porównaniu z rankingiem T_N1 (współczynnik korelacji rang Spearmana dla rankingów T_N1 i TM_N1 wynosił 0,297). Żaden z wariantów decyzyjnych nie osiągnął tej samej lokaty w obu

rankingach. Największa zmiana dotyczyła wariantu A_5 , który w rankingu T_N1 zajął dziewiątą pozycję, zaś w rankingu TM_N1 – trzecią. Wartości syntetycznych mierników oceny mieściły się w przedziałach $[0,143;0,570]$ oraz $[0,254; 0,594]$, odpowiednio dla metod T_N1 i TM_N1 .

Normalizacja liniowa oparta na max typ 1 (N2)

TABELA 1.5. Macierz decyzyjna po normalizacji liniowej opartej na max typ 1 (N2), współrzędne wektorów: idealnego (A^+) i antyidealnego (A^-), wartości ocen globalnych oraz rankingi wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N2	TM_i	Ranking TM_N2
A_1	0,986	0,700	0,311	0,700	0,579	5	0,668	3
A_2	0,843	0,600	0,111	0,893	0,535	8	0,541	8
A_3	0,857	1,000	0,222	0,947	0,658	2	0,710	2
A_4	0,886	0,500	0,289	0,833	0,556	6	0,543	7
A_5	1,000	0,700	0,378	0,467	0,500	9	0,626	4
A_6	0,929	0,900	0,778	0,627	0,762	1	0,724	1
A_7	0,714	1,000	0,000	0,887	0,551	7	0,544	6
A_8	0,914	0,800	0,111	0,000	0,243	10	0,405	10
A_9	0,829	0,600	0,333	0,900	0,609	4	0,551	5
A_{10}	0,743	0,700	0,422	0,833	0,637	3	0,485	9
A^+	1,000	1,000	0,778	0,947				
A^-	0,714	0,500	0,000	0,000				

Metodami T_N2 i TM_N2 (z normalizacją liniową opartą na max typu 1 (N2)) otrzymano, odpowiednio, następujące rankingi wariantów: $A_6 > A_3 > A_{10} > A_9 > A_1 > A_4 > A_7 > A_2 > A_5 > A_8$ i $A_6 > A_3 > A_1 > A_5 > A_9 > A_7 > A_4 > A_2 > A_{10}$. W obu rankingach na pierwszej i drugiej pozycji znalazły się warianty A_6 i A_3 , ostatnią zaś zajął wariant A_8 . Największa zmiana lokat miała miejsce w przypadku wariantu A_{10} : z pozycji trzeciej (w T_N2) na pozycję dziewiątą (w TM_N2). Wartości syntetycznych mierników oceny mieściły się w przedziałach $[0,243;0,762]$ oraz $[0,405; 0,724]$, odpowiednio dla T_N2 i TM_N2 . Współczynnik korelacji rang Spearmana dla rankingów T_N2 i TM_N2 wynosił 0,588.

Normalizacja liniowa oparta na max typ 2 (N3)

TABELA 1.6. Macierz decyzyjna po normalizacji liniowej opartej na max typ 2 (N3), współrzędne wektorów: idealnego (A^+) i antyidealnego (A^-), wartości ocen globalnych oraz rankingi wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N3	TM_i	Ranking TM_N3
A_1	0,986	0,700	0,323	0,178	0,252	7	0,057	9
A_2	0,843	0,600	0,250	0,500	0,323	5	0,227	5
A_3	0,857	1,000	0,286	1,000	0,598	1	0,404	2
A_4	0,886	0,500	0,313	0,320	0,231	9	0,177	6
A_5	1,000	0,700	0,357	0,100	0,247	8	0,118	8
A_6	0,929	0,900	1,000	0,143	0,511	2	0,619	1
A_7	0,714	1,000	0,222	0,471	0,398	3	0,171	7
A_8	0,914	0,800	0,250	0,053	0,228	10	0,025	10
A_9	0,829	0,600	0,333	0,533	0,358	4	0,283	3
A_{10}	0,743	0,700	0,385	0,320	0,271	6	0,239	4
A^+	1,000	1,000	1,000	1,000				
A^-	0,714	0,500	0,222	0,053				

Rankingi uzyskane z wykorzystaniem normalizacji opartej na max typu 2 (N3) mają postać: $A_3 > A_6 > A_7 > A_9 > A_2 > A_{10} > A_1 > A_5 > A_4 > A_8$ dla T_N3 oraz $A_6 > A_3 > A_9 > A_{10} > A_2 > A_4 > A_7 > A_5 > A_1 > A_8$ dla TM_N3. Wartości ocen globalnych są zawarte w przedziałach [0,228;0,598] oraz [0,025; 0,619], odpowiednio dla metod TOPSIS i TOPSIS-M. Trzy warianty decyzyjne A_2 , A_5 , A_8 w obu metodach zachowały te same lokaty. Współczynnik korelacji rang Spearmana dla rankingów T_N3 i TM_N3 wyniósł 0,782.

Normalizacja liniowa oparta na max-min (N4)

TABELA 1.7. Macierz decyzyjna po normalizacji liniowej opartej na max-min (N4), współrzędne wektorów: idealnego (A^+) i antyidealnego (A^-), wartości ocen globalnych oraz rankingi wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N4	TM_i	Ranking TM_N4
A_1	0,950	0,400	0,400	0,739	0,599	3	0,668	3
A_2	0,450	0,200	0,143	0,944	0,453	9	0,541	8
A_3	0,500	1,000	0,286	1,000	0,637	2	0,710	2

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N4	TM_i	Ranking TM_N4
A_4	0,600	0,000	0,371	0,880	0,474	8	0,543	7
A_5	1,000	0,400	0,486	0,493	0,577	4	0,626	4
A_6	0,750	0,800	1,000	0,662	0,777	1	0,724	1
A_7	0,000	1,000	0,000	0,937	0,492	6	0,544	6
A_8	0,700	0,600	0,143	0,000	0,398	10	0,405	10
A_9	0,400	0,200	0,429	0,951	0,496	5	0,551	5
A_{10}	0,100	0,400	0,543	0,880	0,485	7	0,485	9
A^+	1,000	1,000	1,000	1,000				
A^-	0,000	0,000	0,000	0,000				

W przypadku zastosowanej normalizacji liniowej max-min (N4) rankingi są następujące: $A_6 > A_3 > A_1 > A_5 > A_9 > A_7 > A_{10} > A_4 > A_2 > A_8$ dla T_N4 oraz $A_6 > A_3 > A_1 > A_5 > A_9 > A_7 > A_4 > A_2 > A_{10} > A_8$ dla TM_N4. Pozycje dla większości wariantów pokrywają się. Zgodność rankingów potwierdza bardzo wysoka wartość współczynnika korelacji rang Spearmana wynosząca 0,964. Wartości ocen globalnych mieszczą się w przedziałach [0,398;0,777] oraz [0,405; 0,724], odpowiednio dla metod T_N4 i TM_N4.

Normalizacja liniowa oparta na sumie (N5)

TABELA 1.8. Macierz decyzyjna po normalizacji liniowej opartej na sumie (N5), współrzędne wektorów: idealnego (A^+) i antyidealnego (A^-), wartości ocen globalnych oraz rankingi wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N5	TM_i	Ranking TM_N5
A_1	0,113	0,093	0,087	0,049	0,169	8	0,426	3
A_2	0,097	0,080	0,067	0,138	0,333	5	0,364	6
A_3	0,099	0,133	0,077	0,276	0,584	1	0,595	1
A_4	0,102	0,067	0,084	0,088	0,227	7	0,344	8
A_5	0,115	0,093	0,096	0,028	0,158	9	0,423	4
A_6	0,107	0,120	0,269	0,039	0,479	2	0,536	2
A_7	0,082	0,133	0,060	0,130	0,341	4	0,339	9
A_8	0,105	0,107	0,067	0,015	0,124	10	0,349	7
A_9	0,095	0,080	0,090	0,147	0,376	3	0,379	5

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N5	TMi	Ranking TM_N5
A_{10}	0,085	0,093	0,103	0,088	0,260	6	0,229	10
A^+	0,115	0,133	0,269	0,276				
A^-	0,082	0,067	0,060	0,015				

Rankingi uzyskane z wykorzystaniem normalizacji liniowej opartej na sumie (N5) mają postaci: $A_3 > A_6 > A_9 > A_7 > A_2 > A_{10} > A_4 > A_1 > A_5 > A_8$ dla algorytmu T_N5 oraz $A_3 > A_6 > A_1 > A_5 > A_9 > A_2 > A_8 > A_4 > A_7 > A_{10}$ dla TM_N5. Pozycje pokrywają się jedynie w przypadku wariantów A_3 i A_6 . Współczynnik korelacji rang Spearmana dla rankingów T_N5 i TM_N5 wynosił 0,358. Wartości syntetycznych mierników oceny są zawarte w przedziałach [0,124;0,584] oraz [0,229;0,595], odpowiednio dla T_N5 i TM_N5.

Normalizacja logarytmiczna (N6)

TABELA 1.9. Macierz decyzyjna po normalizacji logarytmicznej (N6), współrzędne wektorów: idealnego (A^+) i antyidealnego (A^-), wartości ocen globalnych oraz rankingi wariantów decyzyjnych

	C_1	C_2	C_3	C_4	T_i	Ranking T_N6	TMi	Ranking TM_N6
A_1	0,102	0,098	0,100	0,104	0,501	6	0,527	4
A_2	0,100	0,090	0,097	0,094	0,243	9	0,314	10
A_3	0,100	0,116	0,098	0,088	0,538	5	0,499	5
A_4	0,100	0,081	0,099	0,098	0,223	10	0,325	8
A_5	0,102	0,098	0,101	0,109	0,566	4	0,570	2
A_6	0,101	0,110	0,111	0,106	0,782	1	0,782	1
A_7	0,097	0,116	0,096	0,095	0,579	3	0,437	6
A_8	0,101	0,104	0,097	0,115	0,667	2	0,544	3
A_9	0,099	0,090	0,100	0,094	0,251	8	0,315	9
A_{10}	0,098	0,098	0,101	0,098	0,437	7	0,375	7
A^+	0,102	0,116	0,111	0,115				
A^-	0,097	0,081	0,096	0,088				

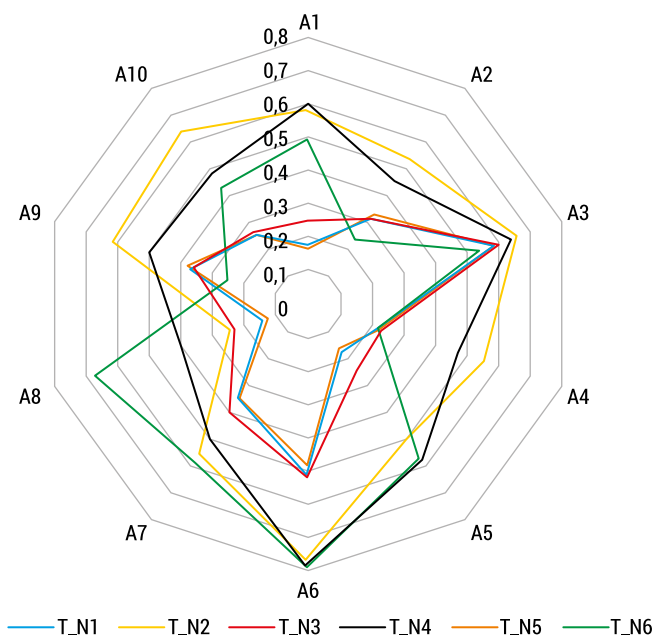
Z tabeli 1.9 można odczytać rankingi wariantów: $A_6 > A_8 > A_7 > A_5 > A_3 > A_1 > A_{10} > A_9 > A_2 > A_4$ dla procedury T_N6 oraz $A_6 > A_5 > A_8 > A_1 > A_3 > A_7 > A_{10} > A_4 > A_9 > A_2$ dla TM_N6. Oba rankingi wskazują wariant A_6 jako najlepszy. Pozostałe warianty poza dwoma (A_3 i A_{10}) nie uzyskują tych samych pozycji, ale zmiany nie są duże. Największa dotyczy wariantu A_7 , który w rankingu T_N6 osiągnął trzecią lokatę,

a w TM_N6 – szóstą. Współczynnik korelacji rang Spearmana dla rankingów T_N6 i TM_N6 wynosił 0,782. Wartości syntetycznych mierników oceny mieszczą się w przedziałach [0,223;0,782] oraz [0,314; 0,782], odpowiednio dla metod T_N6 i TM_N6.

1.4.2. Stabilność rankingów uzyskanych algorytmami TOPSIS i TOPSIS-M z wykorzystaniem wybranych technik normalizacji

Z danych zawartych w tabelach 1.4–1.9 wynika, że przyjęta technika normalizacji wpływa na ocenę i w konsekwencji ranking końcowy wariantów decyzyjnych zarówno w przypadku algorytmu TOPSIS z zastosowaną odległością euklidesową, jak i z odległością Mahalanobisa.

Wartości syntetycznych mierników oceny wariantów decyzyjnych wyznaczone dla sześciu metod normalizacyjnych i odległości euklidesowej przedstawiono na rysunku 1.2. W tym przypadku nie uzyskano identycznych ocen globalnych dla żadnej pary technik normalizacyjnych. Na rysunku 1.2 można jedynie zaobserwować spójność wyników w przypadku zastosowanych metod N1, N3 oraz N5, co potwierdzają współczynniki korelacji Pearsona ($r_{15} = 0,996$, $r_{13} = 0,974$, $r_{35} = 0,960$). Największe rozbieżności zaś obserwuje się przy porównaniu wyników uzyskanych za pomocą normalizacji logarytmicznej z wynikami wszystkich pozostałych technik normalizacyjnych (tabela 1.10).



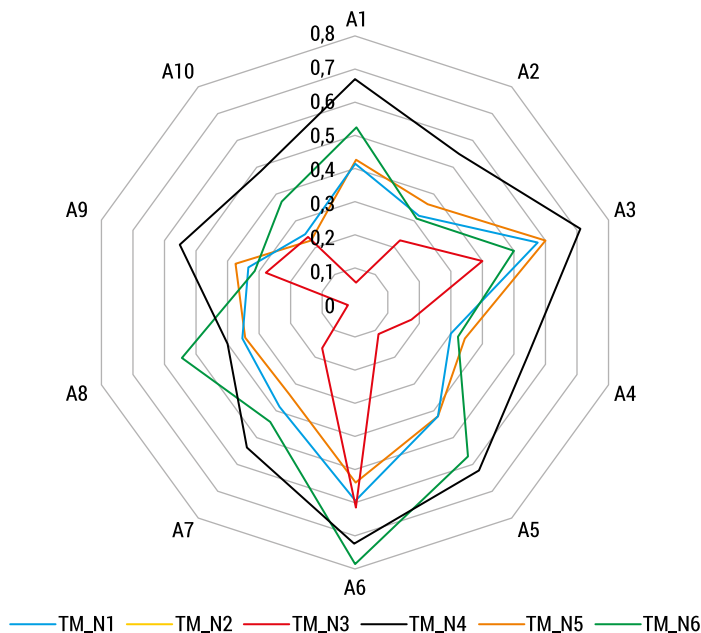
RYSUNEK 1.2. Wartości syntetycznych mierników oceny wariantów decyzyjnych A_1 – A_{10} wyznaczone za pomocą metody TOPSIS z odległością euklidesową dla technik normalizacyjnych N1-N6

TABELA 1.10. Macierz współczynników korelacji Pearsona (r) dla syntetycznych mierników oceny wariantów decyzyjnych uzyskanych metodą TOPSIS ze względu na normalizację N1-N6

r	T_N1	T_N2	T_N3	T_N4	T_N5	T_N6
T_N1	1,000	0,703*	0,974*	0,603	0,996*	0,163
T_N2	0,703*	1,000	0,616	0,729*	0,699*	-0,025
T_N3	0,974*	0,616	1,000	0,647*	0,960*	0,334
T_N4	0,603	0,729*	0,647*	1,000	0,551	0,532
T_N5	0,996*	0,699*	0,960*	0,551	1,000	0,087
T_N6	0,163	-0,025	0,334	0,532	0,087	1,000

* $p < 0,05$

Wartości syntetycznych mierników oceny wariantów decyzyjnych wyznaczone dla sześciu metod normalizacyjnych i odległości Mahalanobisa przedstawiono na rysunku 1.3. W przypadku metody TOPSIS-M z normalizacją liniową ze względu na max typu 1 (N2) oraz ze względu na max-min (N4) otrzymujemy identyczne wartości ocen wariantów ($r_{24} = 1$). Dla pozostałych metod normalizacji wartości współczynników korelacji mieszczą się w przedziale $[0,393;0,942]$, (tabela 1.11).



RYСУNEK 1.3. Wartości syntetycznych mierników oceny wariantów decyzyjnych

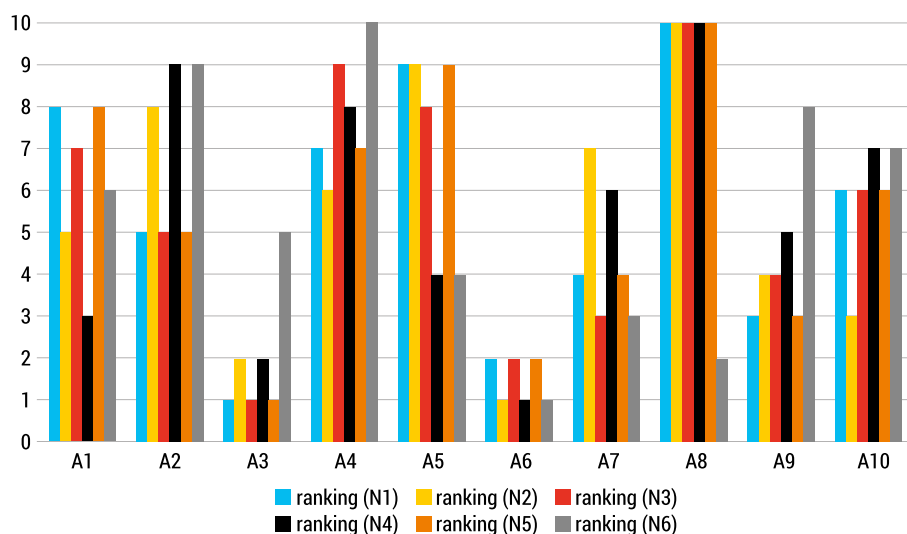
$A_1 - A_{10}$ wyznaczone za pomocą metody TOPSIS z odległością Mahalanobisa dla technik normalizacyjnych N1-N6

TABELA 1.11. Macierz współczynników korelacji Pearsona (r) dla syntetycznych mierników oceny wariantów decyzyjnych uzyskanych metodą TOPSIS-M ze względu na normalizację N1-N6

r	TM_N1	TM_N2	TM_N3	TM_N4	TM_N5	TM_N6
TM_N1	1,000	0,818*	0,636*	0,818*	0,942*	0,779*
TM_N2	0,818*	1,000	0,602	1,000*	0,838*	0,532*
TM_N3	0,636*	0,602	1,000	0,602	0,574	0,392
TM_N4	0,818*	1,000	0,602	1,000	0,838*	0,532
TM_N5	0,942*	0,838*	0,574*	0,838*	1,000	0,600
TM_N6	0,779*	0,532	0,392	0,532	0,600	1,000

* $p < 0,05$

Pozycje poszczególnych wariantów dla sześciu procedur normalizacyjnych zestawiono na rysunkach 1.4–1.5, a w tabelach 1.12–1.13 zawarto wartości współczynników korelacji rang Spearmana.



RYSUNEK 1.4. Rankingi wariantów decyzyjnych

$A_1 - A_{10}$ wyznaczone za pomocą metody TOPSIS z odległością euklidesową dla technik normalizacyjnych N1-N6

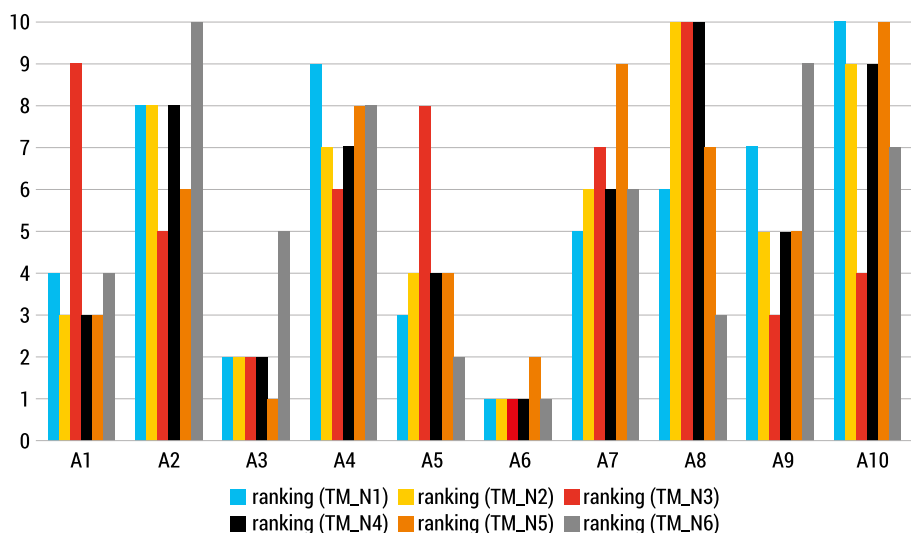
TABELA 1.12. Macierz współczynników korelacji Spearmana (s) dla rankingów uzyskanych metodą TOPSIS ze względu na normalizację N1-N6

s	Ranking (T_N1)	Ranking (T_N2)	Ranking (T_N3)	Ranking (T_N4)	Ranking (T_N5)	Ranking (T_N6)
Ranking (T_N1)	1,000	0,758*	0,951*	0,527	1,000	0,018
Ranking (T_N2)	0,758*	1,000	0,697*	0,685*	0,758*	0,006
Ranking (T_N3)	0,951*	0,697*	1,000	0,624*	0,951*	0,200
Ranking (T_N4)	0,527	0,685*	0,624	1,000	0,527	0,370
Ranking (T_N5)	1,000	0,758*	0,951*	0,527	1,000	0,018
Ranking (T_N6)	0,018	0,006	0,200	0,370	0,018	1,000

* $p < 0,05$

Uzyskane wyniki (rysunek 1.4) wskazują na wpływ doboru metody normalizacji na ranking końcowy. Tylko w przypadku dwóch metod – N1 (normalizacja wektorowa) i N5 (normalizacja liniowa oparta na sumie) – rankingi uzyskane metodą TOPSIS są identyczne ($s_{15} = 1$). Kolejny wysoki współczynnik korelacji Spearmana ($s_{13} = s_{35} = 0,951$) odnotowano przy porównaniu rankingów N1 i N3 oraz N3 i N5, najniższy zaś ($s_{26} = 0,006$) przy porównaniu rankingów N2 i N6 (tabela 1.12). Ponadto wyniki zaprezentowane na rysunku 1.4 wskazują na duże różnice pozycji wariantów decyzyjnych w rankingach w zależności od zastosowanej metody normalizacyjnej, np. wariant A1 zajmuje pozycję trzecią dla metody N4, piątą dla metody N2, szóstą dla N6, siódmą dla N3 oraz **ósmą** dla N1 oraz N5. Różnicę jednej pozycji w rankingach zaobserwowano dla wariantu A6; czterech pozycji dla wariantów A2, A3, A4, A7 oraz A10; pięciu pozycji dla wariantów A1, A5, A9 oraz ośmiu dla wariantu decyzyjnego A8.

Analiza rankingów uzyskanych algorytmem TOPSIS-M (rysunek 1.5) ze względu na metody normalizacji N1-N6 wskazuje na największą zgodność rankingów otrzymanych z zastosowaniem: normalizacji N2 (liniowa oparta na max1) z N4 (liniowa oparta na max-min), N2 (liniowa oparta na max1) z N5 (liniowa oparta na sumie) oraz N4 (liniowa oparta na max-min) z N5 (liniowa oparta na sumie). We wszystkich tych przypadkach wartość współczynnika korelacji Spearmana jest większa niż 0,81 (tabela 1.13). Uzyskane wyniki (por. rysunek 1.5) wskazują na duże różnice pozycji wariantów decyzyjnych w rankingach w zależności od zastosowanej metody normalizacyjnej. Przykładowo wariant A9 zajmuje pozycję trzecią dla metody N3, piątą dla metod N2, N4 oraz N5, siódmą dla N1, dziewiątą dla N6. Różnicę jednej pozycji w rankingach zaobserwowano jedynie dla wariantu A6; trzech dla wariantu A4; czterech dla wariantów A3, A7; pięciu dla wariantu A2; sześciu pozycji dla wariantów A1, A5, A9, A10 oraz siedmiu dla wariantu A8.



RYSUNEK 1.5. Rankingi wariantów decyzyjnych

$A_1 - A_{10}$ wyznaczone za pomocą metody TOPSIS-M z odległością Mahalanobisa dla technik normalizacyjnych N1-N6

TABELA 1.13. Macierz współczynników korelacji Spearmana (s) dla rankingów uzyskanych metodą TOPSIS-M ze względu na normalizacje N1-N6

s	Ranking (TM_N1)	Ranking (TM_N2)	Ranking (TM_N3)	Ranking (TM_N4)	Ranking (TM_N5)	Ranking (TM_N6)
Ranking (TM_N1)	1,000	0,830*	0,151	0,830*	0,818*	0,770*
Ranking (TM_N2)	0,830*	1,000	0,442	1,000	0,842*	0,467
Ranking (TM_N3)	0,151	0,442	1,000	0,442	0,321	-0,176
Ranking (TM_N4)	0,830*	1,000	0,442	1,000	0,842*	0,467
Ranking (TM_N5)	0,818*	0,842*	0,321	0,842*	1,000	0,467
Ranking (TM_N6)	0,770*	0,467	-0,176	0,467	0,467	1,000

* $p < 0,05$

W tabeli 1.14 zostały zestawione trzy najlepsze warianty decyzyjne oraz trzy najgorsze, jakie otrzymano, stosując algorytm TOPSIS i TOPSIS-M z normalizacjami N1-N6.

Z zestawienia w tabeli 1.14 wynika, że procedura TOPSIS z formułami normalizacyjnymi N1, N3 i N5 wskazała wariant A_3 jako najlepszy, zaś z N2, N4 i N6 – wariant A_6 . W przypadku drugiego w kolejności miejsca, w rankingach otrzymanych z wykorzystaniem metod N1-N5, warianty te zamieniły się miejscami. Jedynie w rankingu uzyskanym metodą TOPSIS z normalizacją N6 drugą pozycję przyjął wariant A_8 ,

który w przypadku pozostałych pięciu metod (T_N1-T_N5) zajął ostatnią lokatę. Algorytm TOPSIS-M z pięcioma metodami normalizacyjnymi (N1-N4 i N6) wyłonił wariant A_6 jako najlepszy. W czterech rankingach TM_N1-TM_N4 pozycję drugą zajął wariant A_3 . W rankingach TM_N2-TM_N4 wariant A_8 został wskazany jako najgorszy. Największe różnice w porównaniu z innymi rankingami możemy zaobserwować przy zastosowanej normalizacji logarytmicznej (N6).

TABELA 1.14. Zestawienie trzech najlepszych i dwóch najgorszych wariantów decyzyjnych

Lokata	TOPSIS						TOPSIS-M					
	N1	N2	N3	N4	N5	N6	N1	N2	N3	N4	N5	N6
1	A_3	A_6	A_3	A_6	A_3	A_6	A_6	A_6	A_6	A_6	A_3	A_6
2	A_6	A_3	A_6	A_3	A_6	A_8	A_3	A_3	A_3	A_3	A_6	A_5
3	A_9	A_{10}	A_7	A_1	A_9	A_7	A_5	A_1	A_9	A_1	A_1	A_8
8	A_1	A_2	A_5		A_1	A_9	A_2	A_2	A_5	A_2	A_4	A_4
9	A_5	A_5	A_4	A_2	A_5	A_2	A_4	A_{10}	A_1	A_{10}	A_7	A_9
10	A_8	A_8	A_8	A_8	A_8	A_4	A_{10}	A_8	A_8	A_8	A_{10}	A_2

Ostatnim etapem analizy była próba wyłonienia metody najbardziej dopasowanej do zastosowania algorytmów TOPSIS i TOPSIS-M. W wyniku zastosowanej procedury przedstawionej w podrozdziale 2, otrzymano wartości współczynników podobieństwa μ_{pq} , które zostały zestawione w tabeli 1.15.

TABELA 1.15. Wartości współczynników podobieństwa μ_{pq} dla TOPSIS i TOPSIS-M z normalizacjami N1-N6

	TOPSIS							TOPSIS-M						
	N1	N2	N3	N4	N5	N6		N1	N2	N3	N4	N5	N6	
N1	1	0,68	0,88	0,56	1	0,32	0,69	1	0,76	0,36	0,76	0,72	0,68	0,66
N2	0,68	1	0,64	0,68	0,68	0,32	0,60	0,76	1	0,56	1	0,76	0,56	0,73
N3	0,88	0,64	1	0,6	0,88	0,44	0,69	0,36	0,56	1	0,56	0,44	0,24	0,43
N4	0,56	0,68	0,6	1	0,56	0,56	0,68	0,76	1	0,56	1	0,76	0,56	0,73
N5	1	0,68	0,88	0,56	1	0,32	0,58	0,72	0,76	0,44	0,76	1	0,48	0,63
N6	0,32	0,32	0,44	0,56	0,32	1	0,22	0,68	0,56	0,24	0,56	0,48	1	0,50

Wartości miary u_p wskazują metody normalizacji N1 i N3 jako najbardziej rekomendowane przy algorytmie TOPSIS z odległością euklidesową. Zatem alternatywą dla normalizacji wektorowej stosowanej w klasycznej procedurze TOPSIS może być normalizacja liniowa oparta na max typu 2. W rozważanym przykładzie najmniej zalecana jest normalizacja logarytmiczna (N6), dla której miara podobieństwa

wynosi jedynie 0,22. Natomiast w przypadku algorytmu TOPSIS-M najbardziej rekomendowanymi metodami normalizacji są N2 (liniowa oparta na max typu 1) oraz N4 (liniowa oparta na max-min), natomiast najmniej zalecaną jest metoda N3 (liniowa oparta na max typu 2).

Podsumowanie

Normalizacja ocen wariantów decyzyjnych jest kluczową częścią procesu decyzyjnego, ponieważ dzięki niej wartości kryteriów są wyrażane na wspólnej skali i mogą być porównywane. Ważnym etapem jest także wybór sposobu pomiaru odległości między wariantami decyzyjnymi. Jednak w większości prac, w których do badania wykorzystuje się algorytm TOPSIS brakuje uzasadnienia wyboru techniki normalizacyjnej oraz pomiaru odległości, a otrzymane wyniki rankingu traktowane są jako ostateczne.

Niniejsza praca wpisuje się w dyskusję poświęconą wpływowi wyboru techniki normalizacyjnej [7, 8, 10, 29] oraz sposobu pomiaru odległości [48] na końcowy ranking otrzymany metodą TOPSIS. W pracy zostały uwzględnione te dwa aspekty jednocześnie. Przeprowadzone badanie potwierdza wpływ sześciu dobrze znanych metod normalizacji na ranking końcowy uzyskany algorytmem TOPSIS z dwiema miarami odległości – metryką euklidesową oraz metryką Mahalanobisa.

O skali problemu świadczy fakt, że w badaniu zaobserwowano różnice, nawet ośmiu w przypadku TOPSIS z odległością euklidesową i siedmiu w przypadku TOPSIS z odległością Mahalanobisa, pozycji w rankingach w sytuacji oceny dziesięciu wariantów decyzyjnych. Przykładowo, wariant decyzyjny A8 w rankingu uzyskanym metodą TOPSIS z odległością euklidesową i procedurą normalizacyjną N6 zajął pozycję drugą, a w przypadku pozostałych procedur normalizacyjnych (N1-N5) – pozycję ostatnią (dziesiątą).

Porównanie wyników na przykładzie obliczeniowym wskazuje na brak stabilności rankingów uzyskanych przy użyciu różnych technik normalizacyjnych, ale jednocześnie pozwala na sformułowanie pewnych rekomendacji odnoszących się do najlepszej procedury normalizacji w przypadku zastosowanych metod TOPSIS oraz TOPSIS-M. W przypadku metody TOPSIS rekomendowanymi metodami normalizacji okazały się być metoda wektorowa oraz liniowa oparta na max typu 2, a dla TOPSIS-M najlepszymi były metody: liniowa oparta na max typu 1 oraz liniowa oparta na max-min. Wykonane obliczenia pokazują, że nie ma metody uniwersalnej. Porównując otrzymane wyniki tej pracy z rezultatami badań innych autorów można jednak zauważyć pewne wspólne wnioski. W pracach [7, 8, 10, 29] dla algorytmu TOPSIS również rekomendowana była normalizacja wektorowa, a w [29] normalizacja logarytmiczna wskazywana była jako najgorsza.

Warto jednak zwrócić uwagę, że w dużej mierze wpływ techniki normalizacyjnej na końcowy ranking wariantów decyzyjnych zależy od wyjściowego zestawu danych (rodzaju danych, liczby i wartości kryteriów, liczby wariantów decyzyjnych),

jak również stosowanej metody wielokryterialnej. Oznacza to, że w każdej konkretnej sytuacji badawczej można uzyskać inne rekomendacje. Z tego też powodu badanie wpływu procedur normalizacyjnych z uwzględnieniem różnych zestawów danych, jak również innych metod wielokryterialnych powinno być kontynuowane.

Bibliografia

- [1] Acuña-Soto C., Liern V., Perez-Gladish B., *Normalization in TOPSIS-based approaches with data of different nature: application to the ranking of mathematical videos*, "Annals of Operation Research" 2021, 296, 1–2, s. 541–569
- [2] Araujo C.A.S., Wanke P., Siqueira M.M., *A performance analysis of Brazilian public health: TOPSIS and neural networks application*, "International Journal of Productivity and Performance Management" 2018, 67, 9, s. 1526–1549
- [3] Bana e Costa C., Vansnick F., *Sur la quantification des jugements de valeur: L 'approche Macbeth*, Cahiers du LAMSADE. Paris: Université Paris–Dauphine 1999
- [4] Behzadian M., Otaghsara K.S., Yazdani M., *A state-of-the-art survey of TOPSIS applications*, "Expert Systems with Applications", 2012, 39, 17, s. 13051–13069
- [5] Brans J.P., *L'ingénierie de la décision: l'élaboration d'instruments d'aide a la décision*, Université Laval, Faculté des sciences de l'administration 1982, Presses de l'Université Laval
- [6] Carbonaro I., *Measuring Italian well-being by modified TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution)*, "Int. Statistical Inst.: Proc. 58th World Statistical Congress Dublin", 2011
- [7] Çelen A., *Comparative Analysis of Normalization Procedures in TOPSIS Method: With an ppllication to Turkish Deposit Banking Market*, "Informatica" 25, 2, 2014, s. 185–208; <https://doi.org/10.15388/Informatica.2014.10>
- [8] Chakraborty S., Yeh C.H., *A simulation comparison of normalization procedures for TOPSIS*, Proceedings of the 2009 International Conference on Computers and Industrial Engineering (CIE39), IEEE, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009, s. 1815–1820
- [9] Chang C.-H., Lin J.-J., Chiang M.-Ch, Ho W.-R., *Domestic open-end equity mutual fund performance evaluation using extended TOPSIS method with different distance approaches*, "Expert Systems with Applications" 2010, 37, s. 4642–4649
- [10] Chatterjee P., Chakraborty S., *Investigating the Effect of Normalization Norms in Flexible Manufacturing System Selection Using Multi-Criteria Decision-Making Methods*, "Journal of Engineering Science and Technology Review" 2014, 7, s. 141–150
- [11] Chu T.-C., *Selecting plant location via a Fuzzy TOPSIS approach*, "International Journal of Advanced Manufacturing Technology" 2002, 20, 859–864
- [12] Churchman C.W., Ackoff R.L., *An approximate measure of value*, "Journal of the Operations Research Society of America" 1954, 2, 2, s. 172–187
- [13] Dmytrów K., *Wpływ sposobu normalizacji na wyniki klasyfikacji wariantów decyzyjnych używanej za pomocą uogólnionej miary odległości*, „Studia i Prace WNEiZ US” 2017, 50, s. 7–18
- [14] Edwards W., *Social utilities*, "Eng. In: Economist Summer Symp. Ser.", 1971, 6, s. 116–129
- [15] Erpolat Taşabat S., *A Novel Multicriteria Decision-Making Method Based on Distance, Similarity, and Correlation: DSC TOPSIS*, <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2019/9125754/>, [dostęp: 08.01.2021]
- [16] Figueira J. R., Greco S., Ehrgott M., *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer Science + Business Media, 2005;

- [17] Górecka D., *Wielokryterialne wspomaganie wyboru projektów europejskich*, TNOiK, Toruń 2009
- [18] Górecka D., *On the choice of method in multi-criteria decision aiding process concerning European projects*, In: Multiple Criteria Decision Making' 10-11; Trzaskalik T., Wachowicz T., EDs.; The Karol Adamiecki University of Economics in Katowice, Katowice 2011, s. 81-103
- [19] Hellwig Z., *Zastosowanie metody taksonomicznej do typologicznego podziału krajów ze względu na poziom ich rozwoju oraz zasoby i strukturę wykwalifikowanych kadr*, „Przegląd Statystyczny”, 1968, 4, s. 307–326;
- [20] Hwang C.-L., Yoon K., *Methods for Multiple Attribute Decision Making*, Springer, Berlin, Heidelberg 1981
- [21] Jahan, A., Edwards, K.L., *A state-of-the-art survey on the influence of normalization techniques in ranking: improving the materials selection process in engineering design*, “Materials and Design” 2015, 65, s. 335–342, 2014
- [22] Jones, D.F., Mardle, S.J.: *A distance-metric methodology for the derivation of weights from a pairwise comparison matrix*, „J Oper Res Soc.” 55, 8, 869–875 (2004). <https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601745>
- [23] Konarzewska-Gubała, E.: *Bipolar, Multiple Criteria Decision Aid Using Bipolar Reference System*. LAMSADE, Cashier et Documents. 56, 2009
- [24] Kukuła, K., *Propozycja budowy rankingu obiektów z wykorzystaniem cech ilościowych oraz jakościowych*. „Metody Ilościowe w Badaniach Ekonomicznych.” 2012, XIII, 1, 5–16
- [25] Kukuła K., Luty L., *Propozycja procedury wspomagającej wybór metody porządkowania liniowego*, „Przegląd statystyczny” 2015, LXII, 2, 13
- [26] Lootsma F.A., *The REMBRANDT system for multi-criteria decision analysis via pairwise comparisons or direct rating*, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology, Delft 1992
- [27] Mahalanobis P.C., *On the generalized distance in statistics*, presented at the 1936
- [28] Milani A.S., Shanian A., Madoliat R., Nemes J.A., *The Effect of Normalization Norms in Multiple Attribute Decision Making Models: A Case Study in Gear Material Selection*, “Structural and Multidisciplinary Optimization” 2005, 29, s. 312–318
- [29] Vafaei N., Ribeiro R.A., Camarinha-Matos L.M., *Data Normalization Techniques in Decision Making: Case Study with TOPSIS Method*, “International Journal of Information and Decision Sciences” 2018, 10, 1
- [30] Olson D.L., Moshkovich H.M., Mechitov A.I., *Cognitive effort and learning features of decision aids: Review of experiments*, “Journal of Decision Systems” 7, 1–4, 1998, s. 129–146
- [31] Opricovic S., *Multicriteria optimization of civil engineering systems*. Faculty of Civil Engineering, Belgrade 1998
- [32] Ouenniche J., Perez-Gladish B., Bouslah K., *An out-of-sample framework for TOPSIS-based classifiers with application in bankruptcy prediction*, “Technological Forecasting and Social Change” 131, 2018, s. 111–116
- [33] Rad M.H., Sajadi S. M., Tavakoli M.M., *The efficiency analysis of a manufacturing system by TOPSIS technique and simulation*, “International Journal of Industrial and Systems Engineering” 2014, 18, 222
- [34] Roszkowska E., *Application TOPSIS methods for ordering offers in buyer-seller transaction*, „Optimum. Studia Ekonomiczne” 2009, 3, s. 117–133
- [35] Roszkowska E., *Rank Ordering Criteria Weighting Methods – A Comparative Overview*, „Optimum. Studia Ekonomiczne” 2013, 5, 65, s. 14–33

- [36] Roszkowska E., Filipowicz-Chomko M., *Measuring sustainable development in the education area using multi-criteria methods: a case study*, "Central European Journal of Operations Research", 2020, 28, s. 1219-1241
- [37] Roszkowska E., Wachowicz T., *Application of fuzzy TOPSIS to scoring the negotiation offers in ill-structured negotiation problems*, "European Journal of Operational Research" 242, 3, 2015, s. 920–932
- [38] Roszkowska E., Wachowicz T., eds: *Negocjacje. Analiza i wspomaganie decyzji*, Wolters Kluwer, Warszawa 2016
- [39] Rouhani S., Zareravasan A., *Fuzzy TOPSIS evaluation approach for business process management software acquisition*, "Intelligent Automation & Soft Computing" 2016, 23, s. 1–10
- [40] Roy B., Bouyssou D., *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*, Economica, Paris 1993
- [41] Saaty T.L., *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York 1980
- [42] Saaty T.L., *Decision making with dependence and feedback. The analytic network process*, RWS Publications, Pittsburgh 1996
- [43] Strahl D., *Metody programowania rozwoju społeczno – gospodarczego*, PWE, Warszawa 1990
- [44] Triantaphyllou E., *Multi-criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*, Springer US, Boston 2000
- [45] Trzaskalik T., *Wielokryterialne wspomaganie decyzji*, PWE, Warszawa 2014
- [46] Trzaskalik T., *Wielokryterialne wspomaganie decyzji. Przegląd metod i zastosowań*, „Zeszyty Naukowe. Organizacja i Zarządzanie” Politechnika Śląska, 2014, nr 74, s. 239-263
- [47] Vafaei N., Ribeiro R.A., Camarinha-Matos L.M., *Normalization Techniques for Multi-Criteria Decision Making: Analytical Hierarchy Process Case Study*, w: Camarinha-Matos, L.M. i in. (red.) *Technological Innovation for Cyber-Physical Systems*, Springer International Publishing, Cham 2016, s. 261–269
- [48] Vega A., Aguaron J., Garcia-Alcaraz J.L., Moreno-Jimenez J.M., *Notes on Dependent Attributes in TOPSIS*, "Procedia Computer Science", 2014, 31, s. 308–317
- [49] Wachowicz T., *Metody wielokryterialne we wspomaganiu prenegocjacyjnego przygotowania negocjatorów*, Uniwersytet Ekonomiczny, Katowice 2013
- [50] Wachowicz T., Brzostowski J., *TOPSIS Based Negotiation Support System and Its Modification*, w: Teixeira de Almeida a., Costa Morais D., de Franca Dantas Daher S. (red.) *group Decision and Negotiations 2012*, Proceedings, Editoria Universitaria, Federal University of Pernambuco, 2012, s. 175-185
- [51] Wang J.-W., Cheng Ch.-H., Kun-Cheng H., *Fuzzy hierarchical TOPSIS for supplier selection*, "Applied Soft Computing" 2009, 9, 1, s. 377–386
- [52] Wang Y.-M., Luo Y., *Integration of correlations with standard deviations for determining attribute weights in multiple attribute decision making*, "Mathematical and Computer Modelling", 2010, 51, 1
- [53] Zavadskas E.K., Mardani A., Turskis Z., Jusoh A., Nor K.M.D., *Development of TOPSIS Method to Solve Complicated Decision-Making Problems – An Overview on Developments from 2000 to 2015*, "International Journal of Information Technology & Decision Making", 2016, 15, 3, s. 645–682

Abstract

The impact of the selection of criteria normalization techniques on the stability of rankings obtained using the TOPSIS algorithm

The multicriteria decision analysis' methods provide many algorithms, which can be used to solve ordering problems and to classify considered alternatives. One of the most often applied methods is TOPSIS algorithm (*Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution*), in which ranking of alternatives is created on the basis of their distance from ideal and anti-ideal alternatives solutions. The variant which is considered as the best is the one which has the smallest distance from ideal solution and at the same time the biggest from anti-ideal one. This procedure requires applying data normalization technique, which aims to present the criteria values on common scale allowing their comparability.

Because of various normalization techniques existing in literature of subject, it is a challenge to choose the proper one which will fit the structure of decision-making problem. This problem is especially important as only one method without justification of its choice is often used. The main aim of this chapter will be performing evaluation of the stability of rankings obtained using the TOPSIS method with various normalization techniques. Additionally, the influence of two methods of measuring distance (Euclidean distance and Mahalanobis distance) on the global assessment and the ranking of alternatives will be studied.

Keywords: decision problem, multi-criteria methods, normalization, TOPSIS, rankings stability, Euclidean distance, Mahalanobis distance