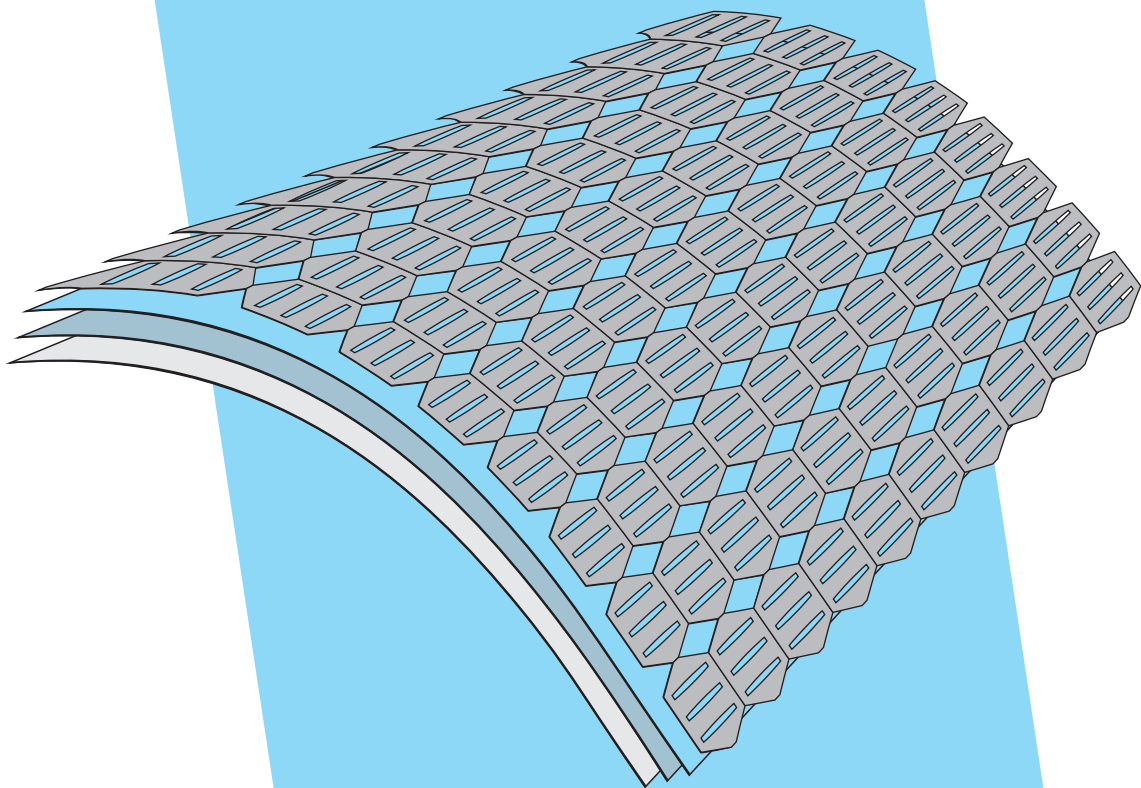


# UKŁADY PLANARNE O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ

Adam Steckiewicz



 Politechnika  
Białostocka

Białystok 2021

Adam Steckiewicz

# **UKŁADY PLANARNE O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ**



OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ  
BIAŁYSTOK 2021

Recenzenci:  
prof. dr hab. inż. Dariusz Spałek  
dr hab. inż. Krzysztof Siwek, prof. PW

Redaktor naukowy dyscypliny automatyka, elektronika i elektrotechnika:  
prof. dr hab. inż. Jan Dorosz

Redakcja i korekta językowa:  
Janina Demianowicz

Skład, grafika i okładka:  
Marcin Dominów

© Copyright by Politechnika Białostocka, Białystok 2021

ISBN 978-83-66391-66-6 (eBook)  
DOI: 10.24427/978-83-66391-66-6



Publikacja jest udostępniona na licencji  
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0  
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie  
[creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl).  
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

---

Oficina Wydawnicza Politechniki Białostockiej  
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok  
e-mail: [oficina.wydawnicza@pb.edu.pl](mailto:oficina.wydawnicza@pb.edu.pl)  
[www.pb.edu.pl](http://www.pb.edu.pl)

# Spis treści

Wykaz najważniejszych oznaczeń .....	6
Wstęp .....	10
Rozdział 1. Materiały kompozytowe w elektrotechnice .....	16
Wprowadzenie .....	16
1.1. Kompozyty elektromagnetyczne .....	18
1.1.1. Podział i zastosowanie kompozytów .....	18
1.1.2. Metody analizy kompozytów elektromagnetycznych .....	20
1.1.3. Homogenizacja właściwości elektrycznych i magnetycznych .....	24
1.2. Metamateriały pola skalarnego .....	30
1.2.1. Metody analizy .....	30
1.2.2. Układy z metamateriałami pola skalarnego .....	35
1.2.3. Realizacje materiałowe .....	39
Podsumowanie .....	44
Rozdział 2. Układy planarne z warstwą niejednorodną .....	45
Wprowadzenie .....	45
2.1. Budowa materiału niejednorodnego z warstwą periodyczną .....	48
2.2. Komórki tworzące materiał niejednorodny .....	50
Podsumowanie .....	56
Rozdział 3. Model matematyczny .....	58
Wprowadzenie .....	58
3.1. Model matematyczny stacjonarnego pola elektrycznego .....	59
3.1.1. Różniczkowe sformułowanie zagadnienia .....	59
3.1.2. Różnicowe sformułowanie zagadnienia .....	60
3.1.3. Opis warunków brzegowych .....	63
3.2. Model matematyczny stacjonarnego pola magnetycznego .....	64
3.2.1. Całkowe sformułowanie zagadnienia .....	64
3.2.2. Numeryczne sformułowanie zagadnienia .....	65
3.3. Sformułowanie częstotliwościowe pola magnetycznego .....	67
3.3.1. Różniczkowe sformułowanie zagadnienia .....	67

3.3.2. Różnicowe sformułowanie zagadnienia .....	69
3.3.3. Opis warunków brzegowych .....	70
3.4. Schematy algorytmów obliczeniowych.....	71
3.5. Ewaluacja metody różnicowo-całkowej.....	75
Wprowadzenie .....	75
3.5.1. Dyskusja wyników .....	76
Podsumowanie .....	81
Rozdział 4. Analiza układów dużej skali .....	83
Wprowadzenie.....	83
4.1. Parametry zastępcze komórek .....	85
4.1.1. Rezystancja zastępcza.....	85
4.1.2. Indukcyjność zastępcza.....	86
4.1.3. Współczynnik sprzężenia magnetycznego.....	88
4.2. Ewaluacja MR-C w identyfikacji parametrów zastępczych.....	90
Wprowadzenie .....	90
4.2.1. Dyskusja wyników .....	92
4.3. Model obwodowy i analityczny komórki .....	95
4.3.1. Model obwodowy komórki .....	95
4.3.2. Aproksymacja analityczna parametrów skupionych.....	96
4.3.3. Ewaluacja aproksymacji analitycznej parametrów skupionych.....	99
4.4. Model sieciowy układu dużej skali.....	103
4.4.1. Model obwodowy materiału niejednorodnego.....	103
4.4.2. Analiza sieci periodycznej .....	105
4.5. Homogenizacja właściwości materiałów niejednorodnych .....	108
4.5.1. Ujednorodnienie właściwości elektrycznych .....	108
4.5.2. Ujednorodnienie właściwości magnetycznych .....	111
4.6. Ewaluacja modelu obwodowego i homogenicznego .....	114
Wprowadzenie .....	114
4.6.1. Dyskusja wyników .....	116
Podsumowanie .....	118
Rozdział 5. Dobór właściwości materiałów niejednorodnych .....	119
Wprowadzenie.....	119
5.1. Synteza materiału z użyciem PSO .....	120
5.1.1. Opis algorytmu optymalizacyjnego .....	120
5.1.2. Synteza materiału niejednorodnego z użyciem PSO .....	123
5.2. Dobór właściwości materiałów izotropowych.....	125
Wprowadzenie .....	125
5.2.1. Synteza struktury o pożądanym właściwościach filtrujących .....	126

5.2.2. Dyskusja wyników .....	129
5.3. Dobór właściwości materiałów anizotropowych.....	131
Wprowadzenie .....	131
5.3.1. Synteza płaszczka elektrycznego .....	132
5.3.2. Dyskusja wyników .....	136
Podsumowanie .....	140
Rozdział 6. Weryfikacja eksperymentalna .....	141
Wprowadzenie.....	141
6.1. Metodyka badań .....	142
6.1.1. Analizowane struktury.....	142
6.1.2. Model obliczeniowy.....	144
6.1.3. Stanowisko pomiarowe .....	146
6.1.4. Procedura pomiaru.....	147
6.1.5. Dokładność pomiaru.....	148
6.2. Analiza właściwości elektrycznych.....	149
6.2.1. Rezystancja zastępcza materiału izotropowego .....	149
6.2.2. Rezystancja zastępcza materiału anizotropowego.....	151
6.3. Analiza właściwości magnetycznych.....	153
6.3.1. Indukcyjność zastępcza materiału izotropowego .....	153
6.3.2. Indukcyjność zastępcza materiału anizotropowego.....	155
6.4. Analiza błędów obliczeń i pomiaru.....	157
6.4.1. Struktury izotropowe .....	157
6.4.2. Struktury anizotropowe .....	159
Podsumowanie .....	162
Podsumowanie.....	163
Wykaz literatury .....	166
Spis tabel.....	175
Spis rysunków .....	176
Abstract.....	181

# Wykaz najważniejszych oznaczeń

Oznaczenie	Opis	Jednostka
<b>A</b>	magnetyczny potencjał wektorowy	Wb/m
$a_{ij}$	współczynnik macierzy $\mathbf{A}_W$	-
<b>a</b>	wektor współczynników wielomianu	-
$A_{n,m}$	magnetyczny potencjał wektorowy w punkcie $(n,m)$	Wb/m
$A_x, A_y, A_z$	składowe magnetycznego potencjału wektorowego	Wb/m
<b>B</b>	macierz współczynników materiałowo-geometrycznych	m <sup>2</sup> /S
<b>B(x,y,z)</b>	wektor indukcji magnetycznej	T
BiCGStab	podwójny gradient sprzężony stabilizowany	-
$b_{n,m}$	współczynnik materiałowo-geometryczny w punkcie $(n,m)$	S/m <sup>2</sup>
$B_z$	składowa z wektora indukcji magnetycznej	T
<b>C</b>	macierz incydencji (gałęziowa)	-
$c_1, c_2$	dobierane współczynniki wagowe	-
$c_{n,m}$	współczynnik incydencji w punkcie $(n,m)$	-
$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5$	wewnętrzne parametry geometryczne komórek	m
$d_{e,x}$	długość zewnętrzna elementu	m
$d_{e,y}$	szerokość zewnętrzna elementu	m
$d_{e,z}$	wysokość elementu	m
$d_L$	współczynnik zależności indukcyjności od względnej przenikalności magnetycznej	H
<b>E</b>	wektor natężenia pola elektrycznego	V/m
$E_x, E_y, E_z$	składowe natężenia pola elektrycznego	V/m
<b>F(x)</b>	funkcja celu	-
$f_c$	częstotliwość odcięcia	Hz
$f_{c,z}$	zadana częstotliwość odcięcia	Hz
<b>G</b>	macierz incydencji (węzłowa)	-
$G_z$	konduktancja zastępcza	S
<b>H</b>	wektor natężenia pola magnetycznego	A/m
$h$	rozmiar siatki różnicowej	m
$h_z$	rozmiar siatki różnicowej w kierunku z	m

Oznaczenie	Opis	Jednostka
$H_x, H_y, H_z$	składowe natężenia pola magnetycznego	A/m
$I_z$	natężenie zastępczego prądu elektrycznego	A
$\mathbf{J}$	wektor gęstości prądu elektrycznego	A/m <sup>2</sup>
$J_{n,m+\frac{1}{2}}, J_{n+\frac{1}{2},m}$	składowe gęstości prądu elektrycznego w punkcie $(n,m)$	A/m <sup>2</sup>
$\mathbf{J}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}$	wektor gęstości prądu elektrycznego w punkcie $(n,m)$	A/m <sup>2</sup>
$J_x, J_y, J_z$	składowe gęstości prądu elektrycznego	A/m <sup>2</sup>
$k$	współczynnik sprzężenia magnetycznego	-
$K$	współczynnik tłumienia	dB
$I_a$	liczba agentów algorytmu PSO	-
$L_e$	indukcyjność elementu	H
$I_{max}$	maksymalna liczba iteracji	-
$L_z$	indukcyjność zastępcza	H
$M$	liczba kolumn siatki obliczeniowej	-
$M_e$	indukcyjność wzajemna między sąsiednimi elementami	H
MES	metoda elementów skończonych	-
MM	metamateriał	-
MMS	metamateriał pola skalarnego	-
MR-C	metoda różnicowo-całkowa	-
MRS	metoda różnic skończonych	-
$N$	liczba wierszy siatki obliczeniowej	-
$p_J$	liczba stopni swobody algorytmu różnicowego do obliczeń pola elektrycznego	-
$p_A$	liczba stopni swobody algorytmu różnicowego do obliczeń pola magnetycznego	-
$P(n,m)$	punkt na siatce różnicowej o współrzędnych $(n,m)$	-
PML	warunek brzegowy nieskończenie rozległej przestrzeni (ang. <i>Perfectly Matched Layers</i> )	-
PSO	metoda optymalizacji rojem cząstek (ang. <i>Particle Swarm Optimization</i> )	-
$r_{\#U\#G}$	współczynnik topologii połączeń układu	-
$r_0, r_1, r_2, r_3$	wewnętrzne parametry geometryczne komórek	m
$r_a$	promień obiektu	m
$r_p$	promień płaszcza	m
$R_e$	rezystancja elementu	$\Omega$
$R_z$	rezystancja zastępcza	$\Omega$
$S$	rozpatrywana powierzchnia	-
$\mathbf{T}$	macierz bezwładności	S(s·m) <sup>-1</sup>
$T$	transmitancja obiektu	-



Oznaczenie	Opis	Jednostka
$t$	współczynnik ścisku	-
$\mathbf{u}$	wektor zewnętrznych potencjałów elektrycznych	V
$\mathbf{u}_w$	wektor wymuszeń napięciowych sieci elektrycznej	V
$U_z$	zewnętrzne napięcie elektryczne	V
$V$	potencjał elektryczny	V
$\mathbf{v}$	wektor prędkości agentów algorytmu PSO	-
$V_{n,m}$	lokalny potencjał elektryczny w punkcie $(n,m)$	V
$\underline{V}_{n,m}$	zespolony potencjał elektryczny w punkcie $(n,m)$	V
$\mathbf{v}_w$	wektor poszukiwanych potencjałów węzłowych	V
$\mathbf{W}$	wektor pomocniczy	A/m
$w$	współczynnik inercji	-
$w_i$	$i$ -ty parametr liniowy	-
$W_m$	całkowita energia zgromadzona w polu magnetycznym	J
$W_{n,m+\frac{1}{2}}, W_{n+\frac{1}{2},m}$	składowe wektora pomocniczego w punkcie $(n,m)$	A/m
$\mathbf{W}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}$	wektor pomocniczy w punkcie $(n,m)$	A/m
$W_x, W_y$	składowe wektora pomocniczego	A/m
$\mathbf{x}$	wektor optymalizowanych zmiennych	m
$x, y, z$	współrzędne kartezjańskie	-
$\mathbf{x}_j$	wektor parametrów nieliniowych	-
$\underline{Y}$	admitancja zespolona	S
$\underline{Z}_{\#U\#G}$	zespolona impedancja widziana z pary zacisków $\#_U\#_G$	$\Omega$
$z_1, z_2, z_3, z_4$	wirtualne zaciski przyłączeniowe	-
$Z_e$	impedancja elementu	$\Omega$
$\Gamma$	brzeg obszaru	-
$\delta_3$	błąd pomiaru	%
$\Delta_i$	błąd względny algorytmu iteracyjnego	-
$\Delta x, \Delta y$	krok siatki różnicowej	m
$\varepsilon$	błąd bezwzględny	-
$\varepsilon_{min}$	zadana dokładność algorytmu (błąd graniczny)	-
$\varepsilon_r$	względna przenikalność elektryczna	-
$\lambda_j$	współczynnik diagonalny macierzy $\mathbf{\Lambda}_w$	-
$\mathbf{\Lambda}_w$	macierz incydencji węzłowych sieci elektrycznej	-
$\mu$	przenikalność magnetyczna	H/m
$\mu_0$	przenikalność magnetyczna próżni	H/m
$\mu_{eff}$	efektywna względna przenikalność magnetyczna	-
$\mu_o$	przenikalność magnetyczna otoczenia	H/m
$\mu_r$	względna przenikalność magnetyczna	-

Oznaczenie	Opis	Jednostka
$\mu_{xx}, \mu_{yy}, \mu_{zz}$	względna przenikalność magnetyczna w kierunku $x, y, z$	-
$\rho$	odległość między punktem źródłowym a punktem obserwacji	m
$\sigma$	przewodność elektryczna	S/m
$\sigma_A, \sigma_B$	przewodność elektryczna materiału składowego A, B	S/m
$\sigma_{\text{eff}}$	efektywna przewodność elektryczna	S/m
$\sigma_{n,m}$	lokalna przewodność elektryczna w punkcie $(n,m)$	S/m
$\sigma_o$	przewodność elektryczna otoczenia	S/m
$\sigma_p$	tensor przewodności elektrycznej płaszcza	S/m
$\sigma_{rr}$	przewodność elektryczna w kierunku promienia	S/m
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	przewodność elektryczna w kierunku $x, y, z$	S/m
$\sigma_{\varphi\varphi}$	przewodność elektryczna w kierunku stycznym	S/m
$\varphi$	kąt przestrzenny	°
$\omega$	pulsacja	rad/s
$\Omega_A, \Omega_B$	materiał A, materiał B	-
$\Omega_e$	rozpatrywany element (komórka)	-
$\Omega_M$	układ materiałowy	-
$\Omega_R$	warstwa robocza	-

# Wstęp

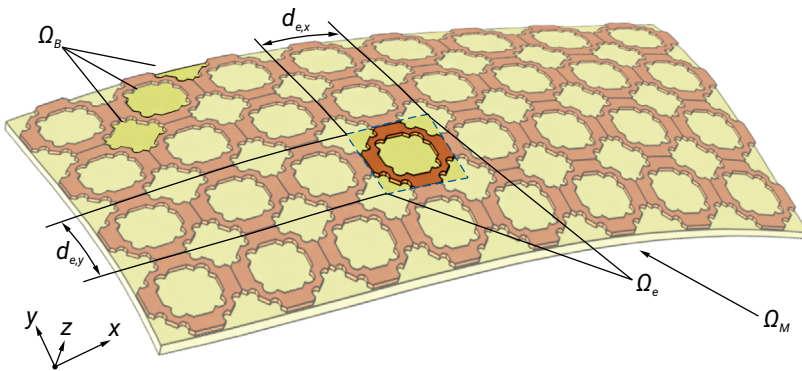
Początek rozwoju zaawansowanej technologii materiałowej przypada przede wszystkim na XX wiek. Konflikty zbrojne w jego pierwszej połowie, a następnie wyścig zbrojeń kojarzony z „zimną wojną” w drugiej, przyczyniły się do inwestowania w nowoczesne technologie, pożądane nie tylko przez rozwijany przemysł wojskowy, lecz również z założenia pokojowy przemysł kosmiczny. Wymagania stawiane poszyciom samolotów bojowych (jak niewykrywalność dla radarów wynikająca z użycia materiałów pochłaniających fale elektromagnetyczne), [9], bądź kadłubom promów kosmicznych (zdolnych wytrzymać termiczne skutki tarcia o warstwę ozonową) doprowadziły do rozwoju zróżnicowanych, sztucznych materiałów o dobieranych i niespotykanych naturalnie właściwościach. Do tej grupy należą materiały kompozytowe, których konstrukcja w ogólnym zarysie opiera się na połączeniu ze sobą co najmniej kilku materiałów o różnej strukturze i właściwościach. Struktura tworzona m.in. z metali, ceramiki, drewna, szkła, czy tworzyw sztucznych, jako wypadkowy materiał nabrała wybranych, pożądanych cech faz składowych, np. twardość zewnętrznej powłoki dzięki zastosowaniu ceramiki, a przy tym elastyczność wynikającą z własności polietylenowej warstwy nośnej [25]. Zagadnienia mechaniczne dominowały w inżynierii kompozytów, ponieważ lekkie, a zarazem wytrzymałe materiały były niezwykle pożądane już od starożytności. Jednak dopiero po industrialnym skoku epoki wiktoriańskiej (przełom XIX i XX wieku), technologia i wiedza umożliwiły osiągnięcie tych oraz wielu innych wymagań stawianych materiałom. Zwiększające się zapotrzebowanie na kompozyty w różnych dziedzinach, m.in. w budownictwie, mechanice, lotnictwie, elektryce i elektronice wymusiło szerokie badania nad ich konstrukcją. Opracowane zostały też metody identyfikacji właściwości oraz algorytmy ich doboru i optymalizacji.

Dalszym krokiem było połączenie idei materiałów kompozytowych z tworzywami sztucznymi otrzymywanymi na drodze reakcji chemicznych [101]. Rozprowadzenie cząstek wybranego materiału w matrycy (materiale bazowym) bez ich połączenia w nowy związek chemiczny, przy wzajemnym przenikaniu się wewnątrz matrycy w skali  $< 1 \mu\text{m}$ , prowadzi do powstania kompozytu hybrydowego [17, 89, 147]. Pomijając szeroką klasyfikację kompozytów i ich nazewnictwo nie ulega wątpliwości, że termin „kompozyt” dotyczy sztucznych materiałów będących trwałym połączeniem różnych substancji, które wypadkowej strukturze nadają pożądane cechy fizyczne.

Nie tylko medycyna, mechanika, czy przemysł chemiczny zainteresowały się kompozytami poszukując wśród nich lepszych niż dotychczasowe materiałów. Działania te przeniosły się z czasem także do innych dyscyplin nauki, a w tym także do elektrotechniki. W zastosowaniach elektrycznych wyodrębniono grupę kompozytów elektromagnetycznych (EM), [77], a w tym m.in. laminaty, czyli zatopione w spoiwie włókna, służące do montażu powierzchniowego w produkcji układów scalonych, a także anten planarnych, czy struktur mikropaskowych działających nie tylko jako filtry sygnałowe, ale także jako czujniki [10]. Rozwój kompozytów EM zaczął się jednak późno, ponieważ dopiero od prac Von Hippela, których początek przypada na 1954 rok [77] i w których koncentrował się on na badaniach i opisie właściwości dielektrycznych kompozytów projektowanych do zastosowania w polach EM dużej częstotliwości (powyżej kilku MHz). Olbrzymi potencjał tych technologii doprowadził do stworzenia nowych typów ekranów EM, absorberów, zwierciadeł, struktur rozpraszających oraz filtrujących [76].

Współcześnie największy nacisk wciąż jest położony na kompozyty wykorzystywane w polach dużej częstotliwości, przy czym coraz częściej rezygnuje się z dielektrycznych układów lub połączeń dielektryka z metalową warstwą [69], lecz prowadzi się do wkomponowania w materiał części przewodzących o nieciągłej budowie. Przykładem są proste struktury siatkowe [68] lub bardzo złożone geometrycznie fraktale [1, 55, 106]. Dobór kształtu, grubości i materiału elementu bądź umownej komórki składającej się na złożony z nich układ dużej skali, modyfikuje właściwości całego utworzonego materiału, pozwalając na ich szeroki dobór w zakresie MHz i GHz. Tym sposobem tworzone są m.in. anteny o charakterystyce kierunkowej [123], powierzchnie selektywne [18, 40, 73, 124] oraz struktury absorbujące promieniowanie EM [125, 128, 137]. W technice światłowodowej i obszarze technologii metamateriałów badania skoncentrowano w obszarze interakcji materiałów z promieniowaniem w zakresie częstotliwości pasma THz. Z tego powodu dominuje pogląd o kompozytach EM jako materiałach przeznaczonych do pracy z polami wielkiej częstotliwości. Jednak mogą być one również z powodzeniem stosowane w zakresie pól stacjonarnych (stałych) oraz kwazi-stacjonarnych (wolnozmiennych). W tym obszarze znane są rozwiązania, w których stosuje się kompozyty w postaci matrycy czujników dotykowych, czy struktur złożonych z cienkich i elastycznych tworzyw sztucznych oraz przewodników [134]. Ich cechami wspólnymi są m.in. dielektryczno-przewodzący skład materiałowy, periodyczny układ elektrod (elementów) pomiarowych na elastycznej powierzchni oraz dobór właściwości realizowany przez kształtowanie geometrii elementów funkcjonalnych osadzonych na różnych podłożach, w tym również tekstylnych [49]. Czujniki pojemnościowe [104] i rezystancyjne [64] wykorzystywane są w robotyce, urządzeniach ubieralnych (ang. *wearable electronics*), ekranach dotykowych, a nawet w postaci opasek wykrywających obecności pola magnetycznego [75]. Ponadto, rozwój metamateriałów przeznaczonych do kształtowania stacjonarnych pól skalarnych doprowadził do syntezy płaszczy, umożliwiających minimalizację wpływu układu pomiarowego na rozkład mierzonej wielkości fizycznej [143].

Elektryczne kompozyty laminarne, tworzone na podstawie warstwowych struktur typu metal-dielektryk z przewodzącą warstwą niejednorodną, można zaliczyć do układów planarnych o strukturze periodycznej. Tego rodzaju materiały projektowane są do zastosowań w zakresie pól stałych i wolnozmiennych, a ich konwencja oraz budowa wzorowana jest na koncepcji komórek, powszechnie stosowanych w metamateriałach pól wielkiej częstotliwości. Kształtowanie geometrii warstwy przewodzącej materiału laminarnego w procesie złożonej syntezy jego struktury, umożliwia uzyskanie pożądanego zestawu właściwości elektrycznych i magnetycznych. Układ materiałowy  $\Omega_M$  tworzony na podstawie komórek  $\Omega_e$  periodycznie rozmieszczonych w analizowanym obszarze (rys. 1), charakteryzuje się zastępczymi właściwościami, dobieranymi na poziomie pojedynczego metaelementu  $\Omega_e$ . Podane cechy uzasadniają zaliczenie prezentowanych materiałów laminarnych nie tylko do cienko-warstwowych kompozytów, ale również do grupy tzw. *Laplacian metamaterials* [37], które stanowią odrębną grupę materiałów przeznaczonych do kształtowania pożądanego rozkładu pola opisanego równaniami Laplace'a i Poissona w zakresie pól stałych, czy też równaniem dyfuzji w zakresie pól zmiennych w czasie.



RYS. 1. Fragment przewodzącej struktury roboczej periodycznych komórek  $\Omega_e$  na izolacyjnym podłożu  $\Omega_B$ , budujących wspólnie niejednorodny materiał laminarny  $\Omega_M$

Z uwagi na fakt, iż warstwa metalowa jest jednocześnie ośrodkiem roboczym dla przybliżających przez niego ładunków elektrycznych, istotne staje się zachowanie galwanicznych połączeń między poszczególnymi komórkami  $\Omega_e$ . Tak utworzona rozległa sieć osadzona jest na izolacyjnym podłożu  $\Omega_B$ , zapewniającym elastyczność i stanowiącym warstwę nośną układu. Założyć można, że utworzony wedle tego ogólnego zarysu materiał będzie się składał z setek, a nawet tysięcy komórek rozłożonych na powierzchni o dowolnym kształcie. Właściwości oraz lokalny rozkład pola takiego układu planarnego są ściśle określone, dobierane i ostatecznie syntetyzowane w wyniku makroskopowych zmian materiału laminarnego z periodyczną, niejednorodną warstwą przewodzącą.

W obszarze analizy oraz metod prototypowania wyróżnić można wiele podejmowanych zagadnień, które wymagają ustawicznego rozwoju. Podstawowym problemem dotyczącym rozległych układów materiałowych jest określenie ich zastępczych właściwości. Analiza obejmująca pełen trójwymiarowy układ wiąże się z zastosowaniem metod numerycznych, które narzucają krytyczne wymagania pod względem obliczeniowym. Stąd sformułowanie uproszczonego, np. obwodowego modelu materiału umożliwiającego analizę zjawisk elektrycznych, stanowi alternatywę dla rozbudowanych modeli numerycznych. Redukcja liczby stopni swobody modelu sieciowego, w porównaniu z opisem polowym, skutkuje zmniejszeniem wymagań dla jednostek obliczeniowych oraz przyspieszeniem obliczeń. Co więcej, sprowadzenie analizy do ograniczonego rozmiarami pojedynczej komórki obszaru 2D, również redukuje złożoność obliczeniową modelu. W takim przypadku konieczne jest zdefiniowanie metod identyfikacji właściwości zastępczych elementu oraz określenie wpływu geometrii na jego właściwości. Ponadto, zasadne jest także uwzględnienie cienkowarstwowego charakteru fazy funkcjonalnej (przewodzącej), gdyż model eliminujący pomijalną względem pozostałych wymiarów geometrycznych grubość warstwy przewodzącej, redukuje analizę numeryczną z układu 3D do układu 2D.

Istotne jest także zastosowanie algorytmów realizujących zadanie syntezy geometrii struktury. Zależność właściwości elektrycznych oraz magnetycznych komórki od wybranych parametrów geometrycznych jest z założenia nieliniowa, dlatego synteza struktury elementu o pożądanym zestawie zastępczych właściwości, wymaga uwzględnienia złożonego wpływu geometrii na rezystancję i/lub indukcyjność zastępczą. Stąd rodzi się potrzeba opracowania metod inżynierii odwrotnej oraz modeli aproksymujących, stawiając im jako warunki dobór właściwości przy możliwie najmniejszej liczbie kroków obliczeniowych oraz łatwość implementacji.

Dokonując przeglądu literatury zagranicznej i polskiej zidentyfikowano obszary wymagające rozwoju lub wprowadzenie nowych sposobów analizy i kształtowania właściwości periodycznych układów planarnych. Na tej podstawie sformułowano postawione w monografii zadania, a tym samym główne cele takie, jak:

- 1) opracowanie metod analizy materiałów laminarnych z niejednorodną warstwą przewodzącą;
- 2) określenie metodologii kształtowania i poprawy właściwości elektrycznych układów w skali makro, przez modyfikację geometrii i ujednorodnienie właściwości elementów budujących;
- 3) dobór właściwości periodycznie rozmieszczonych komórek przy zastosowaniu algorytmu optymalizacyjnego.
- 4) opracowanie numerycznego algorytmu wyznaczania rozkładu stacjonarnych pól elektrycznych oraz magnetycznych w cienkowarstwowym układach 2D;
- 5) wypracowanie metodyki homogenizacji właściwości elektrycznych oraz magnetycznych projektowanych komórek oraz wyznaczania ich elektrycznych parametrów skupionych;
- 6) sformułowanie metody syntezy właściwości komórek materiałów laminarnych;

- 7) określenie sposobu analizy układów materiałowych dużej skali z wykorzystaniem modeli obwodowych i homogenicznych.

Realizacja przedstawionych zadań wiązała się z przygotowaniem własnych narzędzi obliczeniowych. Wypracowane przy tym przez autora sposoby projektowania i analizy materiałów laminarnych, mogą być również zastosowane do obliczeń innych materiałów i geometrii struktur periodycznych. Na etapie prowadzonej analizy uwzględniono także możliwości fizycznej realizacji proponowanych układów, włączając w to ograniczenia technologiczne i koszty wytworzenia niejednorodnych materiałów.

Monografię podzielono na sześć rozdziałów, w których kolejno omówiono tematykę materiałów kompozytowych (rozdział 1 i 2), model matematyczny pola elektrycznego i magnetycznego w materiałach niejednorodnych (rozdział 3), modele przeznaczone do analizy układów materiałowych dużej skali (rozdział 4), metodykę doboru właściwości elektrycznych przy użyciu schematu optymalizacyjnego (rozdział 5) i część eksperymentalną, w której przedstawiono wyniki pomiarów parametrów elektrycznych próbek materiałowych (rozdział 6).

W rozdziale 1 scharakteryzowano kompozyty EM wykorzystywane do kształtowania rozkładu pola EM w zakresie małych i średnich częstotliwości, a w tym metamateriały kształtujące rozkład pola skalarnego.

W rozdziale 2 zaproponowano i przedstawiono niejednorodne materiały laminarne oraz geometrię komórek, których właściwości poddawano ocenie w dalszej części monografii.

Rozdział 3 dotyczy opisu matematycznego stałego w czasie pola elektrycznego (sformułowanie różnicowe) i magnetycznego (sformułowanie całkowe). Proponowana różnicowo-całkowa metoda analizy numerycznej dwuwymiarowych modeli komórek w przekroju podłużnym, stanowi podstawę oszacowania ich efektywnych parametrów elektrycznych. W celu ujednorodnienia właściwości rozpatrywanych struktur przygotowano odrębny algorytm, służący obliczeniu harmonicznego pola magnetycznego w model 2D homogenicznego materiału. Dokonano ewaluacji proponowanej metody przez porównanie rozkładów pól z wynikami badań przeprowadzonych w programie komercyjnym, wykorzystującym metodę elementów skończonych do rozwiązania zagadnień polowych w obszarach 3D.

Układy z wieloma komórkami rozpatrzono w rozdziale 4. Tak zwany układ dużej skali składa się z wielu połączonych galwanicznie komórek, w celu uzyskania powierzchni materiałowej o pożądanych właściwościach. Ze względu na złożoność obliczeniową układów zaproponowano uproszczony model sieciowy. Obwodowe odwzorowanie komórek i uformowanego z nich materiału niejednorodnego wymagało określenia ich parametrów. Periodyczna sieć elektryczna nie jest jednak jedynym sposobem analizy układów dużej skali. W rozdziale wprowadzono i rozpatrzono model homogeniczny oraz opis analitycznej metody homogenizacji właściwości elektrycznych i magnetycznych komórek. Oba sposoby opisu układu zostały porównane z pełnym modelem numerycznym niejednorodnej struktury w zakresie średnich częstotliwości.

Rozdział 5 w całości poświęcono omówieniu doboru właściwości niejednorodnych materiałów laminarnych. Ze względu na nieliniowy wpływ parametrów geometrycznych na parametry elektryczne do ich kształtowania niezbędne jest zastosowanie algorytmu optymalizacyjnego. Metoda optymalizacji rojem cząstek, wraz z opisem i przykładowym zastosowaniem do dwóch zadań optymalizacyjnych, posłużyła ukształtowaniu geometrii wewnętrznej komórek ze względu na pożądane właściwości filtrujące, a także została wykorzystana do syntezy anizotropowego materiału formującego rozkład stałego w czasie pola elektrycznego.

Ostatni – 6 rozdział – obejmuje weryfikację eksperymentalną metody różnicowo-całkowej. Algorytm numeryczny powinien umożliwić oszacowanie wartości parametrów zastępczych komórek oraz wpływu geometrii na ich modyfikację. W rozdziale zawarto ocenę efektywności ilościowej i jakościowej rezultatów obliczeń numerycznych komórek o wybranej geometrii. Opis metodyki i stanowiska badawczego uzupełnia najważniejsze punkty, w których scharakteryzowano wyniki porównania rezultatów obliczeń oraz pomiarów zastępczych rezystancji i indukcyjności 30 próbek materiałowych.



# Rozdział 1

## Materiały kompozytowe w elektrotechnice

### Wprowadzenie

Rozwój metamateriałów elektromagnetycznych (w zakresie GHz) jest rezultatem prac m.in. D. R. Smitha [110], w których zaproponowano fizyczną realizację kompozytu o ujemnym współczynniku załamania oraz publikacja [93], w której J. B. Pendry, D. Schurig i D. R. Smith przedstawili metodę optycznej transformacji (ang. *Transformation Optics*), umożliwiającą sterowanie rozkładem promieniowania EM. Autorzy zaprezentowali m.in. jak dokonując transformacji układów współrzędnych można wprost wyznaczyć parametry materiałowe (przenikalność elektryczną, przenikalność magnetyczną lub współczynnik załamania) oraz ich niejednorodny rozkład, który ma za zadanie odwzorować zakrzywienia pozornej przestrzeni (w innym układzie współrzędnych) o jednorodnych parametrach. W wyniku dobieranego rozkładu parametrów wektor Poytinga fali EM propagujący w ośrodku, podlega modyfikacji w pożądanym sposób, np. w celu ukrycia obiektu lub skupienia mocy w określonym obszarze niczym soczewka. Naukowcy opierali się na teorii V. Veselago, który przewidział w połowie XX wieku możliwość istnienia materiałów o ujemnej przenikalności elektrycznej i magnetycznej.

Obok prac dotyczących materiałów stosowanych w polach o częstotliwościach rzędu MHz i GHz, w 2008 roku zaproponowano nową koncepcję dla metamateriałów pól skalarnych. Początkowo T. Chen [19], a następnie J. Y. Li [60] skupili się na teoretycznych rozważaniach pola temperatury twierdząc, iż rozkład pola można kształtować przy użyciu niejednorodnych i anizotropowych materiałów. Jednak istotny, dynamiczny rozwój badań w tej grupie kompozytów zainicjowali S. Guenneau, C. Amra i D. Veynante [27]. W 2012 roku dokonali oni przeniesienia idei optycznej transformacji z układów elektromagnetycznych w. cz., na układy termiczne w stanach ustalonych i nieustalonych. Zaproponowana metoda termodynamicznej transformacji (ang. *Transformation thermodynamics*), [27, 102, 141] bazuje na przekształceniu równania dyfuzji w dziedzinie czasu, w celu znalezienia takiego rozkładu przewodności termicznej, który zapewniłby m.in. ukrycie w polu temperatury dowolnych obiektów, koncentrację, czy rotację strumienia cieplnego. Ponieważ w stanie ustalonym równanie dyfuzji przechodzi w równanie Laplace'a lub Poissona (przy wymuszeniu cieplnym),

to matematyczny opis pola termicznego staje się równoważny sformułowanemu zagadnieniu stałego w czasie pola elektrycznego. Materiały projektowane przy zastosowaniu termodynamicznej transformacji przyjęto nazywać ang. *Laplacian metamaterials* [37], przy czym zalicza się do nich materiały kształtujące stałe lub wolnozmiennie w czasie pole skalarne, w tym także bezźródłowe pole magnetyczne [81]. Dyskutowaną grupę materiałów nazywano oryginalnie ang. *Thermal metamaterials* [34, 36, 80], co wynikało z początkowego zainteresowania naukowców kształtowaniem pola temperatury. W ocenie autora niniejszej rozprawy nie jest w pełni poprawne użycie ani pierwszej, ani też drugiej nazwy. Ponieważ sformułowanie *Laplacian* kojarzy się bezpośrednio z równaniem Laplace'a, zaś *Thermal* to określenie konkretnego pola fizycznego. Równanie Laplace'a nie jest jedynym rozwiązywanym w analizie tej grupy kompozytów (oryginalnie było to równanie dyfuzji [70]), zaś oprócz pól termicznych rozpatrywane są zagadnienia statycznego i przepływowego pola elektrycznego [37, 45, 53, 143]. Cechą charakterystyczną jest formowanie rozkładu pól skalarnych, a wielkości wektorowe są jedynie ich pochodnymi. Z tego powodu w niniejszej pracy zaproponowano i stosowano w opisie bardziej ogólną nazwę *metamateriały pola skalarnego* (MMS).

Interesującą grupę sztucznych struktur materiałowych stanowią również fraktale, które charakteryzują się samopodobieństwem (tzn. kształt fragmentu układu przypomina budowę całego układu). Praktycznym ich wykorzystaniem w elektrotechnice stały się anteny fraktalne [1, 30, 72, 99] oraz cewki [2, 21, 54] stanowiące alternatywę dla cewek spiralnych. Struktury fraktalne stanowią z reguły niewielkie układy o z góry projektowanej do określonego zadania, całościowej budowie. Charakteryzuje je m.in. kompaktowość oraz możliwość zastosowania w kształtowaniu pól magnetycznych małej częstotliwości i pól EM dużej częstotliwości [50]. Nie jest w pełni poprawne zaliczanie ich do grupy materiałów kompozytowych, ponieważ w większości przypadków stanowią przede wszystkim element funkcyjny obwodu elektrycznego. Fraktale można skalować i duplikować poprzez układanie dowolnie w przestrzeni (np. tworząc zestaw współpracujących nadajników lub odbiorników), czy łącząc ze sobą (np. szeregowe łączenie cewek, w celu zwiększenia zastępczej indukcyjności).

Najszerszą grupę nowoczesnych materiałów elektrotechnicznych stanowią kompozyty elektromagnetyczne. Nadzwyczaj szeroka gama różnych układów połączeń substancji składowych tworzących wypadkowy materiał daje olbrzymie możliwości wyboru najróżniejszych tworzyw kompozytowych, ale jednocześnie utrudnia rozeznanie oraz ich klasyfikację. Nawiązując do tematu rozprawy skupiono się tylko na tych kompozytach elektromagnetycznych, które budową lub właściwościami pozostają pokrewne z materiałami laminarnymi. Wymienione we wstępie kompozyty warstwowe i hybrydowe opisano oraz scharakteryzowano, a jeden z kluczowych elementów ich analizy w elektrotechnice i mechanice, czyli homogenizacja właściwości, została poddana krytycznej analizie. W kontekście ujednorodnienia właściwości materiałów laminarnych z warstwą niejednorodną staje się to nadzwyczaj istotne, ponieważ proponowane metody homogenizacji, a w szczególności empiryczne, nie znajdują zastosowania poza dedykowaną im grupą kompozytów.

# 1.1. Kompozyty elektromagnetyczne

## 1.1.1. Podział i zastosowanie kompozytów

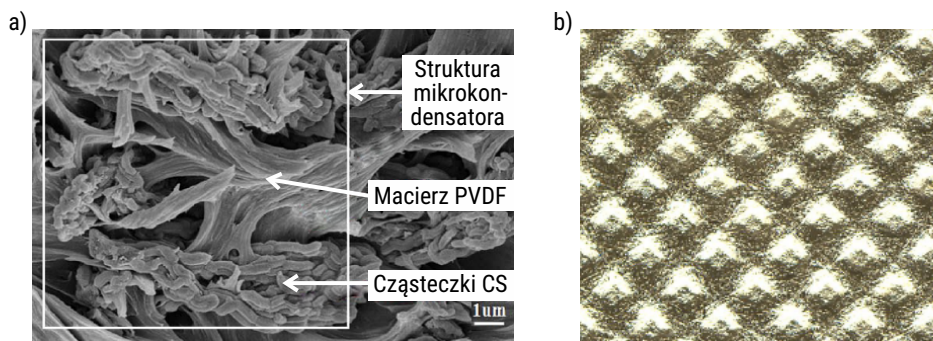
Materiały kompozytowe [89] są trwałą mieszaniną co najmniej dwóch lub większej liczby materiałów o różnych właściwościach fizycznych. Poszczególne materiały nie mieszają się ze sobą i funkcjonują oddzielnie jako tzw. fazy. Z tego powodu kompozyty są wielofazowymi strukturami, tworzonymi w celu uzyskania zaawansowanego materiału o właściwościach rozumianych jako inne niż te, które posiadają indywidualnie wszelkie jego fazy składowe. Oprócz właściwości lepszych jakościowo, kompozyt charakteryzuje się często zupełnie nowymi właściwościami. Ze względu na szeroki zakres zastosowań kompozytów oraz ich analizę w różnych dziedzinach nauki, klasyfikacja kompozytów jest problemem otwartym i przeprowadzana jest na podstawie różnych kryteriów (np. ze względu na materiał osnowy, rodzaj składników wzmacniających, kształt składników i strukturę faz).

W elektrotechnice tylko część kompozytów znalazła zastosowanie, stąd podział może zostać uproszczony. Do podstawowych rodzajów kompozytów należą [120]:

- kompozyty warstwowe (strukturalne) – laminaty składające się z co najmniej dwóch warstw, wykonanych z różnych materiałów o odmiennych grubościach i właściwościach; charakteryzują się dużą anizotropią (wzdłużną i poprzeczną) parametrów, a także najczęściej ciągłością oraz jednorodnością warstw;
- kompozyty hybrydowe (cząsteczkowe) – połączenie materiału bazowego, czyli tzw. matrycy oraz innego materiału w postaci cząsteczek o różnej geometrii (m.in. sferyczna, eliptyczna, płatki, rurki) i dużym współczynnikiem wypełnienia powstałego kompozytu (nawet kilkadziesiąt procent objętości);
- kompozyty polimerowe (włóknowe) – szeroka grupa kompozytów z włóknami wykonanymi z materiału o innych właściwościach niż polimer, w którym są zatopione; oprócz włókien spotyka się też połączenia dwóch różnych polimerów, ich sieciowanie lub tworzenie tkanin/szkieletów w osnowie.

Strukturalne komponowanie materiałów wykracza poza znane w XX wieku łączenie płyt wykonanych z typowo dostępnych materiałów [83]. Skład współczesnych kompozytów laminarnych jest złożony i bazuje na połączeniu planarnych warstw materiałów hybrydowych [130, 148] lub kompozytów włóknowych [56, 63, 145, 149]. Niezbędne stało się bowiem nadanie specyficznych właściwości już na poziomie faz składowych. Przykładem są ekrany absorbujące fale EM wielkich częstotliwości. Promieniowanie EM pochłania warstwa polimerometaloorganiczna o dużej koncentracji pentakarbonyłu żelaza, a ułożona przed nią warstwa o mniejszej koncentracji wypełniacza dopasowuje falowo strukturę do otoczenia, co minimalizuje odbicie fali [148]. Połączenie cech kilku rodzajów materiałów umożliwia daleko posunięte modyfikacje

właściwości EM kompozytu, wynikające przede wszystkim z jego wewnętrznej struktury, np. warstwowej, cząsteczkowej (rys. 2a) lub włóknowej (rys. 2b). Realizacja tego rodzaju kompozytu nie byłaby możliwa przez użycie dwóch warstw zbudowanych z klasycznych przewodników i dielektryków.



RYS. 2. Przykład budowy kompozytu: a) przekrój przez strukturę hybrydową zbudowaną z polifluorku winylidenu (PVDF) i cząstek węglowo-krzemowych (CS) tworzących lokalny mikrokondensator [57]; b) absorbująca falę EM struktura tekstylna pokryta warstwą stopu mosiądku (75%) i tytanu (25%), [149]

W wyżej wymienionej grupie kompozytów pól dużej częstotliwości (powyżej kilkuset MHz) największą uwagę zwrócono na kompozyty hybrydowe. Ich zaletą jest mała masa, odporność na korozję, elastyczność oraz szeroki zakres kształtowania właściwości. Dzięki zwiększonej przewodności elektrycznej oraz przenikalności elektrycznej względem typowych materiałów dielektrycznych i innych tworzyw sztucznych uzyskuje się, np. podwyższony współczynnik absorpcji lub odbicia fali EM. Podobnie jest z kompozytami włóknowymi, w których wypełnienie matrycy krótkimi włóknami lub cienkimi filamentami przy koncentracji na poziomie poniżej 10% objętości, umożliwia osiągnięcie skuteczności ekranowania przekraczającej 32 dB (przy częstotliwości pracy 1-2 GHz), [67]. Struktury hybrydowe i polimerowe cechują się również znaczną uniwersalnością zastosowań. Materiały tego typu są stosowane w zagadnieniach transferu ciepła i masy, ze względu na ich właściwości mechaniczne oraz w celu modyfikacji rozkładu stałych i szybkozmiennych pól EM. Wzrost popularności kompozytów przyczynił się do rozwoju nowoczesnych dziedzin nauki (np. nanotechnologii) i opracowania nowych metod wytwarzania – podobnych dla kompozytów mechanicznych, termicznych, czy elektromagnetycznych [67].

Z wymienionych cech i rodzajów kompozytów wynikają ich różnorodne zastosowania w inżynierii elektrycznej. Wraz z rozwojem nowych sposobów kształtowania właściwości EM pojawiają się też nowe obszary zastosowań. Uwzględniając najważniejsze obecnie i potencjalne zastosowania do przykładowych aplikacji kompozytów EM zaliczyć można:

- materiały o wysokim współczynniku absorpcji lub odbicia fali (np. odbijające promieniowanie podstawki i siatki mikrofalówek), [89];
- ekranowanie pól EM (np. nieprzewodzące maty EMI o wysokiej przenikalności magnetycznej, stosowane w poprawie kompatybilności elektromagnetycznej w obrębie układu elektronicznego), [77];
- materiały antyelektrostatyczne (np. powierzchnie o podwyższonej przewodności odprowadzające nagromadzony ładunek elektryczny), [74];
- powierzchnie o dobieranym współczynniku radiacji (np. promienniki ciepła) lub odbierania energii (np. radiatorzy planarne), [32];
- superdielektryki, charakteryzujące się przenikalnością elektryczną setki tysięcy razy większą od przenikalności próżni (potencjalne zastosowanie w kondensatorach małej częstotliwości i ekranach elektrostatycznych), [57];
- materiały wykazujące cechy ferroelektryków oraz ferromagnetyków w polach dużej częstotliwości (planowana produkcja zintegrowanych cewek i kondensatorów dla mikroelektroniki), [8].

Oprócz wymienionych zastosowań kompozyty EM wykorzystywane są do produkcji urządzeń odzyskiwania energii (ang. *energy harvesting*), [23]. Tworzone sztucznie piezoelektryki i piezomagnetyki oraz ich kombinacje umożliwiają konwersję energii mechanicznej na energię elektryczną. Sprzęgnięcie zjawisk elektrycznych, magnetycznych i mechanicznych w jednym materiale daje możliwości wykorzystania ich także w budowie multifizycznych czujników i przetworników.

### 1.1.2. Metody analizy kompozytów elektromagnetycznych

Ze względu na znaczne niejednorodności struktur kompozytów elektromagnetycznych, analiza ich właściwości może być przeprowadzona przy użyciu metod numerycznych. Modele analityczne ograniczone są do przypadków struktur jednorodnych lub jednowarstwowych, czyli najczęściej do standardowych materiałów izotropowych. Mogą być także wykorzystane w ocenie skupionych parametrów (impedancje) lub rozkładu pola EM w otoczeniu kompozytu po ujednorodnieniu jego właściwości (oraz gdy pozostają one w przybliżeniu izotropowe). Ograniczona możliwość analizy zjawisk EM w inżynierii materiałów kompozytowych, narzuca konieczność wykorzystania modeli numerycznych i metod obliczeniowych zarówno w analizie rozkładu pól w materiałach i ich otoczeniu, jak również w predykcji i homogenizacji właściwości.

Ze względu na zakres widma fal EM, w którym są stosowane kompozyty EM (powyżej kilkuset MHz), właściwości uwzględniane w analizie modeli matematycznych dotyczą podstawowych parametrów:

- zespolonej przenikalności elektrycznej ( $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ );
- zespolonej przenikalności magnetycznej ( $\mu = \mu' + j\mu''$ );
- współczynnika absorpcji;

- współczynnika odbicia;
- współczynnika przepuszczenia.

W materiałach przewodzących poszukuje się efektywnej przewodności elektrycznej ( $\sigma_{\text{eff}}$ ), a na podstawie znajomości powyższych parametrów wyznaczyć można impedancję falową ( $Z_p$ ), bądź współczynnik załamania ośrodka ( $n_p$ ). Poszukiwane zastępcze, efektywne wartości współczynników wynikają z dążenia do homogenizacji niejednorodnych układów materiałowych. Zastosowanie kompozytów EM prowadzi do zmian rozkładu pola elektrycznego wewnątrz oraz w otoczeniu próbki materiału. Analiza dotyczy zatem promieniowania elektromagnetycznego o ściśle określonych parametrach, tj. amplitudzie składowych natężenia pola, częstotliwości, przesunięciu fazowym, polaryzacji fali lub rodzaju modu.

Przy założeniu sinusoidalnych zmian przebiegów wartości natężenia pola elektrycznego stosowany jest opis równaniem Helmholtza w dziedzinie częstotliwości

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + (\omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \sigma) \underline{\mathbf{E}} = 0, \quad (1)$$

gdzie:  $\Delta$  – operator Laplace'a,  $\underline{\mathbf{E}}$  – wektor natężenia pola elektrycznego [V/m],  $j$  – jednostka urojona,  $\omega$  – pulsacja [rad/s].

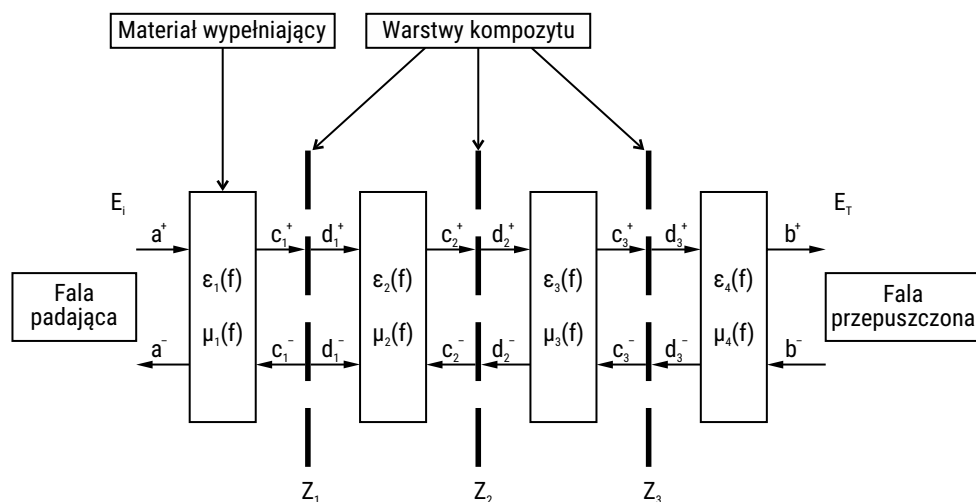
Ze względu na niejednorodną strukturę materiałową układu, w tym szczególnie w obszarze kompozytu, rozwiązanie równania (1) wymaga uwzględnienia zmian wartości parametrów materiałowych ( $\varepsilon = \varepsilon(x,y,z)$ ,  $\mu = \mu(x,y,z)$ ,  $\sigma = \sigma(x,y,z)$ ). Równanie (1) przy założonych warunkach brzegowych, stanowi podstawę do oszacowania właściwości kompozytu w wyniku obliczenia rozkładu elektromagnetycznego pola bliskiego.

Jedną z pierwszych metod modelowania kompozytów w dziedzinie częstotliwości była metoda momentów (ang. *Method of Moments* – MoMs), znana także jako metoda elementów brzegowych (MEB), [107]. Umożliwia ona analizę niejednorodnych materiałów przewodzących i półprzewodzących oraz zjawisk polowych w magnetykach i dielektrykach. Jest szczególnie istotna w analizie kompozytów hybrydowych, gdzie tzw. droga korelacji między cząsteczkami wypełniającymi matrycę jest zależna od długości fali EM, czego nie uwzględniają modele homogeniczne, jak BEMT (ang. *Bruggeman effective medium theory*) i MGT (ang. *Maxwell-Garnet theory*), [39]. MoMs służy do rozwiązania liniowych równań różniczkowych cząstkowych ze znanymi warunkami brzegowymi zadanymi na powierzchniach granicznych. Z uwagi na fakt, iż formułowana jest dla elementów powierzchniowych, to wymaga przedstawienia problemu w postaci wydzielonych płaszczyzn obliczeniowych. Stąd jest szczególnie użyteczna w analizie struktur o dużym stosunku powierzchni do objętości (np. struktury planarne, taśmy, płyty).

Kompozyt jest przybliżany przez pomijalnie cienkie warstwy, na które jest dzielony wzdłuż swej grubości. Z każdej wybiera się dostatecznie duży fragment powierzchni reprezentujący niejednorodną strukturę. Fragment ten jest następnie przedstawiany

w postaci dwuwymiarowej powierzchni o znanym rozkładzie współczynnika materiałowego, która może być dodatkowo umieszczona między obszarami o właściwościach dyspersyjnych (rys. 3) i zdyskretyzowana na liczne elementy trójkątne [26, 39]. Przy użyciu tej metody obliczane są prądy powierzchniowe indukowane przez poprzecznie padającą płaską falę elektromagnetyczną. Metoda ta jawi się jako szczególnie przydatna do oszacowania właściwości już wytworzonego kompozytu, np. na podstawie otrzymanych w wyniku obliczeń zestawu współczynników rozproszenia (ang. *scattering parameters*). Oprócz powyższego, znajdujący na poszczególnych warstwach rozkład składowych natężenia pola elektrycznego daje przybliżony obraz pola 3D w obrębie kompozytu.

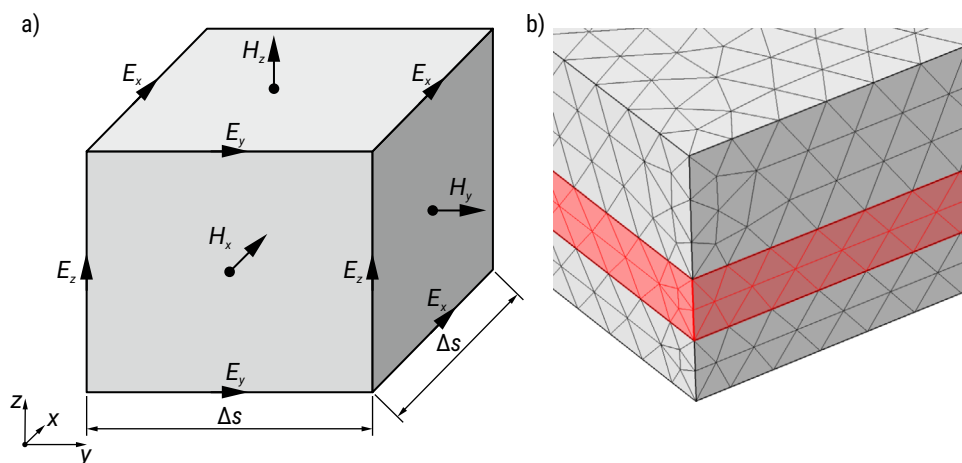
Metoda momentów (MoMs) przez charakter analizy poszczególnych powierzchni jest stosowana do obliczeń kompozytów warstwowych, których podział na poszczególne warstwy wynika z założonej budowy jego struktury. W przypadku struktur o trójwymiarowej budowie, metoda może cechować się znaczącymi błędami obliczeniowymi, wynikającymi z uproszczenia lub pominięcia złożonych interakcji w kierunku poprzecznym do powierzchni materiału. Jest również wymagająca pod względem obliczeniowym, gdyż całkowita forma równań prowadzi do powstania gęstych macierzy współczynników. Z użyciem MoMs możliwe jest wyznaczenie parametrów elektromagnetycznych materiału, na podstawie obrazów otrzymanych ze zdjęć mikroskopowych lub tomografii wytworzonych struktur. Metoda rzadziej jest stosowana do ich projektowania lub oszacowania rozkładu pola EM [77].



RYS. 3. Podział warstw kompozytu: materiał wypełniający między warstwami o dyspersyjnych właściwościach EM oraz warstwy robocze przedstawione w postaci pomijalnie cienkich taśm [77]

Oprócz MoMs, w ostatnim czasie duży nacisk został położony na metody numeryczne oparte na dyskretyzacji ograniczonego obszaru objętościowego i opis zjawisk za pomocą równań różniczkowych. Przy użyciu schematów różnicowych przeprowadzana jest analiza numeryczna, np. pól stałych za pomocą metody różnic skończonych (MRS), zmiennych w czasie metodą różnicową w dziedzinie czasu (ang. *Finite Difference Time Domain* – FDTD), pól harmonicznych metodą różnicową w dziedzinie częstotliwości (ang. *Finite Difference Frequency Domain* – FDFD) oraz przy dowolnym charakterze zmian w czasie – metodą elementów skończonych (MES). Przedstawienie kompozytu w postaci niejednorodnego, warstwowego obiektu 3D zwiększa stopień złożoności modelu. Jednak zbliżenie budowy modelu do fizycznej struktury materiału poszerza możliwości analizy. Wynikające z wybranych metod uogólnienie do zjawisk dowolnie zmiennych w czasie (FDTD lub MES), umożliwia badanie odpowiedzi układu kompozytowego na wymuszenia o dowolnym przebiegu.

Metoda FDTD pozwala na rozwiązanie różniczkowej postaci równań Maxwella ze względu na składowe  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{H}$  z określonym krokiem  $\Delta t$  w czasie oraz  $\Delta s$  w obszarze (rys. 4a). Komórki Yee reprezentują zwykle jednorodne cząstki materiału rozproszonego w matrycy (odwzorowanej za pomocą grupy komórek). Zestawy komórek mogą reprezentować warstwy i/lub włókna kompozytu. Możliwe staje się zaproponowanie materiału o dowolnej strukturze wewnętrznej, poddanej oddziaływaniu fali o wybranym przebiegu czasowym, a na podstawie uzyskanego rozwiązania określenie wypadkowych właściwości i rozkładów wielkości polowych [77]. Podobne postępowanie występuje w MES, gdzie obszar dzieli się na, np. elementy czworościenne (rys. 4b) odwzorowujące geometrię. Rozwiązanie równań Maxwella umożliwia wyznaczenie rozkładu pola w ograniczonej, dyskretnej przestrzeni modelu.



RYS. 4. Przykłady siatek obliczeniowych: a) komórka Yee modelująca fragmentu obszaru 3D w metodzie FDFD [77]; b) stosowana w MES tetrahedralna siatka 3D odwzorowująca kompozyt warstwowy



Zaletą MRS i MES są ich obniżone względem MoMs wymagania pamięci jednostek obliczeniowych. Macierze współczynników są rzadkie, często symetryczne, co ułatwia ich przechowywanie w pamięci komputera oraz późniejsze obliczenia iteracyjne. Rozwiązanie zjawisk polowych w modelach 2D i 3D ze złożonymi geometriami, czy nieliniowymi współczynnikami materiałowymi, znacząco poszerza możliwości analizy. W obszarze modelu wyznaczone są wartości składowych natężenia pola elektrycznego, a na tej podstawie także składowych pola magnetycznego, dając w efekcie pełen obraz rozkładu pola EM w przestrzeni [150].

### 1.1.3. Homogenizacja właściwości elektrycznych i magnetycznych

Analiza pola EM w układach materiałowych dużej skali wymaga uproszczenia struktury geometrycznej kompozytu, gdyż wysoka złożoność modelu komplikuje proces projektowy lub wręcz uniemożliwia obliczenia. Uproszczenie modelu wiąże się także z ograniczeniami sprzętowymi, ponieważ w przypadku obliczeń numerycznych rozkładu pola EM, w obecności niejednorodnego kompozytu, metody różnicowe wymagają znacznych pamięci obliczeniowych. Skutecznym sposobem uproszczenia złożonej struktury kompozytu są metody homogenizacji, dążące do zastąpienia niejednorodnego materiału dużo wygodniejszym w analizie ekwiwalentnym materiałem jednorodnym. Projektując złożony materiał o wymaganych parametrach poszukuje się układu charakteryzowanego przez konkretne, zastępcze wartości liczbowe określające jego właściwości w skali makroskopowej. Podejście makroskopowe prowadzące do homogenizacji właściwości wynika z trzech przesłanek:

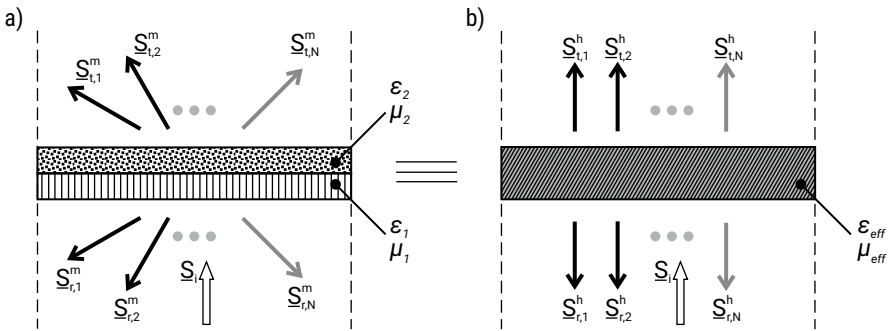
- dążenie do zdefiniowania parametrów nowo utworzonego materiału, bez konieczności bezpośredniego odwołania się do właściwości składników;
- określenie parametrów nowego materiału o jakościowo nowych właściwościach wynikających z jego struktury;
- brak uzasadnienia lub możliwości analizy w skali mikroskopowej.

Aby liczbowo określić parametry zastępcze wprowadza się pojęcie *właściwości efektywnych*, będących swoistym uśrednieniem właściwości poszczególnych faz, które są sposobem odwzorowania złożonego kompozytu w postaci jednorodnego materiału.

Warunkiem koniecznym jest, by obserwowana w skali makroskopowej odpowiedź materiału homogenicznego na zadane wymuszenia, była jak najbardziej zbliżona do odpowiedzi niejednorodnego materiału. Przykładem jest kompozyt złożony z warstw o dobieranej strukturze i właściwościach (rys. 5a), którego odwzorowanie za pomocą struktury homogenicznej (rys. 5b) oparte jest na kryterium mocowym [7], gdzie dąży się do znalezienia takiej efektywnej przenikalności elektrycznej  $\epsilon_{\text{eff}}$  oraz przenikalności magnetycznej  $\mu_{\text{eff}}$ , przy których spełnione są warunki

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \underline{S}_{r,n}^m = \sum_{n=1}^N \underline{S}_{r,n}^h \\ \sum_{n=1}^N \underline{S}_{t,n}^m = \sum_{n=1}^N \underline{S}_{t,n}^h \end{cases}, \quad (2)$$

gdzie:  $\underline{S}_r^m, \underline{S}_t^m$  – zespolone wektory Poyting'a związane z odpowiednio falą odbitą i przepuszczoną przez strukturę niejednorodną;  $\underline{S}_r^h, \underline{S}_t^h$  – zespolone wektory Poyting'a związane z odpowiednio falą odbitą i przepuszczoną przez strukturę jednorodną. Metody przedstawiania kompozytu w postaci ekwiwalentnego materiału oparte są na modelach właściwości efektywnych, teorii mieszania substancji, czy teorii ośrodka efektywnego (ang. *Effective medium theory* – EMT) oraz modelach empirycznych, analitycznych, sieciowych i numerycznych.



RYS. 5. Harmoniczna fala EM ( $\underline{S}_i$ ) padająca na materiał kompozytowy oraz powstałe w wyniku obecności materiału fale odbite ( $\underline{S}_r$ ) i przepuszczone ( $\underline{S}_t$ ): a) struktura niejednorodna – kompozyt warstwowy; b) struktura jednorodna – materiał homogeniczny

a) Analityczne modele właściwości efektywnych

Najprostsze modele analityczne zostały opracowane początkowo dla struktur dwufazowych. Model Voigta znany też jako ROM (ang. *rule of mixtures*) zakłada wyrowadzenie efektywnych właściwości wyłącznie na podstawie prostego stosunku objętościowego (lub masowego) faz składowych [89]

$$\sigma_e = \phi \sigma_A + (1 - \phi) \sigma_B, \quad (3)$$

gdzie:  $\sigma_e$  – efektywna przewodność elektryczna w [S/m];  $\sigma_A, \sigma_B$  – przewodności elektryczne faz składowych w [S/m];  $\phi$  – stosunek objętościowy materiału A do objętości całkowitej.

Podobne wzory określa się dla efektywnych wartości przenikalności elektrycznej i magnetycznej. Model ROM uwzględnia jedynie ilość substancji w kompozycie, przy pominięciu kształtu cząsteczek, ich rozmieszczenia, czy wzajemnych interakcji na poziomie atomowym. Pomija także efekty związane z występowaniem progów perkolacji w strukturach sieciowych oraz efektów falowych, gdy długość fali EM jest porównywalna z rozmiarami cząstek rozmieszczonych w matrycy. Model Voigta jest znany także jako *model równoległy*, stąd przez analogię do obwodów elektrycznych wyprowadzić można *model szeregowy*

$$\sigma_e = \left[ \frac{\phi}{\sigma_A} + \frac{1-\phi}{\sigma_B} \right]^{-1} . \quad (4)$$

Oba modele są często wystarczające do homogenizacji właściwości efektywnych kompozytów laminarnych lub włóknowych o lokalnie jednorodnej, ciągłej strukturze.

*Model Bruggemana* i *model Maxwella-Garnetta* interpretują kompozyt jako strukturę o zupełnie przypadkowym rozkładzie faz składowych. Efektywne właściwości definiowane są uwzględniając zmodyfikowane równania Voigta [133]

$$(1-\phi) \frac{\sigma_A - \sigma_e}{\sigma_A + 2\sigma_e} + \phi \frac{\sigma_B - \sigma_e}{\sigma_B + 2\sigma_e} = 0 . \quad (5)$$

W *modelu Hamiltona* postępowanie jest podobne. Rozkład jednej z faz (materiał A) jest przypadkowy, lecz faza ta „skondensowana” jest w formie, np. sferycznych cząsteczek, które to dopiero są dowolnie rozłożone w przestrzeni matrycy (materiału B). Cząstki mogą przyjmować także inne formy (płatki, cylindry, elipsy). *Model Hamiltona* uogólnił wcześniejsze twierdzenia i dany jest w postaci [33]

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_A} = \frac{\sigma_A / \sigma_B + (n-1) + (n-1)(\sigma_A / \sigma_B - 1)\phi}{\sigma_A / \sigma_B + (n-1) + (1 - \sigma_A / \sigma_B)\phi} , \quad (6)$$

przy czym współczynnik  $n$  jest parametrem zależnym od kształtu cząsteczek domieszki, np. dla  $n = 3$  rozważa się przypadek cząsteczek sferycznych, a dla  $n = 6$  cylindrycznych. Modele te uwzględniają strukturę i ilość poszczególnych faz, lecz wciąż pomijają wzajemne oddziaływania fizyczne i chemiczne oraz próg perkolacji w sieci strukturalnej. Mimo, że właściwości kompozytu uśredniane są dla przypadków pracy poza progami występowania dyfrakcji fali i perkolacji wewnętrznej sieci strukturalnej, to modele te wciąż doskonale nadają się do przybliżonego odwzorowania i homogenizacji materiałów hybrydowych oraz polimerowych.

b) Sieciowe modele właściwości efektywnych

Modele sieciowe działają w oparciu o jedno z trzech podejść:

- połączenie *modelu równoległego* i *szeregowego*;

- reprezentację w postaci sieci periodycznej;
- zastosowanie teorii perkolacji.

Dwa pierwsze podejścia znalazły najszersze zastosowanie w kontekście kompozytów warstwowych. Ostatnia metoda stosowana w analizie kompozytów z silnie rozproszoną w materiale i zagęszczoną lokalnie fazą w postaci cząsteczek w matrycy, wymaga zastosowania empirycznych modeli, na podstawie których określa się zmienność właściwości efektywnych w funkcji stosunku objętościowego, lokalizacji progu perkolacji na tej charakterystyce oraz dynamiki zmian funkcji w otoczeniu progu [89].

Model sieciowy reprezentuje możliwie jak najbardziej ograniczoną, lecz jednocześnie bardziej rozbudowaną względem bazowych modeli (*szeregowego* i *równoległego*) sieć skupionych parametrów. Mikrostruktura heterogenicznego materiału zostaje poddana dekompozycji w sieć złożoną z szeregowych i równoległych elementów połączonych w określony sposób, którym przypisuje się poszczególne właściwości faz składowych. Efektywne parametry traktuje się jako zastępcze przewodności (np. elektryczne, termiczne) sieci, wyznaczane wedle znanych zasad łączenia szeregowego i równoległego elementów obwodów elektrycznych [133, 144]. Rozbudowa modelu umożliwi dokładniejsze odwzorowanie struktury materiału oraz wpływu poszczególnych składników oraz oszacowanie zastępczych właściwości. Jednocześnie wzrasta stopień komplikacji budowy modelu, czy określenia który z jego elementów (jeden lub więcej) reprezentuje którą z rozważanych faz. Otwartym pytaniem pozostaje także „Ile elementów i jaki zespół połączeń jest konieczny do odwzorowania struktury kompozytu?”, gdyż wraz ze wzrostem dokładności modelu, rośnie też stopień jego złożoności.

Reprezentacja sieciowa może zostać w uproszczona, jeżeli elementy składowe i ich połączenia są identyczne lub kompozyt charakteryzuje wewnętrzna anizotropia. Jeżeli wymuszenia przyłożone są punktowo (np. skalarne potencjały elektryczne, magnetyczne, temperatura), to wówczas ujednorodnionym modelem może być pojedyncza impedancja „widziana” od strony zacisków z wymuszeniem. Modele budowane są na podstawie nieskończonych [88] i skończonych [136] sieci periodycznych o znanej strukturze komórek. Oryginalnie sieć składa się z gałęzi z rezystorami i węzłów źródłowych o wybranej lokalizacji. Jednak zamiast rezystorów wprowadzić można inne parametry (np. odwrotności przewodności termicznej wprost proporcjonalne do rezystancji termicznych, indukcyjności [5], pojemności elektryczne [127]). Rozwiązując zależności opisujące sieci periodyczne (nawet z anizotropowymi parametrami) wyznaczana jest zastępcza impedancja. Podejście to zakłada znajomość topologii sieci (oraz w pewnym stopniu jednorodną strukturę układu, zawierającego skupione parametry w powtarzających się komórkach). Zastępczy model dotyczy tylko wymuszeń punktowych, a z kolei modele z inkluzjami (lokalnymi niejednorodnościami parametrów) w sieci są trudne do analitycznego rozwiązania i wymagają modeli obwodowych obliczanych numerycznie.

c) Numeryczne modele właściwości efektywnych

Algorytm numerycznej homogenizacji wielofazowego medium opiera się na trzech krokach działania [133]:

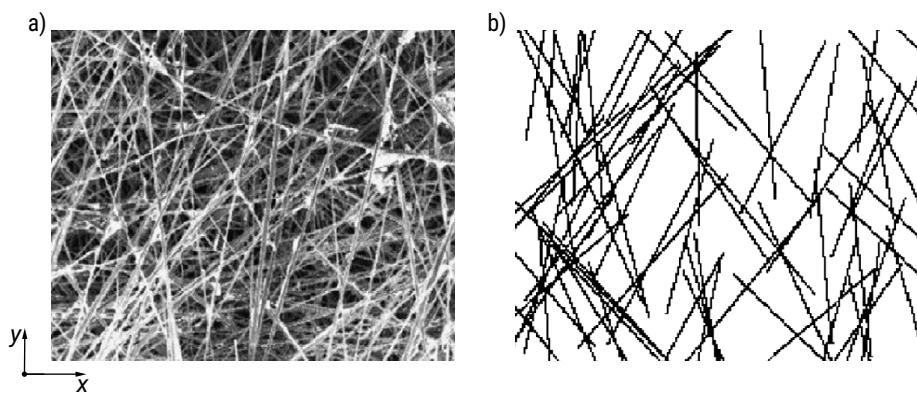
- odtworzenie struktury kompozytu, wykonywane w oparciu o algorytmy analizy i generacji obrazu;
- numeryczne rozwiązanie zagadnienia transportu energii na podstawie równań różniczkowych;
- określenie sposobu wyznaczenia efektywnych właściwości na podstawie otrzymanego zestawu danych numerycznych.

W realizacji tej metody stają się niezbędne komputery ze specjalistycznym oprogramowaniem, które pozwalają dostatecznie szybko i dokładnie odtworzyć rzeczywistą lub symulować projektowaną strukturę.

Odtworzenie struktury jest krokiem, który odpowiada za zdefiniowanie rozkładu współczynników materiałowych, wynikających z właściwości i rozmieszczenia faz w przestrzeni materiału [131]. Wybierana jest lub tworzona reprezentatywna próbka z odpowiednią koncentracją obu faz, aby w wyniku obliczeń możliwe było ich ujednorodnienie w dużo większej skali niż rozmiar inkluzji. Próbka może pochodzić z badań eksperymentalnych (np. zdjęcie uzyskane z mikroskopu), która w rezultacie zastosowania algorytmu analizy obrazu zostaje zdyskretyzowana, a poszczególnym elementom przypisane zostają zadane właściwości. Działanie to omówiono w rozdziale 1.1.2, gdzie obliczenia numeryczne poprzedzało przygotowanie obrazu rzeczywistego kompozytu. Innym podejściem jest metoda losowego wzrostu (ang. *random generation-growth*), w której odwzorowuje się lub zadaje strukturę kompozytu o charakteryzujących ją parametrach strukturalnych, m.in. kształt i stopień koncentracji cząsteczek, losowość wypełnienia analizowanego obszaru [85]. Tym sposobem model numeryczny (rys. 6b) reprezentuje rzeczywistą strukturę (rys. 6a) i pozwala przewidywać jej właściwości. Pomijając krok dostarczenia obrazu a koncentrując się wyłącznie na algorytmie generacji ekwiwalentnego modelu numerycznego, można przy założeniu różnych parametrów generacji utworzyć opis szeregu struktur i wykonać ich analizę, np. w celu oceny/doboru właściwości.

Numeryczne modele opierają się także na innych sposobach estymacji właściwości kompozytów. Utworzony numeryczny model struktury kompozytu, na podstawie różniczkowego lub całkowego opisu zjawisk fizycznych zachodzących w układzie, umożliwia określenie wielu parametrów zastępczych. Przykładem są metamateriały, których homogenizację można przeprowadzić wykorzystując współczynniki odbicia i transmisji materiału. Na podstawie obliczeń rozkładu pola EM, wyznaczana jest całkowita moc fali padającej, odbitej i przepuszczonej, a na tej podstawie estymowane są współczynniki absorpcji, odbicia i transmisji [7]. Oszacowanie właściwości zastępczych jest przeprowadzone z wykorzystaniem modelu 3D niewielkiego fragmentu materiału z wypełnieniem [28], np. w postaci jednorodnych inkluzji sferycznych [11] lub sześciennych [87] tworzących równomierną sieć periodyczną. Przestrzenne

rozkłady pola są wyznaczone z użyciem wąskopasmowych schematów obliczeniowych, np. MES. Jeszcze inne podejście zaprezentowano w [20] stosując algorytm optymalizacyjny. Zastąpienie niejednorodnej ceramiki budowlanej ekwiwalentnym, jednorodnym materiałem wykonano w oparciu o minimalizację funkcji celu opisującej różnicę współczynnika transmisji układu niejednorodnego i homogenicznego. Algorytm dobierał wartości przenikalności i przewodności elektrycznej izotropowego materiału, przy założeniu propagacji fali płaskiej w modelu o identycznych gabarytach, jak w przypadku złożonej struktury rzeczywistej.



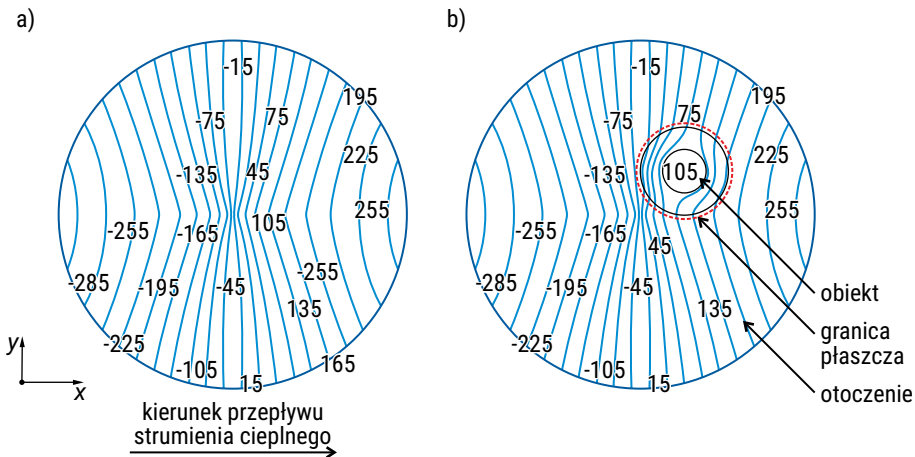
RYS. 6. Odzworowanie fragmentu kompozytu włóknowego modelem numerycznym [133]: a) rzeczywista struktura włókien; b) reprezentacja struktury włókien metodą losowego wzrostu

Uniwersalność metod numerycznych przełożyła się na zainteresowanie ich możliwościami i zastosowaniem w homogenizacji różnorodnych materiałów. Metody umożliwiają uzyskanie identycznych wyników jak modele analityczne, lecz znacząco je rozszerzają poprzez możliwości badań bardziej złożonych kształtów, struktur 3D, uwzględnienia anizotropii faz materiałowych. Wymagają jednak pracochłonnego przygotowania modelu numerycznego i zaawansowanych algorytmów rozwiązywania równań różniczkowych. Złożoność obliczeniowa niektórych modeli może także stać się dużym problemem przy występujących ograniczeniach sprzętowych. Krytycznym elementem jest przede wszystkim zgodność modelu homogenicznego z rzeczywistością, potwierdzana na drodze eksperymentu. Stąd w odniesieniu do modeli numerycznych, pozwalających przybliżyć znacznie lepiej strukturę kompozytu, oczekuje się wysokiej zgodności rezultatów obliczeń i badań. Niestety, jest to wciąż analiza na granicy skali makro- i mikroskopowej (cząsteczki w materiale bazowym, ale bez odzworowania struktury atomowej) wymagająca przyjęcia szeregu założeń upraszczających, której skuteczność zależy od mocy komputerów i dostępnej pamięci.

## 1.2. Metamateriały pola skalarnego

### 1.2.1. Metody analizy

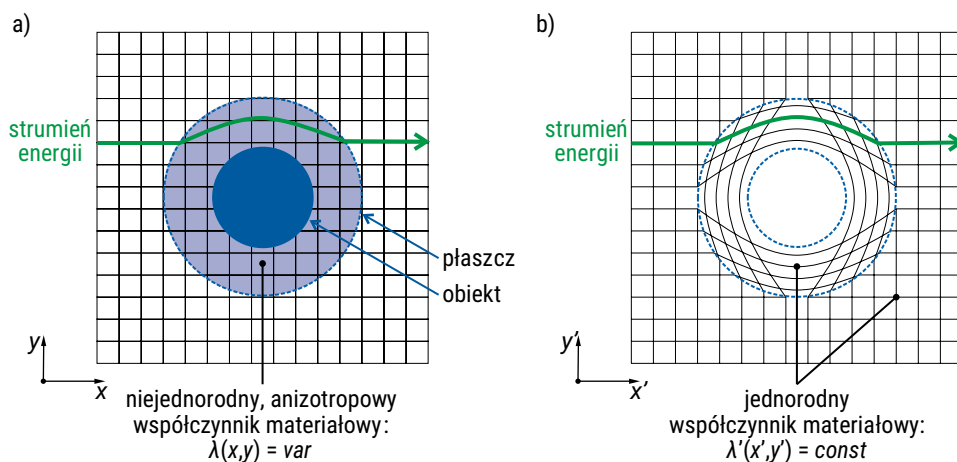
Trend analizy pól skalarnych i kształtujących je materiałów zapoczątkowany został pracami teoretycznymi od roku 2007. M.in. w 2008 roku T. Chen podjął się rozwiązania problemu ukształtowania pola temperatury w pewnym fragmencie kołowego układu 2D [19]. Celem było znalezienie takiego rozkładu przewodności cieplnej warstwy metamateriału, który w wybranym obszarze ukształtowałby w pożądaný sposób rozptył strumienia cieplnego. Efektem było ukrycie okrągłego obiektu (rys. 7b), rozumiane jako zachowanie niezmiennych izolinii temperatury w układzie (z wyłączeniem obszaru obiektu i warstwy metamateriału) tak, aby umieszczony obiekt nie wpływał na rozkład pola temperatury (rys. 7a).



RYS. 7. Rozkład temperatury w [K]: a) układ jednorodny bez obiektu – przepływy niezaburzone; b) układ z obiektem i metamateriałem – zaburzenie pola tylko w obrębie obszarów wtrąconych do układu [19]

Problem zaprojektowania tego rodzaju materiału sprowadza się do znalezienia rozkładu poszczególnych wartości tensora jego przewodności cieplnej (przy założonych wymiarach obiektu, płaszczca i przewodności otoczenia). Zadanie ukrycia dowolnego obiektu w polu fizycznym z użyciem kompozytowego płaszczca, jest rozwiązywane za pomocą metod opartych na transformacji układu współrzędnych. Zaliczono do nich metody optycznej oraz termodynamicznej transformacji [27]. Sposób analizy, przedstawiany oryginalnie w pracach J. Pendry'ego i U. Leonhardta, zaczerpnięto z prac A. Einsteina dotyczących opisu czasoprzestrzeni i wpływu na nią pola grawitacyjnego masywnych obiektów [58].

Główna idea metody polega na jednoznacznej transformacji pomiędzy arbitralnym (wybrany) a fizycznym układem współrzędnych [27, 58, 93, 102]. Układ arbitralny (rys. 8a) to układ współrzędnych, w którym odwzorowano matematycznie rzeczywistość (prawdziwe otoczenie, obiekt, materiał, i inne). Przestrzeń ta nie jest zaburzona, pozostając lokalnie jednorodna w przyjętym układzie współrzędnych. Fizyczny układ współrzędnych (rys. 8b) jest układem wirtualnym, sformułowanym dla rozpatrywanego pola fizycznego, np. pola elektromagnetycznego, termicznego. Strumień energii porusza się wzdłuż krzywych opisujących wirtualną, utworzoną w wyniku transformacji ciągłą przestrzeń [108].



RYS. 8. Układy współrzędnych: a) arbitralny – obiekt i płaszcz w kartezjańskim układzie współrzędnych  $xy$  z niejednorodnym rozkładem anizotropowego wsp. materiałowego w obrębie płaszcza; b) fizyczny – otoczenie i płaszcz stanowią krzywoliniowy, wirtualny układ współrzędnych  $x'y'$  z jednorodnym rozkładem izotropowego wsp. materiałowego

Analizując dwa równoważne układy można zauważyć, że fizyczna przestrzeń (wirtualna) jest zniekształcona (rys. 8b), ale współczynnik materiałowy tej przestrzeni jest izotropowy i jednorodny, czyli posiada stałą wartość  $\lambda'$ , a w standardowych warunkach arbitralna przestrzeń (rzeczywista) nie jest zdeformowana (rys. 8a), lecz zmianie podlega rozkład współczynnika materiałowego. Metoda optycznej transformacji bazuje na założeniu, że dla rozpatrywanego pola fizycznego można utworzyć dowolnie zniekształconą wirtualną przestrzeń (widzianą przez to pole) poprzez modyfikację materiału rzeczywistej przestrzeni. Wykonując transformację układu współrzędnych transformuje się jednorodny rozkład  $\lambda'$  w niejednorodny układzie współrzędnych  $x'y'$ , na niejednorodny rozkład  $\lambda$  w arbitralnym układzie  $xy$ . Transformacja układu współrzędnych przeprowadzana jest z użyciem macierzy Jakobiego, określającej relację między dwoma układami współrzędnych



$$\mathbf{J} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Zatem rozpatrując równanie Laplace'a dla dowolnego pola skalarnego  $f' = f(x', y')$  o założonym rozkładzie  $f'$  w wirtualnej przestrzeni  $x'y'$

$$\nabla' \cdot (\lambda' \nabla' f') = 0 \quad (8)$$

możliwe jest określenie takiego rozkładu współczynnika materiałowego  $\lambda(x, y)$  w rzeczywistej przestrzeni, który identycznie ukształtuje drogę strumienia energii (rys. 8)

$$\lambda = \frac{\mathbf{J} \lambda' \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})}. \quad (9)$$

W przestrzeni rzeczywistej równanie (8) przyjmie postać

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla f) = 0, \quad (10)$$

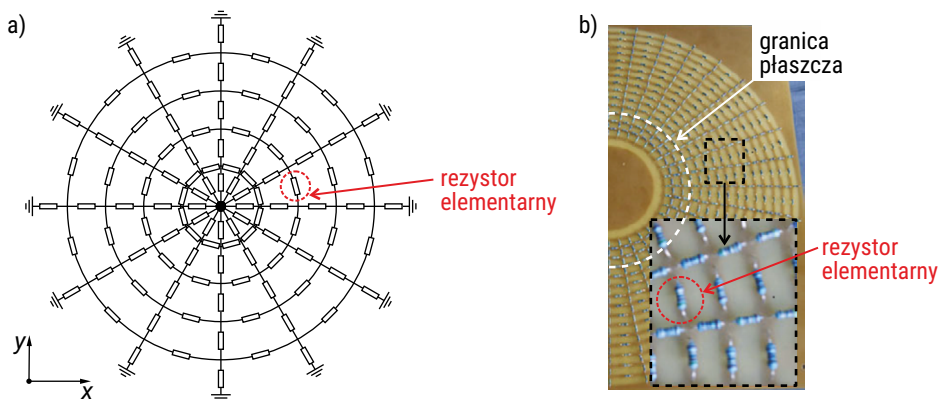
dając identyczny rozkład wielkości skalarnej  $f = f'$ . Analizując równanie (9) można zauważyć, że transformowany współczynnik materiałowy może być niejednorodny (zależność wartości elementów macierzy Jakobiego od  $x$  i  $y$ ), ale przede wszystkim zostanie opisany tensorem drugiego rzędu. Niehomogeniczność i anizotropia materiału stanowią znaczne wyzwanie w jego fizycznej realizacji.

Innym sposobem formowania i analizy kompozytów pełniących rolę płaszcza, czy koncentratora pola jest metoda obwodowa. Materiał może być wizualizowany jako linia długa [4] o skupionych parametrach jednostkowych  $\Delta R$ ,  $\Delta G$ ,  $\Delta L$ ,  $\Delta C$  reprezentujących właściwości poszczególnych, elementarnych fragmentów sieci. Utworzony obwód elektryczny w postaci linii transmisyjnej okazał się efektywnym i prostym narzędziem, wystarczającym do odwzorowania trójwymiarowego metamateriału. Dużą zaletą była łatwość obliczeń (modele obwodowe zamiast polowych) oraz naturalne podejście do konstrukcji materiału. Podobnie jak linia długa składa się z powtarzających się elementarnych fragmentów o zadanych parametrach, tak metamateriał zbudowany jest z periodycznie rozłożonych komórek o projektowanych właściwościach efektywnych. Idea ta została wykorzystana także w analizie wolnozmiennych pól elektrycznych [44, 45, 142]. Autorzy przedstawili realizację sztucznego materiału koncentrującego pole elektryczne [45] oraz ukrywającego obiekty [44, 142], jako sieci złożonej z setek rezystorów połączonych szeregowo-równolegle (rys. 9a). Wyznaczenie elementarnej rezystancji  $\Delta R(x, y)$  (której wartość jest w ogólności inna w każdym

punkcie  $(x,y)$  układu) przeprowadzono stosując metodę optycznej transformacji. Analizę pola elektrycznego układu zrealizowano w oparciu o schemat elektryczny z parametrami skupionymi (rys. 9b).

Obwodowe modelowanie kompozytów ograniczone jest przede wszystkim do wolnozmiennych pól elektrycznych. W dostępnej literaturze brak jest informacji dotyczącej odwzorowania za pomocą schematu sieciowego materiałów pracujących w polach termicznych. Model obwodowy musiałby uwzględnić w tym przypadku nie tylko rezystancje termiczne modelujące zjawisko przewodzenia ciepła, lecz także opisujące konwekcję cieplną, a w wysokich temperaturach również radiację. Byłby to wówczas tylko model matematyczny, podczas gdy układ fizyczny pozostaje ciągły, a nie utworzony ze skupionych i łączonych elementów schematu termicznego. Podobnie jest z polami elektro- i magnetostatycznymi. Koncepcja obwodowego modelu kompozytu jest jednak obiecująca, gdyż:

- gwarantuje mniejszą złożoność modelu numerycznego wskutek redukcji liczby niewiadomych i rezygnacji z analizy polowej z tensorami opisującymi właściwości przestrzeni;
- umożliwia bardzo dokładne projektowanie zaawansowanych struktur, czego przykładem jest praca [142], w której na podstawie modelu skupionego utworzono płaszcz prądu stałego.



RYS. 9. Płaszcz prądu stałego [45]: a) ideowy model obwodowy z wyróżnieniem elementarnych rezystancji maskujących  $\Delta R(x,y)$ ; b) realizacja fizyczna otoczenia i płaszczka w postaci sieci rezystorów

Skupiony model sieciowy zastosowany do trójwymiarowych układów termicznych pozwala na przyspieszenie obliczeń, również w dziedzinie czasu. Polowy model numeryczny 3D jest opisany większą liczbą niewiadomych [13, 14], co znacząco wydłuża czas rozwiązania. Z tego powodu szybkie prototypowanie metamateriałów termicznych można zrealizować za pomocą modelu Beukena z impedancjami termicznymi.

Wartość impedancji może być szacowana w toku optymalizacji parametrów modelu, czyli zminimalizowania narzuconej funkcji celu (np. różnicy między przestrzennym rozkładem obliczonego i pożądanego pola temperatury  $T(x,y)$ ).

Istnieje co najmniej kilka innych metod rozwiązywania problemu projektowania płaszczy ukrywających obiekty, znanych z analizy pól elektromagnetycznych. Jedną z nich jest SCT (ang. *scattering cancellation technique*), w której dąży się do minimalizacji amplitudy fali odbitej i rozproszonej w układzie [38]. Każde rozproszenie pola w sąsiedztwie ukrywanego obiektu jest podstawą do jego identyfikacji. Z tego powodu konieczna jest redukcja, a najlepiej wygaszenie pola rozproszonego. Stosując cienkie warstwy materiałów dielektrycznych jako płaszczy okalających obiekt można doprowadzić do jednej z dwóch sytuacji:

- materiał pochłonie padającą falę (współczynnik odbicia równy 0) dzięki wysokiemu współczynnikowi absorpcji lub charakteryzować się będzie gradientowym wzrostem współczynnika załamania w kierunku padającej fali;
- materiał odbije część padającej fali, ale jednocześnie zaindukuje pole EM w przeciwnym kierunku (promieniowanie ulegnie wzajemnej interferencji).

Opisane podejście bazuje na analizie pola rozproszonego i efektach falowych związanych, np. z oscylującym momentem dipolowym w dielektryku. W przypadku metamateriałów pola skalarnego, ze względu na brak opisu falowego, metoda ta nie znalazła żadnego zastosowania, ani nie podjęto dotychczas próby jej adaptacji do zagadnień opisanych równaniami Laplace'a, czy Poissona. Podobnie jest z metodą śledzenia promieni (ang. *ray tracing*). Z uwagi na fakt, że pole skalarnie opisuje skalarny potencjał, a nie wektor bądź biegnący w przestrzeni promień fali EM, to analiza ta okazała się nie mieć przełożenia na problem kształtowania pola skalarnego.

Metody transformacji układu współrzędnych umożliwiają jednoznaczne wyznaczenie parametrów koniecznych do wymaganego ukształtowania pola fizycznego. Ta jednoznaczność powoduje jednocześnie znaczące problemy. W rozwiązaniach analitycznych znajduje się przypadki, gdy dany współczynnik materiałowy osiąga wartości ekstremalne (np. dąży do nieskończoności na granicy obiekt-płaszczyzna), ujemne (np. współczynnik załamania [41]), czy ułamkowe (np. mniejsza od jedności względna przenikalność magnetyczna [103]). Transformacje wymagają zatem dodatkowych ograniczeń nakładanych na elementy wyznaczanych tensorów materiałowych. Tym samym nie można założyć, że wobec dodatkowych ograniczeń możliwe będzie uzyskanie każdego pożądanego rozkładu pola. Rozpatrywane układy są wyidealizowane, co umożliwia wyprowadzenie dokładnych rozwiązań analitycznych. Autorzy wykorzystują narzędzia numeryczne dopiero w obliczeniach rozkładu pola zaprojektowanego układu – rzadziej do numerycznego wyznaczenia elementów tensora materiałowego. Może to doprowadzić do zaniechania analizy złożonych, bliższych rzeczywistości układów, w których obiekty przyjmą nietypowe kształty, otoczenie może być niejednorodne lub w układzie wystąpią nieliniowości związane ze współczynnikami materiałowymi.

## 1.2.2. Układy z metamateriałami pola skalarnego

Klasyczną funkcją metamateriałów (MM) jest ukrywanie obiektów przed radarami, kamerami termowizyjnymi, czy wzrokiem. W przypadku kompozytów wielkich częstotliwości, wśród zastosowań wymienia się też soczewki działające poza granicą dyfrakcyjną (supersoczewki), anteny o kształtowanej charakterystyce promieniowania, czy struktury idealnie odbijające/pochłaniające promieniowanie EM.

Praktyczne aplikacje metamateriałów pola skalarnego (MMS), a głównie tych kontrolujących pole termiczne poddawane są w wątpliwość [109]. Możliwa jest manipulacja gradientem pola (jego kierunkiem, poszczególnymi składowymi), lecz problemem pozostaje ograniczona kontrola samego pola skalarnego. Kształtowanie pola dotyczy rozkładu potencjału skalarnego, lecz przy tym nie pozwala na dowolną zmianę jego wartości. W stanie ustalonym można manipulować wartością potencjału skalarnego w obrębie narzuconych wartości warunków brzegowych, zatem nie uda się go obniżyć/podwyższyć poza ustalone warunkami brzegowymi wartości graniczne.

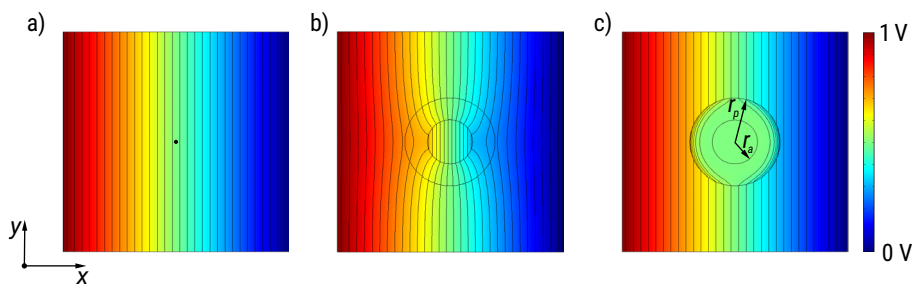
W literaturze przedstawiono kilka podstawowych układów z MMS [37]:

- płaszcz ukrywający obiekty (ukrycie obiektu umieszczonego w polu skalarnym) – struktura pozostaje niewidoczna dla zewnętrznego obserwatora;
- maskowanie czujników (czujnik jednocześnie pozostaje ukryty i zbiera informacje o wielkości skalarnej) – rozkład pola nie zostaje zaburzony w wyniku umieszczenia sensora;
- koncentrator pola (zwiększenie natężenie pola w określonym obszarze) – koncentracja strumienia na małej powierzchni;
- rotator pola (lokalne odwrócenie gradientu pola) – przepływ strumienia odwróconego o określony kąt w stosunku do zewnętrznego gradientu.

Oprócz wymienionych układów, pojawiają się także tzw. odwrócone płaszcze [43], powierzchnie równomiernie nagrzewające [36], czy kamuflaż termiczny obiektów [34, 62, 132, 146].

### a) Płaszcz ukrywający obiekt

Przedstawiona w punkcie 1.2.1 idea ukrywania obiektów w polach skalarnych polega na otoczeniu obiektu wykorzystując MMS o anizotropowej przewodności. Przykładem może być stałe pole elektryczne zadane w układzie dwuwymiarowym z warunkami I-ego rodzaju na skrajnych krawędziach (rys. 10a). Jeżeli układ jest jednorodny i izotropowy, to rozkład potencjału zmienia się liniowo wzdłuż osi  $Ox$ . Umieszczenie obiektu o innej przewodności powoduje zauważalną modyfikację rozkładu pola (rys. 10b). Otoczenie z płaszczem (rys. 10c) o dobranym tensorze materiałowym nie prowadzi do zaburzenia pola poza płaszczem (jak na rys. 10a).



RYS. 10. Rozkład potencjału elektrycznego: a) układ bez obiektu – pole niezaburzone; b) układ z obiektem – pole zaburzone obecnością innej niż otoczenie przewodności elektrycznej; c) układ z obiektem otoczonym płaszczem – pole zaburzone wyłącznie w obszarze płaszczka

Stosując transformację współrzędnych można wyznaczyć tensor przewodności płaszczka [37]. Zakładając, że przewodność elektryczna otoczenia  $\sigma_o$  jest stała, a przewodność obiektu może być dowolna, to rozkład przewodności płaszczka  $\sigma_p$  opisany będzie w biegunowym układzie współrzędnych. W tym obszarze nie ma obiektu, ponieważ jest pomniejszony do rozmiarów pomijalnie małego punktu (czarna kropka w centrum na rys. 10a). Należy zatem transformować rzeczywistą przestrzeń (rys. 10c) do rozmiarów punktu, w której promień obiektu i płaszczka to odpowiednio  $r_a$  i  $r_p$ . Poszczególne współrzędne układów w obszarze płaszczka będą związane zależnościami

$$\begin{cases} r' = \frac{r_p - r_a}{r_p} r + r_a, \\ \varphi' = \varphi \end{cases} \quad (11)$$

zaś Jakobian przekształcenia zostanie przedstawiony jako

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r'}{\partial r} & \frac{\partial r'}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial r} & \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_p - r_a}{r_p} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

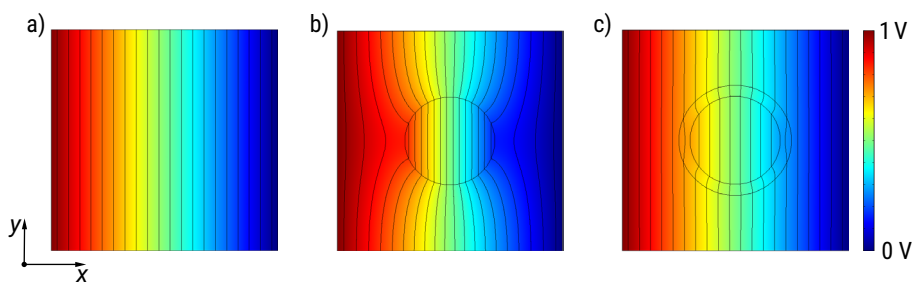
Wstawiając (12) do równania (9) otrzymuje się wymagany rozkład przewodności MMS

$$\sigma_p = \frac{\mathbf{J} \sigma_o \mathbf{J}^T}{\det(\mathbf{J})} = \begin{bmatrix} \sigma_o (r_p - r_a) / r_p & 0 \\ 0 & \sigma_o r_p / (r_p - r_a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{\varphi r} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Jest to płaszcz nieidealny – przewodności są homogeniczne, lecz anizotropowe i nie uwzględniają natury obiektu. Im większy jest iloraz  $\sigma_{\varphi\varphi}/\sigma_{rr}$ , tym płaszcz bliższy jest ideału. Rozkład potencjału na obiekcie będzie jednorodny (rys. 10c), zatem obiekt nie będzie posiadał informacji o rozkładzie potencjału otaczającego go pola elektrycznego.

#### b) Maskowanie czujników

Inne podejście zaprezentowano w publikacjach [71, 143], gdzie oprócz jednoczesnego ukrycia czujnika w polu termicznym i elektrycznym, czujnik otrzymał informację o rozkładzie pola (rys. 11). MMS może umożliwić pracę sondy pomiarowej w sposób niezaburzający pola, a rozkład potencjału na czujniku pozostaje taki, jak gdyby pomiar nie był dokonywany. Maskowanie realizuje się w prostszy sposób niż ukrywanie obiektów. Grubość płaszczka z MMS jest mniejsza, pole z niewielkim zaburzeniem przekłada się na powierzchnię czujnika, a jedna z transformacji układu współrzędnych umożliwiła uzyskanie tego efektu przy izotropowym MMS [143]. Może to przełożyć się na wykorzystanie MMS, np. do poprawy dokładności przyrządów pomiarowych, czy badań układów wrażliwych na zmianę parametrów/zaburzenia pola.

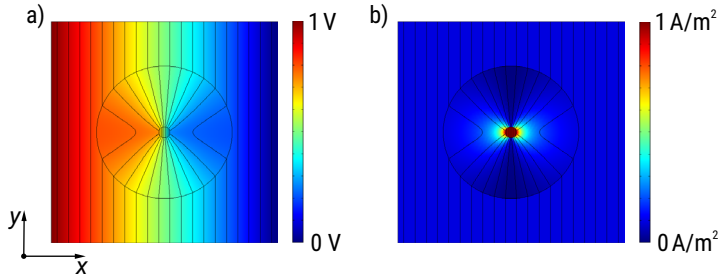


RYS. 11. Rozkład potencjału w badanym układzie: a) układ bez czujnika pomiarowego; b) układ z nieprzewodzącym czujnikiem – pole zaburzone, koncentracja pola na powierzchni pomiarowej czujnika; c) czujnik maskowany MMS – pole niezaburzone na powierzchni otoczenia i czujnika

Odrebnym zagadnieniem jest kształtowanie pól w stanie nieustalonym, gdzie możliwe jest zrealizowanie zadań (w określonych przedziałach czasowych) niedostępnych w stanie ustalonym. Obliczenia i eksperymenty pokazują, że dobre izolatory termiczne otoczone płaszczem termicznym są w stanie przez całe minuty utrzymywać temperaturę równą najniższej, wynikającej z warunków brzegowych [70].

### c) Koncentrator pola

Koncentrator jest odwróceniem działania płaszcza, tzn. dąży się do zwiększenia natężenia pola w wybranym obszarze [80]. Aby otrzymać koncentrator wystarczy zamienić miejscami składowe  $\sigma_{rr}$  i  $\sigma_{\varphi\varphi}$ . Centralny obszar może być dobrze przewodzący lub całkowicie nieprzewodzący – w pierwszym wariantcie (rys. 12a) należy jedynie pogrubić warstwę koncentrującą (duży iloraz  $r_p/r_a$ ).

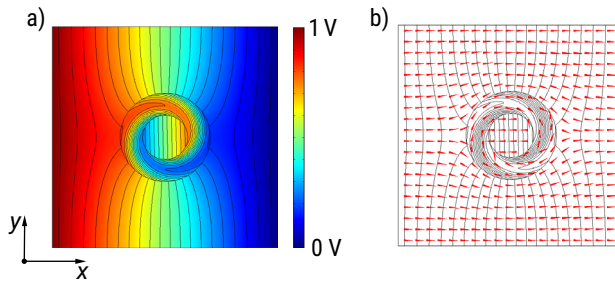


RYS. 12. Koncentracja pola elektrycznego: a) skupienie linii pola w centralnym obszarze – wzrost składowej  $E_x$  natężenia pola w centrum wynika z dużej różnicy potencjału na krótkim odcinku koncentracji; b) gęstość prądu elektrycznego – gęstość prądu kilkukrotnie wyższa w centralnym obszarze

Koncentratory mogą znaleźć zastosowanie ze względu na efekty kontrolowanego zwiększenia pola elektrycznego w dowolnym miejscu układu. Wzrost gęstości prądu (rys. 12b) powodujący lokalnie podwyższone wydzielanie ciepła, może znaleźć zastosowanie w układach grzewczych o specyficznym rozkładzie źródeł ciepła. Koncentratory stałego pola magnetycznego [81] zwróciły uwagę badaczy na możliwość zwiększenia zakresu pomiarowego mierników natężenia pola magnetycznego. Centralny obszar może być też nieprzewodzący (np. dielektryk), a efekt koncentracji pola wystąpi. Wówczas układ może zadziałać jak iskiernik i reagować na natężenie pola przekraczające graniczną wartość przebicia.

### d) Rotator pola

Rotacja pola jest realizowana z użyciem silnie niehomogenicznego MMS [29]. Przykładem rotatora jest układ, w którym centralnie położony cylindryczny obiekt wykonany jest ze słabego przewodnika i otoczony metamateriałem (rys. 13a). Na zewnętrznej krawędzi MMS istnieje zadany gradient pola skalarne. Rotacja polega na obróceniu wektora gradientu pola na wewnętrznej krawędzi MMS o zadany kąt  $\alpha$ , zaś gdy kąt  $\alpha = 180^\circ$  realizowana jest inwersja nominalnego gradientu [37]. Wówczas w obszarze MMS obserwuje się wirowanie strumienia, a w obszarze centralnym widoczny jest przeciwny do wymuszonego przepływ strumienia (rys. 13b).



RYS. 13. Rotacja pola elektrycznego: a) obrót gradientu pola o  $\alpha = 180^\circ$  w centrum; b) znormalizowane wektory gęstości prądu elektrycznego – widoczny przeciwny zwrot prądu w centralnym obszarze

Uzyskanie efektu rotacji wymaga zastosowania materiału niehomogenicznego, anizotropowego, z wszystkimi niezerowymi współczynnikami tensora przewodności, co powoduje duże trudności w jego fizycznej realizacji. Wymuszenie przeciwnego do zewnętrznego pola elektrycznego wektora gęstości prądu, może prowadzić do opracowania MMS o ujemnym efektywnym współczynniku przewodności.

### 1.2.3. Realizacje materiałowe

Utworzenie struktury MMS kształtującej w pożądanym sposób pole skalarne składa się z trzech podstawowych etapów pracy:

- I) zaprojektowanie struktury – wyznaczenie z użyciem metod transformacji współrzędnych wymaganych wartości parametrów materiałowych;
- II) wyznaczenie rozkładu pola – obliczenie rozkładu wielkości skalarnej w celu weryfikacji działania zaprojektowanej struktury MMS;
- III) synteza metamateriału pola skalarnego – opracowanie składu i budowy wewnętrznej materiału kompozytowego, o efektywnych parametrach materiałowych wyznaczonych w I, realizujących rozkład pola obliczony w II.

Największe wyzwanie dotyczy zaproponowania fizycznej realizacji MMS, czyli ich syntezy z dostępnych izotropowych, homogenicznych materiałów. W wielu pracach pojawiły się propozycje realizacji tego typu materiałów przez zastosowanie:

- struktur porowatych (niehomogenicznych);
- struktur wielowarstwowych (laminarnych);
- struktur *sensu*-kształtnych (których geometria odwzorowuje kształt składanych japońskich wachlarzy, zwanych *sensu*).

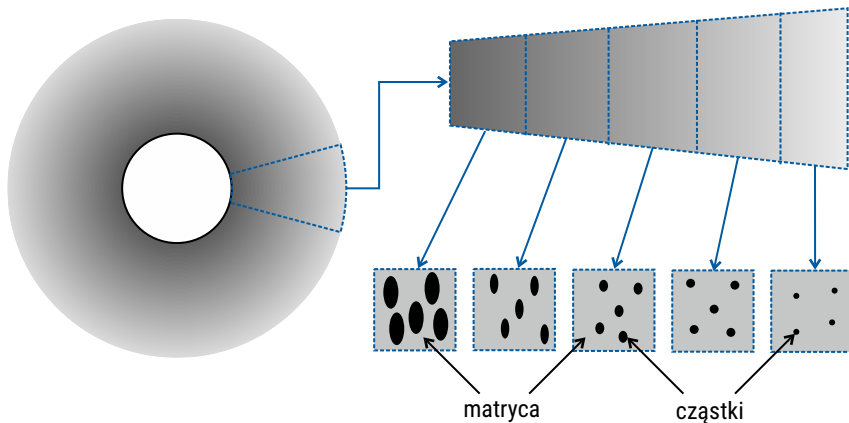


Oprócz wymienionych istnieje kilka innych MMS, tworzonych w odrębny sposób. Przykładem są struktury kształtujące stałe pole magnetyczne za pomocą kształtek 3D przypominających skorupy [81], bądź sąsiednio układane materiały izotropowe o silnie kontrastujących ze sobą przenikalnościach magnetycznych [122].

a) Struktury porowate (niehomogeniczne)

Projektowane przy użyciu optycznej transformacji płaszcze dwufunkcyjne [60] służą do ukrycia obiektu w stałym polu termicznym i elektrycznym. W celu uzyskania zmienności przewodności elektrycznej i termicznej, zaproponowano wykonanie MMS z eliptycznymi cząsteczkami (rys. 14) stopniowo wypełniającymi matrycę (izotropowy, homogeniczny materiał bazowy). Obok zmiany stopnia wypełnienia matrycy możliwa jest modyfikacja kształtu cząsteczek, która prowadzi do anizotropii (rys. 14b). Materiał można zrealizować na dwa sposoby: matryca słabo przewodząca z wypełnieniem cząsteczkami przewodnika lub matryca jest przewodnikiem, a cząsteczki są izolatorami.

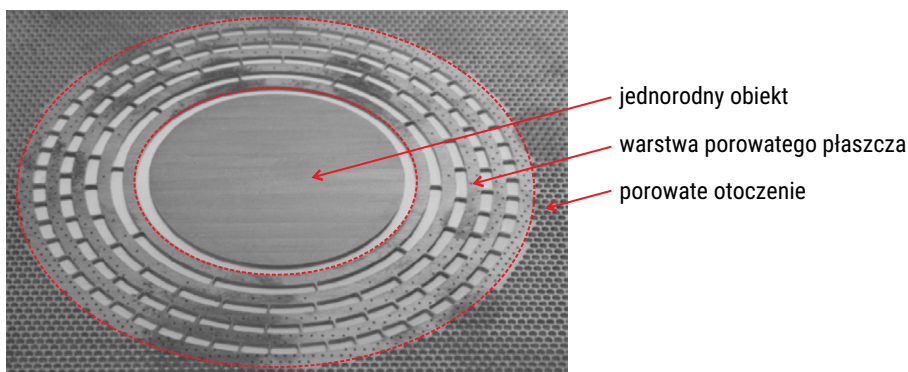
Podejście to zakłada utworzenie kompozytu wypełnionego nanocząsteczkami, lecz wówczas do każdego układu należałoby wytworzyć dedykowany materiał hybrydowy. Jednak metody obliczeniowe stosowane do określenia właściwości tego rodzaju materiałów obarczone są wciąż znacznym błędem [77]. Nie musi być także prawdziwe w każdym przypadku założenie, że lokalnie efektywna przewodność wynika tylko z objętościowego stosunku materiału bazowego i wypełnień [60].



RYS. 14. Konstrukcja płaszcza MMS: a) niehomogeniczny płaszczyz; b) fragment materiału płaszczyz – fizyczna realizacja poprzez stopniowe zmniejszanie rozmiarów i anizotropii kształtu cząsteczek

Prostsze podejście zaproponowano i zweryfikowano w [71, 102]. Matryca jest dobrym przewodnikiem, zaś cząstki zastąpiono porami (powietrze lub inny izolator (rys. 15)). Trudność w budowie struktury wynika z technicznego wprowadzenia

porów w homogenicznym materiale bazowym. Wadą rozwiązania pozostaje niehomogeniczność wytwarzanego MMS, stąd struktura płaszczka wymaga projektu i doboru na poziomie każdej kolejnej warstwy. Jedynie fragmentaryzacja układu, w którym kształtowany jest rozkład potencjału elektrycznego, umożliwia zastosowanie podejścia obwodowego również w budowie sieci zawierającej obszar metamateriału. Zrealizowano je dyskretyzując układ na elementarne rezystory, co doprowadziło do wykonania pierwszych obwodów elektrycznych z płaszczkami [44, 142] i koncentratorami [45] przepływowego, stałego pola elektrycznego.

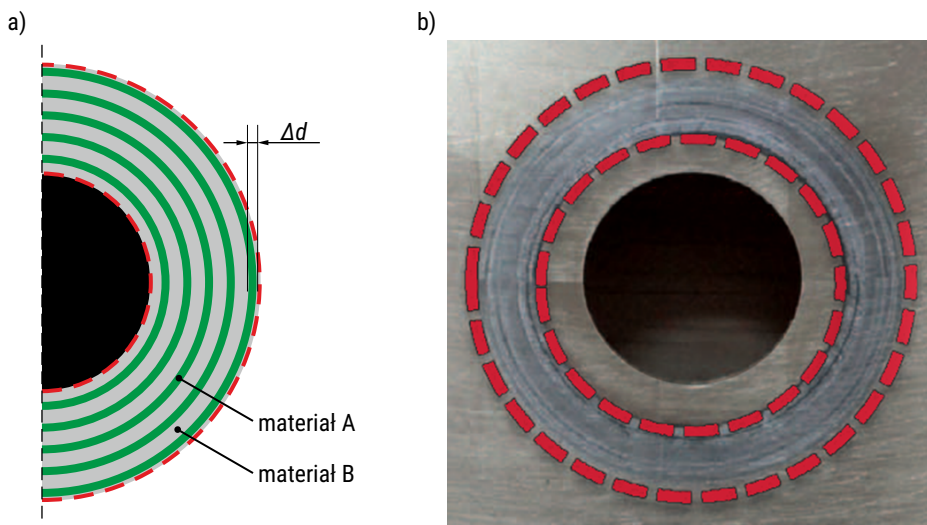


RYS. 15. Fizyczna realizacja płaszczka z MMS dla pól termicznych – matryca wykonana z czystej miedzi, wypełnienia zrobiono z dimetykonu (PDMS) [102]

#### b) Struktury wielowarstwowe (laminarne)

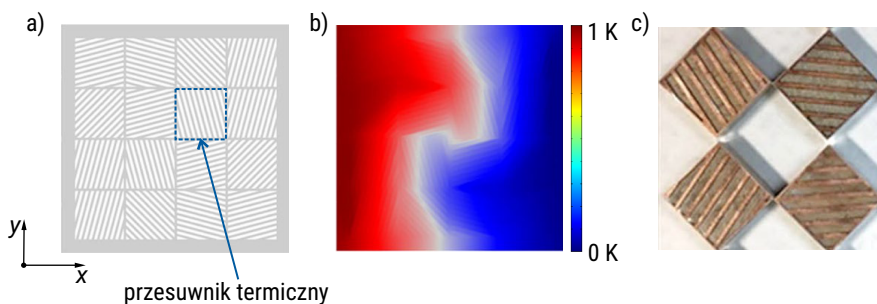
Obecnie dominuje podejście opracowane pierwotnie z myślą o metamateriałach termicznych. W 2012 roku zaproponowano realizację MMS [80] ze zmodyfikowaną ideą materiałów porowatych, poprzez zastąpienie tworzących je materiałów hybrydowych przez kompozyty warstwowe. W celu ułatwienia zadania doboru przewodności i grubości warstwy kompozytu założono, iż w jego skład wchodzi dwa materiały A i B o różnej przewodności ( $\lambda_A \neq \lambda_B$ ), lecz najczęściej identycznej grubości ( $\Delta d_A = \Delta d_B = \Delta d$ ), naprzemiennie układane w warstwy (rys. 16a). Liczba warstw będzie zależała od wymiarów projektowanego MMS i dobranej grubości.

Oprócz typowo kołowych struktur na bazie laminarnych materiałów zrealizowano także trójkątnodiamentowe układy tzw. zdalnego chłodzenia [121] oraz płaszczki działające w stanie nieustalonym [61]. Tego rodzaju struktury wymusiły ewolucję koncepcji laminarnych materiałów wielowarstwowych. Zastosowano ideę metamateriału składającego się z oddzielnie dobieranych komórek elementarnych o dobranej efektywnej właściwościach (rys. 17a). W ten sposób zrealizowano wielowarstwowe przesuwniki termiczne (ang. *thermal shifters*) o różnym kącie nachylenia warstw materiałów A i B (rys. 17c).



RYS. 16. Struktura wielowarstwowa: a) budowa płaszczka z wielowarstwowego MMS [35]; b) fizyczny układ płaszczka termicznego zbudowanego z warstw stopu tytanu, aluminium, miedzi, kaptonu [61]

Zaletą tej technologii jest prostota budowy materiału i komórki elementarnej przesuwnika. Warstwowe połączenie dwóch materiałów można obliczyć za pomocą metod analitycznych lub stosując analogi obwodowe zjawisk (warstwy jako rezystory termiczne) [79]. Układ można rozwiązać metodami sieciowymi, a następnie na podstawie rezystancji termicznej przesuwnika wyznaczyć efektywne przewodności w każdym kierunku układu współrzędnych. Tym sposobem można zrealizować koncentratory [94], rotatory pola [80] oraz syntezę układów metodami optymalizacyjnymi [95]. Takie rozwiązanie jest rozszerzane w pracach analizujących sprzężenia pól elektrycznych i termicznych [119] oraz płaszczki 3D [138].

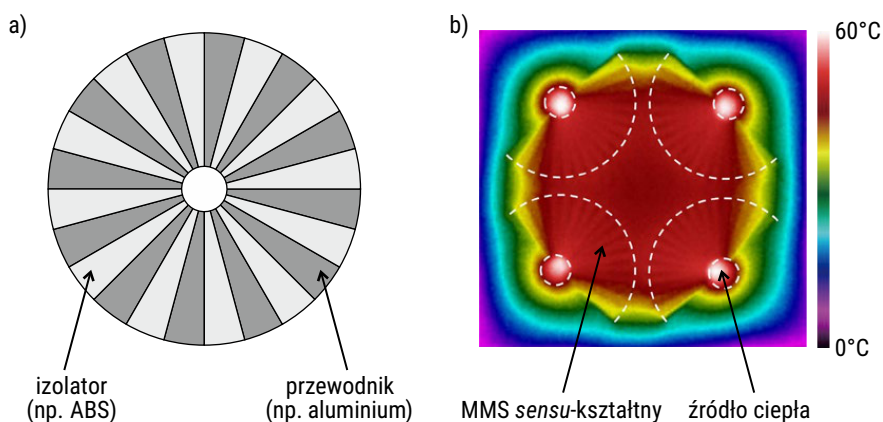


RYS. 17. Układ z przesuwnikami termicznymi: a) aranżacja przesuwników tworzących inwerter pola termicznego [91]; b) obliczony rozkład pola temperatury układu inwertera [91]; c) przykłady przesuwników wytworzonych z miedzi (materiał A) i żywicy epoksydowej (materiał B) [66]

Zaproponowana dla termicznych MMS realizacja wielowarstwowa jest kłopotliwa w zastosowaniu do pól elektrycznych i magnetycznych. Różnica w wartości przewodności termicznej przewodnika (materiał A) i izolatora (materiał B) termicznego mieści się najczęściej w zakresie od dwóch do czterech rzędów wielkości. W polu elektrycznym dobór materiałów składowych jest trudniejszy. Różnica w przewodności dobrego przewodnika i izolatora jest co najmniej kilkunastu rzędów wielkości. Jeżeli projektując metamateriał otrzymamy pewne przewodności elektryczne (np. 2555 S/m i 14,8 S/m), to trudniejsze jest znalezienie materiałów o takich przewodnościach elektrycznych, mając do dyspozycji kilkunastorzędowy zakres dostępnych wartości.

### c) Struktury *sensu*-kształtne

Kolejną grupę stanowią MMS wzorowane na japońskich wachlarzach *sensu*, których pierwsza realizacja miała miejsce w 2014 roku [43]. Rozpatrywany układ jest modyfikacją materiału wielowarstwowego i może realizować układ tzw. odwróconego płaszcza. W kolejnych publikacjach [52, 53, 140] budowa koncentrowała się na ułożeniu w okręgi lub jego fragmenty trójkątnych, naprzemiennie dobrze i słabo przewodzących materiałów (rys. 18a). Dobierano wymiary trójkąta oraz przewodności materiałów składowych. Prostota budowy, przy zachowaniu parametryzacji elementów składowych umożliwia ich dobór, optymalizację oraz realizację innych układów z MMS, np. powierzchni równomiernie rozgrzewanych z punktowych źródeł, skupienie pola temperatury, czy jednoczesną koncentrację pola elektrycznego i termicznego [36].



RYS. 18. Przykłady materiału *sensu*-kształtnego: a) ideowa budowa koncentratora pola elektrycznego [53]; b) zmierzony rozkład pola temperatury na powierzchni równomiernie nagrzewającej [36]

Pomimo zalet ten rodzaj MMS nie cieszy się zainteresowaniem. Jedną z wad jest brak możliwości wykonania płaszcza oraz relatywnie duża powierzchnia zajmowana przez metamateriał. Jego konstrukcja podobna jest do materiałów wielowarstwowych, lecz mniej uniwersalna. Niekiedy trudno rozróżnić metamateriały wielowarstwowe od *sensu*-kształtnych, ponieważ oba typy charakteryzują się naprzemiennym ułożeniem jednorodnych substancji o dużym ilorazie przewodności [139]. Aranżacja przestrzenna to pochodna zadanej funkcjonalności MMS, a nie oryginalnych właściwości danego typu metamateriału.

## Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono przegląd literatury dotyczącej najważniejszych zagadnień związanych z analizą i projektowaniem współczesnych kompozytów EM. Scharakteryzowano własności kompozytów strukturalnych, hybrydowych i włóknowych oraz zaprezentowano wybrane realizacje materiałów o dobieranych właściwościach elektromagnetycznych. Wskazano na różnice w klasyfikacji i budowie strukturalnej materiałów kompozytowych.

Analizę tego typu układów materiałowych wykonuje się z użyciem metod numerycznych, w tym m.in. metody momentów, metody różnic skończonych lub metody elementów skończonych [77, 107, 133, 87]. W przypadku wymuszeń harmonicznym w układach, z którym współpracują rozpatrywane kompozyty, analiza może być przeprowadzana w dziedzinie częstotliwości. Wymuszenia zmienne w czasie wymagają zastosowania algorytmów FDTD lub metody elementów skończonych. Obliczenia numeryczne, oprócz szeregu modeli analitycznych, stanowią podstawę homogenizacji złożonych struktur materiałowych. Ujednorodnienie parametrów umożliwia przedstawienie kompozytu w postaci ekwiwalentnego materiału, który w dalszej analizie przedstawia złożony kompozyt jako jednorodną strukturę.

Kompozyty dwufazowe zainteresowały badaczy w związku z pojawieniem się *Laplacian metamaterials* [27, 37], umożliwiających kształtowanie pól stacjonarnych, podobnie jak metamateriały kształtują pola wielkich częstotliwości. Rozpatrywane w literaturze układy pozwalają na ukrywanie obiektów, koncentrację energii na małej przestrzeni, czy rotację gradientu pola o dowolny kąt. Do tych zadań niezbędne są jednak sztuczne materiały o dobieranych parametrach, anizotropowych właściwościach i możliwej praktycznej realizacji geometrii komórki. Proponowane struktury niejednorodne, wielowarstwowe i *sensu*-kształtne stanowią podstawowe rozwiązania konstrukcji metamateriałów kształtujących wolnozmiennie pola skalarne (MMS). Przedstawione ograniczenia oraz brak badań dotyczących właściwości tych materiałów w zmiennych polach EM, wskazują na otwarty problem syntezy MMS pracujących w harmonicznym polach elektrycznych i magnetycznych.

# Rozdział 2

## Układy planarne z warstwą niejednorodną

### Wprowadzenie

Typowe, warstwowe materiały laminarne charakteryzują się ograniczonymi możliwościami kształtowania pola elektrycznego i magnetycznego. Ich wytworzenie polega na połączeniu ciągłych warstw o różnych właściwościach. Przedział wartości przewodności elektrycznych dostępnych substancji jest szeroki (obejmuje kilkanaście rzędów wielkości), co przy ograniczonej liczbie dostępnych materiałów stanowi I problem struktur wielowarstwowych, czyli znalezienie takich materiałów, których przewodności zgadzać się będą z wyznaczonymi dla danego MMS.

Zdecydowana większość przedstawionych prac koncentrowała się na polach stałych w czasie. W większości publikacji pomija się także wpływ wzajemnego oddziaływania zjawisk w multifizycznych MMS. Przykładem jest płaszcz ukrywający obiekt jednocześnie w polu elektrycznym i termicznym. Przy jego projektowaniu oraz analizie nie uwzględniono ani wpływu temperatury na przewodność elektryczną, ani wytwarzania ciepła w wyniku przepływu prądu elektrycznego. Założenie, iż każde z pól funkcjonuje niezależnie i nie mają one wpływu na wypadkowe działanie układu, może być w wielu praktycznych przypadkach daleko posuniętym uproszczeniem. Jest to II problem dotychczasowej analizy i syntezy MMS. Ponadto w przypadku materiałów poddanych działaniu zmiennego w czasie pola EM, należy uwzględnić podstawowe parametry (np. przewodność elektryczną, przenikalność magnetyczną i elektryczną) oraz parametry dodatkowe, np. przewodność cieplną, związaną z występowaniem termicznych efektów pasożytniczych przewodzenia ciepła przez strukturę materiału.

Współcześnie dąży się do redukcji rozmiarów i masy układów elektronicznych, zachowując przy tym ich funkcjonalność oraz odporność na czynniki zewnętrzne (np. podwyższona temperatura, uszkodzenia mechaniczne, wilgotność). Struktura laminarna może posiadać nieadekwatne do zastosowań właściwości mechaniczne (np. sztywność) lub termiczne (np. pojemność cieplna). Właściwości te są szczególnie istotne w układach elektrycznych, stąd jawi się III problem stosowanych materiałów warstwowych, tj. ograniczona funkcjonalność i trwałość wytworzonej struktury.

Przedstawione problemy (I, II, III) można częściowo rozwiązać wykorzystując inny rodzaj kompozytów elektromagnetycznych, czyli elastyczne, niejednorodne materiały laminarne z periodyczną warstwą przewodzącą (rys. 19a). W niniejszej monografii materiały o takiej strukturze zostały rozpatrzone jako czwarty sposób fizycznej realizacji MMS. Materiały niejednorodne projektowane są przede wszystkim pod kątem zastosowań w polach elektrycznych. Ich budowa wzorowana jest na podejściu znanym z konstrukcji metamateriałów EM wielkich częstotliwości. Szeroki zakres zmian parametrów funkcjonalnych tych materiałów, uzyskuje się przez kształtowanie elementów struktury przy wykorzystaniu metod analitycznych, jak również iteracyjnych schematów optymalizacyjnych.

Potencjał aplikacyjny rozpatrywanych niejednorodnych materiałów laminarnych z przewodzącą warstwą periodyczną wynika z następujących czynników:

a) Ograniczony skład materiałowy

Minimalizm konstrukcyjny materiału niejednorodnego wynika z ograniczonej liczby substancji budujących komórki. Zastosowanie co najwyżej kilku materiałów przewodzących i izolacyjnego jest wystarczające, aby nadać projektowanemu materiałowi pożądane właściwości. Dobór ich zastępczych właściwości przeprowadza się przez modyfikację wewnętrznej budowy komórki, regulowanej za pomocą określonej liczby parametrów geometrycznych (np. szerokość wycięcia, długość ramion), a w mniejszym stopniu przez wybór materiałów.

b) Szeroki zakres zmian efektywnych właściwości elektromagnetycznych

Geometria komórki umożliwia dobór efektywnej przewodności w zakresie od 0% do 100% przewodności elektrycznej budującego materiału przewodzącego. Z kolei efektywna przenikalność magnetyczna materiału niejednorodnego jest wielokrotnie większa od przenikalności przewodnika. Jeżeli materiał niejednorodny będzie wykorzystywany i modelowany jako element obwodu elektrycznego, wówczas dobór dotyczyć będzie jego zastępczych rezystancji oraz indukcyjności.

c) Kontrolowana anizotropia właściwości elektrycznych i magnetycznych

Z uwagi na fakt, że struktura geometryczna komórki może być anizotropowa, to także jej zastępcze parametry materiałowe będą się cechować anizotropią, której stopień zależy wyłącznie od doboru parametrów geometrycznych. Już na etapie analizy struktury pojedynczej komórki możliwe jest uzyskanie i oszacowanie anizotropii efektywnych właściwości EM, kształtując (w dopuszczalnym zakresie) wartości poszczególnych elementów tensora materiałowego.

d) Jednoczesny dobór właściwości przewodzących i magnetycznych

Efektywne przewodności elektryczne i przenikalności magnetyczne można dobrać poprzez kształtowanie budowy struktury wewnętrznej. Poszczególne elementy tensora materiałowego wyznaczone są w procesie zmiany geometrii elementu. W konsekwencji zależność zastępczych właściwości materiałowych od parametrów geometrycznych jest nieliniowa. Aby rozwiązać tego rodzaju problem

zaproponowano autorską realizację algorytmu optymalizacyjnego, którego zadaniem jest dobór parametrów geometrycznych, w celu uzyskania pożądaných właściwości materiału niejednorodnego.

e) Zastosowanie w polach zmiennych w czasie

Kształtowanie właściwości proponowanych struktur może być realizowane nie tylko w zakresie pól stałych, ale również pól wolnozmiennych o częstotliwości do kilkuset kHz. Większość badań dotyczących MMS uwzględniała ich pracę w stanach ustalonych lub przejściowych o względnie długim czasie zmian. Według wiedzy autora brak jest informacji o efektywności znanych realizacji MMS w polach szybkozmiennych. W ramach prowadzonych prac materiały niejednorodne zostały pozytywnie zweryfikowane także pod kątem zastosowania w polach o mikrosekundowym okresie zmienności.

f) Analiza z uwzględnieniem sprzężonych zjawisk EM

Materiały niejednorodne mogą być stosowane w zakresie pól zmiennych w czasie, dlatego niezbędne staje się uwzględnienie nie tylko zjawisk przewodzenia, ale również sprzężeń indukcyjnych w układzie. Proponowane modele połowe umożliwiają wyznaczenie rozkładu pola elektrycznego oraz magnetycznego, którego źródłem jest przewodzony prąd. Na podstawie rozkładu pól wyznaczane są skupione parametry zastępcze do modelu obwodowego układu dużej skali, z uwzględnieniem wpływu występujących w układzie złożonych zjawisk magnetycznych (np. sprzężenia między komórkami).

g) Planarna budowa materiału

Materiał cienkowarstwowy utworzony z materiału niejednorodnego charakteryzuje się dużym ilorazem pola powierzchni do objętości typowej próbki, zapewniając dobre odprowadzanie energii cieplnej. Zastosowanie cienkich warstw umożliwia także zwiększenie ich liczby w celu dalszej modyfikacji wypadkowych właściwości.

h) Periodyczny układ sieciowy

Komórki budujące kompozyt laminarny połączone są galwanicznie, tworząc tym samym rozległą sieć periodycznie rozłożonych w obszarze elementów. Zwiększona w ten sposób odporność na uszkodzenia mechaniczne (redundancja ścieżek przewodzących prąd) prowadzi do poprawy niezawodności pracy tego typu struktur.

i) Elastyczna struktura warstwowa

Zakładane tworzenie cienkowarstwowych materiałów niejednorodnych, przy zachowaniu elastyczności materiału bazowego i warstw roboczych, umożliwia dopasowanie układu do różnych kształtów bez obawy o uszkodzenie mechaniczne. Dopuszczalne deformacje i wygięcia arkusza materiału pozwalają na uformowanie trójwymiarowych powierzchni funkcjonalnych lub na dopasowanie materiału do kształtu złożonych geometrii.

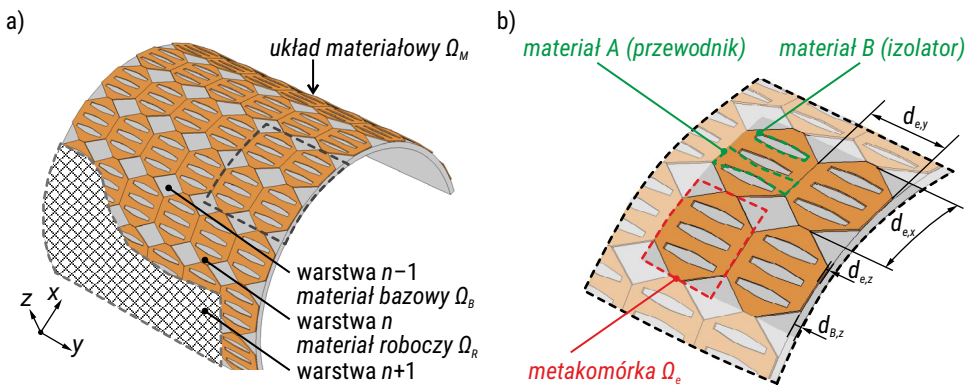


## 2.1. Budowa materiału niejednorodnego z warstwą periodyczną

Rozpatrywany materiał składa się z co najmniej jednej warstwy roboczej  $\Omega_R$  stanowiącej podstawową strukturę funkcjonalną (rys. 19a). Na etapie jej projektowania:

- kształtowane są efektywne właściwości elektryczne i magnetyczne układu  $\Omega_M$ ;
- możliwe jest wprowadzenie anizotropii oraz kontrola dodatkowych cech materiału niejednorodnego (np. niejednorodność właściwości w obrębie jego powierzchni);
- uzasadnione jest uwzględnienie zjawisk polowych (np. sprzężenia magnetyczne).

Jeżeli warstwa robocza wykonana jest z materiału dostatecznie trwałego mechanicznie, posiadającego wymagane właściwości, wówczas kolejne warstwy są zbędne. Przykładem są próbki materiałowe wykonane wyłącznie z przewodzącego polilaktidu (PLA), [111], które odznaczają się zarówno elastycznością, odpornością na czynniki zewnętrzne, jak również niewielką grubością ( $d_{e,z} \approx 500 \mu\text{m}$ ). Wymiary komórki ( $d_{e,z}$  i  $d_{e,x} = d_{e,y}$ ) są co najmniej rząd wielkości mniejsze od rozmiarów zewnętrznych układu.



RYS. 19. Budowa materiału niejednorodnego: a) elastyczny układ  $\Omega_M$  zbudowany z periodicznie rozmieszczonych komórek  $\Omega_e$ , tworzących przewodzącą warstwę  $\Omega_R$  na izolacyjnym podłożu nośnym  $\Omega_B$ ; b) widok komórek budujących  $\Omega_e$  – planarne elementy wpisane są w prostokątne ścian  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$  cechujący się anizotropią właściwości EM

Warstwa bazowa  $\Omega_B$  stanowi tzw. lepiszcze, czyli powierzchnię nośną, na której osadzone są kolejne warstwy funkcjonalne. Nieprzewodzący materiał bazowy działa również jako warstwa izolująca elektrycznie obszar roboczy i inne warstwy. Warstwa bazowa może stać się nośnikiem (matrycą), w którym wykonane z przewodnika A elementy  $\Omega_e$  są wtopione (rys. 19b). Wówczas materiałem nieprzewodzącym

B jest baza  $\Omega_B$ , a nie inny wypełniacz. Oprócz warstwy bazowej i roboczej wyróżnić można kolejne warstwy, pełniące swoiste funkcje w strukturze materiału. Mogą być one duplikatami uprzednio wytworzonych warstw, czy też oddzielnie projektowanymi materiałami kompozytowymi, które tworzą łącznie z pozostałymi złożoną strukturę materiału. W ten sposób można wykonać płaszcze 3D, czy dopasować właściwości kompozytu w celu efektywnego odbicia lub absorpcji fali EM. Innym przykładem może być dodatkowa warstwa wykonana z magnetycznego materiału hybrydowego, charakteryzująca się większą wartością przenikalności magnetycznej [22, 47, 82].

Ze względu na specyfikę strukturalną (budowa) i proponowane zastosowania materiału niejednorodnego, przy jego projektowaniu i analizie należy przyjąć podstawowe założenia, związane m.in. z możliwościami technologicznymi:

- a) zastosowanie dostępnych, typowych materiałów stosowanych w układach elektrycznych;
- b) wykorzystanie do budowy warstw niejednorodnych materiałów liniowych oraz izotropowych;
- c) minimalizacja liczby materiałów składowych w celu uproszczenia budowy struktury, m.in. w rozpatrywanych przypadkach założono, że materiał będzie się składał z co najwyżej 2 różnych substancji przewodzących i nieprzewodzących elektrycznie;
- d) minimalizacja liczby warstw składowych, tzn. redukcja liczby warstw budujących materiał i założenie, że tworzony materiał składa się z 1 funkcjonalnej warstwy niejednorodnej i 1 bazowej warstwy nośnej;
- e) projektowane komórki  $\Omega_e$  są tworzone na planie kwadratu, gdzie długość  $d_{e,x}$  i szerokość  $d_{e,y}$  komórki budującej materiał niejednorodny są równe

$$d_{e,x} = d_{e,y} = d_e, \quad (14)$$

przy wymiarach liniowych w zakresie od 1 do kilkudziesięciu milimetrów oraz przy zachowaniu stałych wymiarów w obrębie rozpatrywanego materiału  $\Omega_M$ ;

- f) cienkowarstwowa budowa kompozytu, przy czym grubość komórki jest co najmniej rzędu wielkości mniejsza od wymiarów liniowych

$$d_{e,z} < 0,1 \cdot d_e, \quad (15)$$

zaś grubość kompozytu pomijalna w stosunku do wymiarów całej próbki;

- g) planarny układ struktury periodycznej, to znaczy komórki w rozpatrywanych materiałach niejednorodnych tworzą struktury periodyczne 2D lub 1D (układy o geometrii paskowej);
- h) praca w polach elektrycznych i magnetycznych, gdyż proponowane kompozyty przeznaczone są do kształtowania rozkładu pól oraz właściwości elektrycznych i magnetycznych, w których występuje przepływ prądu elektrycznego przez przewodzącą warstwę roboczą materiału niejednorodnego;

- i) źródła energii w postaci idealnych wymuszeń skalarnych, np. próbki materiału są poddane działaniu wymuszeń napięciowych, poprzez przyłączenie źródeł napięcia do warstwy przewodzącej;
- j) ograniczenie pasma częstotliwości sygnałów wymuszających, a w tym do analizy harmonicznych pól fizycznych w zakresie od  $f_1 = 0$  do  $f_2 = 1$  MHz (przyjęta granica pola kwazi-stacjonarnego);
- k) analiza układów z prądami przewodzenia i indukowanymi, w których ze względu na dominację zjawiska przewodzenia prądu przez strukturę materiału niejednorodnego i ograniczenie zmian szybkości pola, pominięto gromadzenie energii w polu elektrycznym (występowanie prądów przesunięcia).

Wprowadzone założenia wpływają na dalszą analizę właściwości materiału. Ze względu na pominięcie prądów przesunięcia przenikalność elektryczna jest izotropowa i jednorodna w całym układzie oraz równa przenikalności próżni ( $\epsilon_r \approx 1$ ). Nie są wyznaczane w układzie zastępcze pojemności, a wobec tego nie określa się efektywnych przenikalności elektrycznych tensora materiałowego komórek. W obliczeniach są uwzględniane zjawiska elektromagnetyczne występujące w polach harmonicznych, m.in. wzrost rezystancji struktury wskutek występowania efektu naskórkowości. Cienkowiecowa budowa elementów umożliwia także przyjęcie założeń upraszczających w obliczeniach pola magnetycznego. Przewodzący element traktowany jest jako pomijalnie cienki ( $d_{e,z} \approx 0$ ), zatem jego grubość nie wpływa na wartość obliczanej indukcji magnetycznej w przekroju powierzchniowym komórki.

Rozpatrywane materiały w komórkach wykazują właściwości dia- lub paramagnetyczne przy czym zakłada się, że  $\mu_r = 1$ . Na etapie ujednorodnienia właściwości wyznaczana jest efektywna względna przenikalność magnetyczna, która wynika z rozkładu gęstości prądu w obrębie struktury oraz skali komórek, a nie z właściwości magnetycznych substancji wchodzących w skład materiału laminarnego.

## 2.2. Komórki tworzące materiał niejednorodny

Podstawowym budulcem elementów warstwy funkcjonalnej  $\Omega_R$  są komórki  $\Omega_e$  (rys. 19b). Połączone galwanicznie, tworzą rozłożoną na dwuwymiarowej powierzchni periodyczną sieć przewodzącą. Powierzchnia układu może być uformowana, jak również może mieć wymiary krawędzi dostosowane do potrzeb (rys. 19a). Właściwości  $\Omega_M$  w największej mierze są pochodną właściwości komórek tworzących  $\Omega_e$ . Każda komórka wpisana jest w prostopadłościan o wymiarach  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$ , przy czym spełnione są równania (14) i (15). Geometria komórki opisana jest przez układ materiałów

na powierzchni o wymiarach  $d_{e,x} \times d_{e,y}$ , zaś  $d_{e,z}$  pozostaje czynnikiem skalującym grubość warstwy roboczej  $\Omega_R$ . Komórka stanowi połączenie dwóch izotropowych materiałów o dużej różnicy właściwości elektrycznych:

- przewodzącego elektrycznie materiału A;
- izolatora elektrycznego w postaci materiału B.

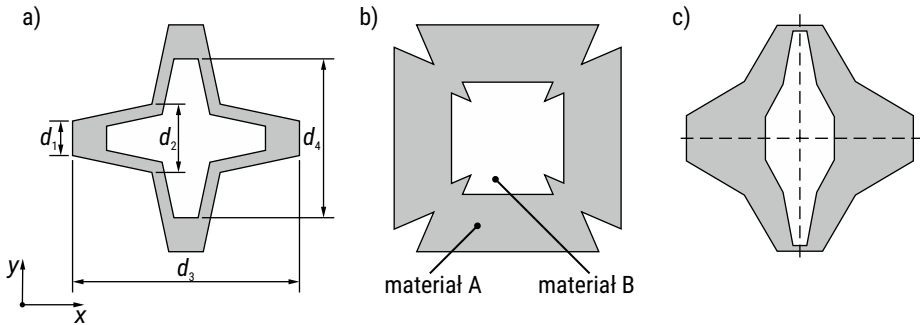
Dobór materiałów składowych, a przede wszystkim geometrii elementu  $\Omega_e$  jest kluczowy, ponieważ na tym etapie, w skali wynikającej z konstrukcji komórki, są kształtowane właściwości materiału. Analiza pojedynczej komórki dostarcza informacji o lokalnych parametrach  $\Omega_M$ . Właściwości całego materiału wynikają z uwzględnienia periodyczności układu komórek na powierzchni oraz sposobu ich łączenia. Struktura  $\Omega_e$  może być dowolna pod warunkiem, że mieści się w obszarze wyznaczonym przez powierzchniowe wymiary komórki  $d_{e,x} \times d_{e,y}$  oraz posiada co najmniej dwa punkty styku na różnych krawędziach z komórkami sąsiednimi.

Przeszkodę w projektowaniu komórek o dowolnej geometrii stanowią ograniczenia technologiczne, uniemożliwiające zachowanie idealnej dokładności odwzorowania zaprojektowanej geometrii w fizycznym układzie. Wynikają one z precyzji pracy maszyn (np. obrabiarki CNC, drukarki 3D) oraz metod obróbki materiałów (np. grawerowanie laserowe, nakładanie masek metalicznych w celu trawienia laminatów). Jednak liczba oraz rodzaj regulowanych parametrów opisujących geometrię wewnętrzną komórki mogą być dobierane wedle potrzeb projektanta. Na przykład element typu  $\Omega_{e,mod}$  (rys. 22) może posiadać dodatkowo wyprofilowane ścieżki przewodzące. Zatem względem geometrii bazowej ( $\Omega_{e,mod0}$ ) o trzech parametrach, właściwości elementu  $\Omega_{e,mod5}$  mogą być kształtowane przez sześć zmiennych. Zmianie może podlegać także szerokość oraz ilość styków z komórkami sąsiadującymi. W pracy badawczej rozpatrywano połączenie czterostykowe (jedna powierzchnia styku na każdej krawędzi komórki) zwiększające niezawodność układu. W przypadku lokalnego przerwania/uszkodzenia przewodzących fragmentów komórek, ze względu na redundancję połączeń w tworzonej rozległej sieci, uzyskuje się ciągły przepływ prądu. Jest to szczególnie zauważalne, gdy liczba elementów tworzących materiał sięga setek, czy tysięcy. Wówczas uszkodzenie nawet całych komórek nie powoduje zauważalnych, mierzalnych zmian w makroskopowo opisanych parametrach materiału  $\Omega_M$ .

Ze względu na kluczową rolę geometrii komórek w kształtowaniu właściwości materiału niejednorodnego zaproponowano 10 przykładowych wariantów ich budowy. Każdy z nich opisany jest przez zestaw parametrów geometrycznych modyfikujących kształt, a w konsekwencji prowadzących do zmiany efektywnych parametrów elektrycznych – wynikających wprost z budowy i materiału komórek. W przyjętej, badanej grupie wyróżniono elementy ze względu na ich właściwości elektryczne. Komórki o właściwościach anizotropowych uzyskano przez właściwą

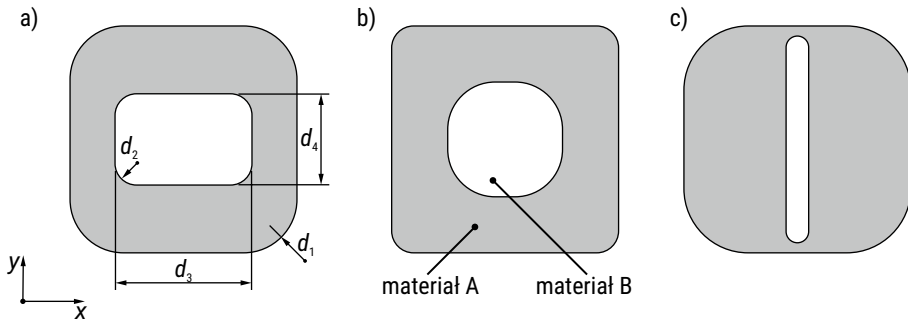
regulację parametrów geometrycznych. Rozpatrywanie przypadków izotropowej budowy komórek redukuje liczbę parametrów, ułatwiając ich dobór na potrzeby układów, w których anizotropia nie jest wymagana.

Pierwszą omawianą geometrią jest struktura typu *gwiazda* (rys. 20a,b), której geometria i właściwości są kształtowane przez dobór 4 parametrów  $\Omega_e \equiv \Omega_{e,g} \leftrightarrow f(d_1, d_2, d_3, d_4)$ . Parametr  $d_1$  decyduje o szerokości styku między komórkami, a wraz z  $d_2$  także o kącie wygięcia ramion. Możliwa anizotropia (rys. 20c) uzyskiwana jest w wyniku zawężenia/poszerzenia nieprzewodzącego centralnego obszaru w niezależnych kierunkach, przez zmianę  $d_3$  i  $d_4$ . Przy zachowaniu symetrii komórki uzyskuje się element o właściwościach anizotropowych, dostosowywanych w ograniczonym zakresie. Nawet znaczące różnice rzędu 100% w wartościach  $d_3$  i  $d_4$ , ograniczają iloraz składowych tensora materiałowego ( $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ ) do wartości poniżej 2. Jest to kluczowa zaleta rozpatrywanej geometrii – jeżeli nie jest wymagana znaczna anizotropia przewodności elektrycznej, parametry komórki  $\Omega_{e,g}$  pozwalają z dużą dokładnością dobrać wartość lub iloraz poszczególnych składowych tensora, gdyż występuje mały zakres ich zmian wobec szerokiego zakresu regulacji parametrów geometrii.



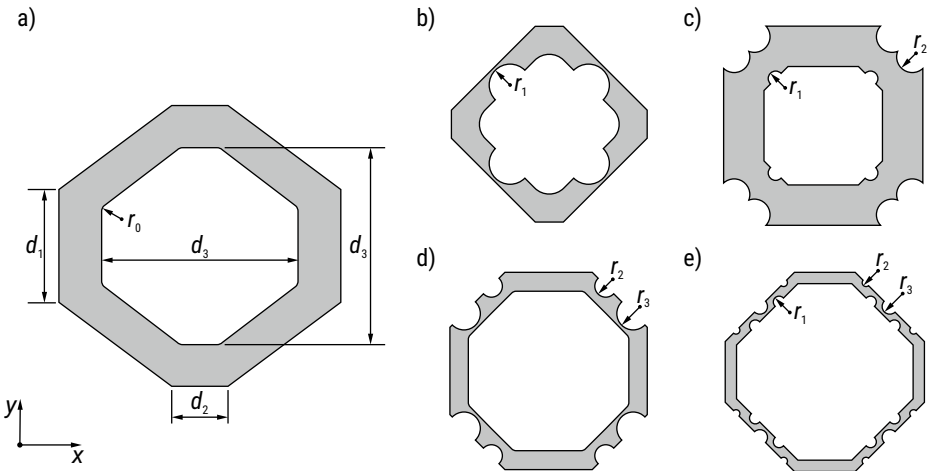
RYS. 20. Przykłady komórek typu  $\Omega_{e,g}$ : a) i b) wersje izotropowe; c) wersja anizotropowa

Odmienną budową charakteryzuje się element typu *prostokąt*  $\Omega_e \equiv \Omega_{e,p} \leftrightarrow f(d_1, d_2, d_3, d_4)$  o wygładzonych kształtach i zakrzywionych wierzchołkach (rys. 21). Promień zaokrąglenia  $d_1$  decyduje o szerokości kontaktu między komórkami w sieci periodycznej, wprowadzając tym samym dodatkowe rezystancje stykowe. O szerokości ścieżki decydują parametry  $d_3$  i  $d_4$ . Podobnie jak w geometrii typu  $\Omega_{e,g}$ , ich zmiana pozwala niezależnie modyfikować szerokość wewnętrznego wycięcia, tzn. wewnętrznego obszaru nieprzewodzącego. Parametr  $d_2$  profiluje kształt ścieżek w celu redukcji lokalnych efektów zmiany gęstości prądu elektrycznego.



RYS. 21. Przykłady komórek typu  $\Omega_{e,p}$ : a) ogólny opis z zaznaczonymi parametrami; b) wariant izotropowy; c) wariant anizotropowy

Geometrie  $\Omega_{e,g}$  i  $\Omega_{e,p}$  nie pozwalają nawet na częściowe oddzielnie doboru właściwości elektrycznych i magnetycznych, przez modyfikację parametrów geometrycznych. Każdorazowa zmiana długości/przekroju fragmentów przewodzących jednocześnie rzutuje na efektywną przewodność elektryczną oraz przenikalność magnetyczną. Wskazanych ograniczeń jest w pewnym stopniu pozbawiony element typu  $\Omega_e \equiv \Omega_{e,mod\#} \leftrightarrow f(d_1, d_2, d_3, r_0, r_1, r_2, r_3)$ . Bazowa wersja  $\Omega_{e,mod0}$  (rys. 22a) różni się od struktury typu  $\Omega_{e,g}$  zachowaniem stałej szerokości obszaru izolatora ( $d_3$ ) i regulowaną szerokością kontaktu ( $d_1, d_2$ ), co redukuje o 1 liczbę parametrów.

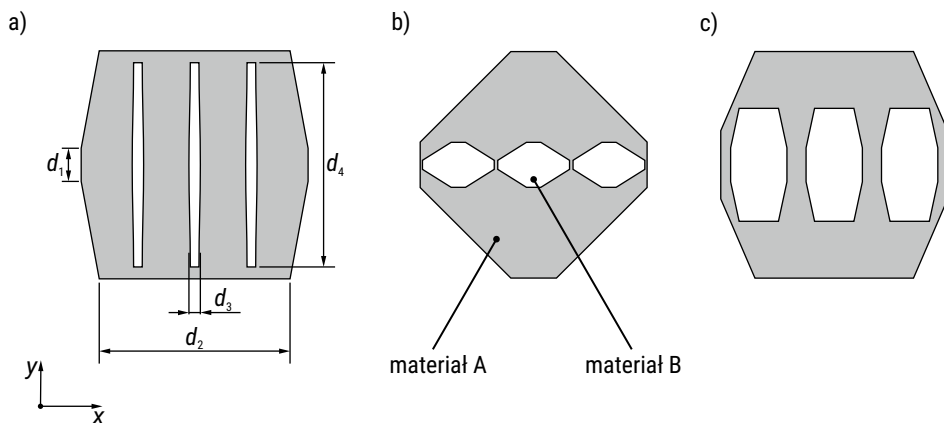


RYS. 22. Przykłady komórek typu  $\Omega_{e,mod\#}$  z dobieraną liczbą regulowanych parametrów: a) wersja podstawowa  $\Omega_{e,mod0}$ ; b) wersja  $\Omega_{e,mod1}$ ; c) wersja  $\Omega_{e,mod2}$ ; d) wersja  $\Omega_{e,mod3}$ ; e) wersja  $\Omega_{e,mod5}$

Bardziej zaawansowane wersje komórek posiadają dodatkowo wyprofilowane ścieżki przewodzące, przez wprowadzenie wcięć (o promieniu  $r$ ) w ramionach. Zwiększona liczba parametrów sterujących kształtem elementów decyduje o szerszych

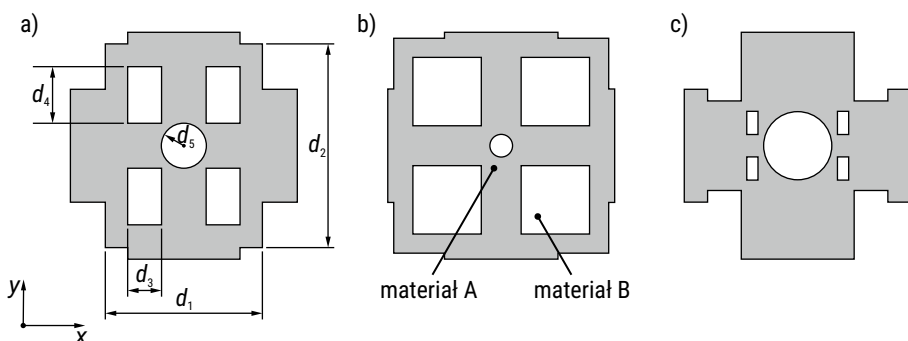
możliwościach doboru właściwości zastępczych. Zmiana kształtu ścieżek zmienia lokalny opór elektryczny, przez redukcję pola przekroju poprzecznego dla przepływającego prądu, lecz długość drogi przepływu prądu nie podlega znaczącym zmianom. Analizując równania opisujące indukcyjność płaskiego przewodnika [96, 97] można zauważyć, że silniej zależy ona od długości drogi prądu ( $l$ ), niż od jej szerokości ( $w$ ). Liczne wcięcia w obszarze ścieżek przewodzących (rys. 22d,e) zauważalnie zwiększają zastępczą rezystancję, lecz w mniejszym stopniu wpływają na zastępczą indukcyjność. Cecha związana z częściowym rozdzieleniem wpływu parametrów geometrycznych na poszczególne właściwości komórek jest fundamentalną zaletą geometrii typu  $\Omega_{e,mod\#}$ , uzyskaną kosztem większej liczby dobieranych parametrów.

Geometria  $\Omega_{e,mod\#}$  pozwala na uzyskanie anizotropii, wyrażonej jako iloraz  $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$  o wartości sięgającej 2, podobnie jak w przypadku typu  $\Omega_{e,g}$ . W zaawansowanych układach materiałowych konieczne jest zastosowanie materiałów charakteryzujących się znacznymi różnicami między składowymi tensora materiałowego. Do realizacji tego zadania służą wersje komórek w postaci *kratowej* struktury przewodzącej (rys. 23),  $\Omega_e \equiv \Omega_{e,k} \leftrightarrow f(d_1, d_2, d_3, d_4)$ . Kontrolowane usuwanie materiału przewodzącego komórki, w regularnie rozmieszczonych obszarach wewnątrz zamkniętej ośmiokątnej powierzchni, zmienia właściwości elementu. Parametry  $d_3$  i  $d_4$  modyfikują efektywny przekrój ścieżek przewodzących oraz drogę prądu elektrycznego między poszczególnymi powierzchniami kontaktów. Umożliwia to uzyskanie ilorazu przewodności ( $\sigma_{xx}/\sigma_{yy}$ ) sięgającego 10. Taka wartość współczynnika anizotropii, jak potwierdzono w dalszych obliczeniach, jest wystarczająca do utworzenia płaszczy i koncentratorów pola. W zależności od potrzeb i układu współrzędnych, wewnętrzne wycięcia można skierować wzdłuż osi  $Ox$  lub  $Oy$ .



RYŚ. 23. Przykłady komórek typu  $\Omega_{e,k}$ : a) opis ogólny; b), c) warianty budowy

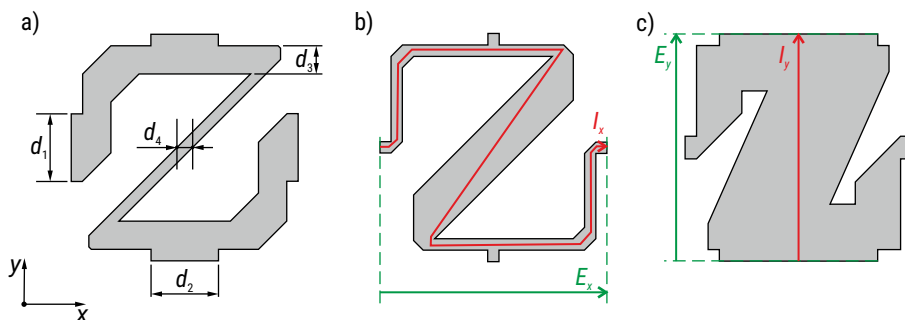
Jeżeli charakter pracy układu materiałowego nie wymaga zwiększenia jego efektywnej przenikalności magnetycznej lub indukcyjności, a dobór ogranicza się wyłącznie do przewodności elektrycznej/termicznej, wówczas odpowiednim wyborem jest geometria typu  $\Omega_e \equiv \Omega_{e,f} \leftrightarrow f(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ , (rys. 24) wzorowana na budowie anteny fraktalnej [51]. Struktura  $\Omega_{e,f}$  charakteryzuje się szerokim zakresem regulacji przewodności elektrycznej (wprowadzenie ubytków w materiale przewodzącym parametrami  $d_1 - d_5$ ), przy zachowaniu niskiej wartości efektywnej przenikalności magnetycznej (wynikającej ze zrównoleglenia drogi prądu elektrycznego poprzez część przewodzącą w środku komórki). Skupiona w centralnej części powierzchnia przewodnika (materiał A) w stosunku do obszaru izolatora (materiał B), zapewnia bardziej równomierny rozkład potencjału na powierzchni komórki. Struktura nadaje się do projektowania elektrycznych układów ciepłych, np. powierzchniowych nagrzewnic o równomiernym rozkładzie temperatury. W wyniku redukcji indukcyjności zastępczej ograniczane są do minimum straty mocy biernej, występujące przy zasilaniu napięciem okresowym.



RYS. 24. Przykłady komórek typu  $\Omega_{e,f}$ : a) ogólny opis; b), c) warianty budowy

Naturalnie niesymetryczną geometrią komórki jest struktura typu  $\Omega_e \equiv \Omega_{e,z} \leftrightarrow f(d_1, d_2, d_3, d_4)$ , której cechą szczególną jest brak osi symetrii geometrycznej (rys. 25a). Wymuszenie w postaci pola elektrycznego o składowej poziomej (rys. 25b), spowoduje przepływ prądu po wydłużonej drodze, gdzie w rezultacie otrzymuje się niską przewodność elektryczną w kierunku  $\sigma_{xx}$ . Gdy napięcie elektryczne jest przyłożone pionowo jak na rys. 25c, droga prądu jest krótsza, co przy uwzględnieniu pola przekroju poprzecznego przewodnika powoduje, że przewodność elektryczna w kierunku  $y$  ( $\sigma_{yy}$ ) przyjmie znaczne wartości. Składowe te kontroluje się niezależnie poprzez parametry  $d_1$  i  $d_2$  (szerokości kontaktów) oraz jednocześnie przez  $d_3$  (szerokość ścieżki) i  $d_4$  (szerokość poprzeczki). Złamanie symetrii prowadzi do anizotropii kierunkowej i wprowadza pozadiagonalne składowe tensora materiałowego ( $\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \neq 0$ ), których wartości zależą od wszystkich parametrów geometrycznych.





RYS. 25. Przykłady komórek typu  $\Omega_{ez}$ : a) ogólny opis geometrii; b) przepływ prądu elektrycznego  $I_x$  przy wymuszeniu na zaciskach poziomych; c) przepływ prądu elektrycznego  $I_y$  przy wymuszeniu na zaciskach pionowych

Każda ze struktur (rys. 20 – rys. 25) zapewnia ten sam dobór jakościowy składowych kierunkowych tensorów materiałowych. Przykładowo w komórce przedstawionej na rys. 25b składowa  $x$  przyłożonego zewnątrznie pola elektrycznego  $E_x$  wymusza przepływ prądu po relatywnie długiej drodze o małym przekroju, co przekłada się na niską efektywną przewodność  $\sigma_{xx}$ , lecz na wysoką efektywną przenikalność magnetyczną  $\mu_{yy}$ . Natomiast dla wymuszenia zewnątrzniego o składowej  $E_y$  jest odwrotnie, tzn. efektywna przewodność  $\sigma_{yy}$  pozostanie wysoka, lecz efektywna przenikalność  $\mu_{xx}$  osiągnie mniejszą wartość. Zatem taka geometria zapewni jednocześnie niską zastępczą przewodność  $\sigma_{xx}$  i przenikalność  $\mu_{xx}$ , ale wysokie  $\sigma_{yy}$  i  $\mu_{yy}$ .

## Podsumowanie

W rozdziale przedstawiono podstawowe problemy związane z syntezą oraz wymaganiami stawianymi kompozytom przeznaczonych do pracy w wolno- i szybkozmiennych polach elektrycznych i magnetycznych. Na podstawie przeglądu literatury wskazano na problemy związane z fizyczną realizacją metamateriałów pól skalarnych. Jako rozwiązanie proponowane są niejednorodne laminarne materiały z przewodzącą warstwą periodycznych komórek o dobieranej geometrii. Materiał cienkowarstwowy tworzony jest na podstawie powtarzalnego rozmieszczenia komórek w układzie 2D lub 1D na powierzchni roboczej. Możliwość deformacji geometrii (wygięcia powierzchni) i sieciowy układ elementów zwiększa obszar zastosowania oraz podwyższa odporność materiału na lokalne uszkodzenia struktury. Proponowane geometrie komórek charakteryzują się możliwością doboru ich właściwości elektrycznych. Możliwe jest wytworzenie MMS za pomocą kilku izotropowych materiałów, o silnie różniących się przewodnościach elektrycznych.

Omówiono 6 geometrii komórek przyjętych w dalszych pracach oraz scharakteryzowano ich potencjalne właściwości, które mogą być przydatne w wybranych zastosowaniach. Geometrie typu  $\Omega_{e,g}$  i  $\Omega_{e,p}$  cechują się najmniejszym stopniem złożoności geometrii, która przekłada się na minimalizację liczby parametrów opisujących geometrię. Umożliwiają one dobór właściwości elektrycznych i magnetycznych oraz kształtowania ich anizotropii w ograniczonym zakresie. Wariant  $\Omega_{e,p}$  którego budowa wyróżnia się możliwością minimalizacji wartości efektywnej przenikalności magnetycznej, jest przede wszystkim przeznaczony do układów o właściwościach izotropowych z dobieraną wartością efektywnej przewodności elektrycznej. Komórki  $\Omega_{e,mod\#}$  umożliwiają częściową separację wpływu parametrów geometrycznych na wartość efektywnej przewodności elektrycznej i względnej przenikalności magnetycznej struktury, w wyniku dodatkowego profilowania ścieżek przewodzących. Warianty geometrii typu  $\Omega_{e,k}$  oraz  $\Omega_{e,z}$  charakteryzują się właściwościami anizotropowymi kształtowanymi w szerszym zakresie, niż w przypadku pozostałych komórek. Dodatkowo typ  $\Omega_{e,z}$  pozwala na dobór wartości pozadiagonalnych elementów, np. tensora przenikalności magnetycznej, które w przypadku innych geometrii komórek  $\Omega_e$  zawsze pozostają zerowe.

# Rozdział 3

## Model matematyczny

### Wprowadzenie

Rozpatrywane komórki materiału niejednorodnego charakteryzują się złożoną budową, która wynika z możliwych deformacji ścieżek przewodzących. Dowolny układ materiałowy uniemożliwia wyznaczenie za pomocą metod analitycznych rozkładu pola elektrycznego i magnetycznego w ramach komórki  $\Omega_c$ . Znajomość rozkładu wielkości polowych jest niezbędna przy ocenie właściwości elektrycznych i projektowaniu elementów do lokalnej modyfikacji rozkładu pola. Ze względu na złożoność struktury komórek i dążenie do oceny właściwości obciążonych możliwie najmniejszym błędem, efektywnymi narzędziami do wyznaczenia rozkładu obu pól są metody numeryczne. Rozwiązanie różniczkowego i całkowego sformułowania pola poprzez dyskretyzację analizowanego obszaru, a następnie obliczenie rozkładu wielkości fizycznej z użyciem profesjonalnego lub (w wybranych wariantach) własnego oprogramowania, umożliwia szybkie określenie właściwości elementów.

Oszacowane parametry skupione, tj. rezystancja i indukcyjność własna komórki oraz współczynnik sprzężenia magnetycznego między komórkami, stanowią podstawę do dalszego modelowania materiałów niejednorodnych metodami sieciowymi. Analiza układów dużej skali nie zawsze wymaga przejścia z opisu polowego do obwodowego. Wybrane modele numeryczne zawierające materiał niejednorodny można rozwiązać w oparciu o jednorodną strukturę opisaną efektywnymi parametrami elektromagnetycznymi. Określenie parametrów przeprowadzane jest wówczas w wyniku homogenizacji. W przypadku właściwości magnetycznych, wymagane jest połączenie sformułowania analitycznego z modelem numerycznym opisującym rozkład pola magnetycznego, rozważanym w przekroju poprzecznym struktury.

Niniejszy rozdział poświęcono problematyce modelowania stałego oraz wolnozmennego pola elektromagnetycznego w obrębie niejednorodnych struktur. Omówiono rozwiązanie przytoczonych równań przy zastosowaniu metody różnic skończonych i kwadratury numerycznej. Scharakteryzowano własny algorytm obliczeniowy opracowany i wykorzystany w toku prac badawczych.

## 3.1. Model matematyczny stacjonarnego pola elektrycznego

### 3.1.1. Różniczkowe sformułowanie zagadnienia

Stacjonarne, elektryczne pole przepływowo opisane jest przez rozkład skalarnego potencjału elektrycznego  $V(x,y,z)$  w obszarze  $\Omega$  złożonym z materiałów o różnej przewodności elektrycznej  $\sigma(x,y,z)$ . Rozkład wektora gęstości prądu elektrycznego  $\mathbf{J}(x,y,z)$  spełnia zasadę zachowania ładunku

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(x, y, z) = 0, \quad (16)$$

przy uwzględnieniu bezźródłowości i potencjalności pola prowadzącej do zdefiniowania natężenia pola elektrycznego

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z), \quad (17)$$

oraz prawa Ohma w postaci polowej

$$\mathbf{J}(x, y, z) = -\sigma(x, y, z)\nabla V(x, y, z). \quad (18)$$

Równanie (16) w niejednorodnym układzie przyjmuje zatem postać

$$\nabla \cdot [\sigma(x, y, z)\nabla V(x, y, z)] = 0. \quad (19)$$

Rozwiązanie równania (19) w obszarze  $\Omega$  przy zadanych warunkach brzegowych stanowi podstawę analizy stałego i wolnozmiennego pola elektrycznego, w układzie o niejednorodnym rozkładzie przewodności elektrycznej. W przypadku rozpatrywanego układu komórek równanie (19) jest rozwiązywane metodami numerycznymi, z uwzględnieniem dyskretyzacji obszaru.

Biorąc pod uwagę zmienny, niejednorodny rozkład przewodności elektrycznej rozwiązanie (19) jest nieosiągalne metodami analitycznymi. Szczególnym przypadkiem jest metoda przedstawiona w [6]. Zmiany wartości przewodności elektrycznej w rozpatrywanym obszarze są wtedy opisane w postaci równania analitycznego. Przy założeniu analizy modeli 2D, konieczne jest określenie współczynników wzoru aproksymującego rozkład przewodności, który wyrażony jest, np. szeregiem wielomianowym lub trygonometrycznym zależnym nieliniowo od zmiennych  $x$  i  $y$ .

Uwzględniając zjawiska elektryczne, rozważane w pracy struktury można analizować jako struktury planarne. Pomija się przy tym efekty krawędziowe (wzdłuż osi  $Oz$ ) nieistotne w zakresie wymuszeń stałych i niskich częstotliwości. Wielokrotnie

mniejsza od pozostałych wymiarów geometrycznych wysokość komórki, umożliwia przybliżenie trójwymiarowej struktury odpowiadającym jej dwuwymiarowym przekrojem podłużnym. Warunki brzegowe opisujące wymuszenie w modelu 2D sprowadzają się do potencjałowych warunków Dirichleta zadanych na krawędziach modelu. Ze względu na zastosowanie materiałów przewodzących, a także na materiał bazy, występujące w układzie przewodności elektryczne przyjmują wartości:

- $\sigma_A$  – przewodność materiału przewodzącego,
- $\sigma_B$  – przewodność materiału izolacyjnego.

Obliczeniom w modelu poddawano pojedyncze komórki lub uproszczone układy złożone z ich niewielkiej liczby przyjmując, że otoczenie (materiał poza analizowanym obszarem  $\Omega$ ) charakteryzuje się właściwościami powietrza. Uwzględnienie otoczenia zrealizowano poprzez zadanie na krawędziach modelu warunków brzegowych odpowiadających idealnej izolacji elektrycznej. Brak prądów przewodzenia w otoczeniu dodatkowo upraszcza analizę, a interesujący z punktu widzenia właściwości komórek rozkład pola elektrycznego ograniczyć można wyłącznie do obszaru zajmowanego przez układ komórek  $\Omega_e$ .

### 3.1.2. Różnicowe sformułowanie zagadnienia

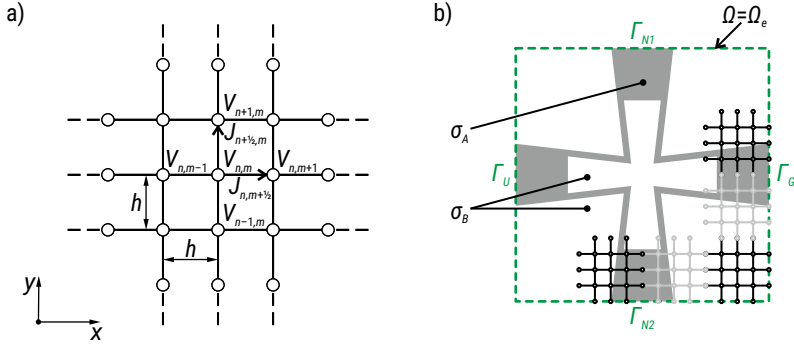
Alternatywną i powszechnie stosowaną metodą rozwiązania tak postawionego problemu są metody numeryczne bazujące na dyskretyzacji ograniczonego obszaru modelu. W przyjętym, opracowanym sformułowaniu zastosowano metodę różnicową, w której węzły siatki różnicowej mogą być rozłożone w analizowanym obszarze całkowicie dowolnie. Jednak zachowanie właściwego poziomu wartości błędów obliczeń, odwzorowanie szczegółów modelowanej geometrii, czy zastosowanie konkretnej metody podziału obszaru wymusza przemyślany rozkład węzłów obliczeniowych oraz znaczną ich liczbę (przekraczającą tysiące, a nawet setki tysięcy).

Zgodnie z założeniami podanymi w rozdziale 3.1.1 opracowany algorytm metody różnic skończonych, zastosowany do analizy cienkowarstwowych układów, bazuje na modelu 2D (obliczenia prowadzone będą w płaszczyźnie  $xy$ ). Rozważane jest stałe w czasie, przepływowe pole elektryczne. Dyskretyzowany obszar  $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$ , składający się z obszaru materiału przewodzącego  $\Omega_A$  i izolatora  $\Omega_B$ , aproksymowany jest za pomocą jednorodnej siatki prostokątnej (rys. 26a), przy czym

$$\Delta x = \Delta y = h. \quad (20)$$

Do węzłów przypisane są skalarnie potencjały elektryczne  $V_{n,m}$ , gdzie  $n$  to numer wiersza, zaś  $m$  to numer kolumny. Analogicznie do gałęzi siatki leżących równoległe do osi przypisano odpowiadające im składowe wektora gęstości prądu  $\mathbf{J} = [J_x J_y]^T$ ,

gdzie  $J_x$  to składowe poziome (np.  $J_{n,m+\frac{1}{2}}$ ), a  $J_y$  składowe pionowe (np.  $J_{n+\frac{1}{2},m}$ ). Ze względu na sposób dyskretyzacji obszaru do gałęzi przypisane są wartości izotropowej przewodności elektrycznej (np.  $\sigma_{n,m+\frac{1}{2}}$ ), wynikające z założonego układu materiałowego w obrębie analizowanego obszaru elementu  $\Omega_e$  (rys. 26b).



RYS. 26. Dyskretyzacja obszaru modelu: a) fragment jednorodnej siatki różnicowej; b) przykład analizowanego obszaru z zaznaczonymi warunkami brzegowymi

Punktem wyjścia do wyprowadzenia równania macierzowego opisującego układ jest zależność (18). Rozważając punkt  $P(n,m)$  i przypisany do niego wektor gęstości prądu  $\mathbf{J}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}$  zgodnie z połowym prawem Ohma w otoczeniu  $P$  zachodzi relacja

$$\mathbf{J}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}} = \left[ J_{n,m+\frac{1}{2}}, J_{n+\frac{1}{2},m} \right] = - \left[ \sigma_{n,m+\frac{1}{2}} \frac{\partial V}{\partial x}, \sigma_{n+\frac{1}{2},m} \frac{\partial V}{\partial y} \right]_P. \quad (21)$$

Dokonując dekompozycji wektora  $\mathbf{J}_{n+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}}$  na ortogonalne składowe reprezentowane na siatce prostokątnej, a następnie stosując liniową aproksymację pochodnej schematem wstecznym Eulera [90], różniczki cząstkowe są lokalnie aproksymowane w punkcie  $P$

$$\begin{aligned} J_{n,m+\frac{1}{2}} &= -\sigma_{n,m+\frac{1}{2}} \frac{V_{n,m+1} - V_{n,m}}{\Delta x} = -\sigma_{n,m+\frac{1}{2}} \frac{V_{n,m+1} - V_{n,m}}{h} + O(h), \\ J_{n+\frac{1}{2},m} &= -\sigma_{n+\frac{1}{2},m} \frac{V_{n+1,m} - V_{n,m}}{\Delta y} = -\sigma_{n+\frac{1}{2},m} \frac{V_{n+1,m} - V_{n,m}}{h} + O(h). \end{aligned} \quad (22)$$

Symbol Landaua  $O(h)$  określa funkcję błędu obcięcia wynikającą z różnicowego przybliżenia różniczki. Przekształcenie równań (22) do postaci

$$\begin{aligned} b_{n,m+\frac{1}{2}}^{-1} \cdot J_{n,m+\frac{1}{2}} + c_{n,m} \cdot V_{n,m} + c_{n,m+1} \cdot V_{n,m+1} &= 0, \\ b_{n+\frac{1}{2},m}^{-1} \cdot J_{n+\frac{1}{2},m} + c_{n,m} \cdot V_{n,m} + c_{n+1,m} \cdot V_{n+1,m} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

umożliwia uporządkowanie i wyróżnienie kluczowych współczynników równań:

- $b_{n,m+\frac{1}{2}} = b_{n+\frac{1}{2},m} = h^{-1}\sigma$  – współczynnik materiałowo-geometryczny przy niewiadomej składowej wektora gęstości prądu;
- $c_{n,m} = -1$  – współczynnik incydencji, gdy wektor gęstości prądu wypływa z węzła, występujący przy niewiadomym potencjale elektrycznym;
- $c_{n,m+1} = c_{n+1,m} = 1$  – współczynnik incydencji, gdy wektor gęstości prądu wpływa do węzła;
- współczynnik incydencji  $c_{n,m} = 0$ , gdy wektor gęstości prądu nie ma powiązania z węzłem.

Przy uwzględnieniu globalnej numeracji siatki zastosowanie zależności (23) dla modelu złożonego z  $N \times M$  węzłów, prowadzi do układu  $p_j = (N-1)M + N(M-1)$  równań algebraicznych z macierzą kwadratową  $\mathbf{B}$  gromadzącą współczynniki materiałowo-geometryczne oraz macierzą prostokątną  $\mathbf{C}$  zawierającą współczynniki incydencji.

Zależność (23) musi zostać uzupełniona o zasadę zachowania ładunku. Zatem wymagana jest lokalna dyskretyzacja równania (16) w punkcie  $P$

$$\left. \frac{\partial J_x}{\partial x} \right|_P + \left. \frac{\partial J_y}{\partial y} \right|_P = 0, \quad (24)$$

poprzez zastosowanie ilorazu różnicowego

$$\frac{J_{n,m+\frac{1}{2}} - J_{n,m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{J_{n+\frac{1}{2},m} - J_{n-\frac{1}{2},m}}{\Delta y} + 2O(h) = 0. \quad (25)$$

Przy założeniu (20) równanie (25) sprowadza się do postaci

$$g_{n,m} \cdot J_{n,m+\frac{1}{2}} + g_{n,m-1} \cdot J_{n,m-\frac{1}{2}} + g_{n,m} \cdot J_{n+\frac{1}{2},m} + g_{n-1,m} \cdot J_{n-\frac{1}{2},m} = 0, \quad (26)$$

gdzie:  $g_{n,m}$  – współczynnik incydencji, przy czym:

- $g_{n,m} = 1$ , gdy składowa wektora prądu jest zwrócona do węzła;
- $g_{n,m} = -1$ , gdy zwrócona jest z węzła;
- zaś w pozostałych przypadkach (brak incydencji)  $g_{n,m} = 0$ .

Analiza równania (26) dla każdego z węzłów sieci prowadzi do wniosku, iż układ współczynników  $g_{n,m}$  formuje macierz incydencji  $\mathbf{G}$ , która jest związana z  $\mathbf{C}$  relacją

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}^T. \quad (27)$$

Zaletą zastosowania jednorodnej siatki kwadratowej jest ograniczenie zbioru wartości współczynników incydencji w równaniach (26) do trzech wartości  $\{-1; 0; 1\}$ , niezależnych od skoku siatki, czy właściwości materiałowych oraz brak

występowania niewiadomych potencjałów elektrycznych. Istnieje także możliwość natychmiastowego określenia zawartości macierzy  $\mathbf{G}$  na podstawie znajomości  $\mathbf{C}$  i odwrotnie.

Uporządkowanie współczynników pozwala wyróżnić uformowane z nich macierze blokowe, które wraz z zadanymi wymuszeniami tworzą układ macierzowy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0}_v \end{bmatrix}, \quad (28)$$

gdzie:  $\mathbf{B} = \text{diag}(b_{0,0}^{-1}; b_{h,0}^{-1}; \dots; b_{n-h,m-h}^{-1})$  to diagonalna macierz współczynników materiałowo-geometrycznych,  $\dim(\mathbf{B}) = p_j \times p_j$ ;  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{G}$  to macierze incydencji,  $\dim(\mathbf{C}) = p_j \times (N \cdot M)$ ,  $\dim(\mathbf{G}) = (N \cdot M) \times p_j$ ;  $\mathbf{J}$  jest wektorem niewiadomych gęstości prądów,  $\dim(\mathbf{J}) = p_j \times 1$ ;  $\mathbf{V}$  to wektor niewiadomych potencjałów elektrycznych,  $\dim(\mathbf{V}) = (N \cdot M) \times 1$ ;  $\mathbf{u}$  to wektor zadanych potencjałów elektrycznych (wymuszenia w układzie);  $\mathbf{0}_m$  i  $\mathbf{0}_v$  to odpowiednio zerowa macierz i wektor.

Wykorzystując zależność (27) i twierdzenie M. A. Woodbury'ego [100] można wprowadzić równanie umożliwiające wyznaczenie wektora gęstości prądów

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u} - \underbrace{\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1}}_{\mathbf{x}} \mathbf{u}. \quad (29)$$

Przetwarzanie macierzy diagonalnej  $\mathbf{B}$  nie stanowi krytycznego elementu metody, stąd największy wysiłek obliczeniowy należy włożyć w wyznaczenie wektora  $\mathbf{x}$ . Biorąc pod uwagę, iż  $(\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C})$  jest macierzą kwadratową o rozmiarze  $(N \cdot M) \times (N \cdot M)$ , a  $(\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u})$  wektorem o  $N \cdot M$  wierszach, to wektor  $\mathbf{x}$  można określić na podstawie zależności

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{u}). \quad (30)$$

Ze względu na liczbę niewiadomych (rozmiary macierzy), uzasadnione jest do rozwiązania równania (30) stosowanie algorytmów iteracyjnych. Proponowany schemat pozwala na szybkie wyznaczenie rozkładu gęstości prądu układu o złożonej strukturze materiałowej, na podstawie warunków brzegowych zgromadzonych w wektorze wymuszeń  $\mathbf{u}$ .

### 3.1.3. Opis warunków brzegowych

Poszukiwany w modelu numerycznym rozptyw prądu elektrycznego, uwarunkowany jest rozkładem przewodności elektrycznej materiału w obszarze układu oraz zadanymi na skrajnych krawędziach  $\Gamma$  (rys. 26b) obszaru  $\Omega$  wymuszeniami napięciowymi i ograniczeniami pola przepływowego. Przyjmując zakładane warunki pracy materiału niejednorodnego przy wymuszeniu napięciowym, w układzie przypisano globalne



warunki brzegowe I-ego rodzaju na wybranych fragmentach krawędzi. W modelu wymuszeniem jest stałe i niezależne od rozprywu prądu elektrycznego napięcie elektryczne  $U_z$  [V], stąd na  $\Gamma_U$  i  $\Gamma_G$  przypisano warunki brzegowe Dirichleta o liczbowo określonych wartościach

$$\text{lewa krawędź modelu: } V_{n,l}|_{\Gamma_U} = U_z,$$

$$\text{prawa krawędź modelu: } V_{n,M}|_{\Gamma_G} = 0. \quad (31)$$

W równaniach (23) węzły uziemione są zerowane, a węzły z potencjałem  $U_z$  formują wektor wymuszeń  $\mathbf{u}$ .

Warunki brzegowe (31) uzupełnione są o idealną izolację elektryczną na górnej krawędzi  $\Gamma_{N1}$  i dolnej  $\Gamma_{N2}$  (rys. 26b), opisaną warunkami brzegowymi II-ego rodzaju

$$\left. \frac{\partial V}{\partial y} \right|_{\Gamma_{N1} \cup \Gamma_{N2}} = 0. \quad (32)$$

Przy niezerowej przewodności, w wyniku dyskretyzacji warunek (32) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} J_{N+\frac{1}{2},m} &= 0, \\ J_{1-\frac{1}{2},m} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Przyjęcie warunku (33) również ogranicza liczbę niewiadomych w ogólnym układzie równań (23) i (26). Następuje tym samym eliminacja tych elementów z równania (26), jeśli nie zostaną one opisane w (23).

## 3.2. Model matematyczny stacjonarnego pola magnetycznego

### 3.2.1. Całkowe sformułowanie zagadnienia

Przyjmując, że rozmiary komórek są dużo mniejsze od długości fali pola elektromagnetycznego ( $d_e \ll \lambda_{EM}$ ) można dokonać separacji pola elektrycznego oraz magnetycznego. Sprowadzenie problemu analizy do stacjonarnych pól elektrycznych i magnetycznych eliminuje także konieczność przeprowadzania obliczeń na liczbach zespolonych

i uwzględnienia właściwości magnetycznych materiałów. Podczas, gdy pole elektryczne rozwiązywane jest metodą różnicową, pole magnetyczne opisane jest w obszarze jednorodnym przez równanie całkowe [97]

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{\rho_{3D}} dV, \quad (34)$$

gdzie:  $\mathbf{A}$  – wektorowy potencjał magnetyczny [Wb/m];  $V$  – objętość analizowanego obszaru [ $\text{m}^3$ ];  $\rho_{3D} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$  – odległość między punktem obserwacji a źródłowym [m];  $(x, y, z)$  – współrzędne punktu obserwacji;  $(x', y', z')$  – współrzędne punktu źródłowego.

Zakładając jednorodny rozkład przenikalności magnetycznej  $\mu$ , wyznaczenie rozkładu indukcji pola magnetycznego  $\mathbf{B}$  przeprowadza się na podstawie równania

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{A}(x, y, z). \quad (35)$$

Gdy problem polowy opisany jest równaniem (34) samoczynnie wprowadzane są naturalne warunki brzegowe Neumanna. Wówczas wymagane jest zdefiniowanie granic obszaru całkowania  $V$  i źródeł pola w postaci wektora gęstości prądu  $\mathbf{J}$ .

### 3.2.2. Numeryczne sformułowanie zagadnienia

Uwzględniając geometrię rozpatrywanego materiału oraz przyjmując, że:

- analizowany obszar jest planarnym układem w przestrzeni 2D ograniczonym do prostokątnej płaszczyzny  $S \in \Omega$ ;
- rozkład przenikalności magnetycznej w układzie jest jednorodny ( $\mu = \text{const}$ );
- znany jest rozkład gęstości prądu elektrycznego  $\mathbf{J}$ ,

można wyprowadzić równanie opisujące rozkład  $\mathbf{A}$  w płaszczyźnie  $xy$ .

Grubość rozpatrywanych struktur jest pomijalnie mała, stąd przyjmuje się, że:

- 1) nie wystąpi składowa  $J_z$  gęstości prądu elektrycznego oraz,
- 2) pozostałe składowe nie będą zmieniać się wzdłuż osi  $Oz$ , zatem

$$\begin{aligned} J_z &= 0, \\ \frac{d}{dz} J_x &= 0, \\ \frac{d}{dz} J_y &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Ograniczenie analizy do dwuwymiarowego obszaru struktur prowadzi do określenia rozkładu  $\mathbf{A}(x, y)$  wyłącznie w przekroju podłużnym komórek.

Przyjmuje się, że w konstrukcji planarnych struktur niejednorodnych występują materiały niemagnetyczne, zatem  $\mu_A = \mu_B = \mu_0$ . Otoczeniem komórki jest powietrze lub inny izolator o przenikalności magnetycznej  $\mu_0$ . Tak dobrany układ materiałowy prowadzi do modelu numerycznego, w którym rozkład przenikalności magnetycznej w całym obszarze pozostaje jednorodny ( $\mu = \mu_0 = \text{const}$ ).

Założenie 2) jest spełnione w wyniku rozwiązania problemu rozkładu pola elektrycznego metodą różnicową. Równanie (29) umożliwia bezpośrednie obliczenie rozkładu przestrzennego obu składowych  $J_x$  i  $J_y$  gęstości prądu w całym obszarze  $\Omega$ . Przy tak postawionych założeniach określenie rozkładu  $\mathbf{A}(x,y) = [A_x(x,y) A_y(x,y)]$  w rozpatrywanym materiale sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} A_x(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} d_{e,z} \iint_S \frac{J_x(x', y')}{\rho_{2D}} dS, \\ A_y(x, y) = \frac{\mu_0}{4\pi} d_{e,z} \iint_S \frac{J_y(x', y')}{\rho_{2D}} dS, \end{cases} \quad (37)$$

który jest analogiczny do równań opisujących, np. rozkład potencjału magnetycznego w cienkiej taśmie przewodzącej o prostokątnym przekroju poprzecznym [96]. Odległość  $\rho_{2D} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$  jest określana w płaszczyźnie  $S$  obejmującej strukturę elementu składowego  $\Omega_e$  o rozmiarze  $d_{e,x} \times d_{e,y}$ .

Rozwiązanie (37) uzyskano metodami numerycznymi przy użyciu siatki różnicowej opisanej w rozdziale 3.1.2. Ponieważ liczone są całki podwójne, a siatka różnicowa składa się z dziesiątek tysięcy węzłów, to w celu podniesienia efektywności obliczeń zastosowano kwadraturę prostokątów. Po podstawieniu zależności numerycznych układ (37) przyjmie postać

$$\begin{cases} A_{n,m+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} d_{e,z} h \sum_{n'=1}^N \sum_{m'=1}^M \frac{J_{n',m'+\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n-n')^2 + (m-m')^2}}, \\ A_{n+\frac{1}{2},m} = \frac{\mu_0}{4\pi} d_{e,z} h \sum_{n'=1}^N \sum_{m'=1}^M \frac{J_{n'+\frac{1}{2},m'}}{\sqrt{(n-n')^2 + (m-m')^2}}. \end{cases} \quad (38)$$

Uwzględniając, że w płaszczyźnie obliczeniowej  $S$  składowe wektora potencjału magnetycznego (zgodnie z założeniami) również spełniają warunek (36), to z równania (35) wynika, iż w analizowanym obszarze, w przypadku analizowanego pola magnetycznego, wystąpi jedynie składowa  $B_z$  indukcji magnetycznej.

Przedstawiona metoda została zaproponowana i opisana w pracach [12] i [113]. Rozważono dwie geometrie komórek – typu  $\Omega_{e,g}$  oraz typu  $\Omega_{e,p}$ , które poddano analizie ze względu na rozkład pola magnetycznego. W [113] skupiono się na porównaniu rezultatów otrzymanych na podstawie sformułowania całkowitego (38) oraz z użyciem

metody elementów skończonych. Obliczenia pola magnetycznego były poprzedzone znalezieniem rozkładu potencjału elektrycznego, a na tej podstawie rozkładu wektora gęstości prądu. Przedmiotem analizy porównawczej były obliczone rozkłady wektorowego potencjału magnetycznego. Zaprezentowane graficznie rezultaty nie pozostawiają wątpliwości, że całkowity model cienkowarstwowy 2D umożliwia otrzymanie zgodnego z różniczkowym modelem 3D rozkładu potencjału wektorowego w przekroju podłużnym elementu. Potwierdza to także zgodność wartości obliczonych indukcyjności komórek w obu modelach.

### 3.3. Sformułowanie częstotliwościowe pola magnetycznego

#### 3.3.1. Różniczkowe sformułowanie zagadnienia

Prezentowana metoda różnicowo-całkowa przeznaczona jest do analizy struktur w przekroju podłużnym (płaszczyzna  $xy$ ). Działania zmierzające do ujednorodnienia właściwości komórek wymagają dodatkowej analizy pola magnetycznego. Konieczne jest określenie rozkładu pola magnetycznego w przekroju poprzecznym jednorodnej struktury, w kształcie prostopadłościanu o wymiarach zewnętrznych komórek  $\Omega_e$  (rys. 27a). Analizę pola można przeprowadzić w układzie 2D, jednak przy takim podejściu niezbędne stanie się uwzględnienie właściwości otoczenia oraz wartości parametrów elektrycznych i magnetycznych w układzie.

Całkowe sformułowanie (34) posiada analogiczne sformułowanie różniczkowe w dziedzinie częstotliwości

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) + (j\omega\sigma - \omega^2 \varepsilon) \mathbf{A} = \mathbf{J}_e, \quad (39)$$

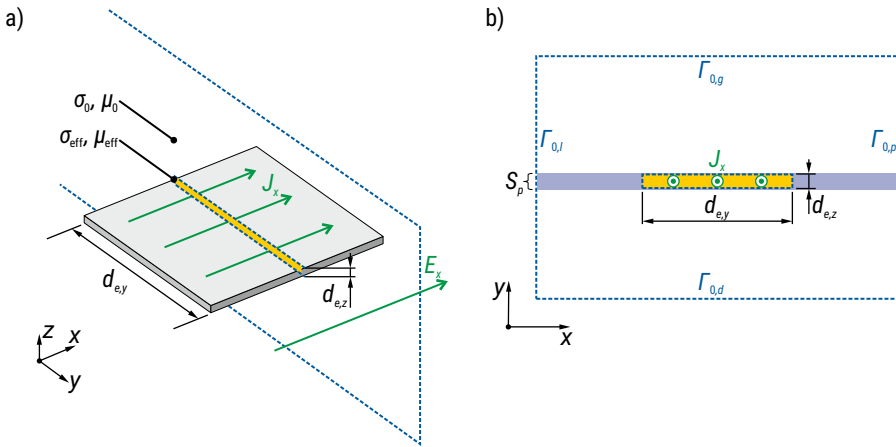
przy czym  $\mathbf{J}_e = \mathbf{J}_e(x, y, z)$  to wektor gęstości prądu przewodzenia pochodzącego z zewnętrznego źródła prądowego. Niejednorodny rozkład parametrów materiałowych  $\sigma$  oraz  $\mu$  wynika z narzuconego sposobu analizy, ponieważ w układzie znajduje się materiał o przenikalności magnetycznej i przewodności elektrycznej różnej od nieprzewodzącego, dielektrycznego otoczenia. Analiza pola magnetycznego jest przeprowadzana przy sformułowaniu problemu ze względu na rozkład wektorowego potencjału magnetycznego.

Omawiana metoda została zastosowana do analizy prostopadłościennych, izotropowych, homogenicznych płytek (rys. 27a). Jeżeli do powierzchni dowolnej pary przeciwległych boków tego rodzaju struktur zostanie przyłożone stałe napięcie elektryczne, to wówczas popłynie przez nich prąd elektryczny o tylko jednej składowej. Na przykład,

przy zadanym zewnętrznym polu elektrycznym  $E_x$  wymuszonym wzdłuż osi  $Ox$ , odpowiedzią jest wektor gęstości prądu zawierający jedynie składową  $J_{e,x}$ . W układzie pojawi się związana z prądem  $J_{e,x}$  składowa magnetycznego potencjału wektorowego, stąd

$$\mathbf{J}_e = [J_{e,x}, 0, 0]^T, \quad (40)$$

$$\mathbf{A} = [A, 0, 0]^T. \quad (41)$$



RYS. 27. Model materiału jednorodnego: a) widok 3D – materiał homogeniczny ( $\sigma_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}}$ ) oraz otoczenie ( $\sigma_0, \mu_0$ ); b) model 2D – utworzony na podstawie przekroju poprzecznego materiału i fragmentu otoczenia

Jednorodność materiałowa homogenicznej struktury i przyjęty sposób wymuszenia przepływu prądu w cienkiej warstwie przewodnika umożliwia uproszczenie analizy. Możliwe staje się zredukowanie modelu do wariantu 2D, zdefiniowanego w płaszczyźnie prostopadłej do orientacji składowej gęstości prądu (rys. 27b). Układ jest opisany stałymi, jednakowymi współczynnikami materiałowymi  $\sigma_{\text{eff}}$  i  $\mu_{\text{eff}}$ , zaś otoczenie opisane jest odpowiednio przewodnością  $\sigma_0$  oraz przenikalnością  $\mu_0$ . W modelu celowo pominięto wartość przenikalności elektrycznej  $\epsilon$ , ze względu na przyjęte wcześniej ograniczenie częstotliwości zmian pola do  $f_{\text{max}} = 1$  MHz. We wzorze na stałą propagacji w równaniu (39) wartość liczbową czynnika  $\omega^2 \epsilon \ll \omega \sigma$  oraz  $\omega^2 \epsilon \ll \mu^{-1}$  stąd przyjęto, że  $\omega^2 \epsilon \approx 0$ .

Przedstawione założenia modyfikują wektorowe równanie (39) do równania rozwiązywanego jedynie ze względu na rozkład składowej podłużnej  $A = A(y, z)$ . Wprowadzając do równania (39) wektory (40) i (41) oraz dla  $\omega^2 \epsilon \approx 0$  uzyskano

$$\nabla \times \left( \mu^{-1} \nabla \times \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + j\omega\sigma \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{e,x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (42)$$

a po przekształceniach

$$\nabla \times \begin{bmatrix} 0 \\ \mu^{-1} \frac{\partial A}{\partial z} \\ -\mu^{-1} \frac{\partial A}{\partial y} \end{bmatrix} + j\omega\sigma \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{e,x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (43)$$

co ostatecznie prowadzi do skalarnego równania różniczkowego (dla składowej  $x$ )

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\mu^{-1} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -\mu^{-1} \frac{\partial A}{\partial z} \right) + j\omega\sigma A = J_{e,x}. \quad (44)$$

### 3.3.2. Różnicowe sformułowanie zagadnienia

Przedstawiony w rozdziale 3.1.2 sposób rozwiązywania układu równań liniowych został zaadaptowany do rozwiązywania równania (44). W tym celu zdefiniowano wektor pomocniczy  $\mathbf{W} = [W_y, W_z]$ , którego elementy na siatce różnicowej w punkcie  $P(n,m)$  przyjmą postać

$$W_{n,m+\frac{1}{2}} = -\mu_{n,m+\frac{1}{2}}^{-1} \left. \frac{\partial A}{\partial y} \right|_P, \quad (45)$$

$$W_{n+\frac{1}{2},m} = -\mu_{n+\frac{1}{2},m}^{-1} \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_P.$$

Stosując przybliżenia różnicowe podobne do przedstawionych w równaniu (22)

$$W_{n,m+\frac{1}{2}} = -\mu_{n,m+\frac{1}{2}}^{-1} \frac{A_{n,m+1} - A_{n,m}}{h}, \quad (46)$$

$$W_{n+\frac{1}{2},m} = -\mu_{n+\frac{1}{2},m}^{-1} \frac{A_{n+1,m} - A_{n,m}}{h_z},$$

otrzymano równanie algebraiczne, zdefiniowane dla węzła  $(n,m)$

$$b_{n,m+\frac{1}{2}}^{-1} \cdot W_{n,m+\frac{1}{2}} + c_{n,m} \cdot A_{n,m} + c_{n,m+1} \cdot A_{n,m+1} = 0, \quad (47)$$

$$b_{n+\frac{1}{2},m}^{-1} \cdot W_{n+\frac{1}{2},m} + c_{n,m} \cdot A_{n,m} + c_{n+1,m} \cdot A_{n+1,m} = 0,$$

gdzie:  $b_{n,m+1/2} = b_{n+1/2,m} = (h\mu)^{-1}$  to współczynnik materiałowo-geometryczny.

W modelu zastosowano siatkę niejednorodną – w obszarze  $S_p$  (rys. 27b) następuje zmniejszenie kroku siatki  $h_z$  ( $h_z < h$ ), w celu poprawy odwzorowania cienkiego przekroju prostopadłościanu ( $d_{e,z} \ll d_{e,y}$ ) i zmniejszenia błędu obliczeń. Poza  $S_p$  przyjęto  $h_z = h$ .

Złożenie zależności (47) po wszystkich węzłach siatki prowadzi do układu równań, który w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{T} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_v \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Układ (48) rozwiązywany jest ze względu na niewiadomy wektor potencjałów

$$\mathbf{A} = \left( -\mathbf{C}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{T} \right)^{-1} \mathbf{u}. \quad (49)$$

Interpretacja macierzy  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{C}^T$  pozostaje taka jak w przypadku równania (29). Rozwiązaniem jest wektor liczb zespolonych, przy czym zastosowanie niejednorodnej siatki różnicowej prowadzi do pojawienia się współczynników incydencji w macierzy  $\mathbf{C}$  o wartościach spoza zbioru  $\{-1; 0; 1\}$ , a w tym wartości ułamkowych. Oprócz zamiany miejscami wektorów  $\mathbf{0}_v$  i  $\mathbf{u}$ , co wynika z zastąpienia dywergencji gęstości prądu równaniem (46), konieczne staje się zastąpienie oryginalnej, zerowej macierzy  $\mathbf{0}_m$  diagonalną macierzą  $\mathbf{T} = \text{diag}(j\omega\sigma_1; \dots; j\omega\sigma_{N \cdot M})$ ,  $\dim(\mathbf{T}) = p_A \times p_A$ , przy czym liczba niewiadomych  $p_A = N \cdot M - 2(N+M) + 4$ .

### 3.3.3. Opis warunków brzegowych

Źródłem pola magnetycznego jest zadany w obszarze przewodnika prąd elektryczny o jednorodnym rozkładzie. Wektor wymuszeń  $\mathbf{u}$ ,  $\dim(\mathbf{u}) = p_A \times 1$ , zawiera lokalnie przypisaną wartość gęstości prądu  $J_{zew}$  w obszarze przewodnika ( $\sigma_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}}$ ) podczas, gdy pozostałe wartości  $\mathbf{u}$  (przynależące do otoczenia  $\sigma_0, \mu_0$ ) pozostają zerowe

$$u_i = \begin{cases} J_{zew} & \text{gdy } \sigma_i = \sigma_{\text{eff}} \\ 0 & \text{gdy } \sigma_i = \sigma_0 \end{cases}, \quad (50)$$

gdzie indeks  $i$  jest numerem węzła siatki różnicowej,  $i \in \{1, 2, \dots, N \cdot M\}$ .

W obliczanych modelach otoczeniem magnetycznego przewodnika było powietrze, lecz ograniczony model numeryczny rozwiązywany metodą różnic skończonych uniemożliwia wprowadzenie nieskończenie rozległej przestrzeni. Układ wymaga odwzorowania otwartego obszaru wokół struktury, dlatego na granicy modelu zastosowano warunek brzegowy tzw. izolacji magnetycznej (ścianka magnetyczna)

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{A})|_p = 0 \quad \text{gdy} \quad P \in \Gamma_{0,l} \vee \Gamma_{0,p} \vee \Gamma_{0,d} \vee \Gamma_{0,g}. \quad (51)$$

Przy  $\mathbf{n} = [\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y, \mathbf{1}_z]$  i  $\mathbf{A} = [A, 0, 0]$  warunek (51) sprowadza się do postaci

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{1}_z \cdot \mathbf{A})|_p &= 0, \\ (-\mathbf{1}_y \cdot \mathbf{A})|_p &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

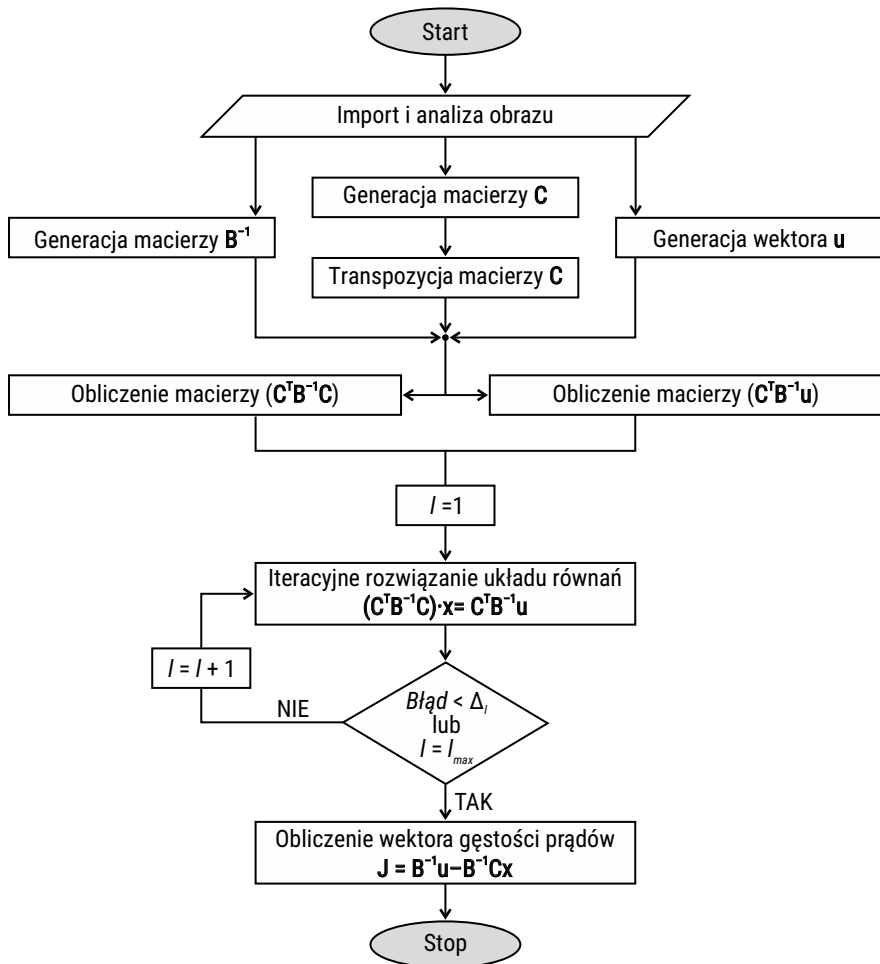
Wzdłuż wskazanych brzegów modelu przyjęto wartości  $A_{n,1} = 0$  Wb/m,  $A_{n,M} = 0$  Wb/m,  $A_{1,m} = 0$  Wb/m,  $A_{N,m} = 0$  Wb/m, przy czym  $n = 1, 2, \dots, N$  oraz  $m = 1, 2, \dots, M$ . Tym samym uproszczono warunki brzegowe do warunków I-ego rodzaju. Brzegi pionowe  $\Gamma_{0,l}, \Gamma_{0,p}$  oraz poziome  $\Gamma_{0,d}, \Gamma_{0,g}$  (rys. 27b) umieszczone są w odległości wynoszącej minimum 5-krotność największego wymiaru struktury homogenicznej. Ten dystans wynika wprost z konieczności ograniczenia modelu w celu redukcji liczby stopni swobody. Przyjmuje się, że w założonej odległości od przewodnika indukcja magnetyczna ma kilkudziesięciokrotnie mniejszą wartość niż w obszarze źródła pola, zapewniając poprawne przybliżenie obliczanych wartości.

### 3.4. Schematy algorytmów obliczeniowych

Opracowane różnicowe algorytmy obliczeniowe (rozdziały 3.1.2, 3.2.2, 3.3.2) oparte są na podobnym schemacie (rys. 28 i rys. 29). Główne różnice dotyczą preprocesora generującego macierze współczynników materiałowych i struktury rozwiązywanego układu równań.

Etap „Import i analiza obrazu” w schemacie różnicowym (rys. 28) jest związany z wprowadzeniem geometrii komórki do skryptu obliczeniowego. Obraz struktury zawiera się w pliku graficznym, na którym jasne pola odpowiadają obszarowi izolatora, a ciemne to przewodnik. Wymiary obrazu komórki wyrażone w pikselach determinują liczbę węzłów obliczeniowych (np. przy rozmiarze  $200 \times 200$  pikseli liczba stopni swobody wynosi  $M \cdot N = 200 \cdot 200 = 40000$ ). Obraz jest importowany do programu, tworzona jest tablica zawierająca indeks koloru w skali szarości (do 0 do 255, gdzie 0 – kolor czarny, a 255 – kolor biały) przypisane do poszczególnych pikseli. Identyfikacja materiału izolacyjnego i przewodzącego przebiegała na podstawie wartości współczynników RGB opisujących obraz, co prowadziło do wygenerowania tablicy przewodności elektrycznych przypisanych do każdego z węzłów sieci.

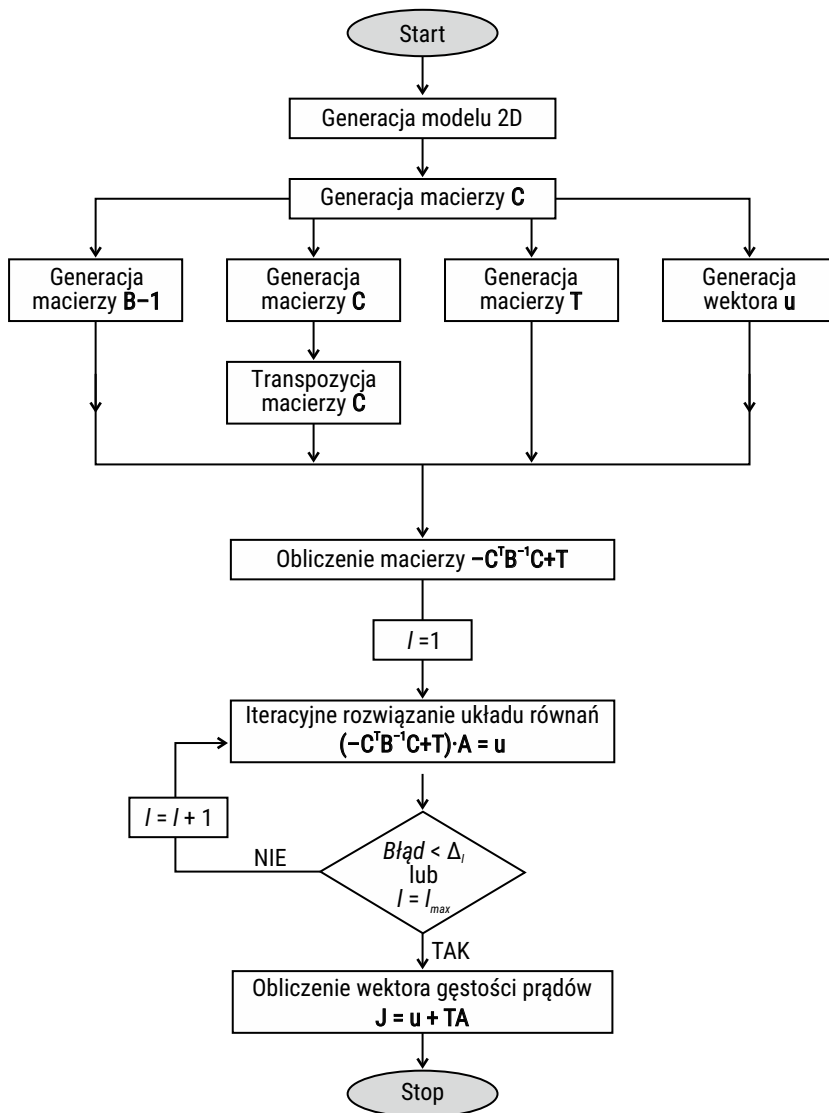




RYS. 28. Schemat algorytmu różnicowego do obliczenia stałego pola elektrycznego w strukturach niejednorodnych (materiałach niejednorodnych)

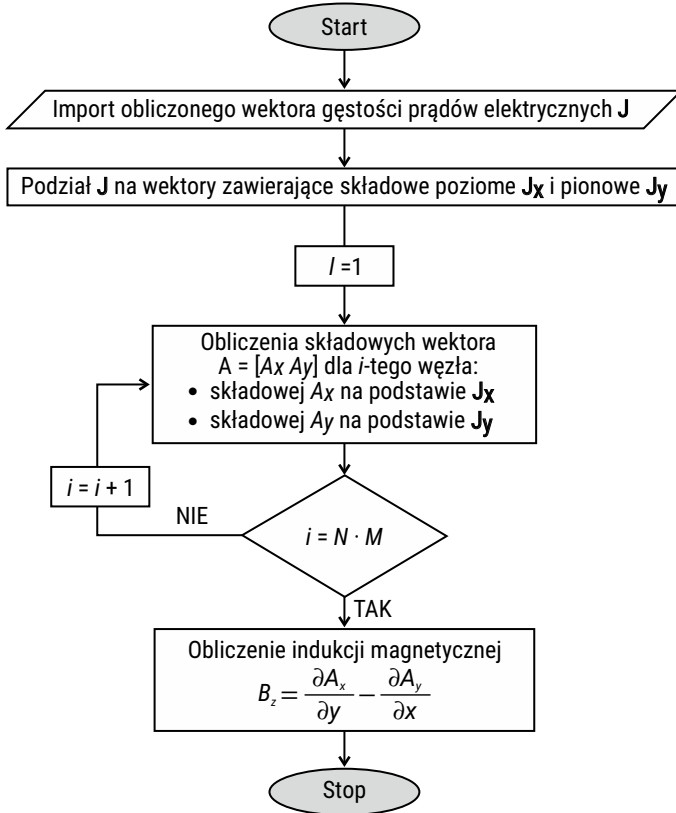
Analogiczny etap „Generacja modelu 2D” w sformułowaniu częstotliwościowym (rys. 29) nie wymaga wprowadzania zewnętrznego obrazu elementu. Generacja tablic przechowujących informację o przestrzennym rozkładzie przewodności elektrycznej oraz przenikalności magnetycznej jest realizowana w programie. Zaimplementowano zestaw funkcji tworzących tablice współczynników materiałowych na podstawie parametrów geometrycznych. W następnym etapie, w przypadku obu schematów tworzone są macierze współczynników. Macierze  $B^{-1}$  i  $T$  powstają na podstawie zadanego kroku siatki  $h$ , pulsacji  $\omega$  i tablic materiałowych, a macierz incydencji  $C$  jest wypełniana na podstawie danych dotyczących łączności między węzłami, za pomocą funkcji generujących te powiązania w sieci różnicowej. W sformułowaniu częstotliwościowym (rozdział 3.3.2) uwzględniano także niejednorodność siatki

w obszarze  $S_p$ . Niewiadome w powstałym układzie równań liniowych znajdowano przy użyciu algorytmów iteracyjnych (m.in. BiCGStab – *podwójny gradient sprzężony stabilizowany*). Kryterium zakończenia obliczeń obejmowało osiągnięcie wartości błędu obliczeń mniejszego niż przyjęte kryterium odcięcia  $\Delta_l$  lub wykonanie maksymalnej liczby iteracji  $l_{max}$ .



RYS. 29. Schemat algorytmu różnicowego do obliczenia pola harmonicznego struktur jednorodnych

Struktury niejednorodne obliczane były także ze względu na zjawiska magnetyczne. Schemat algorytmu (rys. 30) bazuje na rozwiązaniu pola elektrycznego (rozdział 3.1.2), w postaci wektora gęstości prądów  $\mathbf{J}$ . W trakcie transferu wyników dokonywana jest dekompozycja na składowe  $J_x$  i  $J_y$ , zgromadzone w wektorach  $\mathbf{J}_x$  i  $\mathbf{J}_y$ , zawierających informacje o odpowiednich składowych przestrzennych.



RYS. 30. Schemat numerycznego algorytmu całkowego do obliczenia stacjonarnego pola magnetycznego

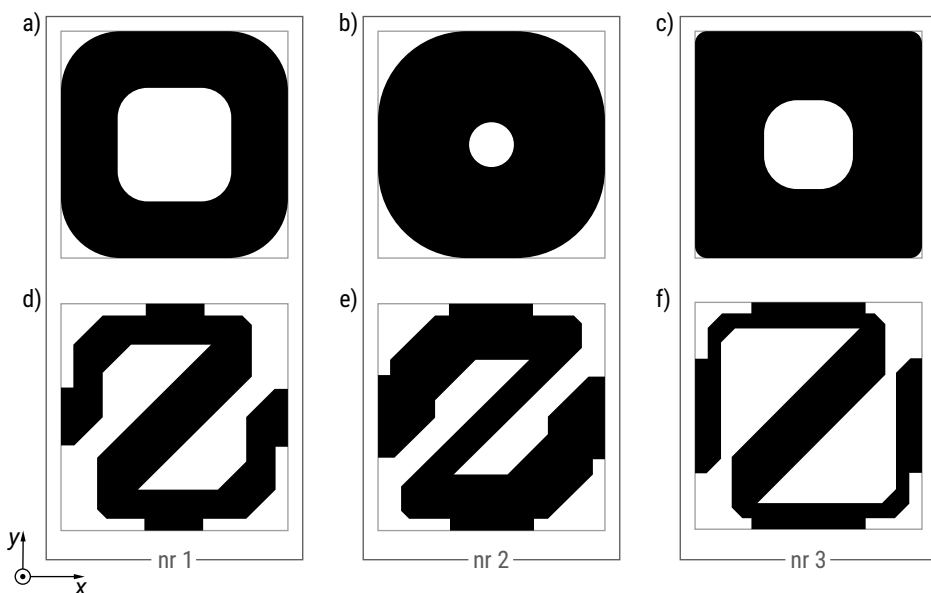
W drugim etapie wykonuje się obliczenia składowych wektorowego potencjału magnetycznego  $\mathbf{A}$  w  $i$ -tym węźle siatki, na podstawie równań (38). Etap jest długotrwały i przebiega sekwencyjnie dla wszystkich węzłów siatki różnicowej, stąd jego programowa realizacja wymaga użycia pętli obliczeniowych, zatrzymywanych dopiero po wykonaniu obliczeń dla  $N \cdot M$ -tego węzła.

Wyliczony rozkład potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  służy do określenia rozkładu indukcji magnetycznej na powierzchni struktury i oszacowania energii zgromadzonej w polu magnetycznym, co w dalszej części analizy posłuży wyznaczeniu zastępczej indukcyjności własnej struktury.

### 3.5. Ewaluacja metody różnicowo-całkowej

#### Wprowadzenie

Prezentowany algorytm różnicowy z całkowym wyznaczeniem rozkładu pola magnetycznego, posłużył do wyznaczenia rozkładu gęstości prądu elektrycznego oraz indukcji magnetycznej w przekroju podłużnym komórek. Aby dokonać weryfikacji dokładności MR-C, porównano wyniki uzyskane dla trzech przykładowych struktur typu  $\Omega_{e,p}$  i typu  $\Omega_{e,z}$  z rezultatami uzyskanymi w modelu 3D rozwiązywanym za pomocą MES. Przyjęto niezmiennie wymiary analizowanych struktur  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z} = 10 \times 10 \times 0,2$  mm, przenikalność magnetyczną  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m w całym układzie, przewodność elektryczną przewodnika  $\sigma_A = 5,6 \cdot 10^7$  S/m oraz powietrza  $\sigma_B = 10^{-3}$  S/m (wartość przyjęta na względu na zachowanie dostatecznego stopnia uwarunkowania macierzy współczynników, gwarantującego zbieżność algorytmu iteracyjnego).



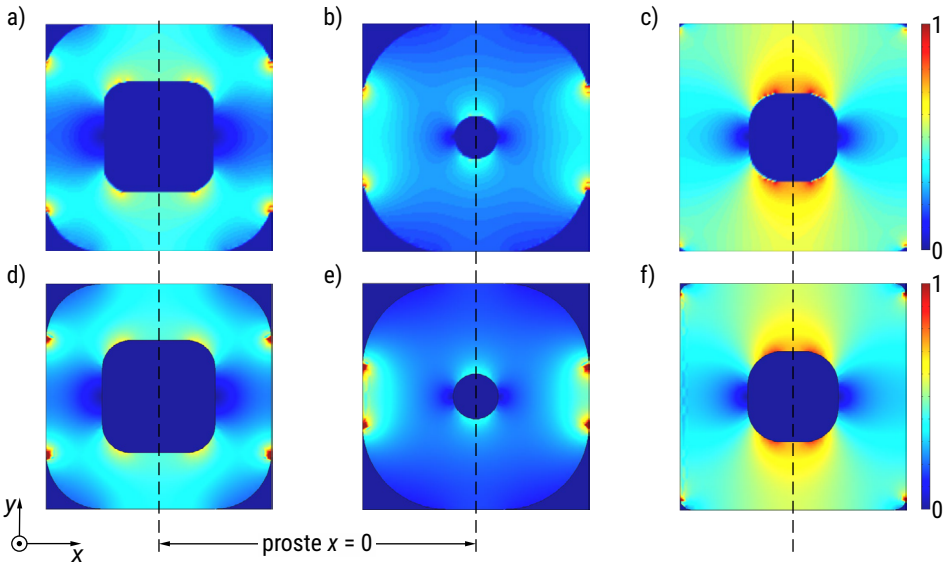
RYS. 31. Widok na przekrój podłużny analizowanych elementów: a) typ  $\Omega_{e,p}$  nr 1; b) typ  $\Omega_{e,p}$  nr 2; c) typ  $\Omega_{e,p}$  nr 3; d) typ  $\Omega_{e,z}$  nr 1; e) typ  $\Omega_{e,z}$  nr 2; f) typ  $\Omega_{e,z}$  nr 3

W modelu 3D rozwiązywanym za pomocą MES uwzględniano skończoną grubość elementu, fragment obszaru otoczenia i pełną reprezentację 3D wektorowego potencjału magnetycznego. Do odwzorowania nieskończenie rozległego obszaru otaczającego obliczaną strukturę zastosowano warunek brzegowy typu PML (ang. *Perfectly*

*Matched Layers*). Liczba stopni swobody w modelu 3D była zróżnicowana ze względu na generację adaptowanej siatki MES i zawierała się w przedziale od 800 do 950 tysięcy. W dwuwymiarowym modelu obliczanym z użyciem opracowanego algorytmu liczba stopni swobody sięgała 22 tysięcy. Ze względu na pełne odwzorowanie geometrii układu, odmienny sposób aproksymacji równań różniczkowych w MES oraz zastosowanie modelu 3D i warunku PML, metoda MES stanowi bazę do ewaluacji analizy błędów związanych z realizacją schematu MR-C.

### 3.5.1. Dyskusja wyników

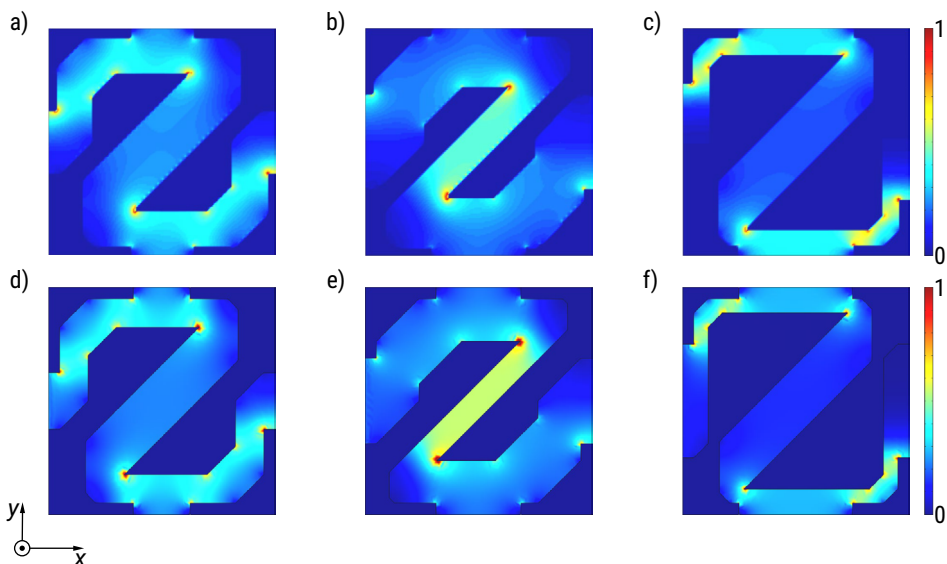
Ocenę MR-C przeprowadzono na podstawie analizy wykresów obrazujących rozkłady względnego modułu gęstości prądu elektrycznego  $J_w = |\mathbf{J}|/\max(|\mathbf{J}|)$ ,  $J_w \in \langle 0; 1 \rangle$  oraz względnej wartości indukcji magnetycznej  $B_w = B_z/\max(B_z)$ ,  $B_w \in \langle -1; 1 \rangle$  składowej  $B_z$  prostopadłej do płaszczyzny  $xy$ . Na tej podstawie obliczono błędy średniokwadratowe dla każdego z przedstawionych rozkładów, określające różnice między schematem MR-C i MES.



RYS. 32. Rozkład  $J_w$  w przekroju podłużnym komórki typu  $\Omega_{e,p}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D)

Obliczone za pomocą metody różnicowej rozkłady gęstości prądu (rys. 32) pokrywają się z dużą zgodnością z trójwymiarowym modelem. Model 2D pozwala na określenie lokalnych wzrostów gęstości prądu, np. przy skrajnych krawędziach

komórki (rys. 32a,b), czy w obszarze centralnym (rys. 33b) oraz określenie obszarów, w których gęstość prądu jest mniejsza. W obszarze dielektryka prąd dąży do wartości 0, co uwzględniają oba modele. Bez względu na stopień złożoności każdy z neuralgicznych punktów geometrii zostaje uwzględniony w modelu 2D. Również rozległe obszary wewnątrz komórki zostały obliczone poprawnie. Przykładem są centralne obszary elementów typu  $\Omega_{e,Z}$ , które w zależności od struktury charakteryzowały się podwyższonym (rys. 33b), obniżonym (rys. 33c) lub zbliżonym (rys. 33a) poziomem wartości gęstości w porównaniu do pozostałych fragmentów.



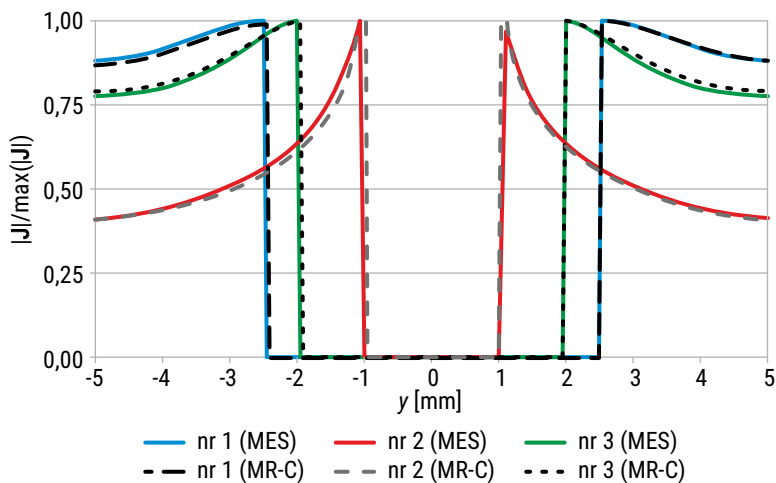
RYS. 33. Rozkład  $J_w$  w przekroju podłużnym komórki typu  $\Omega_{e,Z}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D)

TABELA 1. Porównanie MR-C i MES na podstawie obliczonych rozkładów względnej normy gęstości prądu: błąd średniokwadratowy, odchylenie standardowe oraz maksymalne i minimalne błędy

Typ	$\Omega_{e,p}$			$\Omega_{e,Z}$			
	Nr	1	2	3	1	2	3
$(J_{w,MR-C} - J_{w,MES})_{RMSE}$		0,055	0,043	0,100	0,066	0,063	0,073
$(J_{w,MR-C} - J_{w,MES})_{std}$		0,046	0,039	0,055	0,054	0,055	0,060
$(J_{w,MR-C} - J_{w,MES})_{max}$		0,100	0,083	0,164	0,120	0,117	0,133
$(J_{w,MR-C} - J_{w,MES})_{min}$		0,009	0,004	0,054	0,012	0,008	0,014

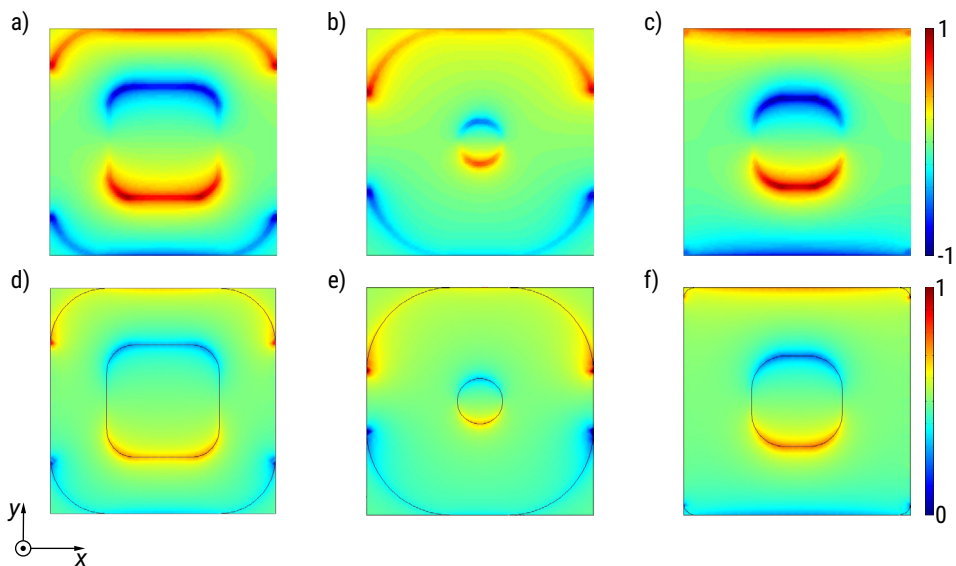
Opracowany schemat MR-C umożliwia śledzenie zmian rozkładu gęstości prądu z błędem średniokwadratowym poniżej 0,1 przy odchyleniu standardowym mniejszym od 0,06 w odniesieniu do modelu 3D MES (tabela 1). Złożoność geometryczna

struktur nie wpływa na rząd błędu i jego odchylenia standardowego, ponieważ jest on porównywalny dla sześciu analizowanych geometrii. Średnia wartość błędu wyniosła 0,067, czyli jest o około rząd wielkości mniejsza od spodziewanych wartości względnej gęstości prądu. Zgodność obu modeli potwierdzają rozkłady  $|J|/\max(|J|)$  analizowane wzdłuż pionowej osi symetrii ( $x = 0$ ), przedstawione dla geometrii typu  $\Omega_{e,p}$  (rys. 34). Zmienność względnej gęstości prądu wzdłuż osi  $Oy$  jest tożsama dla obu metod, a nieznaczne różnice są dostrzegalne dla komórki nr 2 w zakresie  $-2,5 \text{ mm} < y < 2,5 \text{ mm}$ .

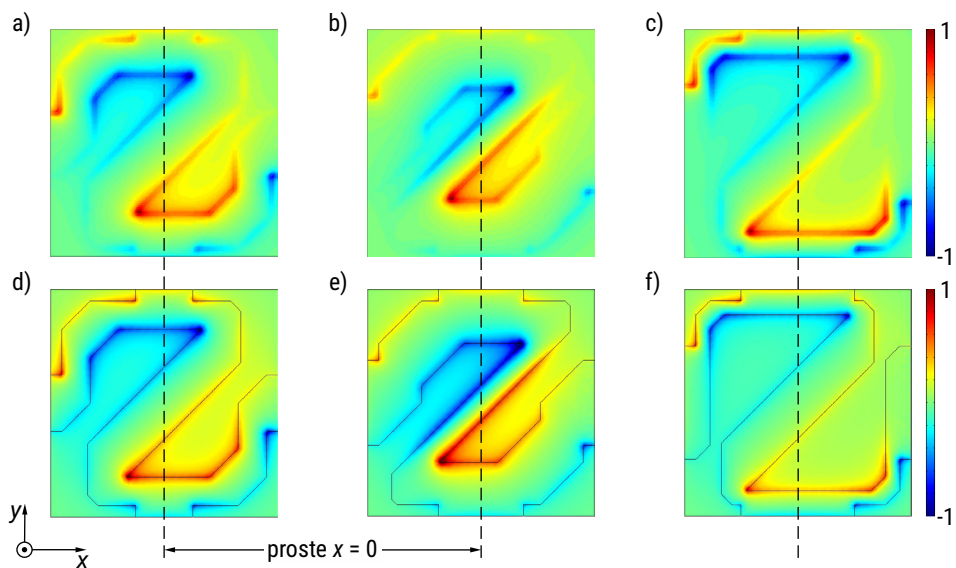


RYS. 34. Rozkład względnej gęstości prądu wzdłuż prostych  $x = 0$  w przekroju komórek typu  $\Omega_{e,p}$

Wyznaczone za pomocą MR-C rozkłady indukcji magnetycznej (rys. 35) są zbieżne pod względem jakościowym. Charakterystyczny wzrost indukcji magnetycznej występuje na krawędziach części przewodzącej komórki. Jest on odwzorowany poprawnie w modelu 2D, podobnie jak pośrednie wartości pola w obszarze przewodnika i dielektryka. Podstawową różnicą między modelem 2D i 3D jest powierzchnia obszarów, na których występują ekstremalne wartości indukcji magnetycznej. Obserwowany wzrost indukcji magnetycznej wynika z pominięcia grubości elementu. Obliczenia przeprowadzone metodą całkową są poprawne bez względu na stopień złożoności konstrukcji komórki. Liczne zakrzywienia i załamanie symetrii geometrii typu  $\Omega_{e,z}$  (rys. 36) powodują zmianę rozkładu pola magnetycznego w obrębie elementu. Indukcja pola magnetycznego przyjmuje największe wartości w centralnej (rys. 36b, e) lub peryferyjnej części komórki (rys. 36c, f).



RYS. 35. Rozkład  $B_w$  w przekroju podłużnym komórki typu  $\Omega_{e,p}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D)



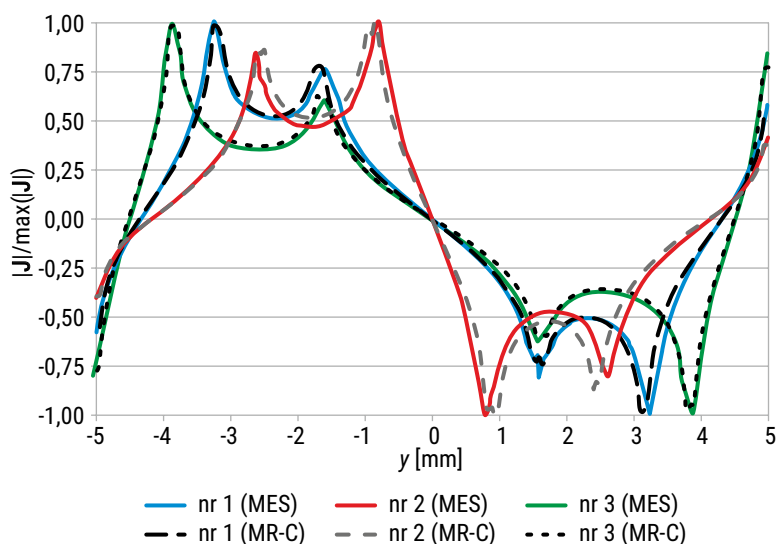
RYS. 36. Rozkład  $B_w$  w przekroju podłużnym komórki typu  $\Omega_{e,z}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D)



TABELA 2. Porównanie MR-C i MES na podstawie obliczonych rozkładów względnej indukcji magnetycznej: błąd średniokwadratowy, odchylenie standardowe oraz maksymalne i minimalne błędy

Typ	$\Omega_{e,p}$			$\Omega_{e,z}$			
	Nr	1	2	3	1	2	3
$(B_{w,MR-C} - B_{w,MES})_{RMSE}$		0,086	0,069	0,040	0,043	0,045	0,047
$(B_{w,MR-C} - B_{w,MES})_{std}$		0,061	0,052	0,032	0,033	0,038	0,035
$(B_{w,MR-C} - B_{w,MES})_{max}$		0,146	0,121	0,072	0,076	0,082	0,082
$(B_{w,MR-C} - B_{w,MES})_{min}$		0,025	0,018	0,008	0,010	0,007	0,012

Błędy oraz odchylenia standardowe obliczone na podstawie rozkładu względnej indukcji magnetycznej w przekroju elementów (tabela 2), są podobnego rzędu wartości jak analogiczne wskaźniki obliczone dla gęstości prądu elektrycznego (tabela 1). Średnia wartość RMSE dla względnej normy  $B_w$  wyniosła 0,055 wskazując na zadowalającą zgodność modelu 2D MR-C z 3D MES. Wyższe wartości błędów i odchylenia standardowe obserwuje się dla komórek typu  $\Omega_{e,p}$ , ale nie przekraczają one wartości 0,09. Biorąc pod uwagę zakres analizowanych wartości względnych (od -1 do 1), różnica w lokalnych wartościach indukcji magnetycznej między 2D MR-C a 3D MES nie powinna przekraczać  $\pm 9\%$ . Zadowalającą zgodność modeli potwierdza analiza rozkładów  $B_w$  wzdłuż osi symetrii komórek  $\Omega_{e,z}$  (rys. 37). Przede wszystkim dla struktur nr 1 i 3 zmienność indukcji magnetycznej w poprzek elementu jest tożsama dla obu metod obliczeniowych.



RYS. 37. Rozkład względnej indukcji magnetycznej wzdłuż prostych  $x = 0$  w przekroju komórek typu  $\Omega_{e,z}$

Metoda różnicowo-całkowa w obszarze 2D ograniczonym rozmiarami komórki, umożliwia uzyskanie podobnego rozkładu stacjonarnego pola elektrycznego oraz magnetycznego, jak te otrzymane w modelu 3D MES. Znaczące uproszczenie problemu i ograniczenie stopni swobody prowadzi do ułatwienia procedury modelowania materiału niejednorodnego, a tym samym przyspieszenia procesu projektowania i analizy właściwości materiału z użyciem schematu MR-C. Wobec tego rezultaty otrzymane tą metodą należy uznać za wystarczające do określenia zastępczych parametrów elektrycznych komórek oraz stworzenia ich modelu obwodowego.

## Podsumowanie

Analizowane zagadnienia dotyczą stałych oraz harmonicznym pól elektrycznych i magnetycznych. Wyznaczenie ich rozkładu w obszarze materiału niejednorodnego lub  $\Omega_c$  uzyskano za pomocą metody różnic skończonych (MRS) i metody całkowej w obszarach 2D. Ze względu na niejednorodność materiałową elementów i dyskretyzację obszaru obliczeniowego, model matematyczny i jego rozwiązanie zrealizowano z użyciem komputerowego pakietu matematycznego, opierając się na autorskich sformułowaniach zagadnienia i własnych skryptach obliczeniowych. Weryfikację schematu przeprowadzono wykorzystując modele 3D rozwiązywane za pomocą MES.

Rozkład gęstości prądu  $J(x,y)$  i potencjału elektrycznego  $V(x,y)$  wyznaczono na postawie różniczkowego sformułowania w przypadku stałego pola elektrycznego. Obliczone w ten sposób wartości gęstości prądu wykorzystano do wyznaczenia rozkładu wektorowego potencjału magnetycznego  $A(x,y)$ . Przyjęty całkowity opis zagadnienia magnetycznego umożliwił stworzenie cienkowarstwowego modelu komórek  $\Omega_c$ . W konsekwencji przedstawiona metoda różnicowo-całkowa (MR-C) upraszcza warunki brzegowe i sprowadza model numeryczny komórki do ograniczonego jej rozmiarami obszaru 2D.

Metodę różnicową zastosowano do obliczeń struktury w jej przekroju podłużnym i wyznaczenia rozkładu harmonicznego pola magnetycznego w przekroju poprzecznym struktury jednorodnej. Prezentowane rozwiązanie wraz z metodą analityczną stanowi integralną część algorytmu homogenizacji właściwości materiału niejednorodnego. Ze względu na poprawę wydajności obliczeniowej i uwzględnienie częstotliwości zmian pola magnetycznego w modelu poprzecznym, w opracowanym schemacie różnicowym zastosowano niejednorodną siatkę dyskretyzującą obszar.

Rezultaty obliczeń przeprowadzonych metodą różnicowo-całkową zostały porównane z wynikami uzyskanymi metodą elementów skończonych w modelu 3D. Zgodność otrzymanych wyników, wyrażona przez przyjęte miary błędów i wartości statystyczne, potwierdza użyteczność MR-C w numerycznej analizie stacjonarnego pola

elektrycznego i magnetycznego komórek periodycznych. Stworzone algorytmy obliczeniowe wykorzystano do oszacowania zastępczych parametrów obwodowych, a następnie do homogenizacji właściwości komórek, opisanych w dalszej części.

# Rozdział 4

## Analiza układów dużej skali

### Wprowadzenie

Dotychczasowa analiza ograniczała się do pojedynczej komórki lub co najwyżej zestawu kilku komórek połączonych galwanicznie. Ograniczenia te wynikały wprost z konieczności redukcji rozmiarów modelu numerycznego, który przy dużej liczbie komórek wymaga znacznych mocy obliczeniowych w celu realizacji obliczeń polowych. Zagadnienie tego typu wymaga m.in. dostępu do ponadstandardowej pamięci operacyjnej w jednostce obliczeniowej. Newralgicznym elementem jest złożona geometria komórek, która narzuca konieczność dokładnego jej odwzorowania w modelu numerycznym. Stąd analiza prowadzona z użyciem MR-C wymaga gęstej siatki różnicowej, a z użyciem MES stosowania lokalnej adaptacji rozmiarów elementów i dopasowania siatki dyskretyzującej obszar w miejscach zmiany geometrii.

W dalszej części pracy zestaw komórek o dowolnym kształcie tworzących materiał niejednorodny uznawany będzie za układ dużej skali, jeżeli odwzorowanie geometrii (przy założonym poziomie błędu przybliżeń) w modelu polowym materiału wymaga zastosowania jednostek obliczeniowych o parametrach przewyższających dostępne projektantowi. Odwzorowanie geometrii materiału na siatce obliczeniowej, generującej zbyt dużą liczbę stopni swobody na dostępnej platformie oznacza, że skala zagadnienia jest duża i należy skorzystać z innych metod analizy. Granica układu dużej skali jest umowna, dlatego dysponując klastrami obliczeniowymi lub stosując zgrubne siatki obliczeniowe, materiały składające się z tysięcy komórek mogą nie być klasyfikowane jako układy dużej skali. Z drugiej strony obliczenia trójwymiarowego, harmonicznego pola magnetycznego w obecności materiału niejednorodnego stają się wymagające (ze względu na pamięć i liczbę operacji obliczeniowych) już przy zaledwie kilku komórkach [112]. W przypadku typowych komputerów model tego typu należy uznać za zagadnienie dużej skali. W celu rozwiązania tego typu problemów zaproponowano dwa sposoby modelowania układów dużej skali, eliminujące konieczność stosowania rozbudowanych jednostek obliczeniowych.

Pierwszym jest aproksymacja obwodowa układu komórek, czyli przedstawienie materiału niejednorodnego jako sieci elektrycznej złożonej z periodycznie rozmieszczonych i połączonych impedancji. Topologia sieci odwzorowuje strukturę

materiału (połączenia elementów), kształt materiału, możliwe miejsca przerw/zwarć w ścieżkach i punkty przyłączenia zasilania. Impedancje składowe charakteryzują komórki  $\Omega_e$  wchodzące w skład układu  $\Omega_M$ , a więc ich parametry elektryczne, magnetyczne i wzajemne oddziaływania (np. współczynnik sprzężenia magnetycznego). To podejście polega na przejściu od modeli komórek opisanych zgodnie z teorią pola EM, przez wyznaczenia skupionych parametrów, do sieci elektrycznych opisujących układy dużej skali.

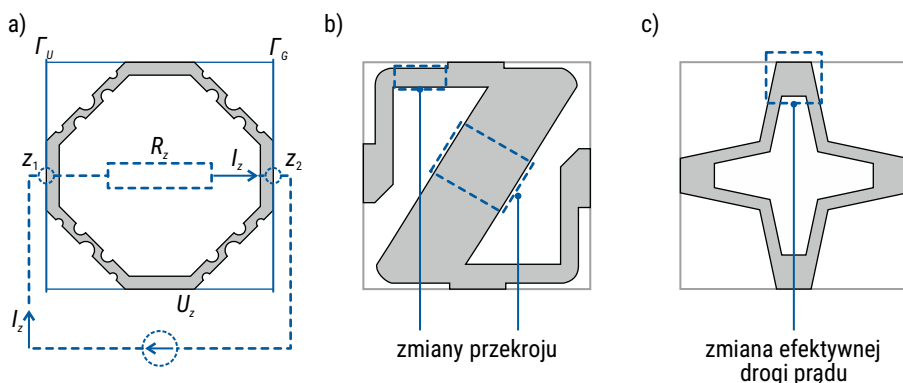
Drugim sposobem jest wykorzystanie homogenicznego modelu numerycznego. Ujednorodnienie materiału laminarnego wiąże się z wyznaczeniem efektywnych właściwości komórek (przewodność  $\sigma_{\text{eff}}$ , przenikalność magnetyczna  $\mu_{\text{eff}}$ ) i stworzeniem modelu o identycznych wymiarach zewnętrznych (szerokość, długość, wysokość) jak niejednorodnego materiału. Ponieważ geometryczna struktura jednorodnego materiału jest mniej złożona można, przy pominięciu odwzorowania geometrii warstwy przewodzącej, posłużyć się dużo rzadszą siatką dyskretyzującą. Lokalna jednorodność obszaru może otworzyć drogę do wykorzystania metod analitycznych, opracowanych dla obiektów o symetrycznych kształtach (np. koła, prostokąty) i stałych w ich obrębie właściwościach materiałowych. W proponowanym ujęciu homogenizację właściwości materiału periodycznego przeprowadza się na poziomie pojedynczej komórki.

W dalszej części rozważono komórki o izotropowych właściwościach, rozłożone na dwuwymiarowej, prostokątnej powierzchni. Elementy  $\Omega_e$  tworzą przykładowy materiał laminarny  $\Omega_M$  dla którego rozpatrzono odwzorowanie za pomocą sieci elektrycznej. Ze względu na specyfikę jednakowych, izotropowych komórek możliwe jest uproszczenie zjawisk elektrycznych w materiale. Gdy komórki charakteryzują się anizotropią (geometryczną i/lub materiałową), konieczne staje się wykorzystanie analizy polowej. Homogeniczny materiał przedstawiany jest wówczas jako jednorodna struktura, której właściwości są opisane tensorem materiałowym. Rozwiązanie problemu polowego można uzyskać nie tylko w modelu 3D, ale również w modelu 2D, jeżeli anizotropia dotyczy wyłącznie właściwości elektrycznych. Opis opracowanych algorytmów uzupełniono o obliczenia numeryczne, wskazujące różnice w aproksymacji fizycznej struktury materiału za pomocą modelu sieciowego i homogenicznego. Porównano uzyskany rozkład pola elektrycznego i zastępczą rezystancję z rezultatami otrzymanymi w modelu 3D MES rzeczywistej struktury. Rozpatrzono charakterystyki amplitudowe przykładowych komórek o różnych parametrach zastępczych.

## 4.1. Parametry zastępcze komórek

### 4.1.1. Rezystancja zastępcza

Praktyczna realizacja materiału niejednorodnego bazuje na zastosowaniu materiałów przewodzących. Wskutek złożonego kształtu ścieżek, występowania lokalnych przewężeń (rys. 38b) i zmiany efektywnej szerokości fragmentu przewodnika (rys. 38c) określenie rezystancji zastępczej przy znanych wymiarach i właściwościach materiałów składowych stanowi wyzwanie z obliczeniowego punktu widzenia. Wzory analityczne stosowane do wyznaczenia oporu typowych przewodników nie zapewniają właściwego przybliżenia rezystancji komórki. W celu określenia właściwości elektrycznych wykorzystano model polowy, gdzie na podstawie otrzymanego rozkładu gęstości prądu elektrycznego możliwa jest estymacja rezystancji elementu.



RYS. 38. Przykładowe komórki poddawane obliczeniom: a) komórka jako elementarny rezystor w obwodzie elektrycznym; b) przykłady lokalizacji fragmentów ścieżek o zmiennym przekroju w obrębie struktury; c) przykład lokalizacji o zniekształconej drodze prądu elektrycznego

Do wyznaczenia zastępczej rezystancji komórki  $R_z$  (rys. 38) konieczna jest znajomość napięcia  $U_z$  na zaciskach rezystora modelującego komórkę  $\Omega_e$  oraz wartość zastępczego natężenia prądu  $I_z$  przepływającego przez nią. Idea określenia zastępczego oporu wynika wprost z potraktowania komórki jako dwójnika włączonego do badawczego obwodu, w którym pomiar rezystancji wykonuje się metodą techniczną.

W modelu polowym obliczenia przeprowadzane są przy znanym wymuszeniu napięciowym  $U_z$  przyłożonym do skrajnych krawędzi  $\Gamma_U$  oraz  $\Gamma_G$  struktury (rys. 26b, rys. 38a). Krawędzie  $\Gamma_U$  i  $\Gamma_G$  przy założeniu, że potencjał elektryczny nie ulega na nich lokalnym zmianom, stanowią parę zacisków  $z_1$  i  $z_2$  (rys. 38a). Konieczne jest określenie zastępczego natężenia prądu  $I_z$  przepływającego przez zastępczy rezystor opisujący

komórkę. Rozkład wektora gęstości prądu  $\mathbf{J}(n, m)$  w obrębie całej komórki i otoczeniu brzegów  $\Gamma_U$  i  $\Gamma_G$  (elektrod  $z_1$  i  $z_2$ ) jest obliczany z użyciem modelu polowego. Natężenie zastępczego prądu wyznacza się jako

$$I_z = d_{e,z} \int_{\Gamma_U} |\mathbf{J}| dy = d_{e,z} \int_{\Gamma_G} |\mathbf{J}| dy. \quad (53)$$

Znajomość napięcia i prądu rezystora umożliwiają obliczenie rezystancji

$$R_z = \frac{U_z}{I_z} = U_z \left( d_{e,z} \int_{\Gamma_U} |\mathbf{J}| dy \right)^{-1} = U_z \left( d_{e,z} \int_{\Gamma_G} |\mathbf{J}| dy \right)^{-1}. \quad (54)$$

Przyjmując konkretną wartość napięcia próbnego w obliczeniach (np.  $U_z = 1$  V), zaś  $I_z$  jako średnią arytmetyczną natężenia prądu na zaciskach rezystora, opór zastępczy dany będzie wzorem

$$R_z = 2U_z d_{e,z}^{-1} \left( \int_{\Gamma_U} |\mathbf{J}| dy + \int_{\Gamma_G} |\mathbf{J}| dy \right)^{-1}. \quad (55)$$

Przy uwzględnieniu dyskretyzującej obszar jednorodnej siatki różnicowej o kroku  $h$ , po przybliżeniu całki kwadraturą prostokątów, wzór (55) przyjmie postać

$$R_z = 2U_z d_{e,z}^{-1} h^{-1} \left( \sum_{n=1}^N \sqrt{J_x^2(n, 1) + J_y^2(n, 1)} + \sum_{n=1}^N \sqrt{J_x^2(n, M) + J_y^2(n, M)} \right)^{-1}. \quad (56)$$

Rezystancja jest odwrotnie proporcjonalna do grubości  $d_{e,z}$  warstwy przewodzącej, ale przede wszystkim zależy od obliczonego rozkładu gęstości prądu  $\mathbf{J}$ . Na lokalne wartości gęstości prądu rzutuje szereg wewnętrznych parametrów geometrycznych elementu.

#### 4.1.2. Indukcyjność zastępcza

Zgodnie z prawem Ampera, z przepływającym przez strukturę komórki prądem elektrycznym związane jest wirujące w przestrzeni pole magnetyczne. Wartość lokalnego natężenia pola zależy od gęstości prądu – wzrasta, gdy gęstość prądu jest większa, a maleje w sytuacji odwrotnej. Szereg lokalnych zmian pola przekroju poprzecznego przewodnika (w postaci przewężeń i poszerzeń ścieżek przewodzących), powoduje powstanie niejednorodnego pola magnetycznego wokół elementu. Określenie sumarycznego strumienia magnetycznego związanego z przepływającym prądem jest w tym przypadku wymagającym zadaniem. Podobnie jak w przypadku rezystancji, analityczne wzory potrzebne do oszacowania indukcyjności

są złożone lub niemożliwe do wyprowadzenia. Opracowane schematy obliczeniowe pozwalają na wyznaczenie rozwiązania numerycznego, wystarczającego do estymacji indukcyjności.

Wykorzystywany model numeryczny znajduje rozkład stałego w czasie pola elektrycznego, dlatego otrzymane wyniki nie mogą być wykorzystane do obliczenia indukcyjności metodą techniczną. Problem ten rozwiązano wykorzystując definicję całkowitej energii  $W_m$  zgromadzonej w polu magnetycznym

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dV, \quad (57)$$

która analogicznie do (34) w układzie cienkowarstwowym, przy zastąpieniu wektorów  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{H}$  stosując II prawo Maxwella, prowadzi do wyrażenia

$$W_m = \frac{1}{2} d_{e,z} \iint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dx dy. \quad (58)$$

W sformułowaniu obwodowym energia pola magnetycznego dana jest wzorem

$$W_m = \frac{1}{2} L_z I_z^2. \quad (59)$$

Jeżeli model obwodowy ma jak najwierniej odwzorować właściwości magnetyczne komórki, to wartości energii związanej z tą komórką (w modelu polowym) musi się zgadzać z wynikami otrzymanymi w modelu polowym. Przyrównując stronami (58) i (59) oraz dokonując przekształcenia, indukcyjność własna  $L_z$  określona jest jako

$$L_z = d_{e,z} I_z^{-2} \iint_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) dx dy. \quad (60)$$

Całkowanie odbywa się po pomijalnie cienkiej powierzchni  $S$ . Iloczyn skalarny wiąże ze sobą wartości wektorowego potencjału magnetycznego  $\mathbf{A}$  i gęstości prądu elektrycznego  $\mathbf{J}$ . Założyć można, że rozkłady obu wielkości fizycznych są znane, tzn. obliczone przy użyciu MR-C. W obszarach nieprzewodzących, gdy  $\sigma \approx 0$  S/m, czyli m.in. we fragmentach izolatora i otoczenia  $\Omega_e$ , wartość całki (60) wynosi 0. To oznacza, że powierzchnia całkowania  $S$  może zostać ograniczona do powierzchni komórki, w których jest przewodzony prąd elektryczny.

Oprócz znajomości rozkładu potencjału wektorowego  $\mathbf{A}$  oraz gęstości prądu  $\mathbf{J}$  konieczne jest obliczenie prądu  $I_z$ . Wartość natężenia zastępczego prądu jest obliczana za pomocą zależności (53), na podstawie lokalnych wartości modułu gęstości prądu. Stąd indukcyjność własną w modelu numerycznym, w którym ponownie całkę przybliżono kwadraturą prostokątów, obliczano ze wzoru



$$L_z = d_{e,z} I_z^{-2} h^2 \sum_{i=1}^{N \cdot M} (A_i J_i). \quad (61)$$

Prezentowany model 2D w przekroju podłużnym komórki jest wystarczający do oszacowania całkowitej energii zgromadzonej w polu magnetycznym i związanej z nią indukcyjności własnej. To samo dotyczy indukcyjności wzajemnej lub współczynnika sprzężenia magnetycznego między sąsiednimi komórkami.

### 4.1.3. Współczynnik sprzężenia magnetycznego

Oprócz rezystancji i indukcyjności własnej pojedyncza komórka poddana jest działaniu pól magnetycznych indukowanych w sąsiednich komórkach. Sprzężenia indukcyjne mogą odgrywać zauważalną rolę w kształtowaniu właściwości magnetycznych materiału niejednorodnego, dlatego powinny być uwzględnione w modelu obwodowym. Elementy wchodzące w skład planarnej sieci periodycznej są połączone galwanicznie przez styki na ich krawędziach, a ich rozmiary są rzędu milimetrów. Ze względu na gęste upakowanie komórek i odległości między nimi, pole magnetyczne wytwarzane przez element  $\Omega_e$  przenika otaczające elementy. W takiej sytuacji konieczne jest uwzględnienie wzajemnego wpływu komórek na właściwości materiału. Ponieważ przepływ prądu elektrycznego przez ich strukturę jest zorientowany w tym samym kierunku (przede wszystkim dotyczy to składowej gęstości prądu związanej z zewnętrznym/źródłowym polem elektrycznym), to występujące wówczas sprzężenie indukcyjne ma charakter zgodny.

W dalszych rozważaniach przyjęto, że oddziaływania polowe między komórkami są ograniczone do sąsiadujących w sieci elementów. Biorąc pod uwagę, iż natężenie pola magnetycznego jest odwrotnie proporcjonalne do odległości od elementu źródłowego, analiza pól wzajemnych coraz bardziej oddalonych od siebie komórek, będzie wprowadzać do sumarycznej indukcyjności elementu coraz mniej znaczące czynniki. Toteż zachowanie balansu pomiędzy uproszczeniem analizy a uwzględnieniem szeregu zjawisk magnetycznych, predysponuje model z sąsiednimi sprzężeniami jako przybliżony, stosowany do odwzorowania zjawisk magnetycznych w modelu obwodowym układów dużej skali.

Skupione parametry komórek są wyznaczone z punktu widzenia zacisków  $z_1 z_2$ , między które włączone są poszukiwane rezystancje  $R_e$  i indukcyjności własne  $L_e$  pojedynczego elementu (rys. 39b). W kolejnym etapie jest rozważany układ dwóch identycznych elementów o uprzednio wyznaczonych indukcyjnościach  $L_e$ , podłączonych do idealnego źródła napięcia. Przez strukturę szeregowo połączonych elementów przepływa w tym samym kierunku prąd o natężeniu  $I_z$ , zatem sprzężenie magnetyczne  $k$  jest dodatnie. Likwidacja sprzężenia polega na wprowadzeniu do modelu indukcyjności wzajemnej  $M_e$  (rys. 39c), która zwiększa indukcyjność każdego z elementów i z definicji dana jest wzorem

$$M_e = k\sqrt{L_e L_e} = kL_e. \quad (62)$$

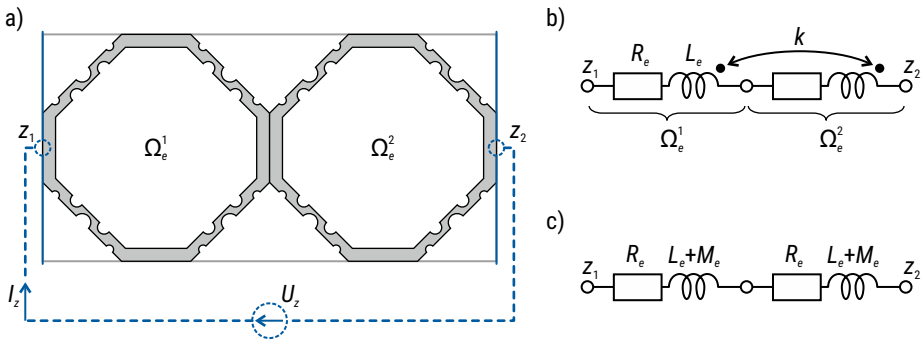
Sumaryczna, zastępcza indukcyjność  $L_z$  widziana z pary zacisków  $z_1 z_2$  wynosi

$$L_z = 2L_e + 2M_e = 2L_e + 2kL_e, \quad (63)$$

a stąd wartość współczynnika sprzężenia magnetycznego to

$$k = \frac{L_z}{2L_e} - 1, \quad (64)$$

przy czym  $L_z$  obliczane jest ze wzoru (61) na podstawie modelu z rys. 39a.



RYS. 39. Układ obliczeniowy do wyznaczenia współczynnika sprzężenia magnetycznego: a) połączenie elementów w modelu polowym; b) zastępczy schemat elektryczny ze sprzężeniem magnetycznym między sąsiednimi komórkami; c) zastępczy schemat elektryczny po likwidacji sprzężenia

Zagadnienie wyznaczenia  $k$  rozwiązywane jest identycznie jak w przypadku indukcyjności własnej i wymaga jej znajomości. Stąd każdorazowe wyznaczenie  $k$  wiąże się w pierwszej kolejności z przeprowadzeniem analizy opisanej kolejno w rozdziałach 4.1.1 oraz 4.1.2 dla jednej komórki, a następnie obliczaniu modelu polowego połączenia dwóch komórek (rys. 39a), poprzez powtórzenie procedury z rozdziałów 4.1.1 i 4.1.2 (dla szeregowo połączonych elementów). Na podstawie wyznaczonego prądu  $I_z$  oraz energii  $W_m$  oblicza się zastępczą indukcyjność  $L_z$ . Znane wartości  $L_e$  i  $L_z$  podstawią się do równania (64) w celu obliczenia współczynnika sprzężenia magnetycznego  $k$ .

Cała procedura wskazuje na dwa istotne aspekty analizy właściwości materiału niejednorodnego:

- 1) określenie współczynnika sprzężenia  $k$  wymaga obliczenia dwóch oddzielnych modeli numerycznych;
- 2) wyznaczenie wszystkich trzech podstawowych parametrów ( $R_e$ ,  $L_e$ ,  $k$ ) modelu obwodowego można przeprowadzić za pomocą opracowanego schematu MR-C, poprzez analizę stałych w czasie pól elektrycznego i magnetycznego.

Wyznaczenie trzech podstawowych, skupionych parametrów obwodowych wymaga obliczenia modelu pojedynczej, a później połączenia dwóch komórek  $\Omega_e$ . Analizowane dwuwymiarowe modele polowe są ograniczone i rozwiązywane za każdym razem tą samą metodą różnicowocalkową. Jednak wykorzystany opis zjawisk za pomocą pól stałych w czasie uniemożliwia scharakteryzowanie zmienności wartości parametrów skupionych w funkcji częstotliwości.

## 4.2. Ewaluacja MR-C w identyfikacji parametrów zastępczych

### Wprowadzenie

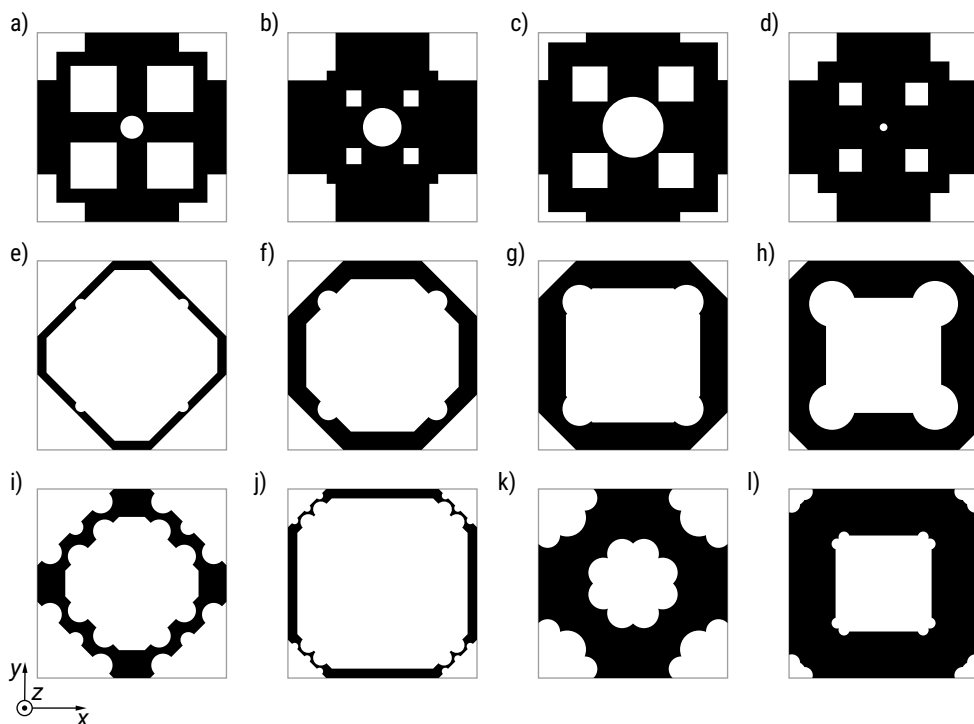
Zastępcze właściwości materiału niejednorodnego wynikające ze zjawisk fizycznych zachodzących w komórkach  $\Omega_e$ , są określane na podstawie obliczonych rozkładów pola elektrycznego i magnetycznego. Schemat MR-C przeznaczony jest m.in. do estymacji efektywnych właściwości rozważanych struktur, dlatego weryfikacja MR-C konieczna jest także pod względem poprawności oszacowania za jej pomocą wybranych, zastępczych parametrów elektrycznych. Stosując opisaną w rozdziale 4.1 procedurę i wzory, dla 12 przykładowych komórek oszacowano ich rezystancję  $R_e$ , indukcyjność własną  $L_e$  i współczynnik sprzężenia magnetycznego  $k$ . Wybrane komórki reprezentują różne geometrie. Zdecydowano się na złożone i niejednorodne geometrycznie struktury typu  $\Omega_{e,\rho}$ ,  $\Omega_{e,mod1}$  i  $\Omega_{e,mod5}$  (rys. 40), których parametry geometryczne (tabela 3) dobierano tak, by zapewnić zróżnicowanie kształtu w obrębie danego typu. Rozpatrzono elementy o znacznym zniekształceniu, w celu rozpatrzenia wariantów o dużych różnicach w geometrii i właściwościach elektrycznych. Wymiary  $\Omega_e$  wyniosły  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z} = 5 \times 5 \times 0,1$  mm, przewodność przewodnika  $\sigma_A = 5,6 \cdot 10^7$  S/m, izolatora  $\sigma_B = 10^{-3}$  S/m, a przenikalność magnetyczna  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m.

Tak jak w przypadku weryfikacji zjawisk na poziomie rozkładów polowych, stworzono dwa modele numeryczne każdego z elementów: dwuwymiarowy model struktury przedstawionej na rys. 40 do obliczeń z użyciem schematów MR-C oraz pełny model 3D rozwiązywany za pomocą MES, w którym uwzględnia się sprzężenie zjawisk elektrycznych i magnetycznych. Liczba stopni swobody wynosiła 40 tys. w przypadku modelu 2D MR-C oraz blisko 1 mln w przypadku modelu 3D MES

(w zależności od elementu). W modelu MES do odwzorowania otwartej przestrzeni zastosowano warunek brzegowy typu PML. Estymacja parametrów przy użyciu modeli 2D i 3D przebiegała według procedury opisanej w rozdziale 4.2, dlatego obliczenia wykonano dwukrotnie: dla pojedynczego i dla dwóch elementów  $\Omega_e$  połączonych szeregowo. Wyniki zestawiono na rys. 41 ÷ rys. 43, zaś różnice w wartościach parametrów oszacowanych na podstawie modelu 2D MR-C oraz 3D MES obliczono z zależności

$$\Delta Q = \left| \frac{Q_{MR-C} - Q_{MES}}{Q_{MES}} \right| 100\%, \quad (65)$$

przy czym  $Q$  to wartość bezwzględna wielkości skupionej,  $Q \in \{R_e, L_e, k\}$ .



RYS. 40. Widok na testowane komórki: a) ÷ d) – typ  $\Omega_{e,f}$ ; e) ÷ h) – typ  $\Omega_{e,mod1}$ ; i) ÷ l) – typ  $\Omega_{e,mod5}$

TABELA 3. Parametry geometryczne w [mm] 12 komórek poddawanych obliczeniom

Typ	$\Omega_{e,f}$				$\Omega_{e,mod1}$				$\Omega_{e,mod5}$			
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$d_1$	4,00	3,00	4,50	3,50	1,00	2,00	3,00	4,00	1,00	3,00	2,00	4,00
$d_2$	4,00	3,00	4,50	3,50	1,00	2,00	3,00	4,00	1,00	3,00	2,00	4,00

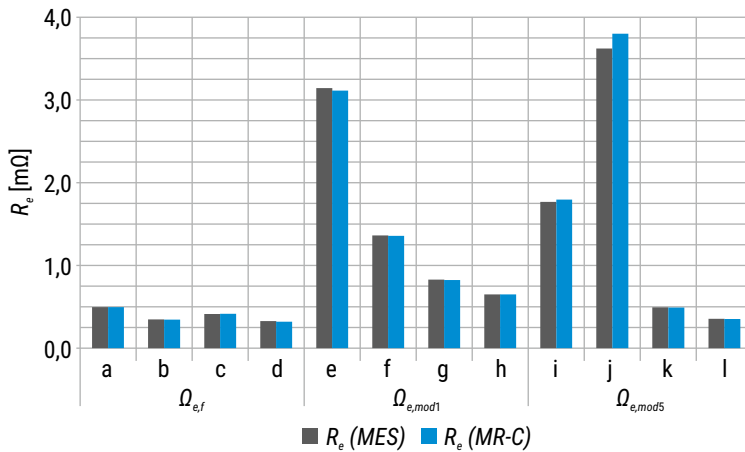
Typ	$\Omega_{e,f}$				$\Omega_{e,mod1}$				$\Omega_{e,mod5}$			
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$d_3$	1,20	0,40	0,90	0,60	4,50	4,00	3,50	3,00	3,50	4,50	1,50	2,50
$d_4$	1,20	0,40	0,90	0,60	-	-	-	-	-	-	-	-
$d_5$	0,30	0,50	0,80	0,10	-	-	-	-	-	-	-	-
$r_1$	-	-	-	-	0,15	0,30	0,45	0,60	0,30	0,20	0,40	0,15
$r_2$	-	-	-	-	-	-	-	-	0,30	0,10	0,30	0,20
$r_3$	-	-	-	-	-	-	-	-	0,20	0,10	0,50	0,15

#### 4.2.1. Dyskusja wyników

Zastępcze rezystancje komórek obliczone na podstawie obu modeli są zbliżone (tabela 4), ponieważ w każdym przypadku różnica względna była mniejsza od 5%, dając średnią wartość z 12 prób wynoszącą 1,04%. Zróżnicowanie w wartościach  $R_e$  (rys. 41) wynika z rodzaju elementu, np. geometrie typu  $\Omega_{e,f}$  charakteryzują się kilkukrotnie mniejszym oporem elektrycznym niż typ  $\Omega_{e,mod\#}$ . Poprawne wyznaczenie rezystancji związane jest bezpośrednio z obliczeniem zastępczego natężenia prądu elektrycznego płynącego przez strukturę. Jest to istotne ze względu na wykorzystanie wartości prądu w obliczeniach indukcyjności własnej. Poprawne określenie oporu czynnego ma także przełożenie na późniejsze oszacowanie mocy czynnej rozpraszanej w elemencie. Ponieważ jednym z zastosowań materiałów niejednorodnych są cienkowarstwowe źródła ciepła, to na etapie ich projektowania pożądanym jest prosty, dokładny model umożliwiający określenie wydzielanej mocy cieplnej.

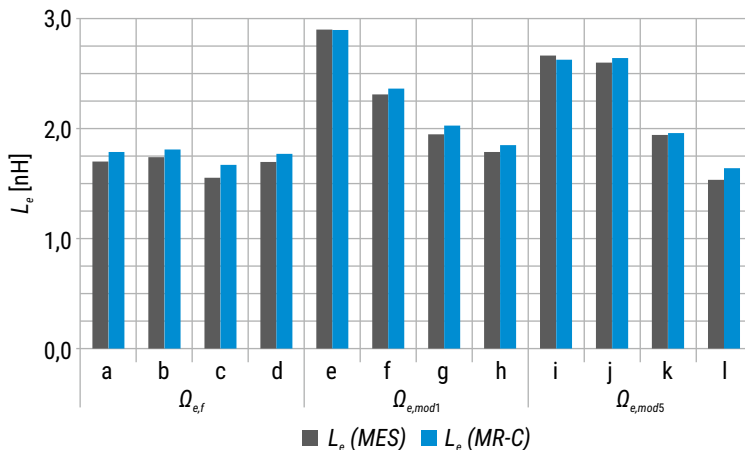
TABELA 4. Zastępcze parametry skupione i błędy względne 12 komórek poddawanych obliczeniom

Typ	$\Omega_{e,f}$				$\Omega_{e,mod1}$				$\Omega_{e,mod5}$			
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$R_{e,MR-C}$ [m $\Omega$ ]	0.50	0.35	0.42	0.32	3.11	1.36	0.83	0.65	1.80	3.80	0.49	0.35
$R_{e,MES}$ [m $\Omega$ ]	0.50	0.35	0.41	0.33	3.14	1.36	0.83	0.65	1.77	3.62	0.49	0.35
$\Delta R_e$	0.2%	0.4%	0.9%	2.2%	1.0%	0.3%	0.4%	0.0%	1.6%	4.9%	0.2%	0.3%
$L_{e,MR-C}$ [nH]	1.79	1.81	1.67	1.77	2.90	2.36	2.03	1.85	2.63	2.64	1.96	1.64
$L_{e,MES}$ [nH]	1.70	1.74	1.55	1.70	2.90	2.31	1.95	1.79	2.66	2.60	1.94	1.54
$\Delta L_e$	5.2%	4.0%	7.5%	4.3%	0.1%	2.3%	4.1%	3.5%	1.4%	1.6%	0.9%	6.8%
$k_{MR-C}$ [-]	0.32	0.32	0.33	0.33	0.15	0.20	0.24	0.27	0.19	0.15	0.29	0.32
$k_{MES}$ [-]	0.33	0.36	0.37	0.42	0.20	0.24	0.26	0.29	0.25	0.21	0.35	0.39
$\Delta k$	4.0%	9.8%	12.0%	22.4%	23.8%	15.6%	10.9%	5.8%	22.0%	30.9%	17.5%	18.4%



RYS. 41. Zastępcze rezystancje  $R_e$  elementów obliczone za pomocą MES i MR-C

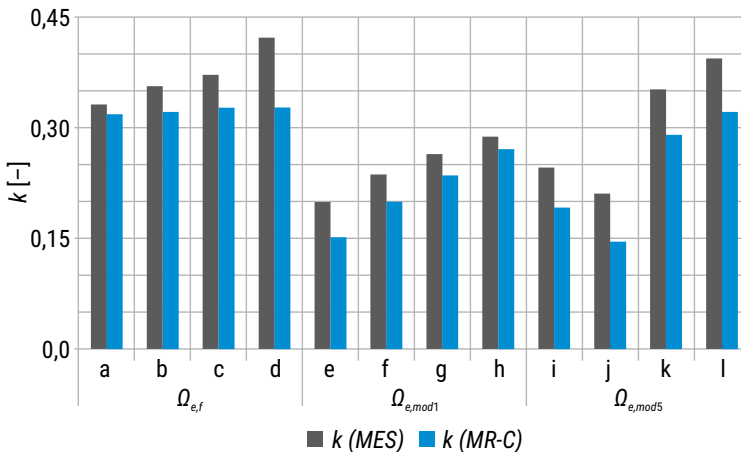
Podobnie jak rezystancja, również zastępcza indukcyjność własna elementu (tabela 4, rys. 42) wyznaczona za pomocą MR-C osiąga wartości zbliżone do określonych na podstawie modelu 3D. W 11 przypadkach jej wartość obliczona metodą MR-C była przeszacowana w porównaniu z modelem 3D MES. Indukcyjność wyznaczona dla elementu pomijalnie cienkiego jest wyższa niż dla elementu o skończonej grubości. Różnica względna na poziomie 0,1% ÷ 7,5% wskazuje, że są to akceptowalne odstępstwa. Odchylenie standardowe dla rozważanych przypadków wyniosło 2,31%, czyli największy błąd MR-C przy estymacji indukcyjności jest większy o zaledwie 0,79% niż ten otrzymany dla rezystancji zastępczej.



RYS. 42. Zastępcze indukcyjności własne  $L_e$  elementów obliczone za pomocą MES i MR-C

Największe rozbieżności między modelami ujawniają się przy estymacji współczynnika sprzężenia (tabela 4, rys. 43). Średnia wartość względnej różnicy sięga 16,1%, przy odchyleniu standardowym 7,9%. Należy przy tym zwrócić uwagę na następujące własności:

- 1) Współczynnik sprzężenia z modelu 2D jest mniejszy od współczynnika określonego z modelu 3D. Ma to związek z odwzorowaniem geometrii elementu, bowiem uwzględnienie grubości komórki zapewnia wyższą wartość współczynnika sprzężenia indukcyjnego.
- 2) Mimo rozbieżności ilościowej zachowana jest zgodność jakościowa. Model 2D pozwala na poprawne szacowanie zmienności  $k$  w zależności od obliczanej geometrii.



RYS. 43. Współczynnik sprzężenia magnetycznego  $k$  obliczony za pomocą MES i MR-C

Na tej podstawie można stwierdzić, że MR-C stanowi efektywne narzędzie do analizy sprzężeń indukcyjnych w obrębie sąsiadujących w sieci periodycznej komórek. Choć MR-C w przeciwieństwie do  $R_e$  i  $L_e$  nie osiągnęła tak dużej zbieżności wyników, to w przypadku silnie złożonych geometrii oraz wykorzystania modelu 2D do uchwycenia trójwymiarowego sprzężenia pól magnetycznych między komórkami, metoda ta wciąż zapewnia zadowalające rezultaty.

## 4.3. Model obwodowy i analityczny komórki

### 4.3.1. Model obwodowy komórki

Przedstawienie materiału niejednorodnego za pomocą obwodowego modelu sieciowego wymaga ustalenia sposobu odwzorowania pojedynczego składnika budującego układ. Są nimi galwanicznie połączone stykami (zaciski  $z_1, z_2, z_3, z_4$ ) komórki (rys. 44a), periodycznie rozłożone w sieci przewodzącej. Większość rozpatrywanych elementów, ze względu na geometrię i strukturę materiałową, charakteryzuje się symetrią osiową (pionową i poziomą). W dalszej analizie skupiono się na schemacie zastępczym uwzględniającym symetryczną budowę struktury, w której wyróżniono identyczne „ćwiartki” (gałęzie) przewodzące.

Postępowanie opisane w rozdziale 4.1 prowadzi do najprostszego schematu zastępczego komórki – dwuzaciskowego obwodu elektrycznego o impedancji zastępczej  $\underline{Z}_c$  (rys. 44b). Elementy elektryczne o parametrach zastępczych  $R_c$  i  $L_c$  są włączone między zaciski  $z_1, z_2$  lub  $z_3, z_4$ . Schemat ten ma ograniczone zastosowanie w analizie układów periodycznych, gdyż w sieci, w której występują połączenia szeregowo-równoległe, nie umożliwia on odwzorowania kontaktów między wszystkimi komórkami. Schemat czterozaciskowy (rys. 44c) uwzględnia wszystkie połączenia galwaniczne. Jest on naturalnym odzwierciedleniem topologii elementu, biorącym pod uwagę jego geometrię rozpiętą między czterema powierzchniami kontaktowymi. Model ten zachowuje balans między prostym schematem dwuzaciskowym a szczegółowymi modelami, w których każdy elementarny fragment komórki byłby zastąpiony cząstkową rezystancją  $\Delta R_c$  i indukcyjnością  $\Delta L_c$ , bądź zaawansowanymi modelami polowymi. W modelu czterozaciskowym wymagane jest określenie impedancja  $\underline{Z}_c$  każdej „ćwiartki”, możliwe m.in. na podstawie analizy połowej 1/4 komórki, np. za pomocą MR-C. Takie podejście pomija niestety wewnętrzne sprzężenia magnetyczne, występujące między poszczególnymi ćwiartkami. Dlatego analiza wyodrębnionej ćwiartki nie jest wskazana, a ponieważ jej impedancję można oszacować na podstawie schematu dwuzaciskowego, wskazane jest obliczenie rozkładu pola elektrycznego i magnetycznego w obrębie pełnej struktury komórki.

Z symetrii geometrycznej komórki wynika, że przy jej zasilaniu ze źródła napięciowego włączonego w parę zacisków  $z_1, z_2$ , na zaciskach  $z_3$  i  $z_4$  pojawi się ten sam potencjał, gdyż między zaciski  $z_1, z_3$ ,  $z_1, z_4$ ,  $z_3, z_2$ ,  $z_4, z_2$  włączone są identyczne impedancje. Na potrzeby analizy właściwości komórki zaciski  $z_3$  i  $z_4$  pomijane są w schemacie z rys. 44c. Między zaciski  $z_1$  i  $z_2$  są włączone 4 impedancje  $\underline{Z}_c$  – dwie połączone równoległe gałęzie z szeregowo łączonymi elementami  $\underline{Z}_c$ . Zastępcza rezystancja widziana z zacisków  $z_1, z_2$  dana jest wzorem

$$\frac{1}{\underline{Z}_{z_1z_2}} = \frac{1}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_c} + \frac{1}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_c} = \frac{2}{2\underline{Z}_c} = \frac{1}{\underline{Z}_c}, \quad (66)$$



który prowadzi do równości

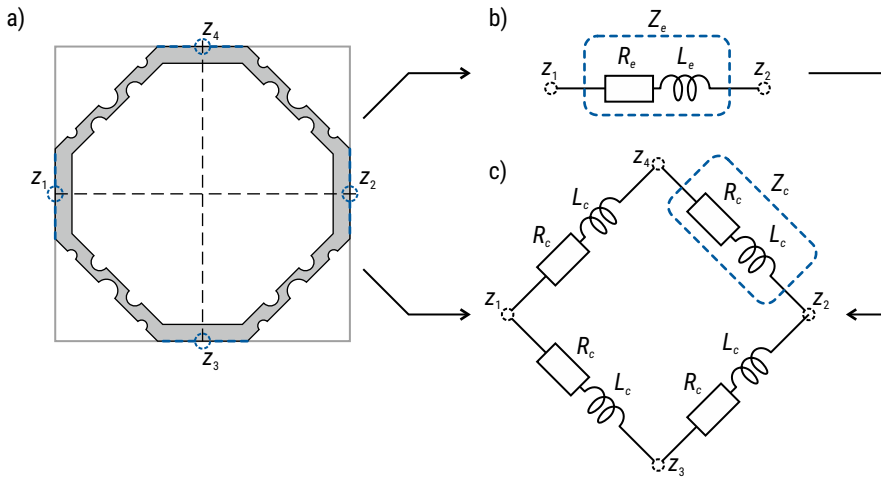
$$\underline{Z}_{z_1 z_2} = \underline{Z}_c. \quad (67)$$

Analiza komórki z zacisków  $z_1, z_2$  umożliwia wyznaczenie impedancji  $\underline{Z}_e$  elementu, czyli

$$\underline{Z}_{z_1 z_2} = \underline{Z}_e, \quad (68)$$

toteż na podstawie (67) i (68) widać, że

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_e \Rightarrow R_c = R_e \wedge L_c = L_e. \quad (69)$$



RYS. 44. Modele obwodowe komórki: a) geometria komórki z zaznaczeniem zacisków; b) schemat zastępczy dwuzaciskowy dla pary skrajnych zacisków – parametry wyznaczone w oparciu o MR-C; c) schemat czterozaciskowy – odwzorowanie komórki w postaci połączonych, skupionych impedancji

Parametry  $R_c$  i  $L_c$  w modelu czterozaciskowym są równe  $R_e$  i  $L_e$  wyznaczonym w oparciu o przedstawioną uprzednio analizę. W rezultacie przeprowadzenia analizy całej komórki można przekształcić jej uproszczony, dwuzaciskowy schemat zastępczy, na wystarczający do analizy układów dużej skali schemat czterozaciskowy.

### 4.3.2. Aproksymacja analityczna parametrów skupionych

Znajomość parametrów skupionych jest konieczna do przeprowadzenia analizy układów dużej skali lub obliczenia efektywnych właściwości z wykorzystaniem metod homogenizacji. Dobór właściwości układu w procesie projektowym, czy też synteza materiału wymagają wielokrotnego przeliczania modeli polowych, w celu określenia rezystancji i indukcyjności. Parametry geometryczne charakteryzujące komórki

determinują właściwości elektryczne i magnetyczne w danej skali elementów  $\Omega_e$  i próbek materiałowych. Dlatego sformułowano analityczny opis materiału niejednorodnego, zawarty w publikacji [116], umożliwiający natychmiastowe przeliczenie parametrów  $R_e$ ,  $L_e$ ,  $k$  po zmianie wybranych wymiarów.

TABELA 5. Czynniki liniowe i nieliniowe kształtujące wartości parametrów skupionych

Parametr skupiony	Parametry liniowe w	Parametry nieliniowe x
$R_e$	<ul style="list-style-type: none"> <li>rezystywność materiału budującego <math>1/\sigma_A</math></li> <li>grubość warstwy przewodzącej <math>d_{e,z}</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>szerokości wycięć/ścieżek <math>\{d_1, d_2, \dots, d_n\}</math></li> <li>promienie zakrzywienia <math>\{r_1, r_2, \dots, r_m\}</math></li> </ul>
$L_e$	<ul style="list-style-type: none"> <li>zewnętrzne wymiary komórki <math>d_{e,x}</math> i <math>d_{e,y}</math></li> <li>przenikalność magnetyczna otoczenia <math>\mu</math></li> </ul>	
$k$	<ul style="list-style-type: none"> <li>indukcyjność wzajemna <math>M_e</math></li> </ul>	

W ogólnym przypadku parametry skupione zależą liniowo i nieliniowo od szeregu czynników (tabela 5),  $\{R_e, L_e, k\} = f(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ . Czynniki liniowymi zgromadzonymi w wektorze  $\mathbf{w}$  są, m.in. właściwości materiałowe. Do czynników wpływających nieliniowo, zgromadzonych w wektorze  $\mathbf{x}$ , zaliczyć można wewnętrzne parametry opisujące geometrię warstwy przewodzącej. Do określenia zależności opisującej zmiany parametru skupionego w funkcji wybranych czynników charakteryzujących elementarną komórkę, zastosowano sposób oparty na analogii do układów sterowania typu SISO (ang. *Single-input single-output*).

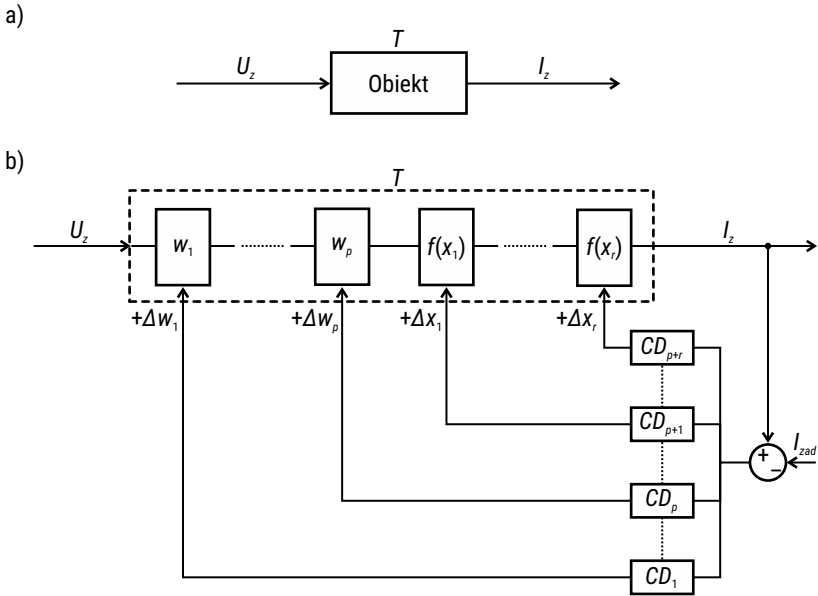
Założono, że wybrany parametr elektryczny stanowi swoistą funkcję transmitancji  $T$  pojedynczej komórki. Wskutek przyłożenia napięcia  $U_z$  do jej zacisków spodziewana jest odpowiedź w postaci prądu o natężeniu  $I_z$ . W schemacie blokowym wizualizującym tę relację (rys. 45a, b) transmitancję można rozbić na bloki połączone łańcuchowo, bowiem każdy wpływa na modyfikację odpowiedzi układu. Funkcja transmitancji składa się z oddzielnych bloków z których każdy, liniowo lub nieliniowo i niezależnie od pozostałych, umożliwia sterowanie wielkością wyjściową. Proces doboru właściwości komórki można odwzorować jako układ regulacji z pętlą sprzężenia zwrotnego (rys. 45b) do poszczególnych członów decyzyjnych (CD) tak zmieniających wybrane czynniki, aż odpowiedź układu będzie równa zadanej  $I_{zad}$ .

Pomijając aspekt doboru właściwości komórek (rozdział 5.1), a skupiając się na opisie transmitancji elementu, wykorzystano do ich opisu zasady interpretacji schematów blokowych. Transmitancja łańcuchowa połączenia bloków opisana jest równaniem analitycznym

$$T(w_1, \dots, w_p, x_1, \dots, x_r) = w_1 \cdot \dots \cdot w_p \cdot f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_r), \quad (70)$$

czyli zależy wprost od  $p$  liniowych parametrów  $w_1, \dots, w_p$  oraz od  $r$  funkcji nieliniowych  $f(x_1), \dots, f(x_r)$ , gdzie  $x_1, \dots, x_r$  są zmiennymi funkcji (tabela 5). Parametry liniowe są opisane wielomianami zerowego lub pierwszego rzędu, więc mogą zostać przeskalowane,

lecz przede wszystkim zachodzi w tym przypadku relacja proporcjonalności między wektorem  $\mathbf{w}$  a transmitancją  $T$ . W bardziej złożony sposób rzutują na  $T$  czynniki nieliniowe  $\mathbf{x}$ , stąd muszą one zostać opisane funkcją wyższego rzędu. W tym celu wykorzystano twierdzenie Weierstrassa [98] mówiące, iż funkcję nieokresową na określonym przedziale  $[c; d]$  przybliżyć można wielomianem, który im jest wyższego rzędu, tym dokładniej odwzorowuje rzeczywistą charakterystykę.



RYS. 45. Model SISO reprezentujący ideę separacji czynników wpływających na właściwości komórki: a) obiekt o jednym wejściu i wyjściu oraz transmitancji  $T$ ; b) model blokowy z łańcuchową separacją czynników liniowych i nieliniowych modyfikowanych w procesie doboru właściwości

Przyjęto, że wpływ czynników nieliniowych opisany jest wielomianem stopnia  $n$

$$f(x_j) = a_{j,n} \cdot x_j^n + a_{j,n-1} \cdot x_j^{n-1} + \dots + a_{j,1} \cdot x_j + 1, \quad (71)$$

gdzie:  $a_{j,0}, \dots, a_{j,n}$  to współczynniki wielomianu  $j$ -tej zmiennej. Przy przejściu do zapisu wektorowego otrzymujemy zależność

$$f(x_j) = \mathbf{a}_j \mathbf{x}_j^T, \quad (72)$$

przy czym

$$\mathbf{a}_j = [a_{j,n} \quad \dots \quad a_{j,1} \quad 1], \quad (73)$$

to wektor współczynników wielomianu,  $\dim(\mathbf{a}_j) = (n+1) \times 1$ ,  $a_{j,n} \in \mathfrak{R}$ , zaś wektor

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} x_j^n & \cdots & x_j & 1 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

zawiera kolejne potęgi zmiennej  $x_j$ , gdzie  $\dim(\mathbf{x}_j) = (n+1) \times 1$ ,  $x_j^n \in \mathfrak{R}$ .

Wstawiając (72) do (70) transmitancja opisana będzie jako

$$T(w_1, \dots, w_p, x_1, \dots, x_r) = \prod_{i=1}^p w_i \cdot \prod_{j=1}^r (\mathbf{a}_j \mathbf{x}_j^T) + \varepsilon, \quad (75)$$

gdzie:  $i$  – numer czynnika liniowego,  $j$  – numer czynnika nieliniowego,  $\varepsilon$  – błąd aproksymacji.

Opis transmitancji będzie kompletny po oszacowaniu współczynników funkcji nieliniowych, czyli elementów wektorów  $\mathbf{a}_j$  przy określonym rzędzie  $n$  wielomianów aproksymujących. Podstawowym warunkiem jest minimalizacja błędu aproksymacji  $\varepsilon$  do zadanej wartości dokładności aproksymacji ( $\varepsilon \leq \varepsilon_{min}$ ).

Przedstawiony problem w odniesieniu do elementarnej komórki jest nietrywialny ze względu na występujący dla  $r > 1$  naprzemienny iloczyn  $\mathbf{a}_j$  oraz  $\mathbf{x}_j$  i może być rozwiązany jedną z 2 metod.

- Pierwszy sposób to eliminacja z równania (75) wszystkich zmiennych w równaniach nieliniowych poza zmienną  $x_j$  dla której określany jest wektor  $\mathbf{a}_j$ . Stąd poszukując rozwiązania dla  $x_1$  nastawiamy pozostałe czynniki tak, by  $x_2 = 0, \dots, x_r = 0$ . Przy konkretnych  $w_1, \dots, w_p$  oraz znanej zmienności  $T_1 = f(w_1, \dots, w_p, x_1)$  otrzymuje się

$$T_1(w_1, \dots, w_p, x_1) \Big/ \prod_{i=1}^p w_i - \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 = \varepsilon_1. \quad (76)$$

Wektor  $\mathbf{a}_1$  dla czynnika  $x_1$  jest rozwiązaniem (76) gdy  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{min}$ . Znalezienie  $\mathbf{a}_1$  można zrealizować, np. w oparciu o numeryczne algorytmy wyliczeniowe.

- Drugi sposób wymaga zebrania  $q$  dyskretnych próbek wartości transmitancji, zgrupowanych w wektorze  $\mathbf{T}_T = [T_1 \dots T_q]$ ,  $\dim(\mathbf{T}_T) = q \times 1$  przy dowolnie określonych zmiennych liniowych  $\mathbf{w}_T = [\mathbf{w}_{1,T} \dots \mathbf{w}_{p,T}]$ ,  $\dim(\mathbf{w}_T) = q \times p$ ,  $\dim(\mathbf{w}_{i,T}) = q \times 1$  i nieliniowych  $\mathbf{x}_T = [\mathbf{x}_{1,T} \dots \mathbf{x}_{r,T}]$ ,  $\dim(\mathbf{x}_T) = q \times p$ ,  $\dim(\mathbf{x}_{j,T}) = q \times 1$ . Następnie jednocześnie wszystkie elementy wektorów  $\mathbf{a}_j$  poszczególnych czynników nieliniowych są iteracyjnie dobierane tak, aby dla całej funkcji  $T = f(\mathbf{w}_p, \mathbf{x}_j)$  błąd aproksymacji  $\varepsilon$  spełniał warunek  $\varepsilon \leq \varepsilon_{min}$ .

### 4.3.3. Ewaluacja aproksymacji analitycznej parametrów skupionych

Jednym z przykładów zastosowania aproksymacji analitycznej jest opis zmienności konduktancji komórki  $\Omega_{e,p}$ . Zaprezentowana metodologia oraz rezultaty badań komórki zostały zawarte w publikacji [114]. Wielomiany stopnia trzeciego były wystarczające, aby dostatecznie dokładnie opisać zależność konduktancji elementu

w funkcji dwóch czynników liniowych (przewodności elektrycznej materiału A i wysokości warstwy przewodzącej) oraz dwóch czynników nieliniowych (szerokości wewnętrznego wycięcia i promienia zewnętrznego zakrzywienia wierzchołków). Ich współczynniki wyznaczono w oparciu o pierwszy sposób określania elementów wektorów  $\mathbf{a}_j$ . Otrzymana funkcja aproksymująca cechowała się średnim błędem względnym przybliżenia konduktancji nie przekraczającym 3,5%, przy odchyleniu standardowym około 0,5% [114].

Innym przykładem zastosowania aproksymacji wielomianowej jest określenie zależności opisującej zmienność indukcyjności komórki o geometrii typu  $\Omega_{e,g}$  (rys. 20), w zależności od dwóch parametrów liniowych i nieliniowych. Transmitancja komórki jest w tym przypadku interpretowana jako zdolność do wytwarzania pola magnetycznego. Z tego powodu w omówionym powyżej schemacie SISO należy odwrócić sytuację – wymuszeniem staje się prąd o natężeniu  $I_z$ , a odpowiedzią strumień magnetyczny  $\Phi$ . Transmitancją obiektu jest indukcyjność własna  $L_e$  wyznaczana za pomocą schematu MR-C w 12 losowo wybranych, dyskretnych punktach obliczeniowych. Do określenia elementów wektorów  $\mathbf{a}_1$  i  $\mathbf{a}_2$  zastosowano drugi sposób, czyli iteracyjne dopasowanie współczynników przy założeniu minimalizacji błędu aproksymacji.

Przyjęto następujące stałe w modelu obliczeniowym:

- przewodność materiału A  $\sigma_A = 5,6 \cdot 10^7$  S/m;
- przewodność materiału B  $\sigma_B = 10^{-4}$  S/m;
- przenikalność magnetyczna otoczenia  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m;
- względna szerokość wewnętrznego wycięcia  $d_3/d_e = 0,75$ ;
- wysokość warstwy przewodzącej  $d_{e,z} = 35$   $\mu\text{m}$ ;
- rząd wielomianów aproksymujących  $n = 3$ .

Czynniki rzutujące na zmianę wartości  $L_e = f(w_1, w_2, x_1, x_2)$ , to:

- liniowy  $w_1$  – indukcyjność własna bazowej komórki, w której względne wartości parametrów  $d_1' = d_1/d_e$  i  $d_2' = d_2/d_e$  przyjmują wartości maksymalne ( $d_1' = 1$ ,  $d_2' = 1$ ) oraz  $d_e = 5$  mm; stanowi punkt odniesienia dla pozostałych przypadków i jest to funkcja o stałej, uprzednio obliczonej wartości  $L_{e,b} = 1,85$  nH;
- liniowy  $w_2$  – względny zewnętrzny rozmiar komórki,  $w_2 = d_e/5$  [mm]; jest współczynnikiem skalującym indukcyjność w zależności od wielkości komórki.
- nieliniowy  $x_1$  – względna szerokość zewnętrznego kontaktu,  $x_1 = d_1' - 1$ , przy której dla  $d_1' = 1$  i  $d_e = 5$  mm indukcyjność  $L_e = L_{e,b}$ ;
- nieliniowy  $x_2$  – względna szerokość wygięcia ramion,  $x_2 = d_2' - 1$ , przy której dla  $d_2' = 1$  i  $d_e = 5$  mm indukcyjność  $L_e = L_{e,b}$ .

Kompletną postać równania aproksymującego opisuje zależność

$$L_e = w_1 w_2 (\mathbf{a}_1^T \cdot \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{a}_2^T \cdot \mathbf{x}_2), \quad (77)$$

a po podstawieniu i zastąpieniu odpowiednich czynników

$$L_e = 1,85 \text{ nH} \frac{d_e}{5 \text{ mm}} \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{1,2} \\ a_{1,1} \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} (d_1' - 1)^3 \\ (d_1' - 1)^2 \\ (d_1' - 1) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{2,3} \\ a_{2,2} \\ a_{2,1} \\ 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} (d_2' - 1)^3 \\ (d_2' - 1)^2 \\ (d_2' - 1) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

Dobór poszukiwanych wektorów  $\mathbf{a}_1$  i  $\mathbf{a}_2$  odbywa się na podstawie treningowego zbioru wyników obliczeń 12 losowo wybranych konfiguracji (przykłady geometrii komórek pokazano na rys. 46a-f), uzyskanych za pomocą metody różnicowo-całkowej. W celu zgromadzenia odpowiedniego zbioru danych treningowych wykonano następujące kroki:

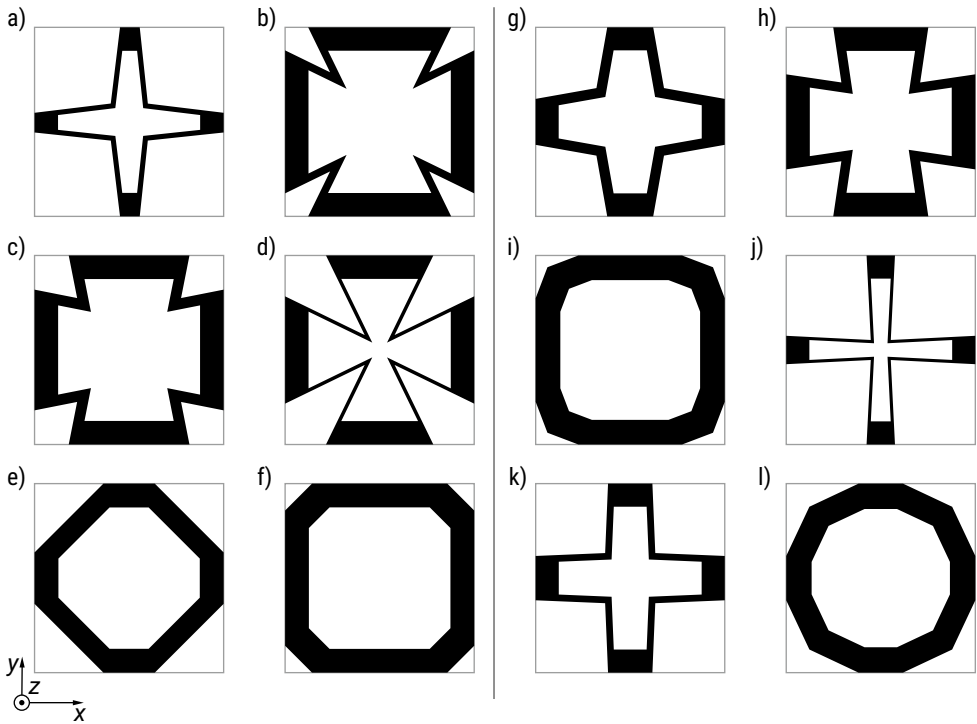
- 1) Wygenerowano wektory  $\mathbf{x}_{1,T}$  i  $\mathbf{x}_{2,T}$  o losowych wartościach z przedziału  $\langle 0,1; 0,9 \rangle$  dla 12 przypadków budowy komórek.
- 2) Przeskalowano  $\mathbf{x}_{1,T}$  i  $\mathbf{x}_{2,T}$  przez jedną z czterech szerokości (długości) zewnętrznych z wektora  $\mathbf{d}_{e,T} = [5 \ 10 \ 15 \ 20]$ .
- 3) Wygenerowano modele 2D komórek i wyznaczono ich indukcyjności własne  $L_e$ .
- 4) Stworzono wektor znanych wartości transmitancji  $T_T$  (zawierający wartości  $L_e$ ).

Identycznie postąpiono (pomijając dwa ostatnie punkty) tworząc zbiór danych walidacyjnych dla innych 12 losowo wygenerowanych wariantów komórek  $\Omega_{e,g}$ , który posłużył ocenie dokładności modelu analitycznego (przykładowe komórki pokazano na rys. 46g-l). Poprawność ta została oszacowana przez obliczenie średniego błędu względnego (modułu) wskazującego na rozbieżności między rozwiązaniem numerycznym a otrzymanym z użyciem SISO.

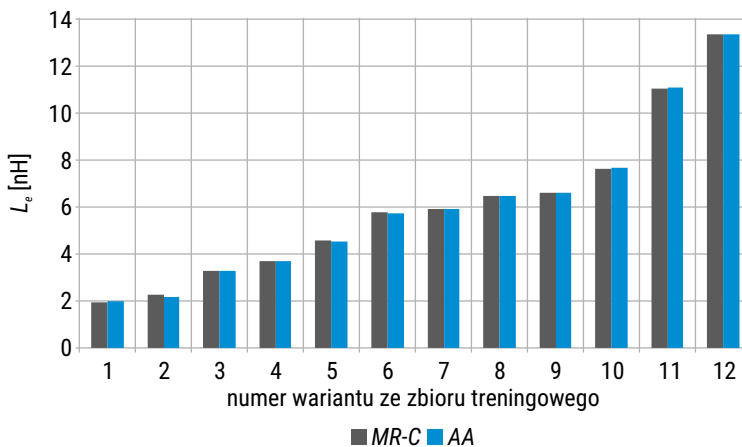
Estymację współczynników funkcji wielomianowych przeprowadzono za pomocą algorytmu optymalizacji nieliniowej metodą Nelder'a-Mead'a [78]. Realizacja programu przebiegła iteracyjnie do osiągnięcia wartości błędu  $\varepsilon < 0,3 \text{ nH}$ , czyli wartości względnej  $\varepsilon/L_{e,max} < 2\%$ , gdzie  $L_{e,max}$  to spodziewana, najwyższa wartość indukcyjności komórki typu  $\Omega_{e,g}$  dla  $d_e = 5 \text{ mm}$ . Efektem działania algorytmu był zestaw wektorów

- $\mathbf{a}_1 = [0,074 \ 0,217 \ 0,046 \ 1]$ ,
- $\mathbf{a}_2 = [-0,779 \ 0,297 \ -0,083 \ 1]$ ,

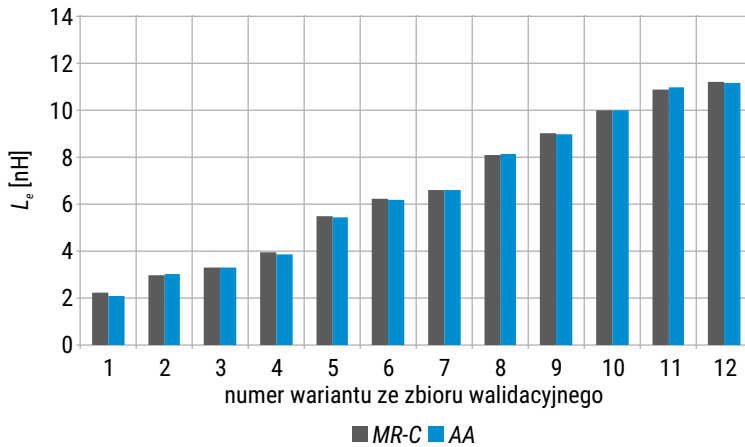
uzyskany przy błędzie bezwzględnym  $\varepsilon = 0,297 \text{ nH}$ . Następnie przeliczono wartości indukcyjności własnej  $L_e$  za pomocą wzoru (78) i porównano z rezultatami otrzymanymi z modelu polowego. Wyniki zamieszczone na rys. 47 oraz rys. 48 uszeregowano w kolejności rosnącej pod względem indukcyjności. Wygenerowane geometrie komórek (rys. 46) różnią się znacząco w obrębie struktury  $\Omega_{e,g}$ , zapewniając uwzględnienie szerokiej skali zmienności parametrów geometrycznych i wynikającej z niej indukcyjności własnej. Porównując elementy ze zbioru treningowego i walidacyjnego widać, że każdy kolejny element, generowany losowo lub deterministycznie, będzie zawsze formą pośrednią między strukturami ze zbioru treningowego.



RYS. 46. Widok na przykładowe komórki: a) ÷ f) ze zbioru treningowego; g) ÷ l) ze zbioru walidacyjnego



RYS. 47. Indukcyjność własna komórek ze zbioru treningowego, obliczona na podstawie modelu połowego (MR-C) oraz aproksymacji analitycznej (AA)



RYS. 48. Indukcyjność własna komórek ze zbioru walidacyjnego, obliczona na podstawie modelu polowego (MR-C) oraz aproksymacji analitycznej (AA)

Dowodem na efektywną optymalizację współczynników  $a_1$  i  $a_2$  jest zgodność wartości indukcyjności obliczonych polowo i analitycznie (rys. 47). Średni błąd względny (moduł) wyniósł 0,613% przy odchyleniu standardowym 0,892%. Rozbieżność jest zatem mniejsza od 1%. W porównaniu nieco gorzej wypada zbiór walidacyjny, z błędem średnim 1,171% (odchylenie 1,769%). Jest to jednak wciąż wartość mała, bliska 1%, świadcząca o dostatecznej precyzji estymacji indukcyjności własnej za pomocą proponowanego schematu SISO z doбором współczynników na bazie modyfikowanego kształtu rozpatrywanej geometrii.

## 4.4. Model sieciowy układu dużej skali

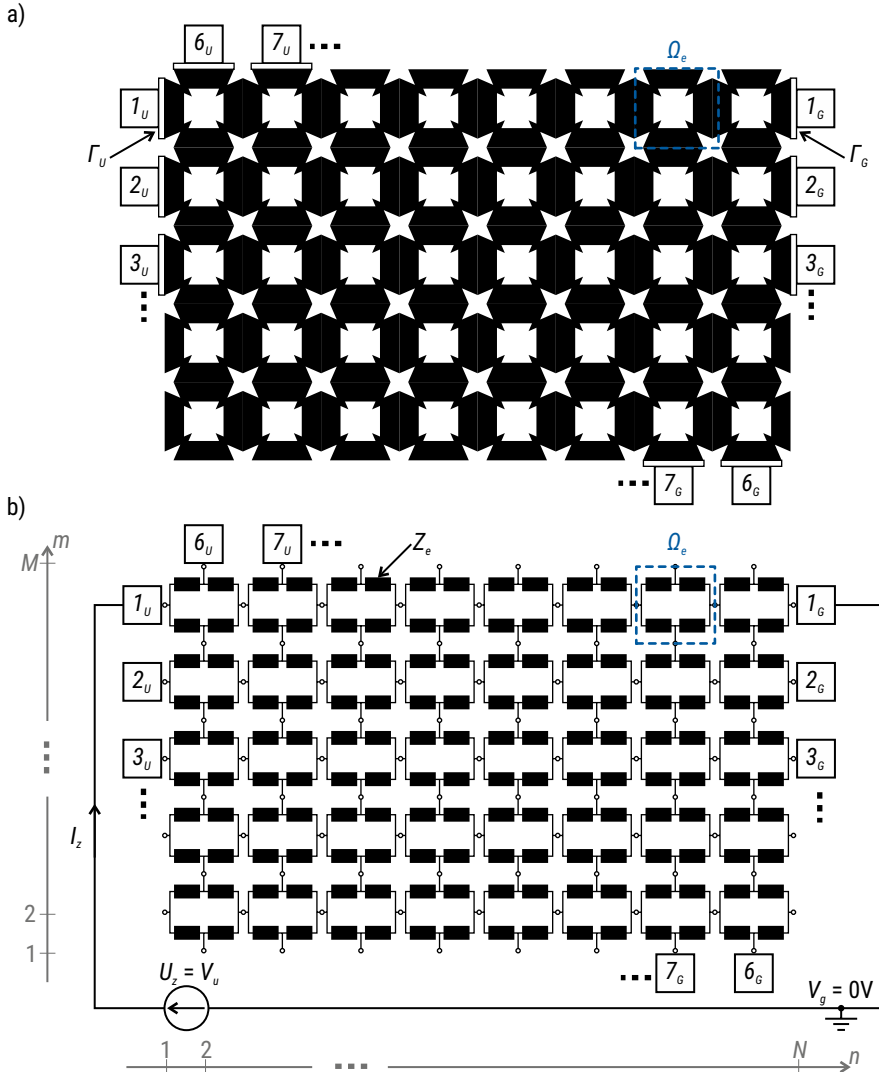
### 4.4.1. Model obwodowy materiału niejednorodnego

Analiza polowa realizowana z użyciem MR-C lub MES wymaga odwzorowania każdej komórki  $\Omega_e$  wchodzącej w skład materiału niejednorodnego stosując model numeryczny, opisany za pomocą kilkudziesięciu tysięcy węzłów obliczeniowych. W układach małej skali, gdy liczba komórek sięga kilkunastu, liczba stopni swobody nie przekracza kilkuset tysięcy. Modele tego typu pozostają policzalne ze względu na rozmiary danych i czas obliczeń. Jednak układy zbudowane z setek lub tysięcy komórek narzucają znaczne wymagania związane z realizacją obliczeń numerycznych, wynikające ze znaczącej liczby stopni swobody. Dlatego niezbędne jest zastosowanie takich sposobów obliczania układów dużej skali, które będą możliwe do przeprowadzenia znanymi, dostępnymi metodami oraz nie spowodują nadmiernego rozrostu



modelu numerycznego. W ramach prowadzonych prac zaproponowano i poddano ocenie dwie metody obliczeń układów dużej skali: obwodowy model materiału planarnego oraz połowy model homogeniczny.

Ponieważ komórkę można przedstawić za pomocą czterech impedancji skupionych (rys. 44c) modelujących poszczególne gałęzie komórki i galwaniczne połączenia w układzie periodycznym, to do analizy układów dużej skali zastosowano model sieciowy.



RYS. 49. Odzworowanie obwodowe materiału niejednorodnego do obliczeń zjawisk elektrycznych z zaznaczeniem wybranych zacisków zasilających  $U$  i  $G$ : a) struktura przykładowego prostokątnego układu; b) jego model sieciowy

Odwzorowanie rzeczywistej struktury materiału (rys. 49a) odpowiadającym jej obwodem elektrycznym (rys. 49b), polega na zastąpieniu elementu  $\Omega_e$  prostym modelem czterozaciskowym złożonym z impedancji  $Z_e$ . Dalsza analiza wymaga określenia węzłów na których zadano warunki brzegowe ( $\Gamma_U$  i  $\Gamma_G$ ) oraz włączenia ich do źródeł napięciowych lub prądowych. Wybór zacisków jest całkowicie dowolny – mogą się one znajdować na zewnętrznych krawędziach (rys. 49) lub w środku układu. Kształt modelowanego materiału może być również dowolny, gdyż sprowadzenie go do dwuwymiarowej sieci przebiega zawsze w identyczny sposób. Możliwe jest też uwzględnienie lokalnych zmian  $Z_e$  lub zmiany konfiguracji układu.

Przyjmowano przypadki zasilania obwodu z zewnątrz rozmieszczonych zacisków (np.  $1_U, 1_G, 2_U, 2_G, 7_U, 7_G$ , itp.), przy przepływie prądu elektrycznego wzdłuż lub w poprzek układu. Elementy tworzące materiał niejednorodny mogą różnić się pod względem geometrii oraz skali, jednak podstawowym celem syntezy jest uzyskanie materiału o jednorodnych parametrach, choć budowanego z niejednorodnych warstw. W celu przeprowadzenia efektywnej homogenizacji materiału zrezygnowano z analizy układów z silnie zróżnicowaną geometrią komórek  $\Omega_e$  materiału  $\Omega_M$ , a skupiono się na materiałach formowanych z takich samych komórek.

Wybór pary zacisków zasilających determinuje wypadkowe właściwości układu. Impedancja zastępcza  $Z_{\#U\#G}$  widziana z zacisków  $N_U, M_G$  jest szeregowo-równoległym połączeniem impedancji elementarnych  $Z_e$ . Impedancje te wiąże relacja

$$Z_{\#U\#G} = r_{\#U\#G} Z_e, \quad (79)$$

gdzie:  $r_{\#U\#G}$  jest współczynnikiem łączącym właściwości obwodu z właściwościami elementów budujących, zależnym od topologii sieci i lokalizacji zacisków zasilających. Reasumując, wypadkowe właściwości materiału  $Z_{\#U\#G}$  opisane są przez:

- współczynnik  $r_{\#U\#G}$  gromadzący informację o konstrukcji (połączeniach) sieci;
- impedancję komórki  $Z_e$  decydującą o wynikowych parametrach elektrycznych.

Współczynnik  $r_{\#U\#G}$  umożliwia szybkie przeliczenie nowych parametrów zastępczych po zmianie parametrów geometrii w ramach danego typu komórek, przy założeniu zachowania tej samej konstrukcji sieci.

#### 4.4.2. Analiza sieci periodycznej

Elastyczny materiał niejednorodny może przyjmować różne kształty zależne nie tylko od formowanej z komórek powierzchni, ale także od ułożenia materiału i wynikającej z niego deformacji kształtu materiału w obszarze. W przypadku deformacji 3D, kształt powierzchni materiału planarnego nie wpływa na sposób analizy obwodowej. Przy zachowaniu ciągłości połączeń galwanicznych między komórkami, bez względu na ich przemieszczenie wzdłuż osi  $Oz$ , rozkład na powierzchni  $xy$  i model obwodowy nie zmieniają się. Układ połączeń elektrycznych i liczba komórek pozostaje

stabilna. Przyjmując, że pasożytnicze sprzężenia magnetyczne wynikające ze zniekształcenia początkowej powierzchni nie wpłyną znacząco na właściwości komórek (indukcyjności własne i wzajemne między sąsiednimi komórkami będą dominującymi składnikami reaktancji), analiza obwodowa sprowadza się do przedstawienia jego wyjściowej, płaskiej struktury elementów  $\Omega_e$  za pomocą periodycznej sieci elektrycznej.

Model przewodzącej warstwy 3D redukuje się do struktury planarnej 2D, przedstawionej jako zbiór skupionych elementów elektrycznych, połączonych według określonej topologii. Rozwiązanie modelu obwodowego można uzyskać stosując znane metody analizy obwodów elektrycznych. W dalszej części przedstawiono przypadek sieci złożonej z identycznych komórek formujących prostokątną warstwę niejednorodną, rozwiązana z użyciem metody węzłowej. Wyznaczenie napięć węzłowych uzyskano wychodząc od równań napięciowych grafu.

Macierz węzłowa  $\Lambda_w$  jest algebraicznym zapisem incydencji dla węzłów grafu skierowanego, w których przy znanej macierzy admitancji  $Y_w$  i wektorze prądowych wydajności  $J_w$  poszukuje się wektora potencjałów węzłowych  $V_w$  [86, 126]

$$(\Lambda_w Y_w \Lambda_w^T) \cdot V_w = J_w. \quad (80)$$

W rozpatrywanej strukturze za węzły uznaje się powierzchnie styku sąsiednich komórek, a za gałęzie ścieżki przewodzące łączące węzły. Zasilanie układu zadaje się w węzłach w postaci znanego potencjału, stąd równanie (80) wiążące napięcia i prądy należy odpowiednio przekształcić. W tym celu rozważony zostanie układ z rys. 49b na który naniesiono numery lokalizujące węzły w sieci – numer kolumny oznaczono przez  $n$  oraz wiersza przez  $m$ . Rozpatrując w ogólnym ujęciu węzeł o lokalizacji  $(n,m)$ , strzałkując prądy we wszystkich gałęziach zgodnie ze zwrotem osi  $O_n$ , na podstawie I prawa Kirchhoffa otrzymuje się równanie

$$\frac{V_{n-1,m+1} - V_{n,m}}{\underline{Z}_e} + \frac{V_{n-1,m-1} - V_{n,m}}{\underline{Z}_e} = \frac{V_{n,m} - V_{n+1,m+1}}{\underline{Z}_e} + \frac{V_{n,m} - V_{n+1,m-1}}{\underline{Z}_e}. \quad (81)$$

W równaniu (81) założono, że impedancje gałęzi przyłączonych do węzła  $(n,m)$  są identyczne. Odpowiada to wariantowi układu jednorodnego, przy pominięciu możliwych uszkodzeń struktury materiału. Po usunięciu występującej obustronnie admitancji  $1/\underline{Z}_e$  i uporządkowaniu otrzymuje się

$$4V_{n,m} - V_{n-1,m+1} - V_{n-1,m-1} - V_{n+1,m+1} - V_{n+1,m-1} = 0, \quad (82a)$$

$$V_{n,m} = \frac{1}{4}(V_{n-1,m+1} + V_{n-1,m-1} + V_{n+1,m+1} + V_{n+1,m-1}). \quad (82b)$$

Równanie (82a) określa związek potencjału węzła  $(n,m)$  z węzłami bezpośrednio dołączonymi do niego. Przy założonej symetrii komórki (symetrii impedancji), zgodnie z równaniem (82b), potencjał rozpatrywanego węzła  $\underline{V}_{n,m}$  jest średnią arytmetyczną potencjałów w węzłach sąsiednich. Brak czynnika związanego z admitancją sprawia, że rozkład potencjału w tego rodzaju sieci periodycznej nie zależy od jej parametrów elektrycznych, lecz jedynie od jej topologii.

Wyprowadzając zależność (82a) i (82b) dla kolejnych węzłów sieci uzyskuje się układ równań liniowych, który w zapisie macierzowym przyjmuje postać

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}_w = \mathbf{U}_w. \quad (83)$$

Równanie (83) opisuje związek między wektorem  $\mathbf{V}_w$  poszukiwanych potencjałów węzłowych i macierzą incydencji  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_w \mathbf{\Lambda}_w^T$ , a wektorem wymuszeń napięciowych  $\mathbf{U}_w$ . Uwzględniając globalną numerację węzłów struktury materiału niejednorodnego, równanie (83) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,lc-lu} \\ a_{2,1} & \lambda_2 & a_{2,3} & \cdots & a_{2,lc-lu} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \lambda_3 & \cdots & a_{3,lc-lu} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{lc-lu,1} & a_{lc-lu,2} & a_{lc-lu,3} & \cdots & \lambda_{lc-lu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \\ \vdots \\ \underline{V}_{lc-lu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \vdots \\ \underline{U}_{lc-lu} \end{bmatrix}, \quad (84)$$

przy czym  $\dim(\mathbf{\Lambda}_w) = (lc - lu) \times (lc - lu)$ ,  $\dim(\mathbf{V}_w) = (lc - lu) \times 1$ ,  $\dim(\mathbf{U}_w) = (lc - lu) \times 1$ ,  $lc = (N \cdot M - 1)/2$  to liczba wszystkich węzłów w sieci,  $N$  – liczba kolumn,  $M$  – liczba wierszy,  $lu$  – liczba węzłów z zadanymi potencjałami  $U_i$ . Współczynniki  $a_{i,j}$  wynoszą:

- $a_{i,j} = 0$ , przy braku incydencji między węzłami  $i - j$ ,
- $a_{i,j} = -1$ , przy incydencji między węzłami  $i - j$  ( $i \neq j$ ).

Współczynnik  $\lambda_i$  na przekątnej macierzy  $\mathbf{\Lambda}$ , to współczynnik stojący przy rozpatrywanym węzle  $\underline{V}_i$ , równy liczbie węzłów przyłączonych do niego.  $\mathbf{\Lambda}$  jest macierzą rzadką, stąd do obliczenia wektora  $\mathbf{V}_w$  wykorzystać można iteracyjne metody rozwiązywania układu równań liniowych.

Model sieciowy materiału niejednorodnego umożliwia aproksymację zjawisk elektrycznych w rzeczywistym układach dużej skali, z uwzględnieniem zastępczych parametrów elektrycznych, przy spełnieniu warunku kwazi-stacjonarności w obrębie komórek. Ze względu na znaczną liczbę węzłów obliczeniowych, model ten można stosować do wyznaczenia skupionych parametrów obwodowych (np. zastępczej rezystancji, strat mocy) oraz określenia rozkładu potencjału elektrycznego na powierzchni warstwy periodycznej. Przykłady wykorzystania obliczeń obwodowych materiału przedstawiono w [111, 118], w których porównano rezultaty wyznaczenia zastępczej rezystancji oraz rozkładu potencjału elektrycznego w modelu połowym i obwodowym

niejednorodnej struktury, przy wymuszonym między skrajnymi krawędziami przepływie prądu [118], a także zweryfikowane poprzez porównanie z rzeczywistym materiałem [111].

W publikacji [118] rozważono prostokątną płytkę materiału niejednorodnego, utworzoną z 35 komórek o strukturze ścieżek łączącej cechy geometrii typu *prostokąt*  $\Omega_{e,p}$  i *gwiazda*  $\Omega_{e,g}$ . W celu wymuszenia jednorodnego przepływu prądu przez układ komórek, na skrajnych krawędziach płytki zadano napięcie elektryczne. Obliczenia z wykorzystaniem modeli numerycznych wskazały, że błąd aproksymacji rozkładu potencjału zależy w modelu sieciowym od stopnia deformacji komórek. Im bardziej geometria komórki jest zniekształcona względem idealnego kwadratu, tym wyższą wartość przyjmuje błąd średni. Wartość błędu mieści się w przedziale  $\pm 0,2\%$  co świadczy o wysokiej dokładności modelu obwodowego. W przypadku obliczeń zastępczego prądu rezultat był jeszcze lepszy, bowiem błąd względny przyjmował wartości od 0,01% do 0,22%. Zatem oszacowanie zastępczych parametrów skupionych oraz lokalnych wartości pola elektrycznego z zastosowaniem modelu sieciowego należy uznać za zadowalające, z niskim poziomem błędów w zakresie wymuszeń stałych.

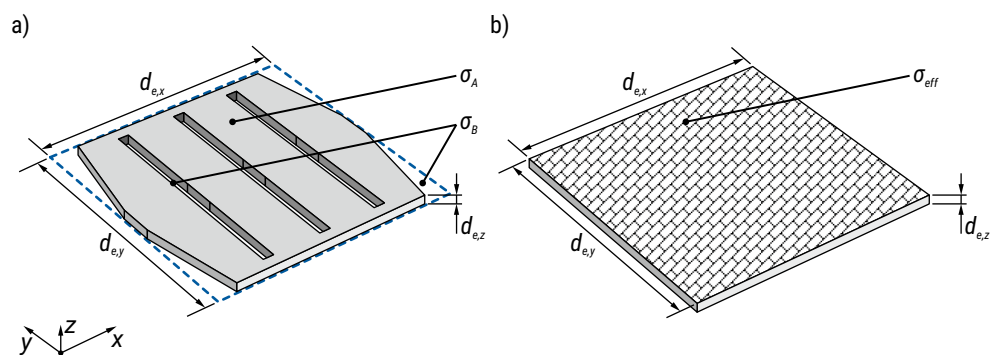
W artykule [111] przedstawiono rezultaty eksperymentalnej weryfikacji obliczeń. Modele dwóch wariantów materiału laminarnego utworzonego z 40 komórek typu  $\Omega_{e,g}$  poddane zostały obliczeniom polowym i obwodowym. W układzie wymuszono niejednorodny rozkład gęstości prądu przez lokalne, punktowe przyłożenie potencjału elektrycznego. Analizie poddano prąd źródła, rezystancję zastępczą, moc całkowitą oraz rozkład potencjału. Różnice między modelem obwodowym a polowym wzrosły – średnia wartości różnicy wyniosła 6,56%. Lepiej odwzorowany został rozkład potencjału elektrycznego, ponieważ błąd obliczeń mieści się w granicach  $0,24 \div 4,03\%$ . Oba modele zweryfikowano również eksperymentalnie – wykonano pomiary na próbce materiału wytworzonego metodą druku 3D. Błędy modeli (średni dla rozkładu potencjału w polowym i obwodowym odpowiednio 11,33% i 10,38%) były porównywalne. Wyniki pomiarów potwierdziły efektywność wykorzystania modelu sieciowego w analizie układów dużej skali.

## 4.5. Homogenizacja właściwości materiałów niejednorodnych

### 4.5.1. Ujednorodnienie właściwości elektrycznych

Cechą szczególną rozważanych kompozytów jest ich niejednorodność materiałowa w obszarze elementu budującego (skala mikroskopowa). W skali makroskopowej, przy periodycznym układzie dużej liczby elementów  $\Omega_e$ , zaczynają dominować efekty związane z wypadkowym polem fizycznym całego materiału. W makroskopowym ujęciu materiał posiada w przybliżeniu jednorodną strukturę, której właściwości

opisane są przez uśrednione, lecz jednocześnie konkretne współczynniki materiałowe wynikające z wewnętrznej budowy  $\Omega_e$  w skali mikro. W opisie makroskopowym niejednorodnym kompozytom – analizowanym na poziomie elementarnych komórek lub warstw charakteryzujących się różnymi parametrami – przez analogię do standardowych tworzyw, przypisuje się zastępcze parametry materiałowe nazywane właściwościami efektywnymi. W kontekście materiału niejednorodnego homogenizacja, przez makroskopowe ujednorodnienie właściwości elementu, pozwala na ekstrakcję efektywnych właściwości w celu porównania z innymi materiałami. Ponadto ujednorodnienie stanowi skuteczny sposób uproszczenia analizy układów dużej skali lub silnie zdeformowanych, gdzie wymagana jest polowa analiza zjawisk, także przy wymuszeniach zmiennych w czasie.



RYS. 50. Homogenizacja materiału niejednorodnego: a) anizotropowa komórka  $\Omega_e$  o rozmiarze  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$  zbudowana z przewodnika i izolatora o przewodnościach  $\sigma_A$  i  $\sigma_B$ ; b) ekwiwalentny materiał jednorodny o identycznych wymiarach oraz właściwościach opisanych tensorem przewodności  $\sigma_{eff}$

Wykorzystując MR-C wyznaczano rozkłady wielkości polowych (potencjał skalarny pola elektrycznego oraz potencjał wektorowy pola magnetycznego), a na podstawie dodatkowych obliczeń – zastępcze parametry skupione komórek. Proces ujednorodnienia przeprowadzany jest na podstawie parametrów skupionych, w tym rezystancji  $R_e$  oraz indukcyjności własnej  $L_e$  elementu. Ekstrakcja efektywnych właściwości będzie zatem związana z dwoma współczynnikami materiałowymi, opisującymi komórkę w modelu polowym: przewodnością elektryczną  $\sigma_{eff}$  i przenikalnością magnetyczną  $\mu_{eff}$ . Uogólniając rozważania na struktury anizotropowe, opis materiałów wymaga zastosowania zapisu z tensorami materiałowymi drugiego rzędu ( $\sigma_{eff}$  i  $\mu_{eff}$ ) z zerowymi elementami pozadiagonalnymi.

Zakładając, że rozkład pola w komórce o dowolnej geometrii, znanych wymiarach i materiałach składowych (rys. 50a) został obliczony z użyciem MR-C, zgodnie z procedurą opisaną w rozdziale 4.1.1 można wyznaczyć rezystancję  $R_{e,x}$  związaną z zewnętrznym polem elektrycznym i budową komórki. Napięcie przyłożone

do skrajnych powierzchni bocznych wymuszało w układzie składową  $E_x$  natężenia pola elektrycznego. Gdyby materiał był jednorodny (rys. 50b), to składowa  $E_x$  wymusiłaby odpowiedź w postaci prądu o gęstości  $J_x$  i jednorodnym rozkładzie w całym obszarze materiału. Wówczas dla tak postawionego zagadnienia rezystancję materiału homogenicznego można obliczyć ze wzoru analitycznego

$$R_{\text{eff},x} = l(\sigma_{\text{eff},x} s)^{-1}, \quad (85)$$

gdzie:  $l$  – długość przewodnika [m],  $s$  – pole przekroju poprzecznego [m<sup>2</sup>],  $\sigma_{\text{eff},x}$  – przewodność elektryczna materiału jednorodnego [S/m]. Podstawiając wymiary geometryczne komórki i zakładając, że  $d_{e,x} = d_{e,y}$  rezystancja będzie dana wzorem

$$R_{\text{eff},x} = d_{e,x} (\sigma_{\text{eff},x} d_{e,x} d_{e,z})^{-1} = (\sigma_{\text{eff},x} d_{e,z})^{-1}. \quad (86)$$

Odpowiedź materiału jednorodnego i niejednorodnego na identyczne wymuszenie, zgodnie z warunkiem ujednorodnienia, musi być taka sama ( $R_{e,x} = R_{\text{eff},x}$ ). Po podstawieniu  $R_{e,x}$  do (86) i przekształceniu równania otrzymujemy wzór na efektywną przewodność materiału

$$\sigma_{\text{eff},x} = (R_{e,x} d_{e,z})^{-1}. \quad (87)$$

Otrzymana przewodność wiąże składową  $E_x$  pola elektrycznego tylko ze składową  $J_x$  gęstości prądu ( $J_x = \sigma_{\text{eff},x} E_x$ ). Postępując identycznie z komórką dla zewnętrznego pola elektrycznego skierowanego wzdłuż osi  $Oy$  ( $E_y$ ), w homogenicznym materiale wymuszony jest prąd  $J_y$  o jednorodnym rozkładzie. Wówczas obliczona zostanie przewodność efektywna  $\sigma_{\text{eff},y}$  wiążąca obie wielkości pola elektrycznego ( $J_y = \sigma_{\text{eff},y} E_y$ ). Dwukrotne rozwiązanie modelu połowego pojedynczego elementu umożliwi uzupełnienie tensora właściwości przewodzących materiału jednorodnego

$$\sigma_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{eff},x} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{eff},y} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{eff},z} \end{bmatrix}. \quad (88)$$

Element  $\sigma_{\text{eff},z}$  może zostać obliczony bez pomocy modelu numerycznego. Przy występowaniu składowej  $E_z$  pola elektrycznego, przyływ prądu elektrycznego będzie skierowany w kierunku prostopadłym do powierzchni elementu  $\Omega_e$  o znanym polu powierzchni części przewodzącej  $s_A$  oraz długości drogi prądu  $d_{e,z}$ . Efektywną przewodność elektryczną w tym kierunku wyraża się wzorem

$$\sigma_{\text{eff},z} = \sigma_A \frac{s_A}{d_{e,x} d_{e,y}}. \quad (89)$$

Przedstawiona procedura upraszcza się dla komórek izotropowych. Ze względu na budowę ich warstwy przewodzącej, zewnętrzne składowe pola skierowane wzdłuż osi  $Ox$  czy  $Oy$  dadzą taką samą odpowiedź prądową, czyli  $\sigma_{\text{eff},x} = \sigma_{\text{eff},y}$ . Wobec tego model numeryczny elementu wystarczy obliczyć tylko dla wybranej polaryzacji.

Efektywna przewodność elektryczna jest podstawowym parametrem określającym właściwości materiałów niejednorodnych i stanowi podstawę do zastosowania go jako metamateriału stacjonarnego pola elektrycznego. Ponieważ wszystkie składowe tensora materiałowego mogą być kształtowane w oparciu o dobór materiałów budujących oraz geometrię komórki, to możliwe jest uzyskanie anizotropowego materiału. Z drugiej strony zależność parametrów efektywnych od tych samych zmiennych komplikuje proces syntezy materiału o ściśle określonych składowych tensora przewodności. Przykład konstrukcji materiału z elementami anizotropowymi przedstawiono w rozdziale 5.3, gdzie w wyniku zastosowania algorytmu optymalizacyjnego dokonano syntezy płaszcza pola elektrycznego. Dla wybranej geometrii komórki oraz narzuconej relacji przewodności metamateriału względem przewodności otoczenia, stworzono płaszczyz maskujący nieprzewodzący obiekt w stacjonarnym polu elektrycznym.

## 4.5.2. Ujednorodnienie właściwości magnetycznych

Pole elektryczne obliczone na potrzeby homogenizacji właściwości materiałów przewodzących pozwala, zgodnie z rozdziałem 3.2.2, na wyznaczenie w dalszej kolejności pola magnetycznego w przekroju komórki, a następnie oszacowanie zastępczej indukcyjności własnej (rozdział 4.1.2). Na tej podstawie określa się efektywną względną przenikalność magnetyczną dla ortogonalnych (względem zewnętrznego pola elektrycznego) składowych natężenia pola magnetycznego.

Przeprowadzenie procesu homogenizacji wymaga na wstępie określenia zależności łączącej wartość indukcyjności własnej  $L_e$  z efektywną, względną przenikalnością magnetyczną  $\mu_{\text{eff}}$  materiału przewodzącego. W dostępnej literaturze nie podano zależności na indukcyjność jednorodnego, magnetycznego przewodnika o przekroju prostokątnym. Znane wzory, zaprezentowane w publikacjach [96] i [97], dotyczą przewodników, których przenikalność magnetyczna równa jest przenikalności próżni. W publikacji [115] do analitycznej aproksymacji funkcji  $L_{\text{eff}} = f(\mu_{\text{eff}})$  zastosowano zależność liniową

$$L_{\text{eff}} = d_L (\mu_{\text{eff}} - 1) + L_1 \quad , \quad (90)$$

gdzie:  $d_L = f(d_{e,y}, d_{e,z})$  – współczynnik zależności indukcyjności od przenikalności magnetycznej przewodnika o szerokości  $d_{e,y}$  i grubości  $d_{e,z}$ , w [H];  $\mu_{\text{eff}}$  – względna przenikalność magnetyczna;  $L_{\text{eff}}$  – indukcyjność własna jednorodnego przewodnika o przekroju prostokątnym w [H];  $L_1$  – indukcyjność własna niemagnetycznego przewodnika o przekroju prostokątnym ( $\mu_{\text{eff}} = 1$ ), wyrażona wzorem [92]



$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} d_{e,x} \left[ \ln \left( \frac{2d_{e,x}}{d_{e,y} + d_{e,z}} \right) - 0,2235 \ln \left( \frac{d_{e,y} + d_{e,z}}{d_{e,x}} \right) + 0,5 \right]. \quad (91)$$

Podobnie jak w odniesieniu do rezystancji materiałów przy homogenizacji właściwości elektrycznych przyjmuje się, że obliczona indukcyjność  $L_{e,x}$  elementu równa jest indukcyjności jednorodnej płytki ( $L_{e,x} = L_{\text{eff}}$ ). Przekształcając (90) otrzymuje się

$$\mu_{\text{eff},yy} = \frac{L_{e,x} - L_1}{d_L} + 1. \quad (92)$$

Zastosowanie wzoru (92) wymaga uwzględnienia dwóch kwestii:

- indukcyjność  $L_{e,x}$  obliczana jest przy napięciu wymuszającym pole elektryczne  $E_x$ , zaś powstałe pole magnetyczne wiruje wokół przewodnika w płaszczyźnie  $yz$ , zatem to dla tych składowych wyznaczana jest przenikalność  $\mu_{\text{eff},yy}$ ;
- wartość współczynnika  $d_L$  jest nieznaną, a przy tym zależy od wymiarów zewnętrznych (szerokości i grubości) przewodnika jednorodnego.

Niestety druga kwestia pozornie uniemożliwia obliczenie efektywnej przenikalności, bowiem współczynnik  $d_L$  nie jest opisany żadnym wzorem analitycznym i zmienia się w zależności od rozmiarów zewnętrznych homogenizowanej komórki.

W toku prac współczynnik  $d_L$  wyznaczano numerycznie na podstawie modelu 2D przekroju jednorodnego przewodnika prostokątnego. W rozdziale 3.4 opisano stosowaną w tym zakresie różnicową metodę obliczania pola magnetycznego w przekroju poprzecznym płytki, z rozróżnieniem właściwości otoczenia i przewodnika. Opracowany skrypt obliczeniowy z wprowadzonym modelem układu, umożliwia wyznaczenie  $d_L$  przy dowolnych wymiarach płytki. W celu zastosowania zależności (90) wykonywane są dwie próby, aby obliczyć indukcyjności próbki przy założonych wymiarach oraz przewodności elektrycznej (np. wcześniej wyznaczonej, efektywnej):

- obliczenie  $L_{2D,1}$  przy  $\mu_{\text{eff}} = \mu_1 = 1$ ;
- obliczenie  $L_{2D,\#}$  dla arbitralnie przyjętej przenikalności magnetycznej ośrodka  $\mu_{\text{eff}} = \mu_{\#}$ , przy czym  $\mu_{\#} > 1$ .

Obliczenie modelu przy dwóch różnych, zakładanych wartościach efektywnych przenikalności magnetycznych  $\mu_{\text{eff}}$  pozwala na wyznaczanie współczynnika  $d_L$

$$d_L = \frac{L_{2D,1} - L_{2D,\#}}{\mu_1 - \mu_{\#}}. \quad (93)$$

Otrzymany współczynnik po podstawieniu do (92) i obliczeniu indukcyjności niemagnetycznego przewodnika prostokątnego z (91), pozwala na ujednorodnienie komórki o znanej indukcyjności własnej  $L_e$ . Powtarzając procedurę dla wymuszenia  $E_y$ , wyznacza się przenikalność efektywną  $\mu_{\text{eff},xx}$  dla pola wirującego w płaszczyźnie  $xz$ . W obu przypadkach pojawia się współczynnik materiałowy związany ze składową  $H_z$  natężenia pola magnetycznego. Ekstrakcja przenikalności  $\mu_{\text{eff},zz}$  na podstawie obu prób jest niemożliwa metodami analitycznymi. Ze względu na dominujący charakter składowych  $H_x$  i  $H_y$  w bardzo cienkim przewodniku przyjęto

$$\mu_{\text{eff},zz} = (\mu_{\text{eff},xx} + \mu_{\text{eff},yy})/2. \quad (94)$$

Tensor efektywnej względnej przenikalności magnetycznej materiału przyjmuje postać

$$\underline{\underline{\mu}}_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} \mu_{\text{eff},xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\text{eff},yy} & 0 \\ 0 & 0 & (\mu_{\text{eff},xx} + \mu_{\text{eff},yy})/2 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Homogenizacja parametrów komórek izotropowych jest ułatwiona, gdyż zastępcza przenikalność magnetyczna dla pól w obu płaszczyznach jest taka sama. Stąd opis tensorowy nie jest wymagany. Efektywna przenikalność względna, wyznaczona na podstawie obliczeń jednego przypadku polaryzacji zewnętrznego pola elektrycznego, pozwala na określenie pozostałych czynników, a wtedy  $\mu_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff},xx} = \mu_{\text{eff},yy}$ .

Jak pokazano w niniejszym rozdziale, proces homogenizacji właściwości elektrycznych i magnetycznych komórek przeprowadzany jest w oparciu o analizę pojedynczego elementu ograniczonego do obszaru planarnego o wymiarach  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$ . Procedura ujednorodnienia obejmuje następujące kroki:

- 1) dwukrotne rozwiązanie problemu polowego (przy zastosowaniu MR-C w przypadku modelu 2D oraz MES w odniesieniu do modelu 3D);
- 2) obliczenie na podstawie wyników z punktu 1. skupionych parametrów obwodowych komórek  $\Omega_e$ ;
- 3) uwzględnienie analitycznego opisu zależności parametrów skupionych od właściwości materiałowych i wymiarów komórek;
- 4) dodatkowe dwukrotne obliczenie modelu przekroju poprzecznego jednorodnej płytki prostokątnej w przypadku ujednorodnienia właściwości magnetycznych.

Wszystkie etapy realizowane w autorskich skryptach obliczeniowych, umożliwiają ekstrakcję diagonalnych elementów tensorów materiałowych  $\underline{\underline{\sigma}}_{\text{eff}}$  i  $\underline{\underline{\mu}}_{\text{eff}}$ . Opis tensorowy jednorodnego materiału nie zwiększa liczby stopni swobody modelu numerycznego. Natomiast obliczenia układu materiałowego o ciągłej, jednorodnej budowie można przeprowadzić przy zastosowaniu zgrubnej siatki różnicowej lub elementów skończonych, która znacząco redukuje ilość niewiadomych w porównaniu do modelu

rzeczywistej struktury materiału niejednorodnego. Wykonanie homogenizacji danych materiałowych jest przydatne w analizie układów dużej skali, o dowolnej liczbie komórek budujących.

## 4.6. Ewaluacja modelu obwodowego i homogenicznego

### Wprowadzenie

Zastępcze właściwości materiału niejednorodnego charakteryzowane za pomocą modelu obwodowego bądź homogenicznego, pozwalają na odzwierciedlenie złożonych zjawisk związanych z polem elektrycznym oddziałującym na elementy materiału. Przyjęte założenia i zastosowane metody numeryczne powodują, że odpowiedzi na pobudzenie zewnętrznym polem elektrycznym obu modeli, które z założenia mają uprościć analizę układów materiałowych dużej skali pracujących w polach stałych i zmiennych w czasie, nie pokrywają się z faktyczną odpowiedzią materiału. Analiza poszczególnych modeli obliczeniowych ma na celu ocenę ich przydatności, mocnych i słabych stron, ograniczeń, a przede wszystkim różnicy między estymowanymi a faktycznymi właściwościami materiału niejednorodnego.

TABELA 6. Efektywne właściwości analizowanych komórek (geometrie zgodne z rys. 40)

Typ geometrii	$\Omega_{e,f}$				$\Omega_{e,mod1}$				$\Omega_{e,mod5}$			
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
$\sigma_{eff} \cdot 10^6$ [S/m]	20,20	28,90	24,00	31,10	3,21	7,36	12,10	15,40	5,56	2,63	20,30	28,30
$\mu_{eff}$ [-]	46,92	49,53	32,96	44,79	178,18	114,98	75,29	54,26	146,14	147,88	67,28	29,41

Ocenę właściwości proponowanych modeli przeprowadzono opierając się na charakterystykach widmowych. Uwzględniono w ten sposób zjawiska przewodzenia prądu i wytwarzania strumienia magnetycznego w paśmie częstotliwości 1 kHz ÷ 1 MHz. Obliczenia przeprowadzono uwzględniając pojedynczą komórkę  $\Omega_e$ , a porównanie modeli oparto na identyfikacji zmienności admitancji. Analizie poddano elementy dla których już wyznaczono parametry skupione, przy zachowaniu geometrii i materiałów składowych. W rozdziale 4.2 określono rezystancję

i indukcyjność komórek na podstawie analizy stałego pola elektrycznego i magnetycznego za pomocą MR-C i MES. Przedstawione poniżej wyniki otrzymano pobudzając sygnałem harmonicznym:

- 1) model rzeczywistej struktury (MR) – opisany różniczkowym równaniem Helmholtza (39) układ 3D z pełnym odwzorowaniem komórki (rys. 50a);
- 2) model obwodowy (MO) – reprezentowany przez obwód zastępczy (rys. 44b) obliczony przy założeniu stałych wartości  $R_e$  i  $L_e$  w wybranym paśmie pulsacji;
- 3) model homogeniczny (MH) – opisany równaniem (44) układ 2D (rys. 27b) odwzorowujący przekrój poprzeczny homogenicznego materiału o parametrach efektywnych  $\sigma_{\text{eff}}$  i  $\mu_{\text{eff}}$  wyznaczonych na podstawie  $R_e$  i  $L_e$ .

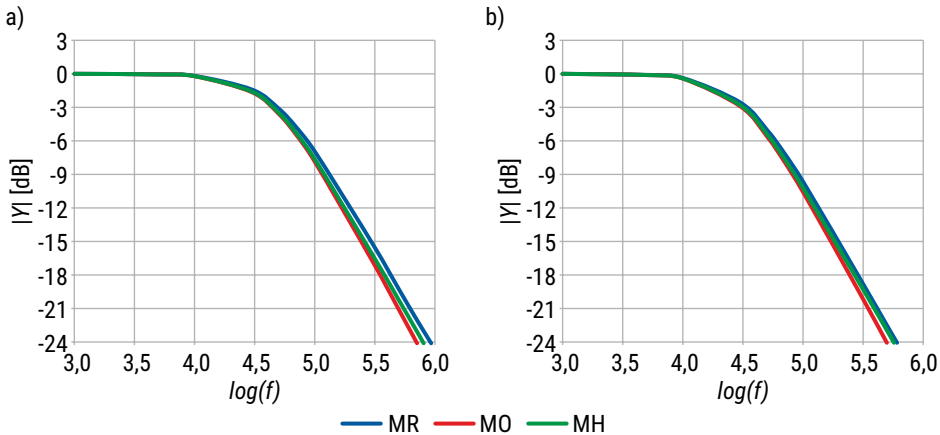
Rozpatrywano 12 wariantów komórek, po 4 z wybranych typów geometrii ( $\Omega_{e,p}$ ,  $\Omega_{e,mod1}$ ,  $\Omega_{e,mod5}$ ). W przypadku modelu jednorodnego (MH), parametry poszczególnych wariantów zostały ujednorodnione zgodnie z procedurami przedstawionymi w rozdziałach 4.5.1 oraz 4.5.2. Ponieważ w każdym przypadku geometrii komórka  $\Omega_e$  pozostaje izotropowa i nie występował przepływ prądu wzdłuż ich grubości, z tego powodu opis tensorowy nie był konieczny. Do modelu homogenicznego wprowadzono efektywne parametry jako wartości skalarne  $\sigma_{\text{eff}}$  i  $\mu_{\text{eff}}$  (tabela 6). W kolejnym kroku, na podstawie obliczeń numerycznych modelu 3D i 2D, przy kolejnych wybranych częstotliwościach wymuszenia obliczano impedancję komórki, a następnie moduł względnej admitancji  $|\underline{Y}| = 20\log(\underline{Y} / \underline{Y}_0)$  wyrażony w [dB]. Na wykresach porównano charakterystyki amplitudowe otrzymane przy zastosowaniu MR, MO, MH.

Podobną analizę w odniesieniu do innych typów komórek przedstawiono w publikacji [115]. Komórki  $\Omega_{e,mod0}$ ,  $\Omega_{e,mod1}$ ,  $\Omega_{e,mod2}$  ujednorodniono stosując przedstawioną procedurę. Charakterystyki amplitudowe, wyznaczone przy uwzględnieniu MH i MR, porównano w zakresie częstotliwości  $0 \div 1$  MHz. W obliczeniach zastosowano metodę elementów skończonych, a szczegółowej analizie poddano częstotliwość odcięcia  $f_c$  przy której  $|\underline{Y}_c| = |\underline{Y}(f_c)| = -3$  dB. Uzyskano zadowalająco wysoką zgodność wyników. Punkty częstotliwości odcięcia  $f_c$  pokrywały się w obu modelach do 1 miejsca po przecinku, przy różnym stopniu złożoności geometrii komórek. Homogenizacja właściwości elektrycznych wskazała na zmienność efektywnej przewodności w przedziale  $(1,7 \div 56) \cdot 10^6$  S/m, a przenikalności magnetycznej względnej w granicach  $1 \div 58$ . Tak szeroki zakres zmian efektywnych parametrów umożliwił uzyskanie komórek zapewniających częstotliwość odcięcia dobieraną w granicach od 20 do 180 kHz. Rozpatrywane struktury mogą posłużyć jako elementy układów elektronicznych o dobieieranym oporze elektrycznym, indukcyjności, czy też jako filtry dolnoprzepustowe z zadaną częstotliwością odcięcia. Teoretyczne obliczenia struktur mogą być przeprowadzone przy użyciu modelu homogenicznego, którego błąd w rozpatrywanym paśmie nie przekraczał 13% (średnia dla wszystkich modeli wyniosła 5,42% a odchylenie standardowe 2,75%).

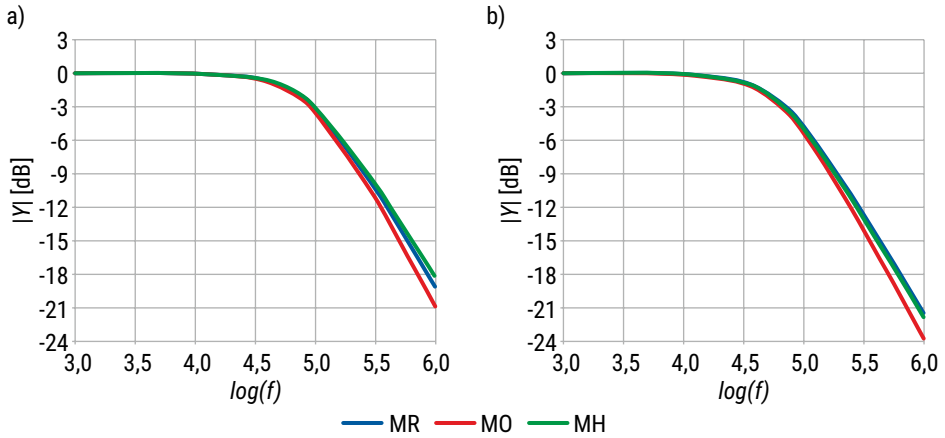
## 4.6.1. Dyskusja wyników

Odpowiedź widmowa komórki jest charakterystyką filtra dolnoprzepustowego I-ego rzędu z częstotliwością odcięcia  $f_c$  przy  $|Y_c| = -3$  dB. Położenie punktu na charakterystyce  $|Y(f_c)|$  zależy od ilorazu  $R_e(f)/L_e(f)$  i pośrednio charakteryzuje właściwości transmisyjne struktury.

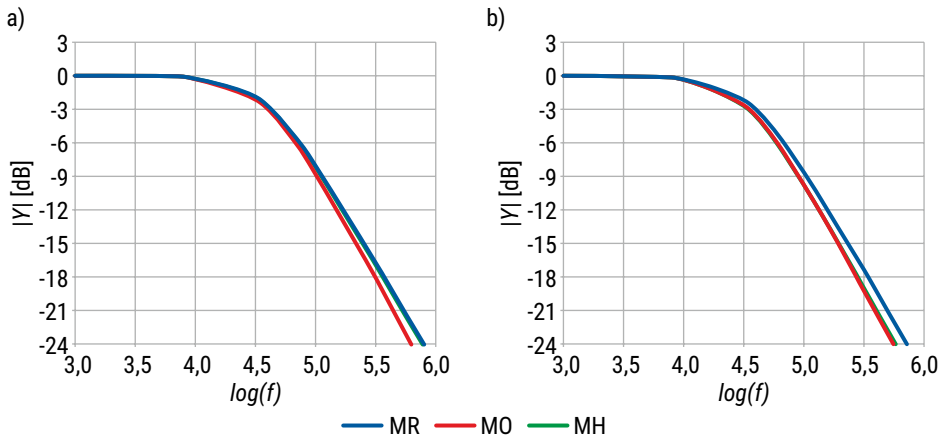
Zgodność wyników oceniono na podstawie kryterium, którym jest poprawne odwzorowanie punktu odcięcia charakterystyki amplitudowej. Komórki  $\Omega_{ef}$  (rys. 51) charakteryzują się najmniejszymi wartościami rezystancji i indukcyjności, stąd częstotliwość  $f_c$  kształtuje się poniżej 35 kHz. Wzrost rezystancji, interpretowany jednocześnie jako obniżenie  $\sigma_{\text{eff}}$  powoduje przesunięcie  $f_c$  w kierunku wyższych częstotliwości. Zaobserwowano to przy geometriach typu  $\Omega_{e,mod1}$  (rys. 52) oraz  $\Omega_{e,mod5}$  (rys. 53), gdzie wartość  $f_c$  przekraczała 100 kHz (wariant f). Za każdym razem odpowiedzi z modelu obwodowego i homogenicznego pokrywały się z modelem rzeczywistej komórki w paśmie sięgającym 200 kHz. W paśmie zaporowym, gdy admitancja struktury znacząco zmalała, charakterystyki MO i MH zauważalnie odbiegały od MR. W paśmie tym sygnał jest tłumiony o ponad -20 dB, a obserwowane odchylenia dotyczą kilkuprocentowych różnic w wartości sygnału ponad 10-krotnie mniejszego względem wartości początkowej w paśmie przepustowym  $|Y(f = 3 \text{ kHz})|$ . W paśmie przewodzenia zarówno model obwodowy, jak i model homogeniczny 2D przekroju materiału, poprawnie naśladują odpowiedź elektryczną struktury.



RYS. 51. Charakterystyki amplitudowe struktur typu  $\Omega_{ef}$ : a) wariant a (tabela 6, rys. 40a); b) wariant b (tabela 6, rys. 40b)



RYS. 52. Charakterystyki amplitudowe struktur typu  $\Omega_{e,mod1}$ : a) wariant f (tabela 6, rys. 40f); b) wariant g (tabela 6, rys. 40g)



RYS. 53. Charakterystyki amplitudowe struktur typu  $\Omega_{e,mod5}$ : a) wariant k (tabela 6, rys. 40k); b) wariant l (tabela 6, rys. 40l)

Otrzymane charakterystyki wskazują na zgodność modelu jednorodnego oraz modelu 3D. Analizując zmienność admitancji  $|\underline{Y}|$  komórek oznaczonych jako b, f, g, k (tabela 6, rys. 40), zauważa się dużą zgodność odpowiedzi obu modeli. W każdym wariantcie MH odznaczał się odpowiedzią bliższą wynikom uzyskanym za pomocą MR, niż uzyskanym przy zastosowaniu MO. Tłumaczy to pośrednie uwzględnienie w MH i MR sprzężenia pól elektrycznego i magnetycznego objawiające się jako efekt naskórkowości. Przy wyższych pulsacjach pola zmieniał się rozkładu gęstości prądu elektrycznego w przekroju elementu, prowadząc do jednoczesnego wzrostu rezystancji

i obniżenia indukcyjności stąd należy przyjąć, że  $R_e = f(f)$  i  $L_e = f(f)$ . W sformułowaniu obwodowym oba parametry były niezmiennie. Inaczej jest w modelu homogenicznym, gdzie w przekroju struktury homogenicznej miała miejsce zmiana rozkładu gęstości prądu, jak w modelu rzeczywistym. Efekt naskórkowości został uwzględniony, prowadząc do ograniczenia błędów odwzorowania zjawisk polowych.

## Podsumowanie

Analiza polowa przeprowadzona w obrębie elementu  $\Omega_e$  lub połączenia kilku komórek, stanowi podstawę do określenia parametrów modelu obwodowego. Wykonane próby umożliwiają porównanie rezystancji, indukcyjności i wsp. sprzężenia otrzymane metodą różnicowo-całkową (model 2D) i metodą elementów skończonych (model 3D). Model 2D charakteryzuje się zgodnością jakościową, naśladując trend zmian parametrów wraz z modyfikacją geometrii elementu, w większości przypadków zachowując także zgodność ilościową. Średni błąd dla rezystancji wyniósł 1,04%, indukcyjności własnej 3,48%, a wsp. sprzężenia magnetycznego 16,1%. Wykazano, że zależność parametrów elektrycznych od parametrów geometrycznych można opisać za pomocą funkcji wielomianowych. Uzyskano analityczne równania umożliwiające szybkie przeliczenie parametrów elektrycznych dla określonych geometrii komórek.

Scharakteryzowano dwa sposoby modelowania układów periodycznych dużej skali. Metoda sieciowa bazuje na przybliżeniu układu za pomocą obwodu o parametrach rozproszonych z szeregowo-równoległym połączeniem impedancji. Parametry elektryczne komórek otrzymywane są na podstawie rozwiązania zagadnienia polowego. Z tego powodu analiza rozległych układów wymaga sprzężenia opisu polowego i obwodowego – pierwszy służy wyznaczeniu zastępczych parametrów obwodu, drugi umożliwia rozwiązanie zagadnienia ze względu na rozkład potencjału przy określonej topologii połączeń. Drugi sposób analizy bazuje na ujednorodnieniu materiału i wyznaczeniu efektywnych właściwości komórek na podstawie parametrów obwodowych. Sposób ten prowadzi do analizy polowej z dużo niższą liczbą stopni swobody i umożliwia uwzględnienie anizotropii. Proponowany sposób homogenizacji pozwala na rozpatrywanie materiałów o złożonych właściwościach, umożliwiając określenie tensorów przewodności elektrycznej i przenikalności magnetycznej.

Ocenę modeli przeprowadzono w zakresie częstotliwości pracy rozpatrywanych struktur. Porównano charakterystyki amplitudowe wyznaczone na podstawie modelu obwodowego i modelu polowego 2D materiału jednorodnego, z charakterystyką otrzymaną w modelu polowym 3D. Zgodność charakterystyk potwierdza poprawność identyfikacji parametrów skupionych i możliwości stosowania modeli homogenicznych o zadanych, wyznaczonych właściwościach efektywnych niejednorodnego materiału.

# Rozdział 5

## Dobór właściwości materiałów niejednorodnych

### Wprowadzenie

Właściwości materiału niejednorodnego uzyskane w wyniku formowania jego wewnętrznej struktury zmieniają się określonych zakresach, różnią w zależności od kierunku przyłożenia zewnętrznego pola (anizotropia) i mogą być kształtowane jednocześnie (efektywna przewodność elektryczna oraz przenikalność magnetyczna). Ograniczenie w konstrukcji, złożoność geometrii i struktura komórek determinują zakres potencjalnych zmian ich właściwości elektrycznych oraz magnetycznych. Określenie granic tych zmian pozwala na poszukiwanie i zastosowanie innych geometrii komórek w celu uzyskania pożądaných właściwości. Dobór kształtu komórek umożliwia stworzenie anizotropowego układu, przy czym struktura elementów musi stać się bardziej złożona, m.in. przez wprowadzenie licznych deformacji elementów ścieżek, które kształtowane są przez kilka parametrów geometrycznych. Symultaniczny dobór właściwości elektrycznych i magnetycznych jest możliwy, ale podkreślić należy, że przebiega nieliniowo. Każda zmiana geometrii wewnętrznej elementu rzutuje jednocześnie i w różnym stopniu na rozkłady obu analizowanych pól. Dlatego ważne jest wypracowanie skutecznej metody doboru właściwości materiału niejednorodnego, w której cały proces może zostać przynajmniej w części zalgorytmizowany.

W celu doboru struktury komórek tworzących materiał niejednorodny zastosowano schemat optymalizacyjny, którego zadaniem jest poszukiwanie globalnego ekstremum  $x_0$  funkcji celu  $F(x)$ , spełniającego narzucone warunki optymalizacji (m.in. błąd przybliżenia rozwiązania, liczba iteracji, liczba wykonanych kroków obliczeniowych, ograniczenie obszaru przeszukiwania zmiennych, itp.). Spośród licznych, dostępnych metod [129] w realizowanych pracach zastosowano metodę PSO (ang. *Particle Swarm Optimization*), [24]. Algorytm charakteryzuje się prostotą oraz przejrzystością schematu obliczeniowego, ograniczonego do wykonania minimalnej liczby kroków i decyzji, przy zachowanych warunkach wyznaczenia optimum globalnego. Pod tym względem PSO pozostaje konkurencyjnym w porównaniu do metod genetycznych [84]. Drugim ważnym aspektem jest względnie szybka zbieżność do ekstremum funkcji celu [48, 105, 112, 117] niezwykle ważna, gdyż zmniejsza tym samym liczbę kroków obliczeniowych wykonywanych w ramach procedury



optymalizacyjnej. Optymalizowana funkcja jest nieliniowa, o nieznanym rozkładzie w obszarze optymalizacji, a jej dyskretne wartości znajdowane są w oparciu o rozwiązanie numerycznych modeli polowych. Biorąc pod uwagę czas obliczeń modelu (MES lub MR-C), redukcja liczby kroków wykonywanych w ramach algorytmu zmniejsza czas potrzebny na znalezienie układu o pożądanym właściwościach.

Schemat PSO został zaimplementowany przez autora w skrypcie obliczeniowym. Poprzez dobór parametrów geometrycznych wybranych typów komórek, dążono do zapewnienia spełnienia w zadowalającym stopniu wymagań stawianych rozpatrywanym struktutom. Zagadnienie należy do grupy problemów inżynierii odwrotnej, w których celem jest dobór parametrów geometrycznych zapewniających osiągnięcie zadanych właściwości. Zastosowanie metod obliczeniowych jest niezbędne, gdyż iteracyjne przeszukiwanie przestrzeni zmiennych geometrycznych, w oparciu o określone dla wybranych punktów wartości funkcji celu (właściwości fizycznych), stanowi podstawę działania metody optymalizacyjnej, w której analityczna postać zmian funkcji celu  $F(\mathbf{x})$  jest nieznaną.

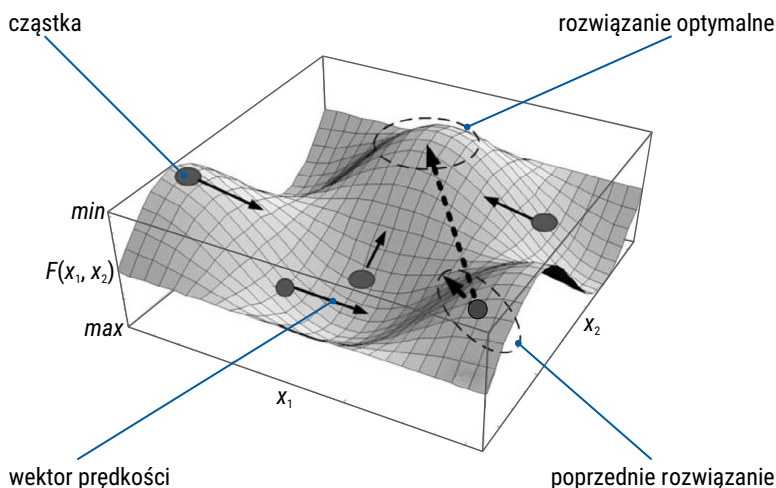
W rozdziale scharakteryzowano metodę PSO w kontekście zastosowania w zadaniu projektowania materiału niejednorodnego. Omówiono podstawowe aspekty związane z realizacją algorytmu oraz ograniczeniami realizowanego zadania optymalizacyjnego. Skrypt realizujący schemat PSO wykorzystano do dwóch klas zagadnień, w których materiały niejednorodne mogą znaleźć zastosowanie. Jako pierwszy z nich rozpatrzono dobór właściwości elektrycznych komórek izotropowych, zapewniających uzyskanie charakterystyki amplitudowej o zadanej częstotliwości odcięcia  $f_c$ . Z użyciem PSO poszukiwano geometrii komórki, której właściwości elektryczne (rezystancja) i magnetyczne (indukcyjność) pozwalają na uzyskanie pożądanej odpowiedzi częstotliwościowej. Drugim problemem była synteza płaszcza elektrycznego. Jego realizacja, przy zastosowaniu anizotropowej komórki, jest realizowana z użyciem proponowanego sposobu homogenizacji właściwości elektrycznych. Znając wartości efektywnej przewodności dla dwóch polaryzacji zewnętrznego pola elektrycznego, z użyciem algorytmu PSO realizowano zadanie syntezy komórki o tensorze przewodności zbliżonym w największym możliwym stopniu do wymaganego.

## 5.1. Synteza materiału z użyciem PSO

### 5.1.1. Opis algorytmu optymalizacyjnego

Problem optymalizacji związany z analizą funkcji celu o nieznanym rozkładzie, zależnej od wielu zmiennych, sprowadza się do znalezienia globalnego ekstremum przy użyciu heurystycznych metod iteracyjnych. Przykładem stosowanych metod są algorytmy genetyczne (ang. *Genetic algorithm*, GA), różnicowanie ewolucyjne (ang. *Differential*

evolution, DE), sztuczna kolonia pszczół (ang. *Artificial bee colony*, ABC), czy opracowana w połowie lat 90-tych ubiegłego wieku optymalizacja rojem cząstek (PSO) [24]. Proponowana procedura projektowa wykorzystuje PSO ze względu na potencjalnie szybką zbieżność do ekstremum funkcji celu. W przypadku zagadnień dla których uzyskanie pojedynczego rozwiązania przy zadanych parametrach wejściowych jest znacznie wydłużone (np. związane z przeprowadzeniem szeregu obliczeń numerycznych), szybka zbieżność algorytmu do nawet lokalnego ekstremum funkcji celu jest cechą pożądaną. Realizacja procedury nie zawsze zapewnia znalezienie rozwiązania optymalnego w sensie globalnym, lecz najczęściej tylko zbliżone do globalnego, leżące w jego otoczeniu. Algorytm PSO ze względu na rozłożenie wartości testowych w przestrzeni poszukiwań rozwiązania, pozwala na szerokie przebadanie przestrzeni optymalizacji.



RYS. 54. Funkcja celu  $F(x_1, x_2)$  zmiennych  $x_1$  i  $x_2$  – minimum globalne poszukiwane w wyniku iteracyjnego przemieszczania cząstek w przestrzeni zmiennych zgodnie z określonym schematem [65]

Algorytm PSO opiera się na wykorzystaniu skończonej populacji rozwiązań próbnych, tzw. agentów. Ich rozmieszczenie w przestrzeni zmiennych (rys. 54) jest opisane wektorem zmiennych  $\mathbf{x}$ ,  $\dim(\mathbf{x}) = 1 \times r$ , zawierającym  $r$  zmiennych decyzyjnych (parametrów kształtujących właściwości  $\Omega_i$ )

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_r]. \quad (96)$$

Obliczone dla kolejnych wariantów  $\mathbf{x}$  wartości funkcji celu  $F(\mathbf{x})$ , stanowią podstawę do oszacowania parametrów poprawy jakości rozwiązania, określenia modyfikacji kierunku i wartości prędkości przemieszczenia cząstek, a w konsekwencji – ich położenia w przestrzeni zmiennych [42]. Dla  $i$ -tego agenta oraz całej ich populacji złożonej

z  $l_a$  agentów, w każdym kroku algorytmu optymalizacyjnego ( $l = 1, 2, \dots, l \in N$ ) określa się najlepsze rozwiązania każdego agenta  $\mathbf{x}_{l,best}^i$  i najlepsze w danym zbiorze cząstek  $\mathbf{x}_{l,best}^g$ . Obliczone parametry mają bezpośredni wpływ na modyfikację wektorów prędkości każdego agenta

$$\mathbf{v}_{l+1}^i = w\mathbf{v}_l^i + c_1(\mathbf{x}_{l,best}^i - \mathbf{x}_l^i) + c_2(\mathbf{x}_{l,best}^g - \mathbf{x}_l^i), \quad (97)$$

gdzie:  $\mathbf{x}_l^i$  – wektor położenia  $i$ -tego agenta w  $l$ -tej iteracji,  $c_1, c_2$  – dobierane współczynniki wagowe;  $w$  – wagowy współczynnik inercji. Obliczona prędkość jest skalowana przez współczynnik ścisku  $t$  i służy do określenia nowego położenia agenta w przestrzeni zmiennych, w kolejnym kroku iteracyjnym  $l+1$

$$\mathbf{x}_{l+1}^i = \mathbf{x}_l^i + t\mathbf{v}_{l+1}^i. \quad (98)$$

W opracowanej wersji schematu PSO jego zatrzymanie następuje po wykonaniu określonej liczby iteracji  $l_{max}$  lub osiągnięciu zadanego błędu  $\varepsilon_{min}$ . Zastosowanie pierwszego kryterium ogranicza liczbę iteracji i gwarantuje zawsze zatrzymanie algorytmu oraz zwrócenie danych opisujących rozwiązanie przy ograniczeniu czasu i kosztu obliczeniowego algorytmu. Zastosowanie tego warunku jest uzasadnione, ponieważ drugie kryterium, na skutek narzucenia zbyt rygorystycznej wartości  $\varepsilon_{min}$ , może nie doprowadzić do znalezienia rozwiązania. Współczynniki algorytmu  $t, w, c_1, c_2$  mogą być zdeterminowane, generowane losowo w każdej iteracji, bądź adaptowane dynamicznie. Niestety przy małej liczbie cząstek w ramach prowadzonych testów, losowość wprowadza do algorytmu efekty chaosu, zaburzające zdeterminowany ruch agentów w kierunku poprawy ich rozwiązania. Pominięto również włączenia mechanizmów dynamicznej zmiany współczynników, ze względu na trudności określenia kryteriów i metod adaptacji. W przypadku agentów, których położenie może wykraczać poza dziedzinę optymalizacji, zastosowano tzw. ucięcie pozycji agenta (ang. *position-clipping*), [59], polegające na każdorazowym sprawdzeniu wektora  $\mathbf{x}_l^i$  i odgórnej zmianie zbyt małych/dużych wartości zmiennych  $x_r$  na narzucone ze względu na konstrukcję komórki lub właściwości materiału niejednorodnego.

Na podstawie poczynionych założeń, opracowaną implementację algorytmu PSO można zawrzeć w 12 ogólnych krokach [3].

- 1) Ustaw stałe parametry  $w, t, c_1, c_2$ , liczbę agentów  $l_a$  oraz liczbę iteracji  $l_{max}$ .
- 2) Wylosuj początkowe pozycje agentów  $\mathbf{x}_l^i$  oraz prędkości  $\mathbf{v}_l^i, i = 1, 2, \dots, l_a$ .
- 3) Sprawdź ograniczenie: jeżeli  $\forall_{i,j} (x \min_j \leq x_j^i \leq x \max_j)$  przejdź do kroku 4.

Jeśli nie, to  $\forall_{i,j} (x \min_j > x_j^i)$  zachodzi  $x_j^i = x \min_j$

oraz  $\forall_{i,j} (x \max_j < x_j^i)$  zachodzi  $x_j^i = x \max_j$ , gdzie  $j$  jest numerem zmiennej.

- 4) Wykonaj pierwszą iterację ( $l = 1$ ) i oblicz wartości funkcji celu  $F_1^i(\mathbf{x}_1^i)$  dla poszczególnych agentów (na podstawie MES lub MR-C).
- 5) Znajdź najlepsze rozwiązanie  $F_{1,best}^g(\mathbf{x}_{1,best}^g)$  i odpowiadający mu wektor  $\mathbf{x}_{1,best}^g$ , gdzie  $g$  jest numerem lidera roju cząstek.
- 6) Zaktualizuj wektory prędkości cząstek na podstawie (97).
- 7) Wyznacz nowe położenia agentów zgodnie z (98).
- 8) Powtórz krok nr 3.
- 9) Rozpocznij kolejną iterację ( $l = l + 1$ );
- 10) Oblicz wartości funkcji celu  $F_l^i(\mathbf{x}_l^i)$ .
- 11) Znajdź najlepsze rozwiązania własne agentów  $F_{l,best}^i(\mathbf{x}_{l,best}^i)$  i odpowiadające im wektory  $\mathbf{x}_{l,best}^i$  oraz najlepsze z rozwiązań w ramach roju  $F_{l,best}^g(\mathbf{x}_{l,best}^g)$  i odpowiadający mu wektor  $\mathbf{x}_{l,best}^g$ .
- 12) Jeśli  $l < l_{max}$  lub  $\varepsilon_l^g > \varepsilon_{min}$  wykonaj ponownie kroki od 6 do 11. W przypadku  $l \geq l_{max}$  lub  $\varepsilon_l^g \leq \varepsilon_{min}$  zakończ algorytm i podaj dane dotyczące najlepszego rozwiązania: wartości funkcji celu  $F_{n,best}^g(\mathbf{x}_{n,best}^g)$  i wektor zmiennych  $\mathbf{x}_{l,best}^g$ .

Schemat zaimplementowano w skrypcie obliczeniowym, ograniczając liczbę agentów do  $l_a \in \langle 3; 5 \rangle$  oraz maksymalną liczbę iteracji ( $l_{max} \leq 10$ ). Tak narzucone warunki pracy wymuszały ponowne inicjowanie algorytmu, jeżeli końcowe wartości minimalizowanej funkcji celu odbiegały od oczekiwanych. Ponadto, należało liczyć się z każdorazowo innym rozwiązaniem wynikającym m.in. z różniących się punktów startowych agentów. Mimo to, algorytm PSO umożliwiał rozwiązanie wszystkich postawionych zadań z zadowalająco małymi błędami przybliżeń  $\varepsilon$  do narzuconych parametrów optymalizowanej struktury elementu  $\Omega_e$ .

## 5.1.2. Synteza materiału niejednorodnego z użyciem PSO

Realizowane zadanie syntezy polega na uzyskiwaniu obiektów o określonych właściwościach, lecz zadanie to jest słabo określone, gdyż często istnieje więcej niż jedno jego rozwiązanie, a więc osiąganę jest przez układy o różnej budowie. W przypadku niejednorodnych materiałów dotyczy to przede wszystkim związku ich budowy geometrycznej z właściwościami zastępczymi. Parametry kompozytu kształtowane są nie tylko w oparciu o właściwości materiałów składowych (budujących poszczególne warstwy), ale przede wszystkim w wyniku modyfikacji struktury wewnętrznej komórek. Ze względu na silnie nieliniową zależność parametrów zastępczych komórki od jej parametrów geometrycznych i ich jednoczesny wpływ na poszczególne właściwości (np. efektywną przewodność elektryczną i przenikalność magnetyczną),

optymalizowana funkcja celu również pozostaje nieliniowa. Stąd do rozwiązania zagadnienia syntezy materiału uzasadnione jest wykorzystanie algorytmów programowania nieliniowego, a do ich klasy należą m.in. metoda PSO.

Problem kształtowania parametrów komórek  $\Omega_c$  poruszono w rozdziale 4.3.2. Przedstawiono w nim proces doboru odpowiedzi układu na zadane wymuszenie, jako schemat działania układu regulacji z pętlą sprzężenia zwrotnego do obiektu (rys. 45). Był on realizowany przez kolejne człony decyzyjne ( $CD_p$ ) wpływające na niezależne zmienne w równaniu wielomianowym opisującym transmitancję obiektu. Decyzja o wielkości zmiany określonego parametru wynikała wprost z różnicy między zadaną a otrzymaną wielkością wyjściową. Tego rodzaju metoda regulacji realizuje schemat optymalizacyjny poprzez modyfikację wartości grubości, wycięcia, zaokrąglenia, itp. w analitycznym równaniu tak, by odpowiedź obiektu (w największym możliwym stopniu) zgodziła się z zadaną. Człony decyzyjne  $CD$  należy traktować jako funkcje nieliniowe obliczające wartość zmiany parametru ( $\Delta w_p, \Delta x$ ) w zależności od uchybu. Zestawem takich członów decyzyjnych może być schemat PSO, czyli wszystkie funkcje zawierające się między krokiem obliczenia wartości funkcji celu  $F(\mathbf{x})$  a momentem wprowadzenia do modelu nowych wektorów  $\mathbf{x}$ .

Człony decyzyjne mogą działać także wedle innych algorytmów opartych, np. o logikę rozmytą, sieci neuronowe lub klasyczne regulatory typu PID. Potrzebna jest przy tym znajomość równania opisującego transmitancję obiektu, czyli zależność jego właściwości od parametrów geometrycznych i materiałowych. PSO nie wymaga takiego opisu, bazując tylko na dyskretnych wartościach optymalizowanej funkcji celu. Jest zatem podejściem uniwersalnym, gdyż problem syntezy można zdefiniować nie tylko w oparciu o konkretne parametry (np. wymaganą wartość indukcyjności), ale nawet dużo bardziej złożone zależności (np. zmienność lub wartości charakterystyki widmowej [117]) dla obiektów o nieznanym opisie analitycznym. W algorytmie zawarte są także ograniczenia przeszukiwanej przestrzeni zmiennych. Narzucone histerezy dla wartości wyjściowej regulatora PID blokuje niedopuszczalny spadek lub wzrost parametru poza narzucone granice, ale regulator nie zmodyfikuje parametrów (wzmocnienia i stałych czasowych), przez co proces optymalizacji może utknąć w określonym punkcie pracy (stabilizacja odpowiedzi z niedopuszczalnie dużym uchybem).

Zastosowanie algorytmu optymalizacyjnego wiąże się z koniecznością zbalansowania przeciwstawnych założeń. Z punktu widzenia projektanta ważna jest minimalizacja czasu pracy algorytmu, co wprost przekłada się na redukcję liczby kroków, na które składa się liczba agentów i iteracji. Oprócz tego istotna jest zbieżność do optymalnego rozwiązania z możliwie najmniejszym błędem. Jednak ograniczenie liczby agentów wpływa negatywnie na ilość informacji uzyskiwanych w każdym kroku, zaś mała liczba iteracji może przedwcześnie zakończyć pracę algorytmu zanim zostanie określone rozwiązanie optymalne. Dążenie do skrócenia czasu wyznaczenia rozwiązania najczęściej obniża dokładność, a dobór wszystkich parametrów realizacji algorytmu (w tym także współczynników  $w, t, c_1, c_2$ ) jest decydujący w kwestii

skuteczności zastosowanej metody optymalizacyjnej do syntezy materiału niejednorodnego. Omówiony algorytm zastosowano w obliczeniach przedstawionych w rozdziałach 5.2 oraz 5.3.

## 5.2. Dobór właściwości materiałów izotropowych

### Wprowadzenie

Jednoczesny wpływ parametrów geometrycznych komórki na jej właściwości elektryczne i magnetyczne, utrudnia dobór rezystancji i indukcyjności własnej elementu. Modyfikacja struktury pociąga za sobą nie tylko zmianę jednej wielkości obwodowej, ale również zmianę pod względem ilościowym innych wielkości. Zadanie zsyntetyzowania materiału o właściwościach determinowanych przez komórki wymaga zatem zastosowania algorytmu, który określając geometrię elementu uwzględni nieliniową zależność wielkości skupionych od parametrów geometrycznych. Wybrane struktury (np. typ  $\Omega_{e^{mod\#}}$ ) umożliwiają częściową separację wpływu niektórych parametrów na wypadkowe właściwości, jednak ich dobór w szerokim zakresie wymaga uwzględnienia wszystkich zmiennych opisujących geometrię komórki. W ten sposób możliwe jest przybliżenie się lub osiągnięcie zakładanych parametrów.

Problem staje się istotny w przypadku, gdy właściwości materiału niejednorodnego zależą od wzajemnej relacji obu parametrów. Przykładem jest charakterystyka amplitudowa, która wobec występowania w jego obwodowym schemacie zastępczym wyłącznie elementów czynnych i indukcyjnych, jest charakterystyką filtra dolno-przepustowego pierwszego rzędu. Częstotliwość odcięcia  $f_c$  układu zależy od ilorazu  $R_e/X_e$ , dlatego konieczne jest symultaniczne uwzględnienie oporu czynnego i biernego. Proponowane struktury mogą być wykorzystane w układach elektronicznych jako elementy wtrącające jednocześnie pożądaną rezystancję i reaktancję. Jeżeli mają być przy tym spełnione wymagane właściwości filtrujące, niezbędne jest określenie właściwej relacji części czynnej oraz biernej impedancji zastępczej komórki  $\Omega_e$ .

Rozdział poświęcono rozwiązaniu tego rodzaju problemu. Ponieważ właściwości filtrujące układu nie muszą zależeć od kierunku zewnętrznego pola elektrycznego, wobec tego do syntezy rzeczywistego filtra pasywnego zastosowano elementy izotropowe. Szeroki dobór  $R_e$  i  $L_e$  możliwy jest za pomocą komórek typu  $\Omega_{e^{mod\#}}$ , dlatego wybrano trzy typy:  $\Omega_{e^{mod0}}$ ,  $\Omega_{e^{mod3}}$ ,  $\Omega_{e^{mod5}}$  i porównano pod względem możliwości formowania ich odpowiedzi amplitudowej.

### 5.2.1. Synteza struktury o pożądaných właściwościach filtrujących

Na wstępie zdefiniowano parametry, a przede wszystkim częstotliwość odcięcia filtru, konieczne w celu uzyskania jego fizycznej realizacji. Następnie omówiono struktury charakteryzujące się możliwością szerokiego doboru rezystancji i indukcyjności własnej. Na koniec krótko przedstawiono parametry wykorzystywanego schematu optymalizacyjnego PSO i warunki jego realizacji.

#### 1) Właściwości filtru

Ze względu na rezystancyjno-indukcyjny charakter rozpatrywanych komórek, a także topologię połączenia elementów w schemacie zastępczym, układ umożliwia realizację filtru dolnoprzepustowego pierwszego rzędu. Punktem na charakterystyce amplitudowej, stanowiącym granicę między pasmem przepuszczania a pasmem zaporowym, jest częstotliwość odcięcia  $f_c$ . Właściwości elementu w funkcji częstotliwości  $f$ , przy określonych parametrach schematu zastępczego (rys. 55a), opisano za pomocą modułu admitancji

$$|\underline{Y}(f)| = \frac{1}{\sqrt{R_z^2 + 4\pi^2 f^2 L_z^2}}. \quad (99)$$

Tłumienie filtru  $K$  można wyznaczyć na podstawie zależności (99) oraz znajomości modułu admitancji  $|\underline{Y}(0)|$  przy częstotliwości  $f = 0$  Hz ze wzoru

$$K(f) = 20 \log \frac{|\underline{Y}(f)|}{|\underline{Y}(0)|}. \quad (100)$$

Uwzględniając wzory (99) i (100) oraz umowną granicę między pasmem przepuszczania i tłumienia ( $K = -3$  dB), wzór określającą teoretyczną wartość częstotliwości odcięcia przyjmie postać

$$f_c = \frac{R_e}{2\pi L_e}. \quad (101)$$

Charakterystyka tłumienia idealnego filtru w paśmie zaporowym jest monotonicznie malejąca ze współczynnikiem tłumienia wynoszącym  $-20$  dB/dek. Natomiast w paśmie przepuszczania wartość tłumienia  $K$  jest stała. Fizyczna realizacja idealnego układu filtrującego z użyciem materiału niejednorodnego nie jest możliwa, stąd otrzymana odpowiedź będzie jedynie przybliżeniem odpowiedzi idealnej.

#### 2) Opis struktury

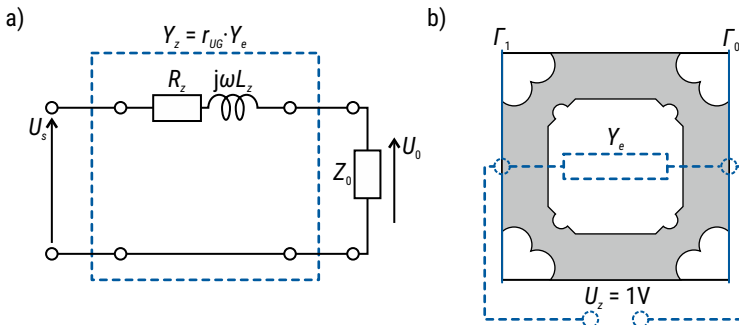
W rozdziale 4.4.1 wskazano, że istnieje uwarunkowany współczynnikiem topologii  $r_{UG}$  związek między zastępczymi właściwościami układu, a impedancją komórki. Ponieważ admitancja materiału jest bezpośrednio związana z admitancją elementu

$\Omega_e$ , to zadanie syntezy struktury o określonej charakterystyce amplitudowej ogranicza się do rozważań nad pojedynczą komórką. W rozpatrywanych wariantach geometrii komórek (rys. 22a, d, e) przyjęto założenia:

- a) rozmiary komórek pozostają stałe i wynoszą  $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z} = 5 \times 5 \times 0,2$  mm;
- b) przewodność elektryczna części przewodzącej  $\sigma_A = 5,6 \cdot 10^7$  S/m.

Zastosowanie miedzi jako materiału budującego ma na celu redukcję rezystancji i zwiększenie dobroci elementu, umożliwiając uzyskanie niskich częstotliwości odcięcia (np.  $f_c = 20$  kHz). Struktury o tego rodzaju parametrach można wytworzyć, np. metodą trawienia laminatów o pogrubionej warstwie miedzi ( $d_{e,z} = 200$   $\mu$ m).

Na rys. 55 przedstawiono uproszczony obwód zawierający czwórnik realizujący zadanie filtracji napięcia harmonicznego  $U_s$  przez układ o admitancji  $Y_z$ . Współczynnik tłumienia jest identyczny dla układu i komórek tworzących, ponieważ jego wielkość jest wyrażona przez iloraz admitancji i podlega jedynie liniowemu skalowaniu z uwzględnieniem współczynnika topologii  $r_{UG}$ . Z tego względu analizie poddano pojedynczy element (rys. 55b). Z czwórника wyodrębniono gałąź podłużną i podłączono do źródła napięciowego  $U_z = 1$  V. Po obliczeniu modelu komórki ze względu na pole elektryczne i magnetyczne wyznaczano parametry skupione ( $R_e, L_e$ ). Na podstawie (101) obliczano częstotliwość odcięcia, a po podstawieniu (99) do (100) wykreślano charakterystykę amplitudową  $K(f)$ .



RYS. 55. Realizacja filtru dolnoprzepustowego: a) obwód pobudzony harmonicznym napięciem  $U_s$  z filtrem  $Y_z$  i odbiornikiem  $Z_0$ ; b) ideowy schemat do wyznaczania właściwości komórek tworzących filtr

### 3) Proces doboru geometrii układu

Synteza geometrii komórek  $\Omega_{e,mod\#}$  odbywała się przy określonych nastawach algorytmu PSO, stałych dla wszystkich przypadków (tabela 7). Skalowaniu podlegała jedynie liczba agentów, którą zmieniano w zależności od stopnia złożoności geometrii komórki. Liczba zmiennych podlegających zmianom, mającym wpływ na wynik



optymalizacji wynosiła 3, 4 lub 5 odpowiednio dla elementów  $\Omega_{e,mod0}$ ,  $\Omega_{e,mod3}$ ,  $\Omega_{e,mod5}$ . Dlatego liczbę agentów zmieniano liniowo w zależności od liczby zmiennych uwzględnianych w procesie optymalizacji.

Za funkcję celu przyjęto błąd średniokwadratowy między otrzymaną charakterystyką amplitudową  $K_o(f)$  a idealną  $K_z(f)$  o zadanej częstotliwości odcięcia  $f_{c,z}$

$$F(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{p=1}^P [K_o(f_p) - K_z(f_p)]^2}, \quad (102)$$

gdzie:  $P = 10$  – liczba punktów obliczeniowych na charakterystyce amplitudowej,  $f_p \in \{0,1; 1; 10; 30; 75; 110; 150; 300; 750; 1000\}$  kHz. Wektory zmiennych podlegających modyfikacjom przyjęły postać

$$\begin{aligned} \Omega_{e,mod0} : \mathbf{x}_{mod0} &= [d_{1,2} \quad d_3 \quad r_0], \\ \Omega_{e,mod3} : \mathbf{x}_{mod3} &= [d_{1,2} \quad d_3 \quad r_1 \quad r_2], \\ \Omega_{e,mod5} : \mathbf{x}_{mod5} &= [d_{1,2} \quad d_3 \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3]. \end{aligned} \quad (103)$$

Procedura optymalizacyjna była realizowana w celu uzyskania struktur o narzuconych częstotliwościach odcięcia  $f_{c,z} \in \{20; 60; 90; 110; 150\}$  kHz. Początkowe wartości wektora  $\mathbf{x}$  losowano z przedziału ograniczonego przyjętymi wartościami (tabela 7), zaś wartości wektora prędkości  $\mathbf{v}$  w ramach algorytmu PSO losowano z przedziału  $0 \div 1$ .

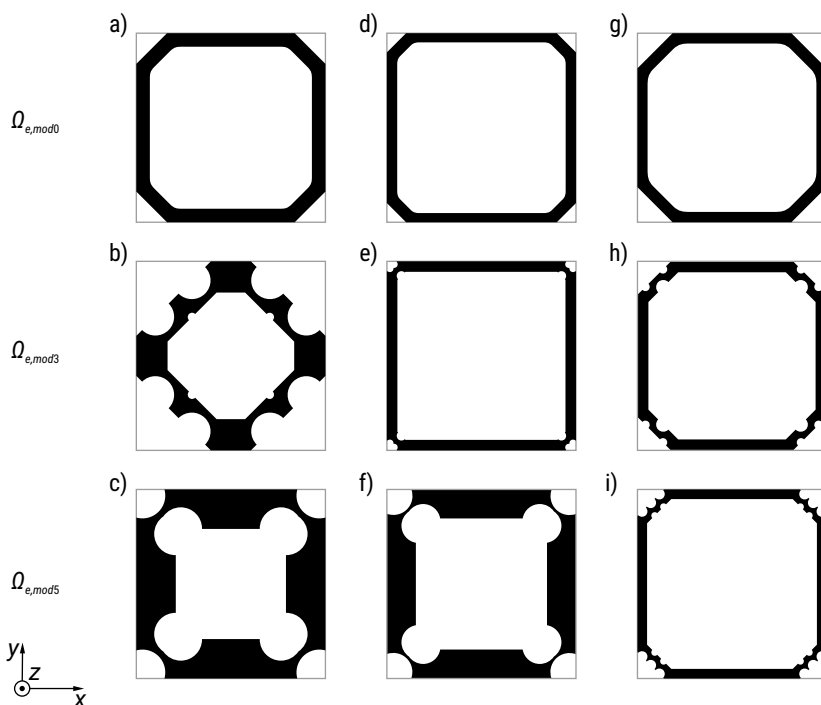
TABELA 7. Zestawienie parametrów realizacji schematu PSO

Grupa parametrów	Symbol	Wartość	Uwagi
Współczynniki algorytmu	$l_a$ $w$ $t$ $c_1, c_2$	3 ( $\Omega_{e,mod0}$ ), 4 ( $\Omega_{e,mod3}$ ), 5 ( $\Omega_{e,mod5}$ ) 0,5 0,3 1,5	Liczba agentów skalowana w zależności od liczby zmiennych.
Kryterium zakończenia obliczeń	$l_{max}$	7	-
Ograniczenie dziedziny optymalizacji	$d_{1,min} = d_{2,min}$ $d_{1,max} = d_{2,max}$ $d_{3,min}$ $d_{3,max}$ $r_{0,min}$ $r_{0,max}$ $r_{1,min} = r_{2,min} = r_{3,min}$ $r_{1,max} = r_{2,max} = r_{3,max}$	0,50 mm 4,50 mm 0,25 mm 4,50 mm 0,05 mm 1,00 mm 0,05 mm 0,60 mm	Wartości graniczne parametrów geometrycznych wynikają m.in. z możliwości realizacji rzeczywistych układów i ograniczeń obliczanego modelu numerycznego.

Proces syntezy wykonano w oparciu o model 3D komórek i dielektrycznego otoczenia rozwiązywany za pomocą MES. Pakiet numeryczny Comsol sprzęgnięto z własnym skryptem realizującym schemat PSO. Zautomatyzowanie procesu wymiany informacji i doboru geometrii komórek pozwoliło na efektywną realizację procedury obliczeń oraz uzyskanie geometrii spełniających z przybliżeniem narzucone wymagania.

## 5.2.2. Dyskusja wyników

Efektom działania algorytmu było wyznaczenie wektora zmiennych (103) dla każdej z częstotliwości odcięcia oraz wariantu elementu. Przykładowe struktury elementów (rys. 56) charakteryzują się zróżnicowaną budową. Porównując geometrie komórek zapewniające  $f_c = 60$  kHz otrzymano odmienne ułożenie ścieżek i wcięć profilujących, szerokości styku i wycięcia wewnętrznego.

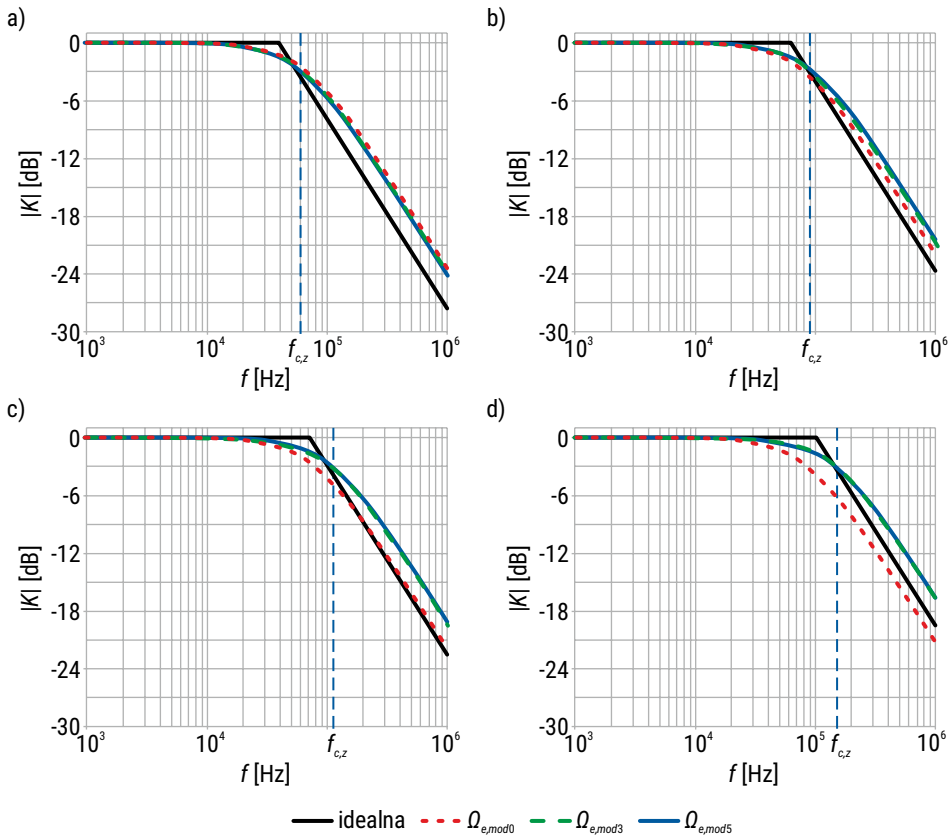


RYS. 56. Wybrane, wyznaczone geometrie komórek o częstotliwości odcięcia wynoszącej odpowiednio: a)÷c) 60 kHz; d)÷f) 90 kHz; g)÷i) 110 kHz

Modyfikacja  $\Omega_{e,mod0}$  prowadzi do uzyskania podobnych, ośmiokątnych struktur (rys. 56a,d,g). Elementy typu  $\Omega_{e,mod3}$  (rys. 56b,h) i  $\Omega_{e,mod5}$  są zauważalnej zróżnicowane o coraz bardziej złożonej geometrii przy wyższych częstotliwościach odcięcia.

W każdym przypadku wzrost  $f_{c,z}$  prowadził do porowatej struktury elementu (szerokie wycięcie wewnętrzne) i coraz szerszych styków. W konsekwencji następuje wzrost długości ścieżki i redukcja jej szerokości, zwiększając indukcyjność własną i rezystancję.

Dobranie parametrów umożliwiło uzyskanie częstotliwości odcięcia (tabela 8) zbliżonych do zadanych. Średnie błędy dla poszczególnych typów komórek wyniosły kolejno  $-14,3\%$ ,  $0,2\%$  i  $2,3\%$ . Geometria  $\Omega_{e,mod0}$  sprawdzała się tylko poniżej zadanej częstotliwości  $f_{c,z} = 90$  kHz. Narzucone granice dziedziny optymalizacji uniemożliwiły syntezę elementu o dostatecznie wysokiej rezystancji. Warianty  $\Omega_{e,mod3}$  i  $\Omega_{e,mod5}$  dzięki dodatkowym wcięciom w ramiona, zapewniły zarówno wymagany poziom oporu czynnego jak i biernego dla każdej narzuconej częstotliwości  $f_{c,z}$ .



RYS. 57. Charakterystyki amplitudowe idealne i otrzymane dla poszczególnych typów komórek przy zadanych częstotliwościach odcięcia: a)  $f_{c,z} = 60$  kHz; b)  $f_{c,z} = 90$  kHz; c)  $f_{c,z} = 110$  kHz; d)  $f_{c,z} = 150$  kHz

TABELA 8. Dobrane wartości parametrów skupionych i częstotliwości odcięcia trzech typów komórek

$f_{c,z}$ [kHz]	$\Omega_{e^{mod0}}$				$\Omega_{e^{mod3}}$				$\Omega_{e^{mod5}}$			
	$R_e$ [mΩ]	$L_e$ [nH]	$f_c$ [kHz]	$\Delta f_{c\%}$	$R_e$ [mΩ]	$L_e$ [nH]	$f_c$ [kHz]	$\Delta f_{c\%}$	$R_e$ [mΩ]	$L_e$ [nH]	$f_c$ [kHz]	$\Delta f_{c\%}$
20	0,20	1,53	20,83	4,1%	0,18	1,41	20,60	3,0%	0,23	1,74	21,33	6,7%
60	0,73	1,77	65,81	9,7%	0,93	2,36	62,40	4,0%	0,65	1,68	61,41	2,3%
90	0,87	1,78	78,30	-13,0%	1,01	1,79	89,69	-0,3%	1,03	1,72	95,12	5,7%
110	0,93	1,87	79,08	-28,1%	1,32	1,94	108,25	-1,6%	1,32	1,91	109,87	-0,1%
150	1,11	2,11	83,88	-44,1%	2,01	2,22	144,21	-3,9%	2,29	2,50	145,52	-3,0%

Każda z geometrii zapewniła uzyskanie charakterystyki o tłumieniu 20 dB/dek w paśmie zaporowym (rys. 57) oraz  $f_{c,z} = 20$  kHz. Dla  $f_{c,z} > 60$  kHz komórka  $\Omega_{e^{mod0}}$  optymalizowana była do maksymalnej częstotliwości odcięcia tej geometrii wynoszącej około 80 kHz. Pozostałe warianty komórek  $\Omega_{e^{mod3}}$  i  $\Omega_{e^{mod5}}$  można było dopasować do zadanych charakterystyk (rys. 57b, c, d). Otrzymane wykresy wskazują na pokrycie się punktu częstotliwości odcięcia charakterystyki zadanej i charakterystyki komórek typu  $\Omega_{e^{mod3}}$  i  $\Omega_{e^{mod5}}$ . Wykresy pokrywają się w paśmie przepuszczania, jak również na pograniczu z początkiem pasma zaporowego. Wskazuje to na skuteczność optymalizacji geometrii z wykorzystaniem PSO i świadczy o możliwości syntezy komórek materiału niejednorodnego oraz ich możliwym wykorzystywaniu jako filtrujące układy dolnoprzepustowe.

## 5.3. Dobór właściwości materiałów anizotropowych

### Wprowadzenie

Oprócz komórek o właściwościach izotropowych, rozpatrzono i zaproponowano także komórki anizotropowe, charakteryzujące się różną przewodnością elektryczną oraz przenikalnością magnetyczną dla każdego z trzech kierunków  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Ze względu na założenie (15) zjawiska zachodzące w osi  $Oz$ , tzn. wzdłuż wysokości elementu, są pomijane. Anizotropia materiałowa dotyczy różnic w wartościach parametrów materiałowych rozpatrywanych w kierunku długości ( $d_{e,x}$ ) i szerokości ( $d_{e,y}$ ) elementu. Dobór właściwości materiałów anizotropowych sprowadza się do wyznaczenia elementów tensora materiałowego o postaci (88), które związane są z wektorami lokalnego układu współrzędnych, stycznego do powierzchni  $\Omega_e$ .

W rozdziale 1.2.2 omówiono m.in. układ tzw. płaszcz (ang. *cloak*) ukrywającego obiekty w stałym polu elektrycznym. Jednym z proponowanych zastosowań materiałów niejednorodnych jest ich wykorzystanie jako fizycznej realizacji materiałów pola skalarnego, które umożliwiają uzyskanie efektu ukrycia. W odróżnieniu od rozwiązań proponowanych w literaturze, metoda syntezy MMS z użyciem planarnej struktury periodycznej pozwala na wykorzystanie tylko jednego materiału przewodzącego (A), ponieważ izolatorem (B) jest powietrze lub nieprzewodzące lepszczce. Właściwości kształtowane są wyłącznie w oparciu o modyfikację geometrii pojedynczej komórki o wybranej strukturze (np. typ *kratka*,  $\Omega_{e,k}$ ), zamiast syntezy i analizy całego metamateriału, jak w przypadku struktur porowatych, warstwowych, czy też *sensu*-kształtnych (rozdział 1.2).

Proces projektowania i syntezy płaszcz elektrycznego z użyciem kompozytu niejednorodnego przedstawiono w kolejnych punktach. Program realizujący algorytm PSO sprzęgnięto z programem Comsol przeprowadzającym obliczenia numeryczne. Dodatkowo przygotowano odrębny model 2D z otoczeniem, obiektem oraz zsyntetyzowanym płaszczem i rozwiązano zagadnienie rozkładu stacjonarnego pola elektrycznego w układzie z użyciem MES, by zweryfikować poprawność doboru parametrów modelu homogenicznego. Schemat optymalizacyjny uruchomiono 3-krotnie, uzyskując za każdym razem inne komórki o podobnych właściwościach.

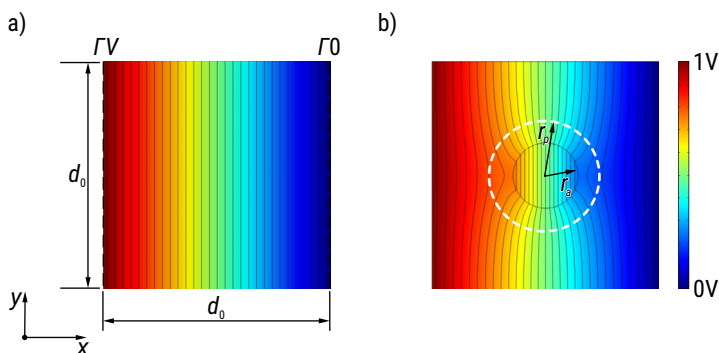
### 5.3.1. Synteza płaszcz elektrycznego

Proces syntezy płaszcz podzielono na 4 etapy kolejno warunkujące następujące po sobie kroki. W pierwszym zdefiniowano i opisano przykładowy układ, w drugim określono warunki ukrycia obiektu za pomocą metamateriału, w trzecim przedstawiono geometrię syntetyzowanej komórki w celu konstrukcji płaszcz, zaś w ostatnim omówiono algorytm i rezultaty postępowania optymalizacyjnego.

#### 1) Rozważany układ

Jako przykładowy układ wybrano fragment przewodnika płaskiego (rys. 58) o wymiarach  $d_o \times d_o \times h_o = 140 \times 140 \times 0,5$  mm. Przewodnik tworzył otoczenie o przewodności  $\sigma_o = 6$  S/m. Potencjał skalarny zadano na krawędziach  $IV$  i  $IO$  ( $V_{IV} = 1$  V,  $V_{IO} = 0$  V) wymuszając pole elektryczne wzdłuż osi  $Ox$ . W rezultacie rozkład natężenia pola jest jednorodny, a izoliny potencjału ułożone równolegle w całym obszarze (rys. 58a). Jest to pożądany stan pracy układu w którym pole jest niezaburzone, a widziana z pary zewnętrznych krawędzi konduktancja  $G_z$  jest równa konduktancji otoczenia

$$G_o = \frac{\sigma_o d_o h_o}{d_o} = \frac{6 \text{ S/m} \cdot 140 \text{ mm} \cdot 0,5 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} = 3 \text{ mS}. \quad (104)$$



RYS. 58. Rozkład potencjału elektrycznego: a) układ bez obiektu; b) układ z obiektem o promieniu  $r_a$  – zaburzenie pola w bliskim (płaszcz o promieniu  $r_p$ ) i dalszym (poza  $r_p$ ) obszarze układu

Wartość  $G_z$  jest jednym ze wskaźników umożliwiających ocenę skuteczności ukrywania obiektów, rozumianej jako brak mierzalnych efektów zmian  $G_z$  z punktu widzenia zewnętrznego obserwatora. Ukrycie obiektu oznacza, że bez względu na pomiar rozkładu pola lub natężenia prądu wpływającego do układu (bądź innej wielkości skupionej), identyfikacja obiektu powinna być utrudniona lub niemożliwa.

Po umieszczeniu nieprzewodzącego obiektu ( $\sigma_a = 0,1 \mu\text{S/m}$ ) w kształcie koła o promieniu  $r_a = 20 \text{ mm}$  w centralnej części układu, następuje zniekształcenie izolinii potencjału (rys. 58b). Jest ono zauważalne nawet przy skrajnych krawędziach. W konsekwencji zastępcza konduktancja określona jako

$$G_z = \frac{h_o \int |j| dy}{V_{rV} - V_{r0}}, \quad (105)$$

obniża się do wartości  $G_z = 2,64 \text{ mS}$ , czyli o 12% względem wartości początkowej  $G_o$ . Identyfikacja obiektu jest możliwa nie tylko na podstawie rozkładu pola, ale również w wyniku pomiaru wielkości obwodowych (zmiana konduktancji). Do układu, w celu ukrycia obiektu, dodano płaszcz o promieniu  $r_p = 38 \text{ mm}$ . Ponieważ zastosowane do jego budowy komórki  $\Omega_e$  mają kwadratowy kształt, okrągły płaszcz przybliżono ośmiokątem foremnym składającym się z 40 elementów ułożonych w dwie warstwy.

## 2) Właściwości metamateriału

Wyprowadzenie wymaganych przewodności elektrycznych ( $\sigma_p$ ) anizotropowego materiału niejednorodnego przeprowadzono opierając się na transformacji współrzędnych [142]. Rozkład potencjału elektrycznego opisany jest równaniem Laplace'a (10),

w którym  $f = V$ , a operator Laplace'a  $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$  zdefiniowany jest

w układzie współrzędnych biegunowych. W jednorodnym obszarze 2D (rys. 58a) znana jest izotropowa przewodność  $\sigma_o$ . Zgodnie ze wzorem (9) tensor przewodności dla równania (10) opisującego jednorodny układ można wyznaczyć jako

$$\sigma_p = \frac{J\sigma_o J^T}{\det(J)}. \quad (106)$$

Strukturę macierzy Jakobiego  $J$  dla przypadku płaszczka podano w równaniu (12). Stąd poszukiwany tensor przewodności to

$$\sigma_p = \sigma_o \begin{bmatrix} \frac{r_p - r_a}{r_p} & 0 \\ 0 & \frac{r_p}{r_p - r_a} \end{bmatrix}, \quad (107)$$

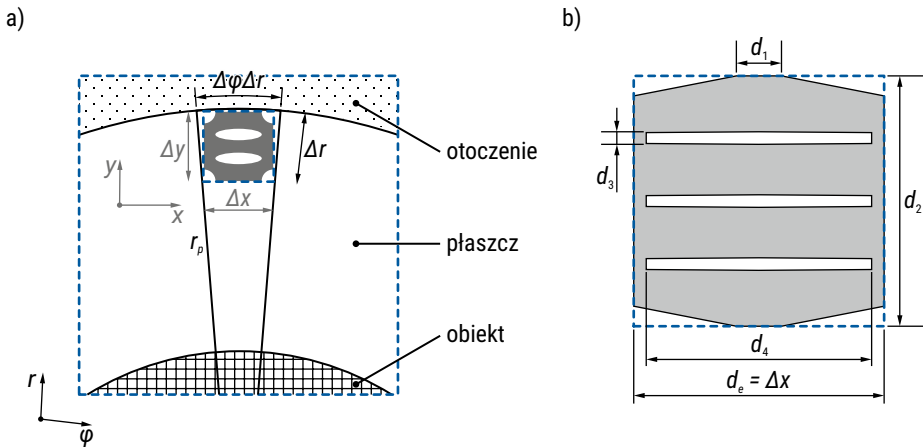
a po podstawieniu przyjętych wymiarów obiektu i płaszczka otrzymuje się

$$\sigma_p = \begin{bmatrix} 2,84 \text{ S/m} & 0 \\ 0 & 12,67 \text{ S/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\phi \end{bmatrix}. \quad (108)$$

Jest to przypadek płaszczka nieidealnego – zapewnia maskowanie obiektu, ale nie bierze pod uwagę jego właściwości, a zastosowana transformacja wedle równania (11) tylko liniowo deformuje przestrzeń. Układ można zrealizować z użyciem homogenicznego metamateriału, lecz rozkład pola będzie zależał także od przewodności obiektu.

### 3) Komórka materiału niejednorodnego

Do realizacji płaszczka niezbędna jest struktura anizotropowa. Jedną z podstawowych komórek spełniających te warunki jest komórka typu  $\Omega_{e,k}$ . Ze względu na geometrię elementu, możliwe jest uzyskanie wymaganego do utworzenia płaszczka ilorazu przewodności  $\sigma_\phi/\sigma_r = 4,46$ . Materiał odwzorowano za pomocą kwadratowych komórek, stąd konieczne było określenie relacji między właściwościami zdefiniowanymi w układzie współrzędnych biegunowych ( $\sigma_r$  i  $\sigma_\phi$ ), a przewodnościami komórki w układzie kartezjańskim ( $\sigma_{\text{eff},x}$  i  $\sigma_{\text{eff},y}$ ). Na rys. 59a widać, że gdy rozmiar elementu spełnia warunek  $d_e \ll r_p$  wtedy jego lokalny, kartezjański układ współrzędnych  $xy$  pokrywa się z globalnym układem współrzędnych  $r\phi$ . Można przyjąć, że elementarne rozmiary komórki są równe elementarnym długościom układu otoczenie-płaszczka-obiekt, a więc  $\Delta x = \Delta\phi\Delta r$  oraz  $\Delta y = \Delta r$ . Dzięki temu założeniu nie ma potrzeby deformacji komórki i obliczania jej w globalnym, biegunowym układzie współrzędnych, lecz można analizować właściwości w lokalnym, prostokątnym układzie i na tej podstawie dokonać syntezy materiału.



RYS. 59. Komórka tworząca płaszcz: a) fragment przykładowego układu z zaznaczeniem układów współrzędnych; b) komórka typu  $\Omega_{e,k}$  i jej parametry geometryczne

Komórka o wymiarach  $9 \times 9 \times 0,5$  mm i przewodności części przewodzącej  $\sigma_A = 19$  S/m była charakteryzowana przez cztery parametry zewnętrzne (rys. 59b), dobierane w procesie optymalizacji. Przyjęta przewodność oraz wymiary wynikają z obserwacji autora. Materiałem budującym komórkę może być, np. przewodzący filament, stąd zachowując podane wymiary komórki możliwe jest wytworzenie metamateriału metodą druku 3D [111].

#### 4) Proces syntezy

W procesie optymalizacji przyjęto parametry algorytmu (tabela 9), niezmiennie dla 3 prób optymalizacyjnych, które dobrano tak, aby proces przebiegał w jak najmniejszej liczbie kroków. Funkcję celu zdefiniowano jako sumę wartości bezwzględnych różnic między przewodnością obliczoną a zadaną

$$F(\mathbf{x}) = \left| \sigma_{\text{eff},x}(\mathbf{x}) - 12,67 \text{ S/m} \right| + \left| \sigma_{\text{eff},y}(\mathbf{x}) - 2,84 \text{ S/m} \right|, \quad (109)$$

gdzie  $\mathbf{x}$  jest wektorem zmiennych danym jako

$$\mathbf{x} = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4]. \quad (110)$$

Początkowe wartości wektora  $\mathbf{x}$  były losowane z przedziału dopuszczalnych wartości minimalnych i maksymalnych (tabela 9). Również początkowe wartości wektora prędkości cząstek ( $\mathbf{v}$ ) były losowo dobierane z przedziału  $0 \div 1$ .



TABELA 9. Zestawienie parametrów realizacji schematu PSO

Grupa parametrów	Symbol	Wartość	Uwagi
Współczynniki algorytmu	$l_a$ $w$ $t$ $C_1, C_2$	4 0,7 0,3 1,5	-
Kryterium zakończenia obliczeń	$l_{max}$	10	-
Ograniczenie dziedziny optymalizacji	$d_{1,min} = d_{2,min}$ $d_{1,max} = d_{2,max}$ $d_{3,min}$ $d_{3,max}$ $d_{4,min}$ $d_{4,max}$	1,00 mm 6,00 mm 0,09 mm 2,25 mm 0,09 mm 8,10 mm	Wartości graniczne parametrów geometrycznych wynikają m.in. z możliwości realizacji rzeczywistych układów.

Algorytm wykonano trzykrotnie wedle procedur opisanych w rozdziale 5.1. Proces wiązał się z każdorazowym, dwukrotnym (dla obu polaryzacji zewnętrznego pola elektrycznego) obliczeniem modelu komórki o parametrach geometrycznych wyznaczonych w procedurze optymalizacyjnej. Każdy z rezultatów procedury optymalizacyjnej opisanych zestawem parametrów geometrycznych wykorzystano do utworzenia płaszcza. Model 2D układu obliczono ze względu na rozkład potencjału elektrycznego, w celu porównania i ewaluacji poszczególnych rezultatów działania programu oraz porównania z teoretycznie obliczonym, jednorodnym metamateriałem.

### 5.3.2. Dyskusja wyników

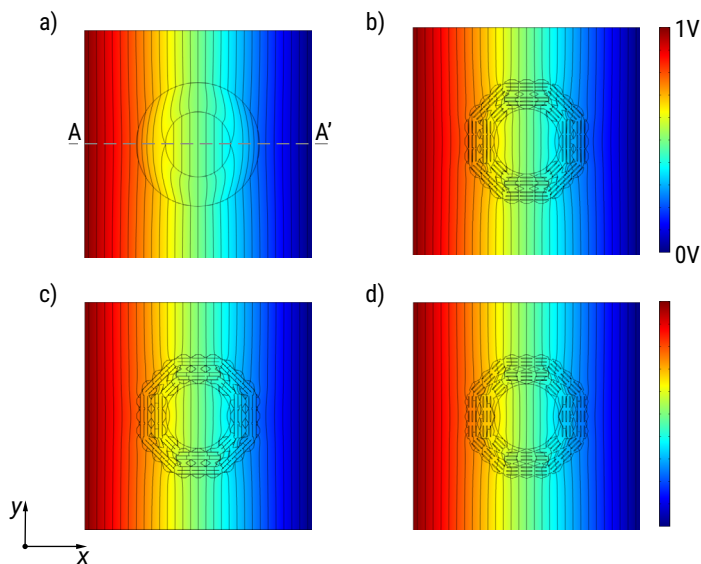
W rezultacie działania algorytmu optymalizacyjnego uzyskano trzy zbliżone geometrie komórek (rys. 60), spełniające wymagania płaszcza. W przypadku każdej konfiguracji zwiększana była szerokość kontaktu między elementami w kierunku  $x$  (parametr  $d_1$ ) oraz zmniejszana szerokość wycięcia w kierunku  $y$  (parametr  $d_4$ ). W ten sposób uzyskano wzrost efektywnej przewodności  $\sigma_{eff,x}$ . Działanie odwrotne na parametrach  $d_2$  i  $d_3$  redukowało z kolei wartość  $\sigma_{eff,y}$ . Porównanie parametrów opisujących konfiguracje przedstawione na rys. 60, wskazuje na zróżnicowanie geometrii komórek. Uruchomienie algorytmu optymalizacyjnego skutkowało uzyskaniem zbliżonych pod względem jakościowym struktur, co wynika z mnogości możliwych rozwiązań (istnieje wiele geometrii spełniających narzucone kryteria), małej zmienności funkcji celu oraz założonego błędu obliczeń w ramach algorytmu PSO.

	a)	b)	c)
$d_1$ [mm]	5,386	4,643	5,855
$d_2$ [mm]	3,390	2,560	1,000
$d_3$ [mm]	0,585	0,090	0,630
$d_4$ [mm]	8,100	8,100	6,750

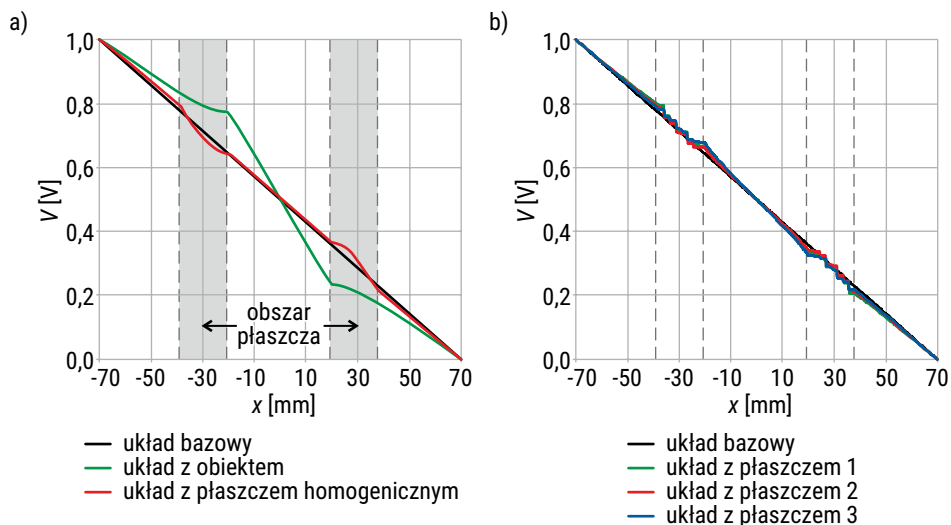
RYS. 60. Parametry i geometria komórek tworzących: a) płaszcz 1; b) płaszcz 2; c) płaszcz 3

Skuteczność ukrycia i tym samym weryfikację metody syntezy i homogenizacji metamateriału, stanowi analiza rozkładu potencjału w całym układzie (rys. 61). Pierwszy model zakładał użycie teoretycznego, homogenicznego płaszczka o przewodnościach zdefiniowanych w [108]. Pomimo zgodności modelu numerycznego z teoretycznym modelem zjawisk wynikających z transformacji współrzędnych, nie występuje idealne ukrycie obiektu. Izolinie potencjału nie są równoległe (rys. 61a) w środkowej części układu. Płaszcz powoduje redukcję efektów deformacji pola w otoczeniu obiektu, ale nie są one w pełni zredukowane w bliskim otoczeniu płaszczka ( $r_p < r < 2r_p$ ). Identyczne obserwacje pojawiają się w przypadku układu z płaszczem 1 i 2 (rys. 61b, c), które redukują zniekształcenia rozkładu potencjału, ale nie eliminują problemu zakrzywienia izolinii blisko krawędzi zewnętrznej płaszczka. Poprawę można dostrzec w ostatnim modelu z płaszczem nr 3 (rys. 61d) – izolinie przy lewej i prawej krawędzi płaszczka uległy mniejszej deformacji niż w poprzednich przypadkach. Wynika to ze zmniejszenia wartości składowej pionowej ( $J_y$ ) gęstości prądu w tym obszarze.

W przypadku płaszczki 1, 2 i 3 okrągłą konstrukcję zastąpiono strukturą ośmiokątną. Deformacja rozkładu pola występowała w obrębie płaszczka (rys. 62), lecz wykorzystanie warstwy anizotropowego materiału umożliwiło redukcję zaburzenia rozkładu potencjału w obszarze otoczenia i obiektu. Na podstawie obliczonych rozkładów pola elektrycznego można jednoznacznie stwierdzić, że każdy z płaszczki (rys. 62b) zapewnił podobny efekt ukrycia obiektu jak teoretyczny, anizotropowy materiał homogeniczny (rys. 62a) o przewodnościach elektrycznych wyznaczonych analitycznie. Potwierdza to poprawność sposobu homogenizacji struktur niejednorodnych zaproponowanego w rozdziale 4.5.1, gdyż zachowują się one jak anizotropowy materiał, którego właściwości dobiera się stosując schemat optymalizacyjny. Przy zastosowaniu materiału niejednorodnego istnieje więcej niż jedno rozwiązanie gwarantujące spełnienie narzuconych warunków.



RYS. 61. Izolinie i rozkład potencjału: a) płaszcz homogeniczny – materiał opisany tensorem (108); b) płaszcz 1; c) płaszcz 2; d) płaszcz 3



RYS. 62. Rozkład potencjału elektrycznego wzdłuż przekroju A-A': a) układ bazowy oraz z obiektem i płaszczem homogenicznym; b) układ z płaszczami 1, 2 i 3

Jednym z globalnych, zastosowanych wskaźników skuteczności działania płaszczka jest konduktancja zastępcza (tabela 10) widziana z pary zacisków (krawędzi) zasilających. W modelu bazowym, gdy występuje tylko otoczenie, konduktancja wynosiła 3 mS. Umieszczenie obiektu powoduje spadek do 2,64 mS, czyli o 11,97%. Po zastosowaniu homogenicznego materiału, charakteryzowanego przez wymagany tensor przewodności, nie udało się uzyskać efektu idealnego ukrycia – konduktancja różniła się od bazowej o 3,03%. Jeszcze gorzej wypadł zsyntetyzowany płaszcz numer 1, bowiem różnica wzrosła dodatkowo o 0,5%. Płaszcz numer 2 zapewnił już niemal identyczny efekt jak materiał teoretyczny – konduktancja zastępcza (2,92 mS) zbliżyła się do bazowej. Najlepszy rezultat uzyskano przy zastosowaniu płaszczka numer 3, gdyż względna różnica między konduktancją w tym przypadku i konduktancją układu bazowego to mniej niż 2%.

TABELA 10. Konduktancja zastępcza układu otoczenie-płaszcz-objekt i efektywne przewodności płaszczki

Model Parametr	Bazowy	Bazowy + obiekt	Homogeniczny	Płaszcz 1	Płaszcz 2	Płaszcz 3
$G_z$ [mS]	3,00	2,64	2,91	2,89	2,92	2,94
$\Delta G_{z,\%}$	0,00%	-11,97%	-3,03%	-3,57%	-2,80%	-1,97%
$\sigma_{\text{eff},x}$ [S/m]	-	-	12,67	12,64	12,76	12,66
$\sigma_{\text{eff},y}$ [S/m]	-	-	2,84	2,78	2,70	3,39

Najlepszy efekt ukrycia uzyskano za pomocą płaszczka 3, co koreluje z rozkładem pola oraz konduktancją zastępczą, ale odbiega od dokładności dopasowania właściwości elementów (wartość funkcji celu  $F(\mathbf{x}_3) = 0,561$ ) do wymaganych przewodności. Najbardziej precyzyjne dopasowanie (z błędem  $F(\mathbf{x}_1) = 0,094$ ) wystąpiło przy geometrii nr 1, ale odznaczało się najmniejszą skutecznością ukrycia. Formą pośrednią, zarówno jeśli chodzi o maskowanie obiektu, i precyzję ( $F(\mathbf{x}_2) = 0,228$ ) odwzorowania właściwości homogenicznego metamateriału był płaszcz numer 2.

Analizując wyznaczone wartości przewodności efektywnych można dojść do wniosku, że poprawa jakości ukrycia obiektu jest wynikiem zwiększenia efektywnej przewodności elektrycznej  $\sigma_{\text{eff},y}$  komórek tworzących anizotropowy materiał. Wiąże się to z konstrukcją rzeczywistego płaszczka, który nie był idealnie kołowy, lecz jedynie przybliżony ośmiokątną strukturą. Dalszą poprawę można uzyskać modyfikując geometrię komórek  $\Omega_e$ , w których ograniczono się do 3 wycięć w części centralnej. Wprowadzenie dodatkowych wycięć, bądź profilowanie ścieżek wpłynie na możliwość kształtowania zastępczej rezystancji struktury w wybranych kierunkach. Przełoży się to bezpośrednio na wartości efektywnych przewodności elektrycznych, ale jednocześnie doprowadzi do zwiększenia liczby dobieranych parametrów geometrycznych, podwyższając stopień złożoności zagadnienia optymalizacyjnego.

## Podsumowanie

W rozdziale scharakteryzowano algorytm optymalizacyjny PSO i przedstawiono jego zastosowanie w syntezie materiałów niejednorodnych. Dobór właściwości przebiegał w oparciu o iteracyjne przeszukiwanie przestrzeni zmiennych w celu optymalizacji nieliniowej funkcji celu. Omówiono skuteczność i narzucone ograniczenia związane z poprawą efektywności algorytmu optymalizacyjnego. Wskazano na niejednoznaczność efektów pracy skryptu obliczeniowego, a także problemy występujące przy rozwiązywaniu przedstawionych zagadnień.

Schemat optymalizacyjny wykorzystano do syntezy komórek zapewniających pożądaną charakterystykę amplitudową. Kryterium doboru oparto o dopasowanie odpowiedzi elementu do odpowiedzi idealnego filtra o zadanej częstotliwości odcięcia i tłumieniu  $-20$  dB/dek w paśmie zaporowym. Zadanie zrealizowano przy użyciu komórek  $\Omega_{e^{mod\#}}$  charakteryzujących się szeroką regulacją zastępczej rezystancji i indukcyjności. Porównano charakterystyki amplitudowe otrzymane na podstawie modeli numerycznych trzech elementów o odmiennej budowie wewnętrznej, przy pięciu różnych częstotliwościach odcięcia. Najbardziej złożone strukturalnie elementy typu  $\Omega_{e^{mod3}}$  i  $\Omega_{e^{mod5}}$  zapewniały dobór punktu odcięcia dla częstotliwości z zakresu od  $20$  do  $150$  kHz, precyzyjnie dopasowując do niego geometrię komórek. Podstawowy typ  $\Omega_{e^{mod0}}$  naśladował zachowanie pozostałych dwóch struktur z podobną precyzją, w ograniczonym paśmie nastawy częstotliwości odcięcia do  $f_c = 90$  kHz.

Przykładem zastosowania PSO w projektowaniu anizotropowych struktur była synteza metamateriału umożliwiającego ukrycie dowolnego obiektu w przepływowym, stałym polu elektrycznym. W tym celu zaproponowano przykładowy układ i określono warunki jego pracy. Następnie dobrano parametry geometryczne elementów typu  $\Omega_{e^k}$ , uzyskując przewodności kierunkowe zbliżone do wymaganych. Rezultatem była synteza trzech płaszczy o nieznacznie odmiennej budowie wewnętrznej i właściwościach przewodzących. Każdy z nich zapewnił podobny do teoretycznego efekt ukrycia obiektu, w jednym z przypadków poprawiając rezultat względem płaszcza jednorodnego. Potwierdzono także poprawność sposobu homogenizacji właściwości elektrycznych oraz możliwość stworzenia materiału o dobieranych, anizotropowych przewodnościach elektrycznych przy użyciu komórek formujących kompozyt.

# Rozdział 6

## Weryfikacja eksperymentalna

### Wprowadzenie

Ocenę właściwości materiału niejednorodnego dokonano dotychczas w oparciu o modele numeryczne. Porównaniu poddano proponowaną metodę MR-C oraz MES, w których obliczane były modele o różnym stopniu złożoności (2D w MR-C i 3D w MES) oraz różnej liczbie stopni swobody. Wyniki obliczeń teoretycznych stacjonarnego pola magnetycznego scharakteryzowano w publikacjach [12, 113], w których wykazano zbieżność rezultatów otrzymanych przy rozwiązaniu metodą MR-C i MES. Zaprezentowane wnioski potwierdzają także rozkłady pól elektrycznego i magnetycznego przedstawione w rozdziale 3.5, które charakteryzowały się wysokim stopniem podobieństwa. Na podstawie rozkładu powierzchniowego pola elektrycznego i magnetycznego w przekroju podłużnym elementu, identyfikowane są jego zastępcze właściwości. W rozdziale 4.2 skupiono się na porównaniu metod pod kątem estymacji parametrów obwodowych: rezystancji, indukcyjności własnej i wzajemnej między komórkami. Uzyskano zadowalającą zgodność wyników obliczeń. Zauważalne rozbieżności ilościowe między MR-C i MES dotyczyły najtrudniejszego w teoretycznym oszacowaniu wsp. sprzężenia indukcyjnego.

W niniejszym rozdziale przedstawiono weryfikację eksperymentalną modeli numerycznych przeznaczonych do oceny właściwości materiałów niejednorodnych. Identyfikacja rezystancji i indukcyjności zastępczej materiału laminarnego jest kluczowym etapem, bowiem zarówno proces homogenizacji układu, jak i jego model sieciowy opierają się na znajomości skupionych parametrów obwodowych. Te z kolei wyznaczone są w wyniku analizy pojedynczej komórki lub pary komórek. Istotne jest, aby wielkości skupione określone w wyniku numerycznego rozwiązania zagadnienia polowego zgadzały się z rzeczywistymi właściwościami zastępczymi materiału. Wstępne wyniki pomiarów próbek wytworzonych metodą druku 3D zawarto w publikacji [118]. Posłużyły one przeprowadzeniu pomiarów eksperymentalnych i weryfikacji dokładności modeli.

W rozdziale przedstawiono weryfikację modeli numerycznych przeprowadzoną przez porównanie obliczonych zastępczych rezystancji i indukcyjności 30 próbek materiałowych ze zmierzonymi na stanowisku pomiarowym. Każda próbka składała

się z 20 szeregowo połączonych elementów o określonej budowie. Zastosowany układ elementów w obrębie próbki przyjęto ze względu na małe wartości ich parametrów skupionych. Przykładem jest indukcyjności pojedynczego elementu, której wartość rzędu pojedynczych nH jest poniżej zakresu pomiarowego dostępnego mostka RLC. Był to także powód rezygnacji w tej serii badań z próbek drukowanych z przewodzącego PLA, gdyż dominująca w impedancji zastępczej rezystancja (rzędu k $\Omega$ ) utrudnia pomiar metodą techniczną dużo mniejszej reaktancji (rzędu m $\Omega$ ).

Odrębnym testom poddano struktury izotropowe oraz anizotropowe, dla których wyznaczono zastępcze parametry przy dwóch wzajemnie prostopadłych polaryzacjach zewnętrznego pola elektrycznego. Wszystkie próbki wytworzono metodą ubytkową (trawienie laminatów), wykorzystując do tego celu laminaty elastyczne (giętki teflon) z warstwą miedzi o grubości 35  $\mu\text{m}$ . Planarna budowa próbek komplikuje proces pomiaru impedancji przy użyciu zacisków pomiarowych Kelvina o nieregularnej (falistej) budowie, wprowadzającej niedopuszczalną wartość rezystancji stykowej. By uniknąć wtrącenia do obwodu pomiarowego pasożytniczych impedancji, zaprojektowano i wykonano dedykowaną podstawkę pomiarową przeznaczoną do badania wytworzonych próbek. Pomiarów dokonano mostkiem RLC z możliwością kalibracji oraz regulowaną częstotliwością napięcia próbnego.

Kolejne punkty poświęcono przedstawieniu oraz scharakteryzowaniu wyników obliczeń i pomiarów eksperymentalnych. Szczególny nacisk położono na ocenę zgodności obliczeń za pomocą MR-C z pomiarami wykonanymi na rzeczywistym układzie. Geometrię badanych próbek dobierano tak, by zapewnić zróżnicowanie kształtu w obrębie wybranego wariantu budowy, ale także w porównaniu do przypadków analizowanych uprzednio w monografii. Pod uwagę brano całkowitą, zastępczą rezystancję i indukcyjność, w skład której wchodziły analizowane indukcyjności własne elementów i indukcyjności wzajemne wynikające ze zgodnego sprzężenia magnetycznego, a także pasożytnicze impedancje stykowe.

## 6.1. Metodyka badań

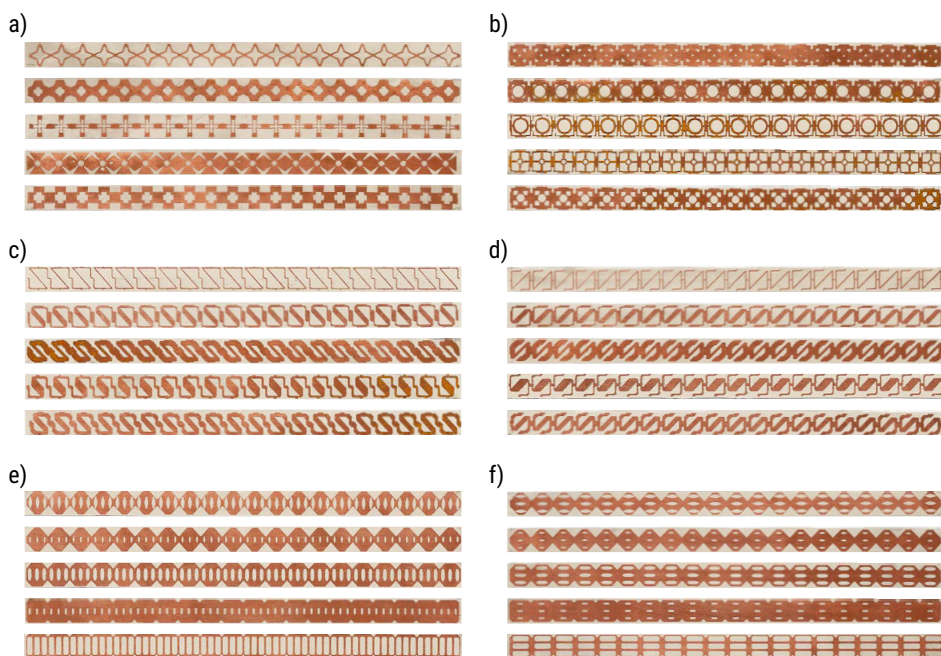
### 6.1.1. Analizowane struktury

Badaniom poddano cztery warianty budowy komórek (rys. 64): dwie geometrie izotropowe  $\Omega_{e,g}$  i  $\Omega_{e,f}$  oraz dwie o właściwościach anizotropowych  $\Omega_{e,z}$  i  $\Omega_{e,k}$ . Każdy wariant był reprezentowany przez 5 komórek o zróżnicowanych parametrach geometrycznych, przy zachowaniu wartości parametrów ogólnych:

- zewnętrzna szerokości i długość komórki:  $d_e = 10 \text{ mm}$ ;
- grubość lepszca (izolacyjnego materiału bazowego):  $d_B = 0,3 \text{ mm}$ ;
- grubość warstwy przewodzącej (komórki):  $d_{e,z} = 35 \mu\text{m}$ ;

- przewodność elektryczna lepszca (PTFE):  $\sigma_B \approx 10^{-16}$  S/m;
- przewodność elektryczna przewodnika (miedź):  $\sigma_A = 5,6 \cdot 10^7$  S/m;
- przenikalność magnetyczna otoczenia, bazy i przewodnika:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m.

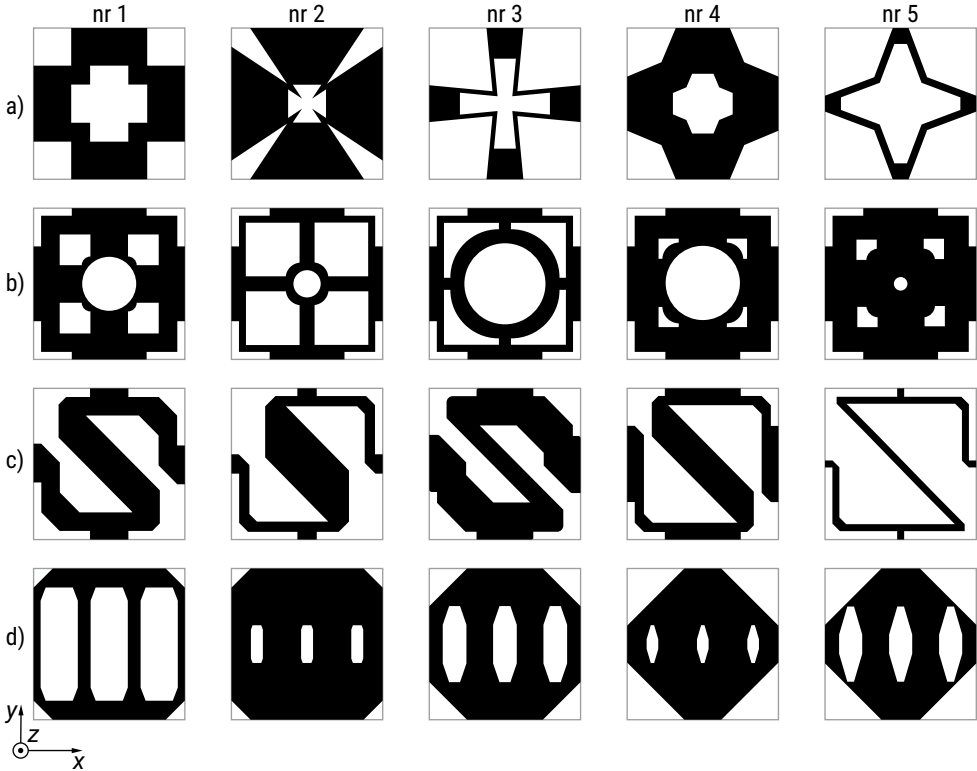
Materiałem bazowym był elastyczny teflon (PTFE – politetrafluoroetylen), zaś komórki wytworzono z osadzonej na nim warstwy miedzi. Ze względu na małą wartość przewodności elektrycznej materiału bazowego  $\sigma_B$ , prowadzącą do źle uwarunkowanych macierzy współczynników, w obliczeniach przeprowadzonych za pomocą MR-C przyjęto  $\sigma_B = 10^{-7}$  S/m.



RYS. 63. Widok wytworzonych próbek: a) typ  $\Omega_{e,g}$ ; b) typ  $\Omega_{e,r}$ ; c) typ  $\Omega_{e,z}$  (polaryzacja  $x$ ); d) typ  $\Omega_{e,z}$  (polaryzacja  $y$ ); e) typ  $\Omega_{e,k}$  (polaryzacja  $x$ ); f) typ  $\Omega_{e,k}$  (polaryzacja  $y$ )

Układy o przyjętych parametrach i geometriach poddano analizie numerycznej z wykorzystaniem opracowanego algorytmu MR-C. W ten sposób obliczono zastępcze parametry elektryczne rozważanych struktur. Na podstawie tych samych dwuwymiarowych rzutów geometrii komórek (rys. 64) wytworzono metodą trawienia rzeczywiste komórki (zaczerziona część jest warstwą miedzi, a biała warstwą PTFE). Elementy anizotropowe były obliczane oraz wykonane w dwóch wersjach, aby oszacować ich zastępcze właściwości w zależności od kierunku przyłożonego zewnętrznego napięcia elektrycznego. Jeden zestaw próbek był ustawiony tak jak pokazano na Rys. 64c, d, a drugi obrócony o  $90^\circ$  względem osi  $Oz$ .





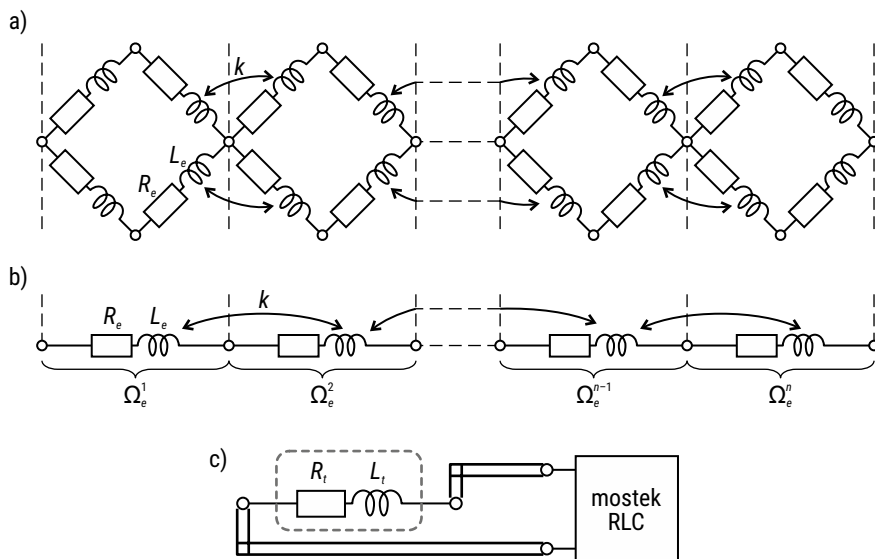
RYS. 64. Geometrie badanych komórek: a) typ  $\Omega_{e,g}$ ; b) typ  $\Omega_{e,r}$ ; c) typ  $\Omega_{e,z}$ ; d) typ  $\Omega_{e,k}$

Każda z 30 wytworzonych próbek składała się z  $n = 20$  szeregowo połączonych komórek, tworzących przewodnik liniowy, powierzchniowy o podwyższonej rezystancji oraz reaktancji zastępczej. Wyższa względem pojedynczej komórki wartość impedancji linii była konieczna, by zarówno zastępcza rezystancja, jak i indukcyjność próbki materiałowej były mierzalne przy użyciu dostępnego mostka RLC. Pełne odwzorowanie teoretycznej geometrii komórek było niemożliwe, ponieważ próbki wytworzono metodą trawienia warstw metalowych (w procesie produkcji niektóre elementy uległy nadtrawieniu). Jednak porównując wytworzone próbki (rys. 63) z modelem numerycznym (rys. 64) można zauważyć, że geometrie układu komórek oraz połączenia elektryczne zostały odwzorowane.

### 6.1.2. Model obliczeniowy

Zaprezentowane geometrie poddano obliczeniom numerycznym za pomocą MR-C, a następnie zgodnie z procedurami opisanymi w rozdziale 4.1 wyznaczono parametry zastępcze: rezystancję komórki  $R_e$ , indukcyjność własną  $L_e$  oraz współczynnik

sprężenia magnetycznego  $k$ . Każda z analizowanych komórek reprezentowana była przez model w rozdzielczości  $200 \times 200$  pikseli. Wobec tego generowany model numeryczny był opisany przez 39600 stopni swobody.



RYS. 65. Model elektryczny próbek materiałowych: a) reprezentacja komórek w postaci schematu czterozaciskowego; b) uproszczony model dwuzaciskowy; c) schemat ideowy układu pomiarowego

Ogólny schemat zastępczy (rys. 65a) uwzględniający poszczególne fragmenty komórek i cztery punkty styku można, ze względu na liniową topologię układu, uprościć do dwuzaciskowego schematu elektrycznego (rys. 65b) z dodatnim sprzężeniem magnetycznym między sąsiednimi komórkami. Na jego podstawie wyznacza się wartość zastępczej rezystancji dla  $n$  szeregowo połączonych komórek

$$R_t = nR_e \quad (111)$$

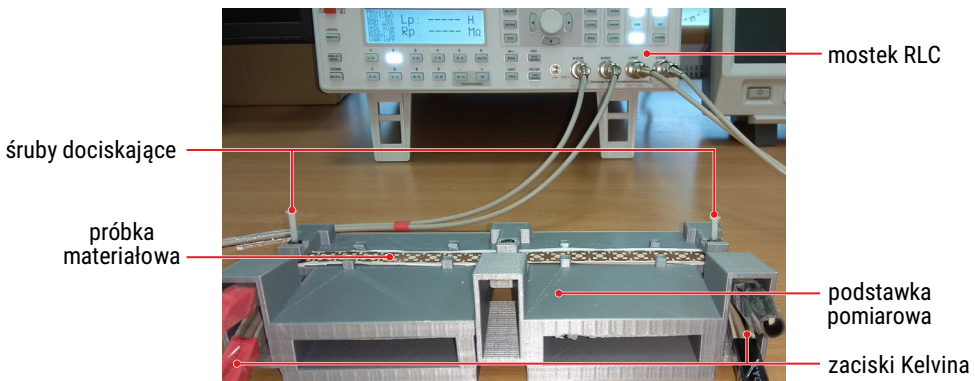
oraz zastępczą indukcyjność próbki materiałowej, w której uwzględnia się indukcyjności własne elementów oraz indukcyjności wzajemne. W modelu przyjęto, że uwzględnione są jedynie sprzężenia magnetyczne między sąsiednimi komórkami, dlatego indukcyjność zastępczą można wyznaczyć z zależności

$$L_t = nL_e + 2(n-1)kL_e. \quad (112)$$

Skupione parametry obwodowe widziane ze skrajnych krawędzi próbki, obliczone z (111) i (112), porównano z wartościami mierzonymi za pomocą mostka RLC.

### 6.1.3. Stanowisko pomiarowe

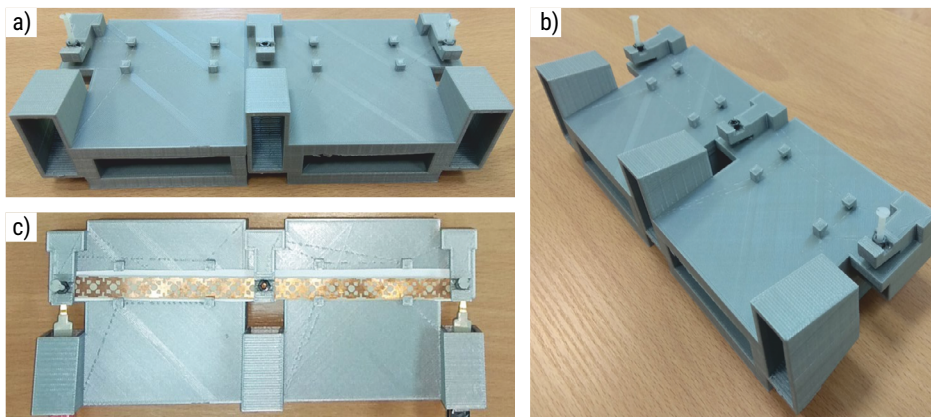
Wykorzystane do badań stanowisko (rys. 66) składało się z mostka RLC, podstawki pomiarowej i przewodów łączących. Pomiary wykonano z użyciem mostka *Hameg 8118*, z deklarowanym przez producenta podstawowym błędem pomiaru wynoszącym 0,05% [31]. Wartość ta jest najmniejszym błędem spodziewanym, lecz zawsze odbiegała od rzeczywistej wartości przy określonym sposobie pomiaru (rozdział 6.1.5). Urządzenie umożliwiało pomiar metodą techniczną modułu impedancji oraz kąta przesunięcia fazowego, przy wymuszeniu napięciowym o amplitudzie 1 V i zadanej częstotliwości sygnału z zakresu od 20 Hz do 200 kHz. Rezystancja i indukcyjność zastępcza elementu były wyliczane automatycznie w oparciu o natężenie przepływającego prądu i pomiar jego przesunięcia w czasie względem napięcia.



RYS. 66. Widok na stanowisko do pomiaru impedancji zastępczej próbek materiałowych

Połączenie mostka z elementem odbywało się za pomocą czteroprzewodowych zacisków Kelvina, kompensujących wpływ przewodów łączeniowych na pomiar mierzonych wielkości. Oprócz eliminacji pasożytniczych rezystancji i indukcyjności własnych przewodów, zminimalizowano także rezystancję styku. Nieprzewodzące śruby dociskające zapewniły właściwy kontakt elektryczny na całej powierzchni elektrod przy skrajnych krawędzi próbki (od strony warstwy przewodzącej), redukując wtrącenie do układu impedancji łączeniowej.

W celu przeprowadzania pomiaru w stabilnych warunkach, zaprojektowano i zastosowano specjalną podstawkę pomiarową, przystosowaną do badań szeregowych układów planarnych (rys. 67). Podstawkę o wymiarach  $220 \times 100 \times 50$  mm wykonano metodą druku 3D z filamentu typu PLA. Dodatkowo wyżłobione otwory nad górną częścią elektrod, umożliwiły osadzenie nakrętek dociskających elektrody za pomocą śrub z tworzywa sztucznego. Próbka umieszczana była wzdłuż górnej części podstawki pod chwytakami zapobiegającymi zdeformowaniu i przemieszczeniu próbek.



RYS. 67. Podstawka pomiarowa: a) widok z przodu; b) widok z boku; c) widok z góry na układ z próbką

#### 6.1.4. Procedura pomiaru

Pomiar impedancji 30 wariantów materiału realizowano według procedury:

- 1) uruchomienie mostka RLC: wybór napięcia probierczego (1 V), sposobu pomiaru (automatyczne wyznaczenie rezystancji i indukcyjności zastępczej) oraz trzech częstotliwości napięcia pomiarowego: 10 kHz, 15 kHz i 20 kHz;
- 2) kalibracja mostka dla częstotliwości pomiarowych: automatyczne wyznaczenie admitancji i impedancji pasożytniczych na podstawie pomiaru parametrów odpowiednio rozwartego i zwartego układu pomiarowego [31];
- 3) osadzenie zacisków Kelvina w „kieszeniach” podstawki i dociśnięcie elektrod do próbki przy użyciu śrub dociskowych;
- 4) pomiar parametrów zastępczych próbki: dla trzech częstotliwości odczytywano oraz zapisywano zmierzoną wartość rezystancji i indukcyjności zastępczej po ustabilizowaniu się ich wartości na wyświetlaczu;
- 5) zapisanie wartości parametrów zastępczych dla każdej z częstotliwości i wyznaczenie ich wartości średniej;
- 6) dekompozycja układu pomiarowego: odkręcenie śrub dociskowych, wysunięcie elektrod, wyjęcie próbki materiałowej;
- 7) powtórzenie postępowania od punktu 3) dla kolejnej próbki.

Przeprowadzając pomiar przyjęto, że przy częstotliwości napięcia probierczego do 20 kHz nie obserwuje się wpływu szybkości zmian pola na zastępczą impedancję badanej próbki materiałowej. Założenie to wynika z rezultatów badań przedstawionych w rozdziale 5.2. Przebieg otrzymanych charakterystyk amplitudowych wskazuje, że do częstotliwości wynoszącej ok. 20 kHz admitancja elementu

praktycznie nie zmienia się. Przeprowadzenie badania próbek przy wymienionych częstotliwościach umożliwiło trzykrotny pomiar impedancji zastępczej elementu, a następnie uśrednienie wyników.

### 6.1.5. Dokładność pomiaru

Mostek RLC charakteryzował się błędem podstawowym wynoszącym 0,05% mierzonej wielkości fizycznej, lecz podana wartość błędu wzrasta wraz ze spadkiem mierzonej impedancji. Zgodnie z deklaracją producenta całkowity błąd pomiaru oblicza się jako [31]

$$\delta = 0,5\% + \frac{0,002}{|Z|} 100\%, \quad (113)$$

który to związany jest z modułem impedancji elementu  $|Z|$  w  $[\Omega]$  i zakresem częstotliwości pomiarowych. Wyznaczenie błędu pomiarowego dla każdej próbki wiązało się z obliczeniem jej impedancji i wykorzystaniem zależności (113) dla zakresu  $|Z| < 2,5 \Omega$  oraz częstotliwości napięcia probierczego od 10 kHz do 100 kHz.

Przy każdej częstotliwości pomiarowej mierzona wartość modułu impedancji  $|Z|$  osiąga inną wartość, a stąd także inny był błąd pomiaru. Przyjęto zatem, że dla danej próbki materiałowej wypadkowy błąd względny  $\delta_3$  jest wyznaczany jako średnia arytmetyczna błędów pomiarów wykonanych przy trzech pulsacjach

$$\delta_3 = 0,5\% + \frac{0,002}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{R_t^2 + \omega_1^2 L_t^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_t^2 + \omega_2^2 L_t^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_t^2 + \omega_3^2 L_t^2}} \right) 100\%, \quad (114)$$

gdzie:  $R_t$  – zmierzona średnia rezystancja zastępcza próbki  $[\Omega]$ ;  $L_t$  – zmierzona średnia indukcyjność zastępcza próbki  $[H]$ .

Znając błąd względny określono niepewność standardową typu B, wyrażoną zależnością [135]

$$u_B = \frac{\Delta_\delta}{\sqrt{3}} = \frac{\delta_3 Q_t + 0,01}{\sqrt{3}}, \quad (115)$$

gdzie:  $Q_t$  – zmierzona wielkość elektryczna ( $R_t$  lub  $L_t$ ). Czynniki o wartości 0,01 wynika z odczytu wartości  $Q_t$  z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku. Przyjmując przedział ufności  $p = 0,99$ , współczynnik rozszerzenia miał wartość  $k_p = 3$ , a zatem niepewność rozszerzona mierzonej wielkości  $Q_t$  wyniosła

$$u_Q = k_p u_B = \frac{3(\delta_3 Q_t + 0,01)}{\sqrt{3}}. \quad (116)$$

Oprócz błędów i niepewności pomiaru porównano także rezultaty obliczeń numerycznych z wartościami zmierzonymi. Miarą niezgodności był moduł wartości względnej, liczony przez odniesienie różnicy między bezwzględną wartością obliczoną numerycznie ( $Q_{MR-C}$ ) a zmierzoną ( $Q_t$ ) do wartości zmierzonej, liczony oddzielnie dla rezystancji i indukcyjności zastępczej ze wzoru

$$|\Delta Q| = \left| \frac{Q_{MR-C} - Q_t}{Q_t} \right| \cdot 100\% . \quad (117)$$

W rozdziale 6.4 analizie poddano wpływ średniego błędu mostka  $\delta_3$  na wartości różnicy względnej.

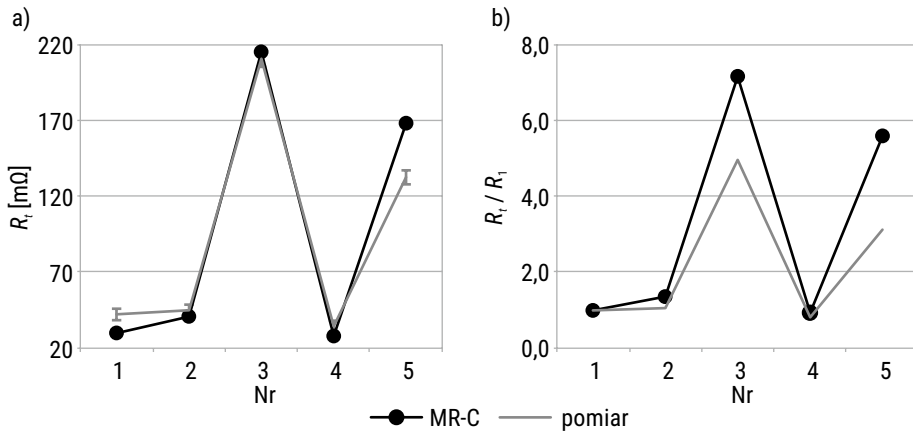
## 6.2. Analiza właściwości elektrycznych

### 6.2.1. Rezystancja zastępcza materiału izotropowego

W pierwszej kolejności analizie poddano właściwości komórek izotropowych typu  $\Omega_{e,g}$  i  $\Omega_{e,f}$ . Porównanie rezultatów obliczeń i pomiarów ma na celu ocenę zgodności ilościowej, charakteryzowanej przez bezwzględne wartości rezystancji zastępczej  $R_t$  oraz jakościowej, poprzez określenie względnej zmiany całkowitej rezystancji względem pierwszej badanej próbki. Na prezentowanych wykresach punktowe wartości otrzymane dla pięciu różnych wariantów geometrii połączono odcinkami. W zamierzeniu autora mają one ilustrować trend zmian wartości, ułatwiając tym samym analizę właściwości i ocenę jakościową kolejnych geometrii.

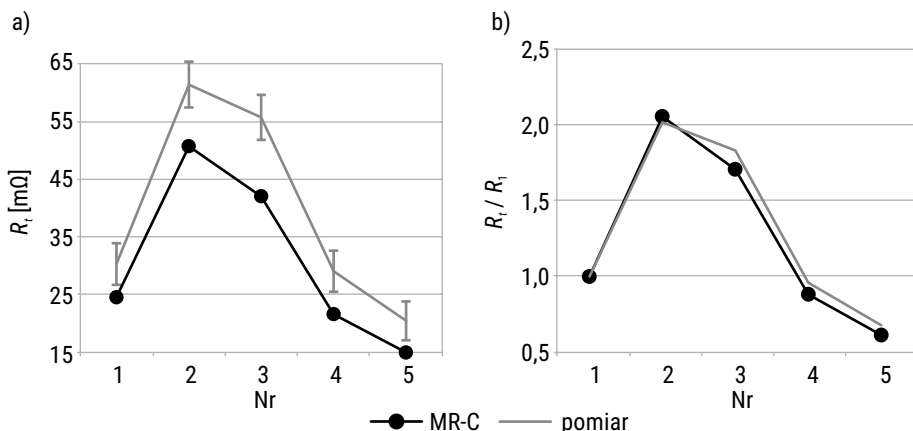
Rezystancja próbek  $\Omega_{e,g}$  zmieniała się w przedziale od 30 do prawie 230 m $\Omega$  (rys. 68a). Dla komórek nr 1 i 2 wartość rezystancji pozostała na podobnym poziomie ( $\approx 40$  m $\Omega$ ). Najmniejszą wartością  $R_t$  charakteryzował się element nr 4 (obliczenia MR-C i pomiar odpowiednio 28,04 m $\Omega$  i 34,57 m $\Omega$ ), zaś największą nr 3 (ponad 210 m $\Omega$ ).

Odzwierciedlenie rozkładu poszczególnych wartości widać także na wykresie wartości względnych (rys. 68b). Trend zmian rezystancji próbek (względem pierwszej z nich) został zachowany dla każdego elementu. Podstawowe różnice między obliczeniami MR-C a pomiarem dotyczą wybranych wariantów geometrii. Próbka nr 3 miała 5 razy większą rezystancję niż bazowa, zaś obliczenia numeryczne wskazały na 7-krotny przyrost wartości. Mniejszą rozbieżność obserwuje się dla próbki nr 5 ( $R_t/R_1 = 5,61$  w przypadku MR-C, względem  $R_t/R_1 = 3,14$  otrzymane z pomiarów). W przypadku pozostałych wariantów elementu  $\Omega_{e,g}$  różnice są zdecydowanie mniejsze.



RYS. 68. Obliczone i zmierzone rezystancje  $R_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,g}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne

W przypadku próbek złożonych z komórek typu  $\Omega_{e,f}$  (rys. 69) wartości bezwzględne rezystancji zastępczej różniły się od zmierzonych o średnio 8,6 mΩ. Wynika to m.in. z innej grubości warstwy miedzi niż w przypadku próbek  $\Omega_{e,g}$ . W procesie trawienia laminatów miedź jest oczyszczana z pozostałego na powierzchni zewnętrznej tlenku (często również z wierzchnią warstwą metalu), a następnie trawiona. Przedłużający się proces może – pomimo warstwy zabezpieczającej – nadtrafiać miedź, co wprost przekłada się na wzrost zastępczej rezystancji.



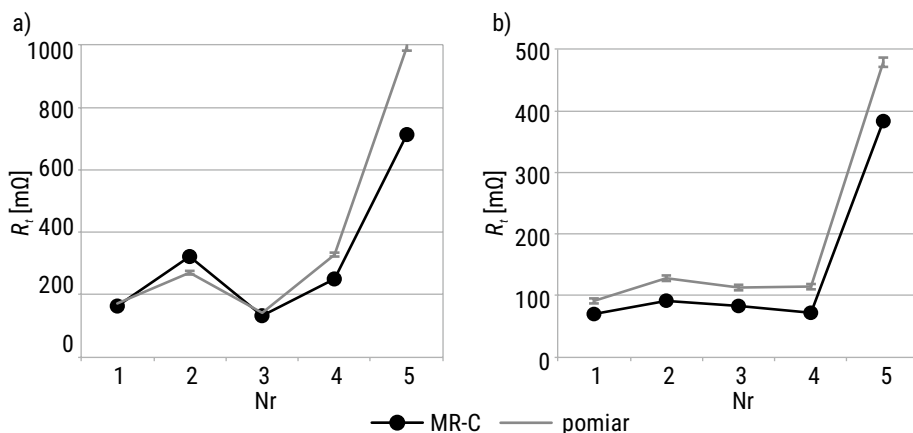
RYS. 69. Obliczone i zmierzone rezystancje  $R_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,f}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne

Struktura elementów  $\Omega_{e,f}$  charakteryzuje się relatywnie małą rezystancją, która w przypadku analizowanych próbek zmieniała się od 15 m $\Omega$  do ponad 60 m $\Omega$ , czyli była kilkukrotnie mniejsza niż opór komórek  $\Omega_{e,g}$ . Skrajne wartości rezystancji uzyskano dla wariantu nr 2 (obliczenia i pomiar odpowiednio  $R_{t,MR-C} = 50,92$  m $\Omega$  i  $R_{t,p} = 61,6$  m $\Omega$ ) oraz nr 5 ( $R_{t,MR-C} = 15,25$  m $\Omega$  i  $R_{t,p} = 20,73$  m $\Omega$ ). Przy identycznej grubości komórek obliczanych numerycznie i badanych, zgodność ilościowa powinna ulec poprawie.

Wskazany wniosek wynika z pełnej zgodności jakościowej obliczeń za pomocą MR-C z rezystancjami zmierzonymi. Krzywe obrazujące wartości względne (rys. 69b) pokryły się z niewielkimi odstępstwami, widocznymi w przypadku wariantu nr 3 ( $|\Delta R_t / R_t| = 0,13$ ) i nr 4 ( $|\Delta R_t / R_t| = 0,06$ ). Proponowany schemat MR-C umożliwia oszacowanie zakresu zmian rezystancji struktur w wyniku modyfikacji ich geometrii.

## 6.2.2. Rezystancja zastępcza materiału anizotropowego

Kolejny zestaw badań dotyczył anizotropowych wariantów budowy komórki: geometrii typu  $\Omega_{e,z}$  i  $\Omega_{e,k}$ . Obliczenia i pomiar rezystancji zastępczych przeprowadzono dwukrotnie, przy ortogonalnych polaryzacjach zewnętrznego pola elektrycznego. Anizotropia komórek jest kluczowym elementem poddanym weryfikacji.



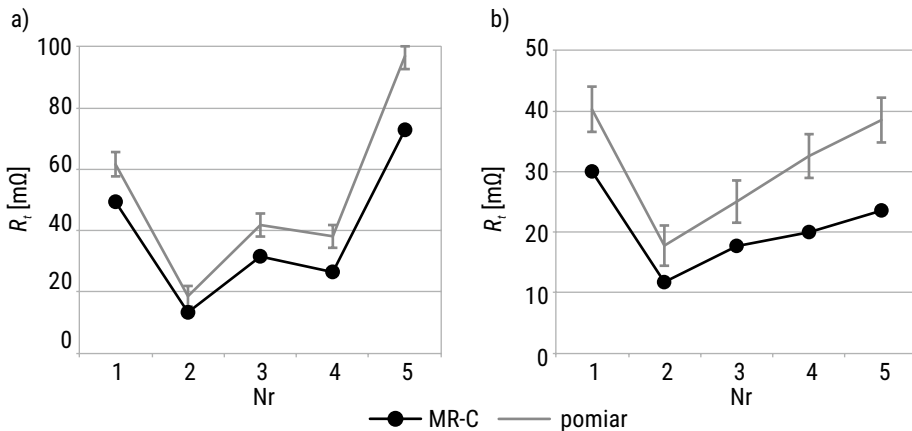
RYS. 70. Obliczone i zmierzone rezystancje  $R_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,z}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku x; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku y

Zwiększenie efektywnej długości części przewodzącej w geometrii typu  $\Omega_{e,z}$ , przekłada się na większe rezystancje (rys. 70a) otrzymane dla wszystkich rozważanych próbek. Przy polu elektrycznym skierowanym równoległe do kierunku x rezystancja znajduje się w przedziale 100 ÷ 990 m $\Omega$ . Rezultaty obliczeń numerycznych zawężyły



ten zakres do  $100 \div 700 \text{ m}\Omega$ . Największe rozbieżności uzyskano dla wariantu nr 5, w którym różnica wartości rezystancji wniosła  $290 \text{ m}\Omega$  (28,27%). Rozbieżności między obliczeniami a pomiarem dla pozostałych wariantów  $\Omega_{e,z}$  były zdecydowanie mniejsze (np.  $9,19 \text{ m}\Omega$  dla próbki nr 3) i wyniosły średnio 4,05%. Podobne różnice w wartościach rezystancji pojawiają się także przy polu elektrycznym skierowanym w kierunku  $y$ . Analiza rys. 70b wskazuje na zachowanie stałych relacji między wynikami obliczeń i pomiarów (różnica ok.  $20 \text{ m}\Omega$ ), przy czym obliczone opory były mniejsze od zmierzonych wartości. Porównując rezystancje próbek przy obu polaryzacjach potwierdzono ich anizotropowe właściwości przewodzące.

Charakterystyki przedstawione na rys. 70 wykazują dobrą zgodność jakościową. W przypadku obliczeń i pomiarów odwzorowane są wzrosty i spadki rezystancji kolejnych próbek, dominująca wartość dla próbki nr 5, najmniejszy opór dla próbki nr 3 (kierunek  $x$ ) i próbki nr 4 (kierunek  $y$ ). W różnicach oporów poszczególnych próbek, dla obu polaryzacji zewnętrznego pola elektrycznego, wyraźna jest anizotropia.



RYS. 71. Obliczone i zmierzone rezystancje  $R_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,k}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $y$

Ostatnia z rozważanych geometrii również charakteryzuje się anizotropią rezystancji. Elementy typu  $\Omega_{e,k}$  wykazują się mniejszą wartością rezystancji niż elementy  $\Omega_{e,z}$ . Uzyskane numerycznie i w wyniku pomiarów rezultaty (rys. 71) wskazują na 10-krotnie niższe wartości oporów. Na przykład porównując wartość  $R_t$  dla próbki nr 1 przy dwóch różnych polaryzacjach otrzymano odpowiednio  $R_{x,k} = 49,32 \text{ m}\Omega$  i  $R_{y,k} = 30 \text{ m}\Omega$  (iloraz  $R_{x,k}/R_{y,k}$  wynosi 1,63) na podstawie obliczeń numerycznych oraz  $R_{x,k} = 61,6 \text{ m}\Omega$  i  $R_{y,k} = 40,25 \text{ m}\Omega$  (iloraz  $R_{x,k}/R_{y,k}$  wynosi 1,53) z pomiarów. Dla próbki nr 5 różnica w wartościach była największa:  $72,8 \text{ m}\Omega$  i  $23,56 \text{ m}\Omega$

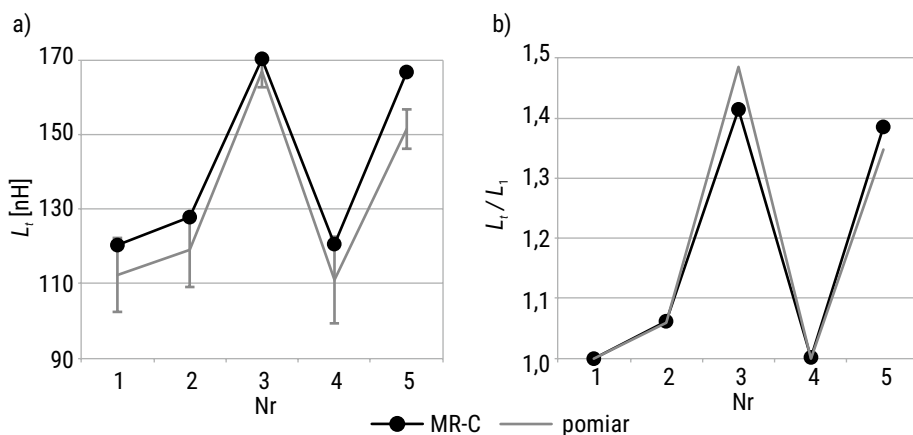
(iloraz 3,09) na podstawie obliczeń oraz 96,83 mΩ i 38,47 mΩ (iloraz 2,52) z pomiarów. Z obliczeń i pomiarów wynika, że wariant nr 2 charakteryzuje się najmniejszą rezystancją i ich ilorazem  $R_x/R_y$ .

We wszystkich rozpatrywanych przypadkach wartości rezystancji uzyskane z pomiarów są większe niż wyniki obliczeń numerycznych. Średnia różnica w wartościach rezystancji komórek  $\Omega_{e,z}$  i  $\Omega_{e,k}$  dla polaryzacji w kierunku  $x$  wynosi 12,69 mΩ, zaś dla polaryzacji  $y$  jest niewiele mniejsza (10,21 mΩ). Pomimo odchyień wartości bezwzględnych, kształty łamanych przy obu polaryzacjach (rys. 71a,b) i zestawów danych ponownie potwierdzają tożsamy trend zmiany rezystancji, towarzyszący modyfikacjom geometrii.

## 6.3. Analiza właściwości magnetycznych

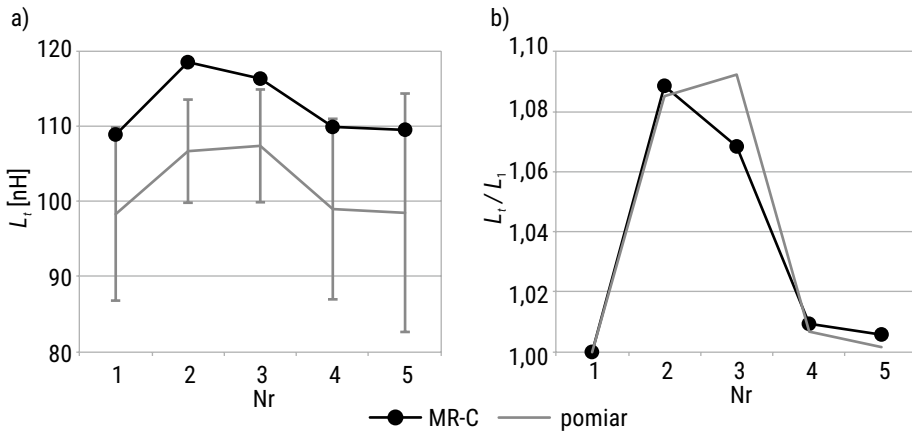
### 6.3.1. Indukcyjność zastępcza materiału izotropowego

Oprócz właściwości elektrycznych zbadano także indukcyjności zastępcze próbek. Zdolność do wytwarzania pola magnetycznego jest kluczowym parametrem wpływającym na właściwości filtrujące struktur. Zagadnienie staje się również istotne ze względu na bardzo małe wartości  $L_e$ , trudne do zmierzenia bez specjalistycznego sprzętu. Możliwość teoretycznego obliczenia indukcyjności z zadowalającą dokładnością jest ważna, gdyż jej określenie w inny sposób może być nieosiągalne.



RYS. 72. Obliczone i zmierzone indukcyjności  $L_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,g}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne

Analiza względnej indukcyjności próbek (rys. 72b) wskazuje jednoznacznie na wysoką zgodność wyników obliczeń i pomiarów. Odwzorowanie za pomocą MR-C kształtu charakterystyki zmienności indukcyjności w funkcji parametrów geometrycznych, umożliwi oszacowanie stopnia zmienności tego parametru, bez konieczność analizy złożonych modeli trójwymiarowych, czy prototypowania rzeczywistych struktur. Bezwzględne wartości indukcyjności (rys. 72a) zostały poprawnie estymowane metodą numeryczną. Wartości obliczone są większe od zmierzonych, gdyż jak wynika z zależności analitycznych [96, 97] pomijalnie cienka struktura (zakładana w obliczeniach za pomocą MR-C) zawsze osiąga większą indukcyjność, niż jej odpowiednik o skończonej grubości. Różnice między obliczeniami i pomiarami są większe aniżeli wynikałoby to z opisu teoretycznego, jednak nie przekraczają 15 nH. Wartości indukcyjności szacowane na podstawie obliczeń są większe średnio o 7% w stosunku do wartości zmierzonych.



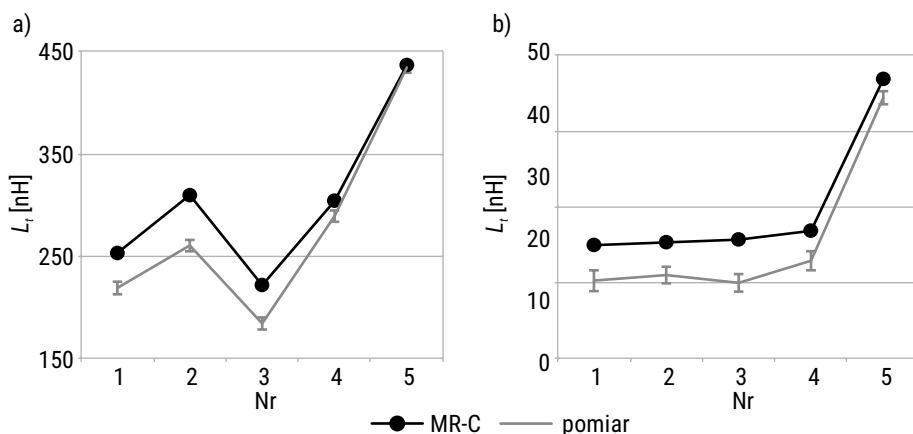
RYS. 73. Obliczone i zmierzone indukcyjności  $L_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,f}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne

Wyniki otrzymane w przypadku komórek typu  $\Omega_{e,f}$  nie odbiegają od poprzednich (rys. 73a), gdyż średnia różnica w wartościach indukcyjności wyniosła około 10%. Wartość indukcyjności jest mniejsza (max  $L_t = 117$  nH) niż w przypadku próbek typu  $\Omega_{e,g}$  (max  $L_t = 170$  nH). Wynika to z geometrii elementów, w których występują trzy równoległe ścieżki przewodzące. Pomimo różnic w budowie poszczególnych komórek  $\Omega_{e,f}$  przeprowadzony eksperyment pokazuje, iż próbki nr 1, 4 i 5 charakteryzują się niemal identycznymi indukcyjnościami, kolejno  $L_t = \{98,37; 99,03; 98,53\}$  nH. Wyniki obliczeń numerycznych wykazują podobne relacje między poszczególnymi wariantami  $L_t = \{108,93; 109,96; 109,56\}$  nH, przy czym wartości obliczone są powiększone względem zmierzonych o ok. 10 nH.

Charakterystyki przedstawione na rys. 73b wskazują na zadowalającą zgodność wyników obliczeń i pomiarów. Komórka o geometrii  $\Omega_{e,f}$  charakteryzuje się małą zmiennością indukcyjności przy zmianie geometrii. Względna różnica indukcyjności między próbkami nr 1 (wartość minimalna) i nr 3 (wartość maksymalna) jest mniejsza niż 9%. Modyfikacja geometrii komórki tego typu w małym stopniu rzutuje na jej indukcyjność. Metody analizy numerycznej, a w tym schemat MR-C pozwalają wyznaczyć te zmiany.

### 6.3.2. Indukcyjność zastępcza materiału anizotropowego

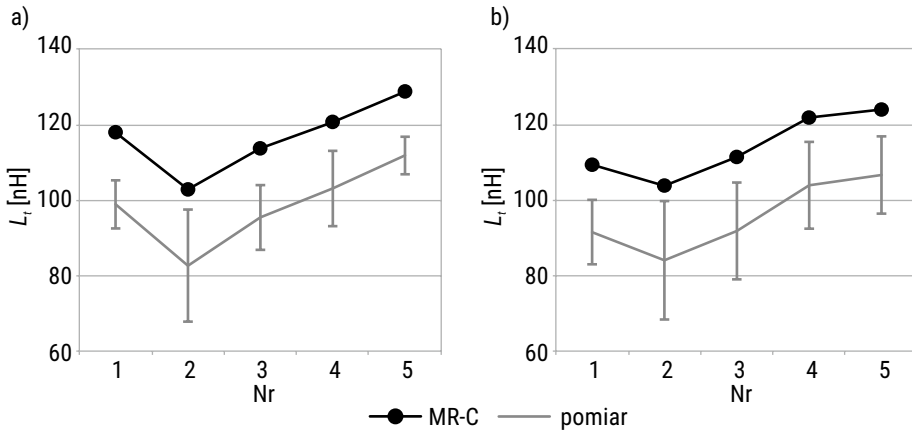
W ostatnim zestawie analizie poddano indukcyjności zastępcze struktur anizotropowych typu  $\Omega_{e,z}$  i  $\Omega_{e,k}$  przy dwóch ortogonalnych polaryzacjach zewnętrznego pola elektrycznego. Kształtowanie anizotropii właściwości elektrycznych nie musi mieć bezpośredniego przełożenia na właściwości magnetyczne, czego przykładem są komórki typu  $\Omega_{e,k}$ , które zachowują podobną indukcyjność przy obu polaryzacjach.



RYS. 74. Obliczone i zmierzone indukcyjności  $L_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,z}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $y$

Całkowita indukcyjność komórek typu  $\Omega_{e,z}$  jest największa z uzyskanych wśród badanych konfiguracji. Przy polaryzacji w kierunku  $x$  (rys. 74a) zmienia się ona od  $L_t = 180$  nH do prawie  $L_t = 450$  nH – zakres doboru wartości jest szeroki. Podobnie jest przy polaryzacji  $y$ , przy czym zakres zmian wartości jest prawie dwukrotnie mniejszy (rys. 74b). Wskazuje to na anizotropię oraz podwyższenie wartości efektywnej przenikalności magnetycznej tego typu komórek. Na przykład próbka nr 4 wykazuje zmierzoną indukcyjność zastępczą wynoszącą  $L_x = 293,43$  nH (polaryzacja  $x$ ) i  $L_y = 164,33$  nH (polaryzacja  $y$ ). Mniejszy iloraz wartości  $L_x/L_y$ , wykazują,

np. próbki nr 1 i nr 3. Omówione własności uzyskano na podstawie pomiarów, ale znajdując one potwierdzenie w obliczeniach numerycznych przy zastosowaniu MR-C. W obu przypadkach zachowano podobny trend zmian indukcyjności (zgodność jakościowa). Istotne są wyniki otrzymane przy polaryzacji  $y$ , ponieważ eksperyment wskazuje na porównywalne wartości  $L_t$  trzech pierwszych próbek. Identyczne rezultaty uzyskano także w wyniku obliczeń numerycznych.



RYS. 75. Obliczone i zmierzone indukcyjności  $L_t$  próbek materiałowych geometrii typu  $\Omega_{e,k}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $y$

Komórka typu  $\Omega_{e,k}$  przejawia podobne własności jak element typu  $\Omega_{e,f}$  z tą różnicą, iż jest przystosowana do formowania układów anizotropowych. Indukcyjność elementu  $\Omega_{e,k}$  w małym stopniu zależy od kierunku polaryzacji (rys. 75a,b), bowiem wartości bezwzględne pozostają zbliżone. Wyniki obliczeń i pomiarów wskazują na ograniczone możliwości kształtowania anizotropii właściwości magnetycznych materiałów niejednorodnych przy zastosowaniu komórek  $\Omega_{e,k}$ . Wartość indukcyjności pozostaje trzykrotnie mniejsza niż w przypadku komórek typu  $\Omega_{e,z}$ . Iloraz indukcyjności przy obu polaryzacjach jest niewiele większy od jedności, tzn.  $L_x/L_y \in < 0,98; 1,08 >$ . Wykonane testy wskazują, że geometria może być wykorzystywana do budowy układów, w których wymagana jest znaczna anizotropia właściwości elektrycznych ( $R_x/R_y \in < 1,0; 3,1 >$ ), lecz przy tym zachowana izotropia właściwości magnetycznych (np. metamateriały pola elektrycznego).

Porównanie wyników obliczeń i badań eksperymentalnych nie pozostawia wątpliwości co do zgodności jakościowej rezultatów. Przedstawiona metoda obliczeniowa MR-C jest skuteczna w ocenie zmienności właściwości komórek w zależności od ich geometrii wewnętrznej. Największą indukcyjnością charakteryzuje się próbka nr 5 ( $L_x = 111,77$  nH), najmniejszą nr 2 ( $L_x = 82,60$  nH). Zmiany indukcyjności

mieszczą się w zakresie 25,88 nH (MR-C) i 29,17 nH (pomiar). Wartości indukcyjności otrzymane z obliczeń były średnio większe o 18,42 nH od zmierzonych. Różnica ta jest prawie dwa razy większa niż w przypadku geometrii  $\Omega_{e,f}$  (10 nH).

## 6.4. Analiza błędu obliczeń i pomiaru

### 6.4.1. Struktury izotropowe

Rezultaty przeprowadzonych obliczeń i pomiarów różniły się ze względu na wartości bezwzględne rozpatrywanych wielkości. Zgodność jakościową zachowano w każdym z analizowanych przypadków budowy komórek. Wskazuje to na możliwość wykorzystania proponowanego algorytmu MR-C do oceny wpływu zmian geometrii na modyfikację wartości parametrów skupionych, a tym samym efektywnych właściwości elektrycznych i magnetycznych komórek.

Występujące różnice między rezultatami z modelu numerycznego a wynikami pomiarów, wiążą się z wpływem szeregu czynników na układ pomiarowy. Z przeprowadzonych analiz wynika, że zasadniczy wpływ na wartość błędu miał:

- 1) błąd pomiaru  $\delta_3$ , związany z wykorzystanym do pomiarów mostkiem RLC;
- 2) błąd związany z pasożytniczą impedancją styków/elektrod (redukowaną przez śruby dociskowe);
- 3) błąd wynikający z wpływu przewodów łączeniowych (częściowo eliminowaną przez kalibrację przyrządu).

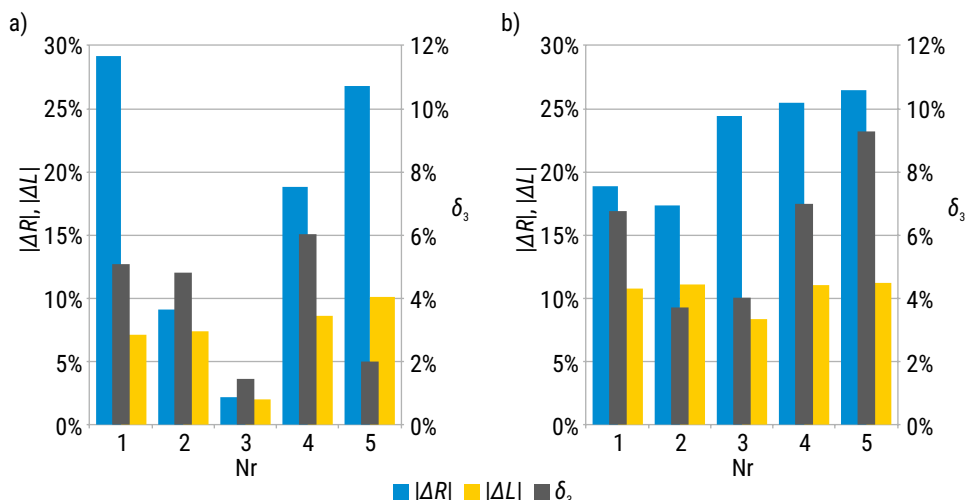
Aby oszacować wpływ niedokładności pomiaru na otrzymane wyniki, dla każdej z badanych próbek materiałowych obliczono błąd  $\delta_3$ . Dodatkowo określono moduły różnic względnych między pomiarami a wynikami obliczeń rezystancji  $|\Delta R|$  oraz indukcyjności  $|\Delta L|$ , w celu oszacowania możliwego wpływu błędu  $\delta_3$  na zwiększone wartości różnic  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$ .

Struktura typu  $\Omega_{e,g}$  charakteryzowała się najmniejszą średnią różnicą wartości indukcyjności  $|\Delta L| = 7,03\%$  (tabela 11) ze wszystkich analizowanych geometrii oraz jedną najmniejszych różnic rezystancji  $|\Delta R| = 17,19\%$ . Największą zgodność obliczeń i pomiarów uzyskano dla próbki nr 3, gdyż różnice względne  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  pozostają na poziomie bliskim 2% oraz dla próbki nr 2 (odpowiednio  $|\Delta R| = 9,10\%$   $|\Delta L| = 7,37\%$ ). Największe różnice w estymacji parametrów skupionych obserwuje się dla próbek nr 1 i 5. Próbka nr 3 o najmniejszej różnicy  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  charakteryzuje się również najmniejszym błędem  $\delta_3 = 1,45\%$ . Próbka nr 1 o wysokich wartościach  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  wyróżnia się jednym z największych błędów pomiarowych  $\delta_3 = 5,08\%$ .

TABELA 11. Różnice względne, błąd pomiaru i niepewności rozszerzone struktur izotropowych

Nr	$\Omega_{e,g}$					$\Omega_{e,f}$				
	$ \Delta R $	$ \Delta L $	$\delta_3$	$u_R$ [m $\Omega$ ]	$u_L$ [nH]	$ \Delta R $	$ \Delta L $	$\delta_3$	$u_R$ [m $\Omega$ ]	$u_L$ [nH]
1	29,12%	7,11%	5,08%	3,74	9,91	18,86%	10,74%	6,75%	3,59	11,51
2	9,10%	7,37%	4,81%	3,76	9,94	17,33%	11,08%	3,70%	3,97	6,86
3	2,17%	2,00%	1,45%	5,30	4,20	24,40%	8,32%	4,01%	3,91	7,49
4	18,78%	8,60%	6,02%	3,62	11,61	25,43%	11,03%	6,98%	3,56	11,99
5	26,77%	10,08%	2,00%	4,61	5,26	26,45%	11,19%	9,28%	3,35	15,85
<b>Średnia</b>	<b>17,19%</b>	<b>7,03%</b>	<b>3,87%</b>	<b>4,21</b>	<b>8,18</b>	<b>22,49%</b>	<b>10,47%</b>	<b>6,14%</b>	<b>3,68</b>	<b>10,74</b>

Analizując wyniki geometrii  $\Omega_{e,f}$  (tabela 11) dostrzec można podobną relację zachodzącą między różnicami względnymi i błędami pomiaru. Największe różnice obserwuje się przy próbce nr 5, gdy błąd pomiaru osiągnął ekstremum  $\delta_3 = 9,28\%$ . Wyniki wskazują, że średnie różnice rezystancji 22,49% i indukcyjności 10,47% w przypadku komórek typu  $\Omega_{e,f}$  są większe od otrzymanych dla komórek typu  $\Omega_{e,g}$ , tak samo jak błąd pomiaru ( $\delta_3 = 6,14\%$  w porównaniu do  $\delta_3 = 3,87\%$ ).



RYS. 76. Moduły różnic względnych i błąd pomiaru komórek izotropowych: a)  $\Omega_{e,g}$ ; b)  $\Omega_{e,f}$

Zakres zmian błędów pomiaru struktur izotropowych (rys. 76) jest szeroki ( $\delta_3 = 1,45\% \div 9,28\%$ ). Analizując diagram geometrii typu  $\Omega_{e,f}$  (rys. 76b) uwidoczni się tendencja do wzrostu różnicy rezystancji zastępczej wraz ze wzrostem błędu pomiaru. Z uwagi na fakt, że różnice indukcyjności mają bardzo zbliżony poziom ( $|\Delta L| \in \langle 8,32\%; 11,19\% \rangle$ ) co utrudnia oszacowanie wpływu błędu pomiaru na ich wartość, to w tym przypadku również potwierdza się, że najmniejsza różnica względna

$|\Delta L| = 8,32\%$  została osiągnięta przy relatywnie małym błędzie  $\delta_3 = 4,01\%$ . Zależność różnic parametrów skupionych nie jest ściśle uwarunkowana błędem pomiaru, czego przykładem jest struktura  $\Omega_{e,g}$ . Istnieje jednak zauważalna korelacja między nimi, która stanowi uzasadnienie dla obserwowanych rozbieżności w wynikach.

## 6.4.2. Struktury anizotropowe

Parametry skupione komórek anizotropowych obliczano dla ortogonalnych polaryzacji zewnętrznego pola elektrycznego. Dla każdej próbki uzyskano dwa zestawy parametrów skupionych, a tym samym dwie wartości impedancji (wzdłuż osi  $x$  i  $y$ ). Od wartości mierzonego modułu impedancji zależy błąd pomiaru, wobec tego wszystkie próbki były charakteryzowane przez dwa błędy pomiarowe oraz cztery różnice względne. W przypadku obu geometrii zawsze wyższe były różnice i błędy przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku  $y$ . Wynika to z umiejscowienia geometrii na płaszczyźnie  $xy$ , by to właśnie w tym kierunku zachowane były mniejsze efektywne przewodności elektryczne, aniżeli te spodziewane w kierunku  $x$ .

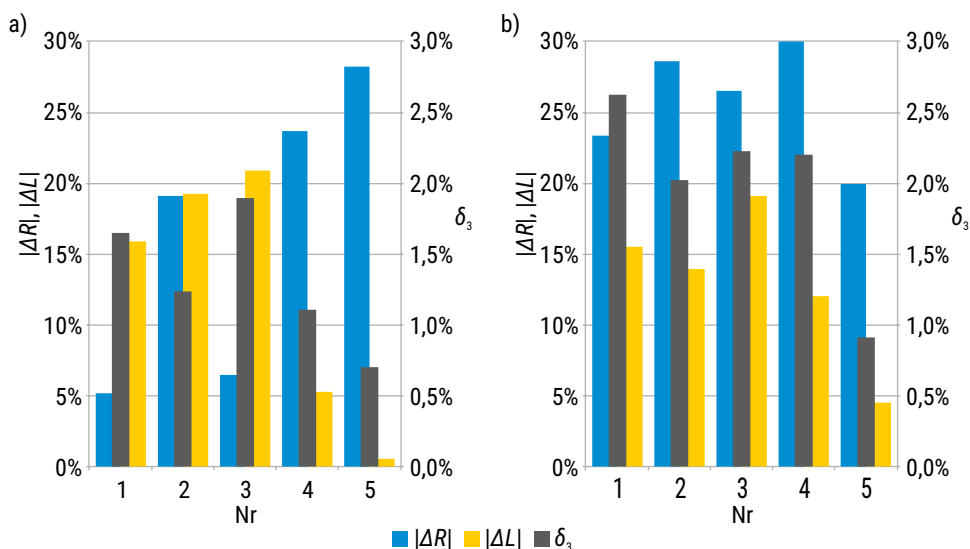
Wariant  $\Omega_{e,z}$  jest strukturą o najmniejszych błędach pomiaru spośród wszystkich próbek (tabela 12). Średnia wartość  $\delta_3$  przy polaryzacji  $x$  i  $y$  wyniosła odpowiednio 1,32% i 2,00%. Zakres zmian mieści się w przedziale  $\delta_3 \in <0,70\%; 2,63\%>$ . Najmniejsze wartości błędu pomiaru wystąpiły przy najmniejszych różnicach względnych indukcyjności, czyli  $\delta_3 = 0,53\%$  (polaryzacja  $x$ ) i  $\delta_3 = 4,50\%$  (polaryzacja  $y$ ) obserwowane dla próbki nr 5. Największe błędy występują przy największych różnicach  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  (próbka nr 3 przy polaryzacji  $x$ , próbki nr 1 i 3 przy polaryzacji  $y$ ). Dla tych geometrii wyraźny jest też szeroki przedział zmian różnic względnych. Np. przy polaryzacji  $x$  rezystancja zmienia się od  $|\Delta R| = 5,16\%$  do  $|\Delta R| = 28,27\%$ , a indukcyjność od  $|\Delta L| = 0,53\%$  do  $|\Delta L| = 20,90\%$ . Rozrzut wartości maleje przy polaryzacji  $y$ , lecz niektóre różnice wzrastają (rezystancja do ponad 37,06%). Przyrost różnic względnych między obliczeniami a pomiarami można powiązać ze wzrostem błędu pomiaru.

TABELA 12. Różnice względne, błąd pomiaru i niepewności rozszerzone struktur anizotropowych  $\Omega_{e,z}$

Nr	$\Omega_{e,z}$ (polaryzacja pola wzdłuż osi $x$ )					$\Omega_{e,z}$ (polaryzacja pola wzdłuż osi $y$ )				
	$ \Delta R $	$ \Delta L $	$\delta_3$	$u_R$ [mΩ]	$u_L$ [nH]	$ \Delta R $	$ \Delta L $	$\delta_3$	$u_R$ [mΩ]	$u_L$ [nH]
1	5,16%	15,90%	1,65%	4,95	6,33	23,36%	15,52%	2,63%	4,24	6,89
2	19,12%	19,26%	1,24%	5,81	5,66	28,63%	13,96%	2,02%	4,59	5,45
3	6,47%	20,90%	1,90%	4,68	6,10	26,53%	19,10%	2,23%	4,45	5,79
4	23,69%	5,26%	1,11%	6,31	5,64	37,06%	12,03%	2,20%	4,46	6,29
5	28,27%	0,53%	0,70%	12,07	5,40	19,96%	4,50%	0,91%	7,68	4,31
<b>Średnia</b>	<b>16,54%</b>	<b>12,37%</b>	<b>1,32%</b>	<b>6,77</b>	<b>5,83</b>	<b>27,11%</b>	<b>13,02%</b>	<b>2,00%</b>	<b>5,08</b>	<b>5,75</b>



Korelacja różnic  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  parametrów skupionych z błędem  $\delta_3$  (rys. 77) widoczna jest na podstawie trendu zmian tych wielkości. Wysoka wartość  $\delta_3$  występuje przy znacznych wartościach różnicy indukcyjności (rys. 77a). Obserwowane względne błędy rezystancji  $|\Delta R|$  podlegają zmianom, które wynikają głównie ze zmiennej grubości warstwy miedzi, uzyskanej w procesie wytwarzania próbek do badań eksperymentalnych. Analizując  $|\Delta R|$  całościowo, np. dla polaryzacji pola w kierunku  $y$  (rys. 77b) błędy pomiaru rzędu  $\delta_3 = 2\%$  wystąpiły przy różnicach rezystancji ( $|\Delta R| = 26,18\%$ ) i indukcyjności ( $|\Delta L| = 16,19\%$ ) pozostających na zbliżonym poziomie.



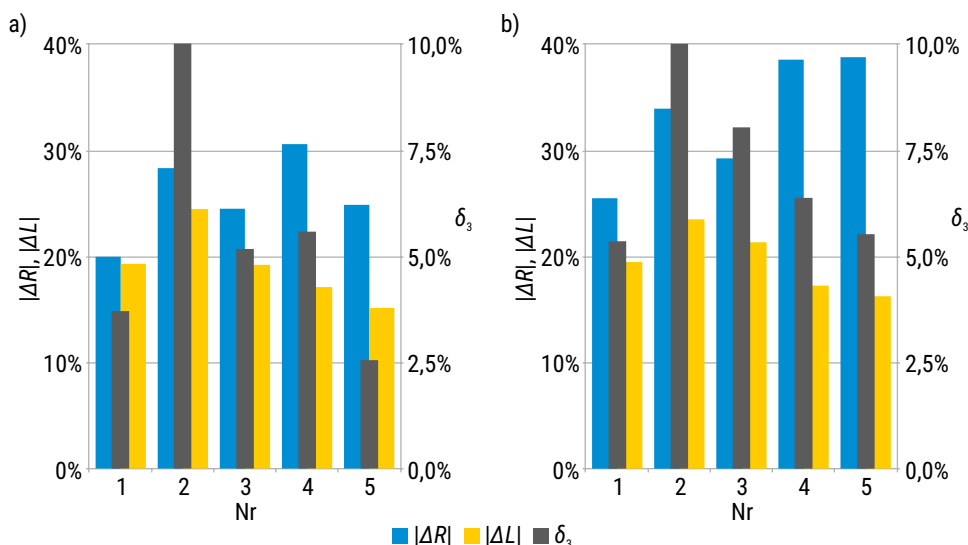
RYS. 77. Moduły różnic względnych i błąd pomiaru geometrii  $\Omega_{e,z}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku x; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku y

W przypadku wariantu  $\Omega_{e,k}$  (tabela 13) błędy pomiaru są ponad 3 razy większe. Średnia wartość  $\delta_3$  to 5,47% (polaryzacja pola w kierunku  $x$ ) i  $\delta_3 = 7,20\%$  (polaryzacja pola w kierunku  $y$ ). Obserwowana korelacja między błędem pomiaru a różnicami  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  widoczna jest w ich wzroście, np. średnia wartość  $|\Delta R|$  zwiększyła się o 9,06% (polaryzacja w kierunku  $x$ ) i 6,06% (polaryzacja w kierunku  $y$ ) względem komórek  $\Omega_{e,z}$ , a błąd  $|\Delta L|$  o 6,63% (polaryzacja w kierunku  $x$ ) i 6,51% (polaryzacja w kierunku  $y$ ). Błędy pomiaru nie tylko wzrosły, ale także poszerzył się ich zakres,  $\delta_3 \in \langle 2,55\%; 10,74\% \rangle$ . Najmniejszą łączną wartość różnic względnych  $|\Delta R| + |\Delta L|$  (przy polaryzacji  $x$  dla próbek nr 1 i 5) osiągnięto przy najmniejszym  $\delta_3$  (odpowiednio 3,71% i 2,55%), z kolei największe różnice wystąpiły dla próbki nr 2, gdzie błąd był największy ( $\delta_3 > 10\%$ ).

TABELA 13. Różnice względne, błąd pomiaru i niepewności rozszerzone struktur anizotropowych ( $\Omega_{e,k}$ )

Nr	$\Omega_{e,k}$ (polaryzacja pola wzdłuż osi x)					$\Omega_{e,k}$ (polaryzacja pola wzdłuż osi y)				
	$ \Delta R $	$ \Delta L $	$\delta_3$	$u_R$ [mΩ]	$u_L$ [nH]	$ \Delta R $	$ \Delta L $	$\delta_3$	$u_R$ [mΩ]	$u_L$ [nH]
1	25,47%	19,27%	3,71%	3,97	6,36	25,47%	19,44%	5,35%	3,75	8,50
2	33,88%	24,42%	10,37%	3,37	14,85	33,88%	23,47%	10,74%	3,33	15,64
3	29,21%	19,15%	5,17%	3,76	8,55	29,21%	21,30%	8,03%	3,50	12,78
4	38,52%	17,06%	5,57%	3,70	9,97	38,52%	17,23%	6,37%	3,61	11,48
5	38,75%	15,11%	2,55%	4,30	4,96	38,75%	16,22%	5,52%	3,70	10,21
<b>Średnia</b>	<b>33,17%</b>	<b>19,00%</b>	<b>5,47%</b>	<b>3,82</b>	<b>8,94</b>	<b>33,17%</b>	<b>19,53%</b>	<b>7,20%</b>	<b>3,58</b>	<b>11,72</b>

W przypadku komórki typu  $\Omega_{e,k}$  potwierdzono związek między różnicami względnymi  $|\Delta R|$  i  $|\Delta L|$  a dokładnością pomiaru  $\delta_3$ . Gdy błąd  $\delta_3$  jest najmniejszy (próbki nr 1 i 5), wówczas także  $|\Delta R|$  przyjmuje mniejsze wartości. Wzrost błędu odpowiada zwiększeniu się różnic względnych rezystancji (próbki nr 2 oraz nr 4), co jest widoczne również w wynikach dla polaryzacji pola elektrycznego w kierunku y (rys. 78b), np. dla próbek nr 2 i 3. Aby zapewnić jak najwyższą dokładność pomiaru za pomocą mostka RLC należy badać próbki o jak największej impedancji, co uzasadnia szeregowe połączenie komórek w próbkach materiałów, przyjęte na potrzeby przeprowadzonych eksperymentów.



RYS. 78. Moduły różnic względnych i błąd pomiaru geometrii  $\Omega_{e,k}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku x; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku y

## Podsumowanie

Przedstawiony rozdział poświęcono weryfikacji poprawności oraz dokładności identyfikacji właściwości elektrycznych materiałów niejednorodnych przy zastosowaniu schematu obliczeniowego MR-C. Na podstawie analizy dwóch wariantów komórek izotropowych ( $\Omega_{e,g}$  i  $\Omega_{e,f}$ ) oraz dwóch wariantów anizotropowych ( $\Omega_{e,z}$  i  $\Omega_{e,k}$ ), dokonano oceny błędów obliczeń przeprowadzonych za pomocą MR-C. Analizie poddano wpływ geometrii wewnętrznej komórek na parametry skupione (zastępczą rezystancję i indukcyjność). Za pomocą MR-C obliczono modele numeryczne komórek. Następnie identyczne elementy wytworzono metodą trawienia. Każdy z czterech wariantów był reprezentowany przez 5 struktur o różniącej się wewnętrznej geometrii. Próbki wykonano jako linie zawierające 20 szeregowo połączonych elementów. W kolejnym etapie przygotowano stanowisko pomiarowe do określenia zastępczej rezystancji i indukcyjności próbek.

Analiza porównawcza dotyczyła wyników obliczeń numerycznych oraz badań eksperymentalnych. Metoda numeryczna z mniejszym błędem określa rezystancję i indukcyjności struktur izotropowych. Błąd wzrasta przy analizie struktur anizotropowych, na co wpływ miał m.in. błąd pomiaru pozostający w korelacji z mierzonymi wartościami. W przypadku analiz poszczególnych typów komórek uzyskano wysoką zgodność jakościową rezultatów. Wykazano tym samym użyteczność zaproponowanego schematu MR-C jako narzędzia pozwalającego na zadowalającą identyfikację efektywnych właściwości komórek. Proponowana metoda umożliwi ocenę wpływu parametrów geometrycznych elementów na zmianę ich parametrów elektrycznych.

Rozpatrzono różnice w estymacji parametrów skupionych między modelem numerycznym a pomiarami. Średnie różnice dotyczące rezystancji zastępczej kształtowały się na poziomie 19,84% dla komórek izotropowych i 25,61% dla anizotropowych, z kolei dla indukcyjności zastępczej były to odpowiednio 8,75% i 15,98%. Błąd pomiaru był najmniejszy dla struktur o podwyższonej impedancji, lecz dla całego zestawu badanych próbek mieścił się on w zakresie od 0,70% do 10,74%. Obserwowane różnice między obliczeniami a pomiarami w głównej mierze wynikają z błędów pomiarów za pomocą mostka RLC.

# Podsumowanie

W przedstawionej monografii zaprezentowano wiele metod przeznaczonych do oceny oraz doboru właściwości elektrycznych i magnetycznych materiałów kompozytowych o planarnej budowie. Niejednorodna, przewodząca warstwa robocza materiału kształtowana na podstawie periodycznie rozłożonych na płaszczyźnie komórek z dobieraną geometrią wewnętrzną, umożliwia syntezę materiału o regulowanej wartości efektywnej przewodności elektrycznej, przenikalności magnetycznej i elementów tensora materiałowego. Zaproponowane niejednorodne laminarne materiały stanowią osobną grupę materiałów kompozytowych o dobieranych zastępczych parametrach elektrycznych oraz metamateriałów pola skalarnego, kształtujących rozkład stacjonarnych pól elektrycznych i magnetycznych.

Przedstawiono algorytm numeryczny łączący metodę różnic skończonych i całkowy opis pola magnetycznego, umożliwiający wyznaczenie wybranych właściwości elektrycznych i magnetycznych niejednorodnych materiałów laminarnych, na podstawie rozkładu stałego pola elektrycznego i magnetycznego. Rezultaty uzyskane za pomocą proponowanego schematu obliczeniowego, a także wybrane wyniki obliczeń przeprowadzonych przy wykorzystaniu modelu obwodowego, w zadowalającym stopniu zgadzają się z rezultatami otrzymanymi przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

Zaprezentowane realizacje numerycznych algorytmów obliczeniowych umożliwiają identyfikację oraz dobór właściwości układów zbudowanych z komórek o zróżnicowanej geometrii. Stąd za najważniejsze osiągnięcia własne autor uważa:

- 1) Wprowadzenie nowej klasy niejednorodnych kompozytów laminarnych przeznaczonych do fizycznej realizacji metamateriałów pola skalarnego, a także sześciu wariantów budowy komórek, zapewniających dobór efektywnych właściwości elektrycznych i magnetycznych w zależności od warunków narzucanych przez projektanta lub charakter pracy (np. anizotropowe przewodności elektryczne przy izotropowej przenikalności magnetycznej).
- 2) Ocenę właściwości elektrycznych i magnetycznych proponowanych struktur komórek materiału niejednorodnego i możliwości kształtowania efektywnych właściwości w wyniku doboru geometrii oraz materiałów budujących komórki.
- 3) Przeprowadzenie testów dotyczących projektowania i wytwarzania materiałów charakteryzujących się anizotropią właściwości elektrycznych oraz zastosowania wybranych struktur do syntezy metamateriałów pola skalarnych.

- 4) Autorską implementację algorytmu różnicowego przeznaczonego do analizy stacjonarnego pola elektrycznego elementów niejednorodnych (układ przewodnik-izolator) w przestrzeni 2D i umożliwiającego wyznaczenie rozkładu gęstości prądu elektrycznego przewodzonego przez warstwę roboczą elementu.
- 5) Zaproponowanie cienkowarstwowego opisu stałego pola magnetycznego komórki, wykorzystującego znajomość jej geometrii przedstawionej w postaci przekroju podłużnego struktury oraz rozkładu gęstości prądu, ograniczonego do dwuwymiarowego obszaru zajmowanego przez układ materiałowy.
- 6) Opracowanie numerycznej realizacji cienkowarstwowego modelu magnetycznego w skrypcie obliczeniowym, przy zastosowaniu dwuwymiarowej kwadratury numerycznej pierwszego rzędu.
- 7) Sprzężenie obu opracowanych schematów obliczeniowych, które umożliwiają zastosowanie metody różnicowo-całkowej (MR-C), minimalizującej liczbę stopni swobody modelu w porównaniu do klasycznych modeli 3D.
- 8) Identyfikacja obwodowych parametrów zastępczych komórek na podstawie rozkładów powierzchniowych gęstości prądu elektrycznego i magnetycznego potencjału wektorowego, otrzymane za pomocą MR-C.
- 9) Opracowanie metody homogenizacji właściwości elektrycznych (efektywna przewodność elektryczna) oraz magnetycznych (efektywna przenikalność magnetyczna) dla pól o wybranej polaryzacji, przy wykorzystaniu parametrów zastępczych (rezystancja i indukcyjność elementu) i wzorów analitycznych.
- 10) Zastosowanie modeli sieciowych i homogenicznych materiału niejednorodnego do analizy zjawisk elektrycznych oraz magnetycznych. Modele w znacznym stopniu redukują złożoność i wymagania obliczeniowe układów materiałowych składających się ze znacznej liczby komórek o dowolnej strukturze (przybliżanej za pomocą dwu- lub czterozaciskowego elektrycznego schematu zastępczego).
- 11) Wykorzystanie metody optymalizacyjnej *Particle Swarm Optimization* do syntezy kompozytu o zadanych właściwościach elektrycznych, magnetycznych, tensorze materiałowym, przy szybkiej zbieżności do rozwiązania optymalnego.
- 12) Pozytywna weryfikacja poprawności oceny właściwości struktur niejednorodnych za pomocą proponowanej metody numerycznej (MR-C). Badania eksperymentalne próbek materiałowych przeprowadzono na przygotowanym stanowisku pomiarowym.

W porównaniu z przedstawionymi w literaturze realizacjami metamateriałów pola skalarnego [36, 37, 44, 45, 53, 61, 60, 70, 71, 80, 94, 102, 121, 138, 142] niejednorodne materiały umożliwiają jednoczesny dobór efektywnych właściwości w szerszym zakresie. Wykorzystana analogia konstrukcyjna do metamateriałów wielkiej częstotliwości wprowadza dyskretyzację materiału kompozytowego na komórki, tym samym umożliwiając analizę i dobór właściwości przy wykorzystaniu maksymalnie

zredukowanego modelu numerycznego. Wprowadzenie przez autora modeli sieciowych i homogenicznych pozwala na analizę układów materiałowych za pomocą narzędzi numerycznych niewymagających zaawansowanych jednostek obliczeniowych.

Omówione zagadnienia nie wyczerpują tematu niejednorodnych kompozytów elektromagnetycznych, a proponowane metody analizy mogą być rozwijane. W ocenie autora prace badawcze można kontynuować w wielu kierunkach, spośród których do najważniejszych zaliczyć można:

- analizę innych geometrii komórek, zapewniających szerszy zakres dobieranych parametrów efektywnych (przenikalności magnetycznej) i separację wpływu parametrów geometrycznych na właściwości elektryczne oraz magnetyczne;
- syntezę oraz ocenę właściwości kompozytów o zwiększonej liczbie warstw roboczych, kształtujących parametry elektryczne i magnetyczne materiału;
- rozważenie struktur materiałowych zbudowanych przy użyciu elementów składowych o zmiennej skali oraz materiałów o charakterystyce nieliniowej, a także układów o więcej niż jednej warstwie przewodzącej;
- identyfikację parametrów elektromagnetycznych (efektywne przenikalności elektryczne oraz magnetyczne) w polu dużej częstotliwości, w warunkach propagacji fali elektromagnetycznej padającej na powierzchnię materiału;
- rozszerzenie metody różnicowocalkowej do analizy harmonicznych pól elektrycznych i magnetycznych w zakresie średnich i dużych częstotliwości.

# Wykaz literatury

1. Abegaonkar M., Kurra L., Koul S. K., Printed resonant periodic structures and their applications, CRC Press, 2016.
2. Abramovich H., Intelligent materials and structures, De Gruyter, 2016.
3. Alam M.N., et al., A comparative study of metaheuristic optimization approaches for directional overcurrent relays coordination, Electric Power Systems Research 128, 2015.
4. Alitalo P, et al., Transmission-Line networks cloaking objects from electromagnetic fields, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 56(2), 2008.
5. Al-Sohimat L.O., et al., Inductance calculation of infinite networks using greens function: perfect and perturbed triangular lattices, Science International Lahore 28(2), 2016.
6. Aniserowicz K., Wybrane metody przybliżonego rozwiązywania zagadnień brzegowych elektrodynamiki technicznej, Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok, 2017.
7. Arslanagić S., et al., A review of the scattering-parameter extraction method with clarification of ambiguity issues in relation to metamaterial homogenization, IEEE Antennas and Propagation Magazine 55(2), 2013.
8. Bai Y., The ferroelectric-ferromagnetic composite ceramics with high permittivity and high permeability in hyper-frequency, Ferroelectrics, Ed. Indrani Coondoo, InTech, 2010.
9. Banerjee B., An introduction to metamaterials and waves in composites, CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 2011.
10. Basseri J., Joodaki M., Realization of a low-cost displacement sensor on PCB with two-metal-layer coplanar waveguide loaded by an EBG structure, IEEE Sensors Journal 17 (15), 2017.
11. Bordianu A., Numerical testing of homogenization formulas efficiency for magnetic composite materials, Journal of Physics: Conference Series (858), 2015.
12. Butryło B., Steckiewicz A., Charakteryzacja właściwości i rozkładu pola magnetycznego w przewodzących cienkowarstwowych materiałach laminarnych, XLI Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO 2018, Gliwice–Ustroń, 2018.
13. Butryło B., Steckiewicz A., Ocena termicznych właściwości dynamicznych materiałów warstwowych ze strukturą periodyczną, Przegląd Elektrotechniczny 93(3), 2017.
14. Butryło B., Steckiewicz A., Ocena właściwości materiału warstwowego o strukturze periodycznej ze względu na dynamikę zjawisk termicznych, XXXIX Międzynarodowa Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów IC-SPETO 2016, Gliwice–Ustroń, 2016.

15. Butryło B., Steckiewicz A., Przewodzenie ciepła w pasywnym elemencie warstwowym z periodyczną strukturą elementów prostokątnych, *Przegląd Elektrotechniczny* 93(1), 2017.
16. Butryło B., Steckiewicz A., Wielokryterialna metoda doboru struktury przewodzącego materiału periodycznego ze względu na zjawiska elektromagnetyczne, *XL Konferencja z Podstaw Elektrotechniki i Teorii Obwodów SPETO 2017*, Gliwice–Ustroń, 2017.
17. Carillo-Castillo A., Osuna-Alarcon J. G., Preparation and characterization of hybrid materials of epoxy resin type bisphenol a with silicon and titanium oxides by sol gel process, *Journal of the Mexican Chemical Society* 55(4), 2011.
18. Castro H.F., et al., All-inkjet-printed low-pass filters with adjustable cutoff frequency consisting of resistors, inductors and transistors for sensor applications, *Organic Electronics* 38, 2016.
19. Chen T., et al., Cloak for curvilinearly anisotropic media in conduction, *Applied Physics Letters* 93, 2008.
20. Choroszucho A., Analiza propagacji fal elektromagnetycznych w elementach budowlanych o złożonej strukturze w zakresie częstotliwości komunikacji bezprzewodowej, *Politechnika Białostocka*, 2014.
21. Djuric S., Koch fractal inductors printed on flexible substrate, *Electronics Letters* 52(8), 2016.
22. Dosoudil R., et al., Frequency variation of complex permeability in dual ferrite filler – single polymeric matrix composites, *Acta Physica Polonica A* 113(1), 2008.
23. Du S., et al., A new electrode design method in piezoelectric vibration energy harvesters to maximize output power, *Sensors and Actuators A* (263), 2017.
24. Eberhart R.C., Kennedy J., A new optimizer using particle swarm theory, *Proc. of 6<sup>th</sup> International Symposium on Micromachine and Human Science*, Nagoya, Japonia, 1995.
25. Fejdyś M., et al., Hybrid composite armour systems with advanced ceramics and ultra-high molecular weight polyethylene (UHMWPE) fibres, *Fibres & Textiles in Eastern Europe* 3(117), 2016.
26. Gibson W.C., *The method of moments in electromagnetics*, Capman & Hall/CRC, 2008.
27. Guenneau S., Amra C., Veynante D., Transformation thermodynamics: cloaking and concentrating heat flux, *Optics Express* 20(7), 2012.
28. Guenneau S., et al., Chapter 11: Homogenization techniques for periodic structures, *Gratings: Theory and Numeric Applications*, Ed. E. Popov, Institut Fresnel, AMU, CNRS, 2012.
29. Guenneau S., Amra C., Anisotropic conductivity rotates heat fluxes in transient regimes, *Optics Express* 21(5), 2013.
30. Gupta M., Mathur V., Hexagonal fractal antenna using koch for wireless applications, *Frequenz* 72(9-10), 2018.
31. Hameg Instruments GmbH, R&S®HM8118 Programmable LCR-Bridge User Manual, 2016, Dostęp on-line [01.02.2019]: [https://scdn.rohdeschwarz.com/ur/pws/dl\\_downloads/dl\\_common\\_library/dl\\_manuals/gb\\_1/h/hm8118\\_1/HM8118\\_UserManual\\_de\\_en\\_06.pdf](https://scdn.rohdeschwarz.com/ur/pws/dl_downloads/dl_common_library/dl_manuals/gb_1/h/hm8118_1/HM8118_UserManual_de_en_06.pdf).
32. Hames A., Ndao S., Modeling of writable thin film liquid metal phase change material for electronics cooling, *16<sup>th</sup> IEEE ITherm Conference*, Orlando, USA, 2017.



33. Hamilton R.L., Crosser O.K., Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems, *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals* 1(3), 1962.
34. Han T., et al., Full control and manipulation of heat signatures: cloaking, camouflage and thermal metamaterials, *Advanced Materials* 26, 2014.
35. Han T., et al., Homogeneous thermal cloak with constant conductivity and tunable heat localization, *Scientific Reports* 3, 2013.
36. Han T., et al., Manipulating steady heat conduction by sensu-shaped thermal metamaterials, *Scientific Reports* 5, 2015.
37. Han T., Qiu C.-W., Transformation laplacian metamaterials: recent advances in manipulating thermal and DC fields, *Journal of Optics* 18, 2016.
38. Haroonhaider S., Application of transformation optics for the purpose of cloaking, *Physics & Astronomy International Journal* 2(3), 2018.
39. Harrington R.F., *Field computation by moment methods*, Wiley-IEEE Press, Hoboken, 1993.
40. Hernandez L., et al., Low-loss RF filter through a combination of additive manufacturing and thin-film process, *IEEE Radio and Wireless Symposium RWS 2017*, 2017.
41. Hindy M.A., et al., Experimental retrieval of the negative parameters “Permittivity and Permeability” based on a circular split ring resonator (CSRR) left handed metamaterial, *Journal of Electrical Systems and Information Technology* 5(2), 2018.
42. Ho S.L., Yang S., An artificial bee colony algorithm for inverse problems, *International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics* 31(3), 2009.
43. Hu R., et al., Local heating realization by reverse thermal cloak, *Scientific Reports* 4, 2014.
44. Jiang W.X., et al., An ultrathin but nearly perfect direct current electric cloak, *Applied Physics Letters* 102, 2013.
45. Jiang W.X., et al., Enhancement of current density by DC electric concentrator, *Scientific Reports* 2, 2012.
46. Kaczorek T., *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa, 2008.
47. Kollar P., et al., Wide frequency range ac magnetic properties of fe-based composite materials, *Acta Physica Polonica A* 118(5), 2010.
48. Konar M., Bagis A., Performance comparison of particle swarm optimization, differential evolution and artificial bee colony algorithms for fuzzy modelling of nonlinear systems, *Elektronika Ir Elektrotechnika* 22(5), 2016.
49. Korzeniewska E., Jakubas A., Pomiar rezystancji powierzchniowej warstw cienkich o dowolnych kształtach wytworzonych na podłożach elastycznych, *Przegląd Elektrotechniczny* R90(12), 2014.
50. Kumar P.A., Rao N.B., Fractal series stacked inductor for radio frequency integrated circuit applications, *Electronics Letters* 53(20), 2017.
51. Kushwaha N., Kumar R., Study of different shape electromagnetic band gap (EBG) structures for single and dual band applications, *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications* 13(1), 2014.
52. Lan C, et al., Highly efficient manipulation of Laplace fields in film system with structured bilayer composite, *Optics Express* 24 (26), 2016.

53. Lan C., et al., Simultaneously concentrated electric and thermal fields using fan-shaped structure, *Optics Express* 23(19), 2015.
54. Lazarus N., et al., Fractal inductors, *IEEE Transactions on Magnetics* 50(4), 2014.
55. Lee Bo-Ray, et al., Spin transport in multiply connected fractal conductors, *SPIN* 4(3), 2014.
56. Lee S.E., et al., Electromagnetic characteristics of frequency selective fabric composites, *Electronic Letters* 42 (8), 2006.
57. Lei T., et al., Excellent dielectric properties of polymer composites based on core-shell structured carbon/silica nanohybrid, *Applied Physics Letters* 103, 2013.
58. Leonhardt U., Philbin T.G., Transformation optics and the geometry of light, *Progress in Optics* 53, 2009.
59. Li H., et al., A new boundary condition for particle swarm optimization, *Journal of Convergence Information Technology* 5(9), 2010.
60. Li J.Y., et al., A bifunctional cloak using transformation media, *Journal of Applied Physics* 108, 2010.
61. Li T.-H., et al., Design of diamond-shaped transient thermal cloaks with homogeneous isotropic materials, *Frontiers in Physics* 11(5), 2016.
62. Li Y., et al., Structured thermal surface for radiative camouflage, *Nature Communications* 9, 2018.
63. Lin J.H., et al., Electromagnetic shielding and far infrared composite woven fabrics: Manufacturing technique and function evaluation, *Textile Research Journal* 87(16), 2017.
64. Lin K.L., Jain K., Design and fabrication of stretchable multilayer self-aligned interconnects for flexible electronics and large-area sensor arrays using excimer laser photoablation, *IEEE Electron Device Letters* 30(1), 2009.
65. Lin S.-W., Chen S.-C., PSOLDA: A particle swarm optimization approach for enhancing classification accuracy rate of linear discriminant analysis, *Applied Soft Computing* 9, 2009.
66. Liu D.-P., et al., Realization of a thermal cloak–concentrator using a metamaterial transformer, *Scientific Reports* 8, 2018.
67. Los P., et al., Metal-polymer composites for electromagnetic interference shielding applications, *Polimery* 61(10), 2016.
68. Lovat G., et al., Shielding properties of a wire-medium screen, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility* 1(50), 2008.
69. Lu K., et al., Nondestructive methods for evaluating mechanical properties of wood electromagnetic shielding composite, 16<sup>th</sup> Int. Symposium on Nondestructive Testing and Evaluation of Wood, Pekin, 2009.
70. Ma Y., et al., A transient thermal cloak experimentally realized through a rescaled diffusion equation with anisotropic thermal diffusivity, *Asia Materials* 5, 2013.
71. Ma Y., et al., Experimental demonstration of a multiphysics cloak: manipulating heat flux and electric current simultaneously, *Physical Review Letters* 113, 2014.
72. Madhav B.T.P., et al., Transparent and conformal wheel-shaped fractal antenna for vehicular communication applications, *International Journal of Electronics and Communications* 91, 2018.

73. Mahmoodi M., Donell K.M., Performance metrics for frequency selective surface-based sensors, *IEEE Sensors Letters* 1 (6), 2017.
74. Markarian J., Increased demands in electronics drive additive developments in conductivity, *Plastics, Additives and Compounding* 7, 2005.
75. Melzer M., et al., Wearable magnetic field sensors for flexible electronics, *Advanced Materials* 27, 2015.
76. Mirna A., Compact RF planar filters improvement of the out of band rejection and tunability, *Universite Grenoble Alpes*, 2014.
77. Moore R., *Electromagnetic composites handbook*, McGraw-Hill Education, 2016.
78. Mordecai A., *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Dover Publications, Mineola, Nowy Jork, 2003.
79. Muamer K, et al., *Metamaterials beyond electromagnetism*, Reports on Progress in Physics, 2013.
80. Narayana S., Sato Y., Heat flux manipulation with engineered thermal materials, *Physical Review Letters* 108(21), 2012.
81. Navau C., et al., Enhancing the sensitivity of magnetic sensors by 3D metamaterial shells, *Scientific Reports* 7, 2017.
82. Neamtu B.V., et al., AC magnetic properties of the soft magnetic composites based on Supermalloynanocrystalline powder prepared by mechanical alloying, *Materials Science and Engineering B* 177, 2012.
83. Neelakanta P.S., *Handbook of electromagnetic materials: monolithic and composite versions and their applications*, CRC Press, 1995.
84. Nyarko E.K., et al., A comparison of several heuristic algorithms for solving high dimensional optimization problems, *International Journal of Electrical and Computer Engineering Systems* 5(1), 2014.
85. Ochsner A., Murch G.E., *Heat transfer in multi-phase materials*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
86. Osowski J., Szabatin J., *Podstawy teorii obwodów t.3*, WNT, Warszawa, 2016.
87. Ouchetto O., et al., Homogenization of structured electromagnetic materials and metamaterials, *Journal of Materials Processing Technology* (181), 2007.
88. Owaidat M.Q., Regular resistor lattice networks in two dimensions (Archimedean Lattices), *Applied Physics Research* 6(5), 2014.
89. Pal R., *Electromagnetic, mechanical, and transport properties of composite materials*, CRC Press, 2014.
90. Pańczyk B., et al., *Metody numeryczne w przykładach*, Wydawnictwa Uczelnianie Politechniki Lubelskiej, Lublin, 2012.
91. Park G., et al., Tunable multifunctional thermal metamaterials: manipulation of local heat flux via assembly of unit-cell thermal shifters, *Scientific Reports* 7, 2017.
92. Paul C.R., *Inductance: Loop and Partial*, J Wiley & Sons, New Jersey, 2010.
93. Pendry J.B, Schurig D., Smith D.R., Controlling electromagnetic fields, *Science* 312, 2006.
94. Peralta I., et al., Optimization-based design of a heat flux concentrator, *Scientific Reports* 7, 2017.

95. Peralta I., Fachinotti V.D., Optimization-based design of heat flux manipulation devices with emphasis on fabricability, *Scientific Reports* 7, 2017.
96. Piątek Z., Baron B., Exact closed form formula for self inductance of conductor of rectangular cross section, *Progress in Electromagnetics Research M* (26), 2012.
97. Piątek Z., et al., Self inductance of long conductor of rectangular cross section, *Przegląd Elektrotechniczny* (88), 2012.
98. Pleśniak W., Czebyszew, Weierstrass, Jackson, Bernstein i ich kontynuatorzy, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II Wiadomości Matematyczne XL*, 2004.
99. Pourahmadazar J., et al., Novel modified pythagorean tree fractal monopole antennas for UWB applications, *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* 10, 2011.
100. Press W.H., et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.), Cambridge University Press, Nowy Jork, 2007.
101. Prządka D., Polimery hybrydowe i kompozyty polimerowe zawierające funkcjonalizowane poliedryczne oligomeryczne silseskwioksany, Politechnika Poznańska, Wydział Technologii Chemicznej, Instytut Technologii i Inżynierii Chemicznej, Poznań, 2014.
102. Schittny R., et al., Experiments on transformation thermodynamics: Molding the flow of heat, *Physical Review Letters* 110(19), 2013.
103. Schurig D., et al., Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies, *Science* 10, 2006.
104. Seo S., et al., Flexible touch sensors made of two layers of printed conductive flexible adhesives, *Sensors* 16(9), 2016.
105. Serani A., et al., On the use of synchronous and asynchronous single-objective deterministic particle swarm optimization in ship design problems, *Proc. of OPT-i 2014 1st Int. Conference on Engineering and Applied Sciences Optimization*, At Kos, Grecja, 2014.
106. Shoute G., Barlage W. D., Bedair S.S., Fractal loop inductors, *IEEE Transactions on Magnetics* 51(6), 2015.
107. Sikora J., *Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych. Podstawy metody elementów skończonych i metody elementów brzegowych*, Wydawnictwa Uczelniane Politechniki Lubelskiej, Lublin, 2009.
108. Sklan S.R., Li B., A unified approach to nonlinear transformation materials, *Science* 312, 2017.
109. Sklan S.R., Li B., Thermal metamaterials: functions and prospects, *National Science Review* 5(2), 2018.
110. Smith D.R., et al., Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity, *Physical Review Letters* 84(18), 2000.
111. Steckiewicz A., Aproksymacja zastępczych parametrów i rozkładu pola elektrycznego w przewodzących warstwach periodycznych materiałów złożonych przy zastosowaniu modelu obwodowego, *Poznan University of Technology Academic Journals: Electrical Engineering* 93, 2018.
112. Steckiewicz A., Butryło B., An application of PSO algorithm for multi-criteria geometry optimization of printed low-pass filters based on conductive periodic structures, *40<sup>th</sup> IEEE-SPIE Joint Symposium on Photonics, Web Engineering, Electronics for Astronomy and High Energy Physics Experiments*, Wilga, 2017.

113. Steckiewicz A., Butryło B., Analiza właściwości magnetycznych cienkowarstwowych materiałów z przewodzącą strukturą periodyczną, *Przegląd Elektrotechniczny* 95(5), 2019.
114. Steckiewicz A., Butryło B., Aproksymacja właściwości elektrycznych periodycznych materiałów złożonych, *Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska* 7(4), 2018.
115. Steckiewicz A., Butryło B., Homogenization of electric properties of the laminar materials with adjustable conductive periodic structure, *Prace Naukowe Politechniki Śląskiej. Elektryka* (1-2), 2017.
116. Steckiewicz A., Butryło B., Modelowanie i aproksymacja właściwości elektrycznych materiałów laminarnych ze strukturą periodyczną, *Warsztaty Doktoranckie WD 2016 Lubelskie Dni Nauki i Biznesu*, Lublin, 2016.
117. Steckiewicz A., Choroszucho A., Dobór struktury przewodzącego materiału periodycznego ze względu na zjawiska elektromagnetyczne, *Przegląd Elektrotechniczny* 94(6), 2018.
118. Steckiewicz A., Porównanie metod obwodowych i numerycznych do obliczeń stacjonarnego pola elektrycznego w materiałach warstwowych, *Poznan University of Technology Academic Journals: Electrical Engineering* 89, 2017.
119. Stedman T., Wood L.M., Cloaking of thermoelectric transport, *Scientific Reports* 7, 2017.
120. Strankowski M., Materiały dydaktyczne: kompozyty polimerowe – otrzymywanie i właściwości, *Politechnika Gdańska*, 2013, Dostęp on-line [31.07.2018]: [http://www.im.mif.pg.gda.pl/download/materiały\\_dydaktyczne/sem\\_7/03\\_Strankowski\\_WiPP/WiP\\_w9.pdf](http://www.im.mif.pg.gda.pl/download/materiały_dydaktyczne/sem_7/03_Strankowski_WiPP/WiP_w9.pdf).
121. Sun F., He S., Remote cooling by a novel thermal lens with anisotropic positive thermal conductivity, *Scientific Reports* 7, 2017.
122. Sun F., He S., Static magnetic field concentration and enhancement using magnetic materials with positive permeability, *Progress in Electromagnetic Research* 142, 2013.
123. Sun Guang-Hua, et al., A compact printed filtering antenna with good suppression of upper harmonic band, *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* 15, 2016.
124. Taghizadeh M., Novel band-pass frequency selective surface with stable response, 8<sup>th</sup> International Symposium on Telecommunications IST'2016, 2016.
125. Tao H., et al., Highly flexible wide angle of incidence terahertz metamaterial absorber: design, fabrication, and characterization, *Physical Review B* 78, 2008.
126. Trzaska Z., Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*, Warszawa, 2008.
127. Uwaydat M.Q., Networks of identical capacitors with a substitutional capacitor, *Jordan Journal of Physics : an International Peer-reviewed Research Journal* 5(3), 2012.
128. Viet Do T., et al., Design, fabrication and characterization of a perfect absorber using simple cut-wire metamaterials, *Advances in Natural Sciences: Nanoscience and Nanotechnology* 3, 2012.
129. Wahab M.N.A., et al., A comprehensive review of swarm optimization algorithms, *PLoS One* 10(5), 2015.
130. Wang H., et al., Low-loss electromagnetic composites for RF and microwave applications, *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control* 58(9), 2011.

131. Wang M., Pan N., Elastic property of multiphase composites with random microstructures, *Journal of Computational Physics* 228, 2009.
132. Wang R., et al., Thermal imitators with single directional invisibility, *Journal of Applied Physics* 122, 2017.
133. Wang W., Pan N., Predicions of effective physical properties of complex multiphase materials, *Materials Science and Engineering R* (63), 2008.
134. Wong W.S., Salleo A., *Flexible Electronics: Materials and Applications*, Springer Science & Business Media, Nowy Jork, 2009.
135. Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology, *Evaluation of measurement data — guide to the expression of uncertainty in measurement*, 2010, Dostęę on-line [02.02.2019]: [https://www.bipm.org/utls/common/documents/jcgm/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf](https://www.bipm.org/utls/common/documents/jcgm/JCGM_100_2008_E.pdf).
136. Wu F.Y., Theory of resistor networks: the two-point resistance, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2004.
137. Xu G., et al., 0.1–20 THz ultra-broadband perfect absorber via a flat multi-layer structure, *Optics Express* 24(20), 2016.
138. Xu G., et al., Control and design heat flux bending in thermal devices with transformation optics, *Optics Express* 25(8), 2017.
139. Xu G., et al., Forecast of thermal harvesting performance under multi-parameter interaction with response surface methodology, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 115, 2017.
140. Xu G., et al., Geometrical effects on the concentrated behavior of heat flux in metamaterials thermal harvesting devices, *AIP Advances* 7, 2017.
141. Xu G., et al., Investigating the thermodynamic performances of TO-based metamaterial tunable cells with an entropy generation approach, *Entropy* 19, 2017.
142. Yang F, et al., DC electric invisibility cloak, *Physical Review Letters* 109, 2012.
143. Yang T., et al., Invisible sensors: simultaneous sensing and camouflaging in multiphysical fields, *Advanced Materials* 27(47), 2015.
144. Yu B.M., Li B.W., Fractal-like tree networks reducing the thermal conductivity, *Physical Review E* 73, 2006.
145. Yu Z.C., et al., Functional properties and electromagnetic shielding behaviour of elastic warp-knitted fabrics, *Fibres & Textiles in Eastern Europe* 5(113), 2015.
146. Zhu N.Q., et al., Converting the patterns of local heat flux via thermal illusion device, *AIP Advances* 5, 2015.
147. Zhuravlev V.A., et al., Dynamic magnetic characteristics of a composite polymeric material based on carbonyl iron, *Russian Physics Journal* 9, 2010.
148. Zhuravlev V.A., et al., Electromagnetic characteristics of double-layer composite materials on basis of carbonyl iron, *15th International Conference On Micro/Nanotechnologies And Electron Devices EDM*, 2014.
149. Ziaja J., et al., EMI shielding using composite materials with two sources magnetron sputtering, *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering* 113, 2010.
150. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The finite element method: it's basis & fundamentals* 7th edition, Butterworth-Heinemann, 2013.

# Spis tabel

Tabela 1. Porównanie MR-C i MES na podstawie obliczonych rozkładów względnej normy gęstości prądu: błąd średniokwadratowy, odchylenie standardowe oraz maksymalne i minimalne błędy .....	77
Tabela 2. Porównanie MR-C i MES na podstawie obliczonych rozkładów względnej indukcji magnetycznej: błąd średniokwadratowy, odchylenie standardowe oraz maksymalne i minimalne błędy .....	80
Tabela 3. Parametry geometryczne w [mm] 12 komórek poddawanych obliczeniom .....	91
Tabela 4. Zastępcze parametry skupione i błędy względne 12 komórek poddawanych obliczeniom .....	92
Tabela 5. Czynniki liniowe i nieliniowe kształtujące wartości parametrów skupionych .....	97
Tabela 6. Efektywne właściwości analizowanych komórek (geometrie zgodne z rys. 40).....	114
Tabela 7. Zestawienie parametrów realizacji schematu PSO .....	128
Tabela 8. Dobrane wartości parametrów skupionych i częstotliwości odciążenia trzech typów komórek.....	131
Tabela 9. Zestawienie parametrów realizacji schematu PSO .....	136
Tabela 10. Konduktancja zastępcza układu otoczenie-płaszcz-obiekt i efektywne przewodności płaszczy .....	139
Tabela 11. Różnice względne, błąd pomiaru i niepewności rozszerzone struktur izotropowych.....	158
Tabela 12. Różnice względne, błąd pomiaru i niepewności rozszerzone struktur anizotropowych $\Omega_{e,z}$ .....	159
Tabela 13. Różnice względne, błąd pomiaru i niepewności rozszerzone struktur anizotropowych ( $\Omega_{e,k}$ ) .....	161

# Spis rysunków

Rys. 1. Fragment przewodzącej struktury roboczej periodycznych komórek $\Omega_e$ na izolacyjnym podłożu $\Omega_b$ , budujących wspólnie niejednorodny materiał laminarny $\Omega_M$ .....	12
Rys. 2. Przykład budowy kompozytu: a) przekrój przez strukturę hybrydową zbudowaną z polifluorku winylidenu (PVDF) i cząstek węglowo-krzemowych (CS) tworzących lokalny mikrocondensator [57]; b) absorbująca falę EM struktura tekstylna pokryta warstwą stopu mosiądku (75%) i tytanu (25%), [149] .....	19
Rys. 3. Podział warstw kompozytu: materiał wypełniający między warstwami o dyspersyjnych właściwościach EM oraz warstwy robocze przedstawione w postaci pomijalnie cienkich taśm [77] .....	22
Rys. 4. Przykłady siatek obliczeniowych: a) komórka Yee modelująca fragmentu obszaru 3D w metodzie FDFD [77]; b) stosowana w MES tetrahedralna siatka 3D odwzorowująca kompozyt warstwowy .....	23
Rys. 5. Harmoniczna fala EM ( <b>Si</b> ) padająca na materiał kompozytowy oraz powstałe w wyniku obecności materiału fale odbite ( <b>Sr</b> ) i przepuszczone ( <b>St</b> ): a) struktura niejednorodna – kompozyt warstwowy; b) struktura jednorodna – materiał homogeniczny .....	25
Rys. 6. Odwzorowanie fragmentu kompozytu włóknowego modelem numerycznym [133]: a) rzeczywista struktura włókien; b) reprezentacja struktury włókien metodą losowego wzrostu .....	29
Rys. 7. Rozkład temperatury w [K]: a) układ jednorodny bez obiektu – przepływ niezaburzony; b) układ z obiektem i metamateriałem – zaburzenie pola tylko w obrębie obszarów wtrąconych do układu [19] .....	30
Rys. 8. Układy współrzędnych: a) arbitralny – obiekt i płaszcz w kartezjańskim układzie współrzędnych $xy$ z niejednorodnym rozkładem anizotropowego wsp. materiałowego w obrębie płaszczu; b) fizyczny – otoczenie i płaszcz stanowią krzywoliniowy, wirtualny układ współrzędnych $x'y'$ z jednorodnym rozkładem izotropowego wsp. materiałowego .....	31
Rys. 9. Płaszcz prądu stałego [45]: a) ideowy model obwodowy z wyróżnieniem elementarnych rezystancji maskujących $\Delta R(x,y)$ ; b) realizacja fizyczna otoczenia i płaszczu w postaci sieci rezystorów .....	33
Rys. 10. Rozkład potencjału elektrycznego: a) układ bez obiektu – pole niezaburzone; b) układ z obiektem – pole zaburzone obecnością innej niż otoczenie przewodności	





elektrycznej; c) układ z obiektem otoczonym płaszczem – pole zaburzone wyłącznie w obszarze płaszczka .....	36
Rys. 11. Rozkład potencjału w badanym układzie: a) układ bez czujnika pomiarowego; b) układ z nieprzewodzącym czujnikiem – pole zaburzone, koncentracja pola na powierzchni pomiarowej czujnika; c) czujnik maskowany MMS – pole niezaburzone na powierzchni otoczenia i czujnika .....	37
Rys. 12. Koncentracja pola elektrycznego: a) skupienie linii pola w centralnym obszarze – wzrost składowej $E_x$ natężenia pola w centrum wynika z dużej różnicy potencjału na krótkim odcinku koncentracji; b) gęstość prądu elektrycznego – gęstość prądu kilkukrotnie wyższa w centralnym obszarze .....	38
Rys. 13. Rotacja pola elektrycznego: a) obrót gradientu pola o $\alpha = 180^\circ$ w centrum; b) znormalizowane wektory gęstości prądu elektrycznego – widoczny przeciwny zwrot prądu w centralnym obszarze .....	39
Rys. 14. Konstrukcja płaszczka MMS: a) niehomogeniczny płaszcz; b) fragment materiału płaszczka – fizyczna realizacja poprzez stopniowe zmniejszanie rozmiarów i anizotropii kształtu cząsteczek.....	40
Rys. 15. Fizyczna realizacja płaszczka z MMS dla pól termicznych – matryca wykonana z czystej miedzi, wypełnienia zrobiono z dimetykonu (PDMS) [102] .....	41
Rys. 16. Struktura wielowarstwowa: a) budowa płaszczka z wielowarstwowego MMS [35]; b) fizyczny układ płaszczka termicznego zbudowanego z warstw stopu tytanu, aluminium, miedzi, kaptonu [61] .....	42
Rys. 17. Układ z przesuwnikami termicznymi: a) aranżacja przesuwników tworzących inwerter pola termicznego [91]; b) obliczony rozkład pola temperatury układu inwertera [91]; c) przykłady przesuwników wytworzonych z miedzi (materiał A) i żywicy epoksydowej (materiał B) [66] .....	42
Rys. 18. Przykłady materiału <i>sensu</i> -kształtnego: a) ideowa budowa koncentratora pola elektrycznego [53]; b) zmierzony rozkład pola temperatury na powierzchni równomiernie nagrzewającej [36] .....	43
Rys. 19. Budowa materiału niejednorodnego: a) elastyczny układ $\Omega_M$ zbudowany z periodycznie rozmieszczonych komórek $\Omega_e$ , tworzących przewodzącą warstwę $\Omega_R$ na izolacyjnym podłożu nośnym $\Omega_B$ ; b) widok komórek budujących $\Omega_e$ – planarne elementy wpisane są w prostopadłościan $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$ cechujący się anizotropią właściwości EM .....	48
Rys. 20. Przykłady komórek typu $\Omega_{e,g}$ : a) i b) wersje izotropowe; c) wersja anizotropowa.....	52
Rys. 21. Przykłady komórek typu $\Omega_{e,p}$ : a) ogólny opis z zaznaczonymi parametrami; b) wariant izotropowy; c) wariant anizotropowy .....	53
Rys. 22. Przykłady komórek typu $\Omega_{e,mod\#}$ z dobraćą liczbą regulowanych parametrów: a) wersja podstawowa $\Omega_{e,mod0}$ ; b) wersja $\Omega_{e,mod1}$ ; c) wersja $\Omega_{e,mod2}$ ; d) wersja $\Omega_{e,mod3}$ ; e) wersja $\Omega_{e,mod5}$ .....	53
Rys. 23. Przykłady komórek typu $\Omega_{e,k}$ : a) opis ogólny; b), c) warianty budowy .....	54

Rys. 24. Przykłady komórek typu $\Omega_{e,p}$ : a) ogólny opis; b), c) warianty budowy.....	55
Rys. 25. Przykłady komórek typu $\Omega_{e,z}$ : a) ogólny opis geometrii; b) przepływ prądu elektrycznego $I_x$ przy wymuszeniu na zaciskach poziomych; c) przepływ prądu elektrycznego $I_y$ przy wymuszeniu na zaciskach pionowych .....	56
Rys. 26. Dyskretyzacja obszaru modelu: a) fragment jednorodnej siatki różnicowej; b) przykład analizowanego obszaru z zaznaczonymi warunkami brzegowymi .....	61
Rys. 27. Model materiału jednorodnego: a) widok 3D – materiał homogeniczny ( $\sigma_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}}$ ) oraz otoczenie ( $\sigma_0, \mu_0$ ); b) model 2D – utworzony na podstawie przekroju poprzecznego materiału i fragmentu otoczenia .....	68
Rys. 28. Schemat algorytmu różnicowego do obliczenia stałego pola elektrycznego w strukturach niejednorodnych (materiałach niejednorodnych).....	72
Rys. 29. Schemat algorytmu różnicowego do obliczenia pola harmonicznego struktur jednorodnych.....	73
Rys. 30. Schemat numerycznego algorytmu całkowego do obliczenia stacjonarnego pola magnetycznego .....	74
Rys. 31. Widok na przekrój podłużny analizowanych elementów: a) typ $\Omega_{e,p}$ nr 1; b) typ $\Omega_{e,p}$ nr 2; c) typ $\Omega_{e,p}$ nr 3; d) typ $\Omega_{e,z}$ nr 1; e) typ $\Omega_{e,z}$ nr 2; f) typ $\Omega_{e,z}$ nr 3 .....	75
Rys. 32. Rozkład $J_w$ w przekroju podłużnym komórki typu $\Omega_{e,p}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D) .....	76
Rys. 33. Rozkład $J_w$ w przekroju podłużnym komórki typu $\Omega_{e,z}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D) .....	77
Rys. 34. Rozkład względnej gęstości prądu wzdłuż prostych $x = 0$ w przekroju komórek typu $\Omega_{e,p}$ .....	78
Rys. 35. Rozkład $B_w$ w przekroju podłużnym komórki typu $\Omega_{e,p}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D) .....	79
Rys. 36. Rozkład $B_w$ w przekroju podłużnym komórki typu $\Omega_{e,z}$ : a), b) i c) rezultaty uzyskane za pomocą MR-C (2D); d), e) i f) rezultaty uzyskane za pomocą MES (3D) .....	79
Rys. 37. Rozkład względnej indukcji magnetycznej wzdłuż prostych $x = 0$ w przekroju komórek typu $\Omega_{e,z}$ .....	80
Rys. 38. Przykładowe komórki poddawane obliczeniom: a) komórka jako elementarny rezystor w obwodzie elektrycznym; b) przykłady lokalizacji fragmentów ścieżek o zmiennym przekroju w obrębie struktury; c) przykład lokalizacji o zniekształconej drodze prądu elektrycznego .....	85
Rys. 39. Układ obliczeniowy do wyznaczania współczynnika sprzężenia magnetycznego: a) połączenie elementów w modelu polowym; b) zastępczy schemat elektryczny ze sprzężeniem magnetycznym między sąsiednimi komórkami; c) zastępczy schemat elektryczny po likwidacji sprzężenia.....	89

Rys. 40. Widok na testowane komórki: a) ÷ d) – typ $\Omega_{e,p}$ ; e) ÷ h) – typ $\Omega_{e,mod1}$ ; i) ÷ l) – typ $\Omega_{e,mod5}$ .....	91
Rys. 41. Zastępcze rezystancje $R_e$ elementów obliczone za pomocą MES i MR-C.....	93
Rys. 42. Zastępcze indukcyjności własne $L_e$ elementów obliczone za pomocą MES i MR-C.....	93
Rys. 43. Współczynnik sprzężenia magnetycznego $k$ obliczony za pomocą MES i MR-C.....	94
Rys. 44. Modele obwodowe komórki: a) geometria komórki z zaznaczeniem zacisków; b) schemat zastępczy dwuzaciskowy dla pary skrajnych zacisków – parametry wyznaczone w oparciu o MR-C; c) schemat czterozaciskowy – odwzorowanie komórki w postaci połączonych, skupionych impedancji .....	96
Rys. 45. Model SISO reprezentujący ideę separacji czynników wpływających na właściwości komórki: a) obiekt o jednym wejściu i wyjściu oraz transmitancji $T$ ; b) model blokowy z łańcuchową separacją czynników liniowych i nieliniowych modyfikowanych w procesie doboru właściwości.....	98
Rys. 46. Widok na przykładowe komórki: a) ÷ f) ze zbioru treningowego; g) ÷ l) ze zbioru walidacyjnego .....	102
Rys. 47. Indukcyjność własna komórek ze zbioru treningowego, obliczona na podstawie modelu polowego (MR-C) oraz aproksymacji analitycznej (AA).....	102
Rys. 48. Indukcyjność własna komórek ze zbioru walidacyjnego, obliczona na podstawie modelu polowego (MR-C) oraz aproksymacji analitycznej (AA).....	103
Rys. 49. Odwzorowanie obwodowe materiału niejednorodnego do obliczeń zjawisk elektrycznych z zaznaczeniem wybranych zacisków zasilających $U$ i $G$ : a) struktura przykładowego prostokątnego układu; b) jego model sieciowy .....	104
Rys. 50. Homogenizacja materiału niejednorodnego: a) anizotropowa komórka $\Omega_e$ o rozmiarze $d_{e,x} \times d_{e,y} \times d_{e,z}$ zbudowana z przewodnika i izolatora o przewodnościach $\sigma_A$ i $\sigma_B$ ; b) ekwiwalentny materiał jednorodny o identycznych wymiarach oraz właściwościach opisanych tensorem przewodności $\sigma_{eff}$ .....	109
Rys. 51. Charakterystyki amplitudowe struktur typu $\Omega_{e,f}$ : a) wariant a (tabela 6, rys. 40a); b) wariant b (tabela 6, rys. 40b).....	116
Rys. 52. Charakterystyki amplitudowe struktur typu $\Omega_{e,mod1}$ : a) wariant f (tabela 6, rys. 40f); b) wariant g (tabela 6, rys. 40g).....	117
Rys. 53. Charakterystyki amplitudowe struktur typu $\Omega_{e,mod5}$ : a) wariant k (tabela 6, rys. 40k); b) wariant l (tabela 6, rys. 40l) .....	117
Rys. 54. Funkcja celu $F(x_1, x_2)$ zmiennych $x_1$ i $x_2$ – minimum globalne poszukiwane w wyniku iteracyjnego przemieszczania cząstek w przestrzeni zmiennych zgodnie z określonym schematem [65].....	121
Rys. 55. Realizacja filtra dolnoprzepustowego: a) obwód pobudzony harmonicznym napięciem $U_s$ z filtrem $Y_z$ i odbiornikiem $Z_o$ ; b) ideowy schemat do wyznaczania właściwości komórek tworzących filtr .....	127

Rys. 56. Wybrane, wyznaczone geometrie komórek o częstotliwości odcięcia wynoszącej odpowiednio: a)+c) 60 kHz; d)+f) 90 kHz; g)+i) 110 kHz .....	129
Rys. 57. Charakterystyki amplitudowe idealne i otrzymane dla poszczególnych typów komórek przy zadanych częstotliwościach odcięcia: a) $f_{c,z} = 60$ kHz; b) $f_{c,z} = 90$ kHz; c) $f_{c,z} = 110$ kHz; d) $f_{c,z} = 150$ kHz.....	130
Rys. 58. Rozkład potencjału elektrycznego: a) układ bez obiektu; b) układ z obiektem o promieniu $r_a$ – zaburzenie pola w bliskim (płaszcz o promieniu $r_p$ ) i dalszym (poza $r_p$ ) obszarze układu.....	133
Rys. 59. Komórka tworząca płaszcz: a) fragment przykładowego układu z zaznaczeniem układów współrzędnych; b) komórka typu $\Omega_{e,k}$ i jej parametry geometryczne.....	135
Rys. 60. Parametry i geometria komórek tworzących: a) płaszcz 1; b) płaszcz 2; c) płaszcz 3.....	137
Rys. 61. Izolinie i rozkład potencjału: a) płaszcz homogeniczny – materiał opisany tensorem (108); b) płaszcz 1; c) płaszcz 2; d) płaszcz 3.....	138
Rys. 62. Rozkład potencjału elektrycznego wzdłuż przekroju A–A': a) układ bazowy oraz z obiektem i płaszczem homogenicznym; b) układ z płaszczami 1, 2 i 3.....	138
Rys. 63. Widok wytworzonych próbek: a) typ $\Omega_{e,g}$ ; b) typ $\Omega_{e,f}$ ; c) typ $\Omega_{e,Z}$ (polaryzacja $x$ ); d) typ $\Omega_{e,Z}$ (polaryzacja $y$ ); e) typ $\Omega_{e,k}$ (polaryzacja $x$ ); f) typ $\Omega_{e,k}$ (polaryzacja $y$ ).....	143
Rys. 64. Geometrie badanych komórek: a) typ $\Omega_{e,g}$ ; b) typ $\Omega_{e,f}$ ; c) typ $\Omega_{e,Z}$ ; d) typ $\Omega_{e,k}$ .....	144
Rys. 65. Model elektryczny próbek materiałowych: a) reprezentacja komórek w postaci schematu czterozaciskowego; b) uproszczony model dwuzaciskowy; c) schemat ideowy układu pomiarowego .....	145
Rys. 66. Widok na stanowisko do pomiaru impedancji zastępczej próbek materiałowych.....	146
Rys. 67. Podstawka pomiarowa: a) widok z przodu; b) widok z boku; c) widok z góry na układ z próbką.....	147
Rys. 68. Obliczone i zmierzone rezystancje $R_t$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,g}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne .....	150
Rys. 69. Obliczone i zmierzone rezystancje $R_t$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,f}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne .....	150
Rys. 70. Obliczone i zmierzone rezystancje $R_t$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,Z}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $y$ .....	151
Rys. 71. Obliczone i zmierzone rezystancje $R_t$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,k}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $y$ .....	152
Rys. 72. Obliczone i zmierzone indukcyjności $L_t$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,g}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne .....	153

Rys. 73. Obliczone i zmierzone indukcyjności $L_i$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,f}$ : a) wartości bezwzględne; b) wartości względne.....	154
Rys. 74. Obliczone i zmierzone indukcyjności $L_i$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,z}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $y$ .....	155
Rys. 75. Obliczone i zmierzone indukcyjności $L_i$ próbek materiałowych geometrii typu $\Omega_{e,k}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $y$ .....	156
Rys. 76. Moduły różnic względnych i błąd pomiaru komórek izotropowych: a) $\Omega_{e,g}$ ; b) $\Omega_{e,f}$ .....	158
Rys. 77. Moduły różnic względnych i błąd pomiaru geometrii $\Omega_{e,z}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $y$ .....	160
Rys. 78. Moduły różnic względnych i błąd pomiaru geometrii $\Omega_{e,k}$ : a) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $x$ ; b) przy polaryzacji pola elektrycznego w kierunku $y$ .....	161



Politechnika  
Białostocka