DOI: 10.24427/978-83-66391-28-4_1

Modelowanie i symulacja niegładkiego zagadnienia ruchu

*Wiesław GRZESIKIEWICZ**
*Artur ZBICIAK**
*Katarzyna RUTCZYŃSKA-WDOWIAK***

1. Wprowadzenie

W klasycznym (newtonowskim) zagadnieniu ruchu układu mechanicznego o N stopniach swobody, wyznacza się – w ustalonym przedziale czasu – rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\ddot{X} = f\left(t, X, \dot{X}\right), \quad t \in \left[0, t_{end}\right) \tag{1a}$$

spełniające warunki początkowe:

$$X\left(0\right) = X_{\mathrm{o}}, \quad \dot{X}\left(0\right) = V_{\mathrm{o}} \tag{1b}$$

W tak sformułowanym zagadnieniu początkowym zakłada się, że funkcja f: $R^3 \rightarrow R^N$ jest ciągła i spełnia dla drugiego i trzeciego argumentu warunek Lipschitza. Wtedy istnieje jednoznaczne rozwiązanie opisujące ruch układu, a funkcja X jest ciągła i dwukrotnie różniczkowalna, czyli $X \in C^2([0, t_{end}), R^N)$.

Niegładkość zagadnienia ruchu oznacza, że funkcja f jest nieciągła lub nieróżniczkowalna względem drugiego lub trzeciego argumentu. Tego rodzaju zagadnienie dotyczy np. układu mechanicznego z więzami jednostronnymi lub z siłami tarcia suchego. W monografii [1], w której jest analizowany układ z więzami jednostronnymi pokazano, że rozwiązanie zagadnienia istnieje w klasie funkcji absolutnie ciągłych $X \in C_{ab}([t_{\mathrm{o}}, t_{end}), R^N)$. To oznacza, że pochodna $\dot{X}$ jest nieciągła, a więc należy sformułować dodatkowe zadanie określające nieciągłe zmiany prędkości.

W rozważanym dalej niegładkim zagadnieniu ruchu koła rozpatrujemy niedoskonałe więzy jednostronne. Niedoskonałość ta oznacza, że z siłą reakcji więzów jest stowarzyszona prostopadła do niej siła tarcia suchego. Tego rodzaju hipoteza została postawiona pod koniec XIX w. przez Painlevé'a [2, 3]. Współczesna analiza tego zagadnienia opiera się na podstawach analizy niegładkiej prezentowanych w pracach Jeana,

* Politechnika Warszawska
** Politechnika Świętokrzyska

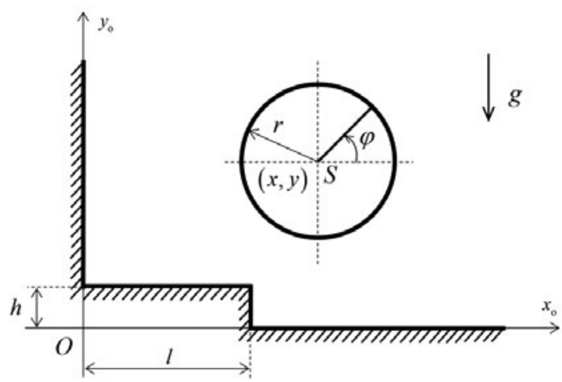
Moreau i Panagiotopoulosa [4-8], a także w pracach autorów niniejszego artykułu, związanych z modelowaniem maszyn i pojazdów, np. [9-11]. Należy również wspomnieć o współczesnych pracach [12, 13, 14], w których rozpatruje się osobliwe zagadnienie nazywane paradoksem Painlevé'a, szeroko dyskutowane na początku XX w. przez Prandtla, Hamela, Kleina i Misesa [2].

W stosunku do wymienionych wyżej prac rozpatrujemy specyficzną metodę opisu ruchu z niedoskonałymi więzami jednostronnymi, przystosowaną do analizy stosunkowo prostego zagadnienia związanego z płaskim ruchem sztywnego koła. Tak wybrane zagadnienie w pełni ilustruje niegładką problematykę więzów jednostronnych, a jednocześnie umożliwia pominięcie sytuacji, w której powstaje paradoks Painlevé'a.

Poza sformułowaniem zagadnienia ruchu prezentujemy również metodę wyznaczania rozwiązania tego zagadnienia, a także przedstawiamy wyniki symulacji ruchu koła.

2. Geometryczne i kinematyczne cechy układu

Rozpatrujemy nieodkształcalne koło, którego ruch w polu grawitacyjnym jest ograniczany przez nieodkształcalne płaszczyzny o szorstkiej powierzchni. Na rysunku 1 pokazano ilustrację rozważanego układu oraz zaznaczono trzy współrzędne opisujące ruch koła, czyli: (x, y) – współrzędne środka koła S oraz φ– kąt obrotu koła.



RYS. 1. Geometryczna ilustracja rozważanego układu koło–więzy
FIG. 1. The geometric illustration of the considered wheel-ties arrangement

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

Ograniczenia ruchu na rysunku 1 są przedstawione za pomocą pogrubionej linii, która reprezentuje granicę obszaru dopuszczalnych położeń koła na płaszczyźnie Ox_0y_0. Na rysunku 1 zaznaczono również główne wymiary linii granicznej oraz koła, czyli r, h, l, przy czym rozważamy przypadek, gdy $r > h$ oraz $l > r$. Poza tym zaznaczono wektor pola grawitacji g.

Ze wstępnej analizy rysunku 1 wynika, że rozważane ograniczenia można określić obszarem dopuszczalnych położeń środka koła, gdyż trzecia współrzędna, czyli kąt obrotu koła φ, nie jest ograniczana.

Na podstawie geometrycznej analizy rysunku 1 ustalamy opis wspomnianego ograniczenia w postaci relacji:

$$(x(t), y(t)) \in \Omega \subset R^2 \qquad \forall t \in [0, t_{end}) \tag{2}$$

gdzie zbiór Ω, określający obszar dopuszczalnych położeń środka koła, ma postać:

$$\Omega := \{(x, y): x \geq r; y \geq \Phi(x)\} \tag{3}$$

jeśli funkcja Φ jest określona następująco:

$$\Phi(x) := \begin{cases} h + r & \text{gdy} \quad r \leq x \leq l_1 \\ f(x) & \text{gdy} \quad l_1 < x \leq l_1 + a \\ r & \text{gdy} \quad x > l_1 + a \end{cases} \tag{4a}$$

gdzie:

$$l_1 := l - r\,, \ a = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} \tag{4b}$$

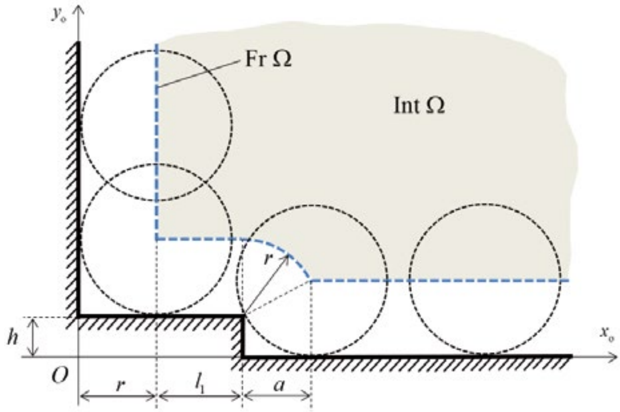
$$f(x) := \sqrt{r^2 - (x - l_1)^2} + h \tag{4c}$$

Na rysunku 2 pokazano zbiór Ω oraz zaznaczono szarym kolorem obszar wnętrza zbioru Ω, czyli Int Ω, a linią przerywaną jego granicę – Fr Ω. Opisy tych zbiorów ustalono na podstawie wzorów (3) i (4), tzn.:

$$\mathrm{Int}\,\Omega := \left\{(x, y): \quad x > r; \ y > \Phi(x)\right\} \tag{5a}$$

$$\mathrm{Fr}\,\Omega := \left\{(x, y): \quad \left\{y \geq h + r,\ x = r\right\} \cup \left\{y = \Phi(x),\ x > r\right\}\right\} \tag{5b}$$

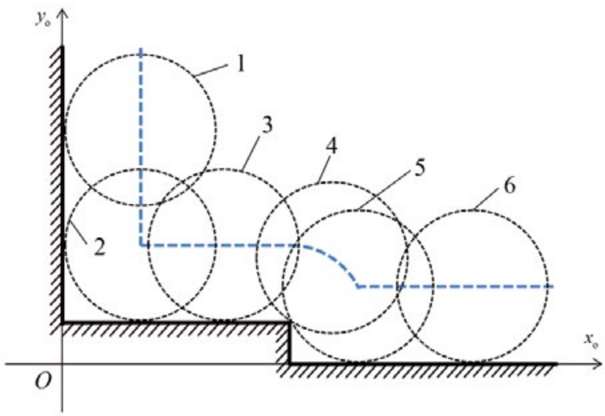
Dodatkowo na rysunku 2 zaznaczono położenia koła w wybranych sektorach granicy Fr Ω. Bardziej szczegółowy wykres położeń koła, we wszystkich charakterystycznych sektorach granicy Fr Ω, pokazano na rysunku 3.



RYS. 2. Wykres zbioru Ω i jego granicy Fr Ω oraz kilka szczególnych położeń, w których koło styka się z brzegiem ograniczenia

FIG. 2. The chart of the set Ω and its border Fr Ω and a few special positions in which the wheel is in contact with the edge of the constraint

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.



RYS. 3. Sześć szczególnych położeń, w których koło styka się z brzegiem ograniczenia

FIG. 3. Six specific positions in which the wheel is in contact with the edge of the constraint

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

Aby opis ograniczenia ruchu był pełny, należy obok zbioru Ω ustalić również implikacje kinematyczne, które wynikają z relacji (2) i będą nazywane jej następstwami. W pracy [3] szczegółowo rozpatrywano następstwa, które wyznaczają zbiory dopuszczalnych prędkości i dopuszczalnych przyspieszeń.

Jeżeli koło (por. rys. 2) znajduje się w pozycji takiej, że $(x, y) \in \operatorname{Int} \Omega$, czyli gdy koło nie styka się z brzegiem ograniczenia, to wtedy wspomniane wyżej ograniczenia kinematyczne nie występują, czyli koło porusza się swobodnie.

Gdy koło styka się z brzegiem ograniczenia, czyli $(x, y) \in \operatorname{Fr} \Omega$, to wtedy prędkość środka koła (v_x, v_y) jest ograniczana, gdyż powinna spełniać relację:

$$(v_x, v_y) \in \mathsf{D}\Omega(x, y) \subset R^2, \quad (x, y) \in \operatorname{Fr} \Omega, \tag{6}$$

gdzie $\mathsf{D}\Omega$ jest odwzorowaniem nazywanym pierwszym następstwem relacji (2). Definicję odwzorowania $\mathsf{D}\Omega$ zamieszczono w pracy [1], natomiast szczegółowy opis tego odwzorowania w rozpatrywanym zadaniu będzie podany dalej.

Jeżeli położenie i prędkość środka koła spełniają relację (6), to wtedy może nastąpić również ograniczenie przyspieszenia środka koła. Ale jeżeli

$$(x, y) \in \operatorname{Fr} \Omega, \quad (v_x, v_y) \in \operatorname{Int} \mathsf{D}\Omega(x, y), \tag{7}$$

to wówczas ograniczenie takie nie powstaje, gdyż koło stykając się z brzegiem ograniczeń, oddala się od niego.

Ograniczenie przyspieszenia środka koła powstaje wtedy, gdy koło styka się z brzegiem ograniczenia, a prędkość środka koła należy do brzegu zbioru ograniczeń prędkości $\mathsf{D}\Omega$, czyli gdy

$$(x, y) \in \operatorname{Fr} \Omega \quad \text{oraz} \quad (v_x, v_y) \in \operatorname{Fr} \mathsf{D}\Omega(x, y). \tag{8a}$$

W takiej sytuacji koło stykając się z brzegiem ograniczenia może się po nim toczyć lub pozostaje nieruchome. Wówczas jest ograniczane przyspieszenie środka koła (a_x, a_y), gdyż powinna być spełniona relacja

$$(a_x, a_y) \in \mathsf{D}^2\, \Omega\big((x, y), (v_x, v_y)\big) \tag{8b}$$

gdzie $\mathsf{D}^2\Omega$ jest odwzorowaniem nazywanym drugim następstwem relacji (2) – wyznaczającym zbiór dopuszczalnych przyspieszeń środka koła. W pracy [1] podano definicję tego odwzorowania, a szczegółowy opis dotyczący koła będzie zamieszczony w rozdziale 3.

W sytuacji określonej relacją (8a) działają więzy, to znaczy, że powstaje siła reakcji, której opis przedstawimy dalej. W czasie ruchu koła może również powstać sytuacja, gdy położenie i prędkość koła są takie, że:

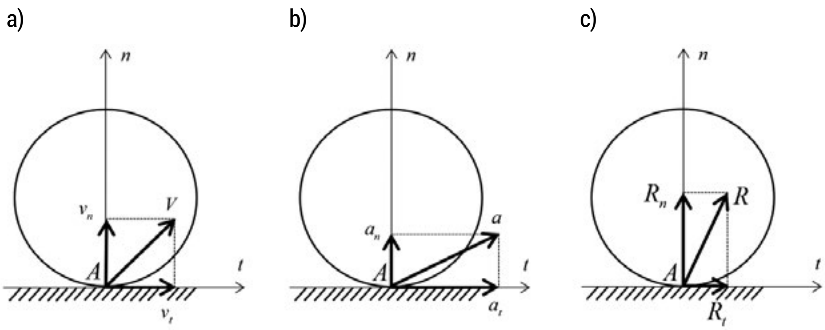
$$(x, y) \in \operatorname{Fr} \Omega\,, \quad (v_x, v_y) \notin \mathsf{D}\Omega(x, y) \tag{9}$$

co oznacza, że prędkość koła jest niedopuszczalna przez więzy, gdyż nie spełnia warunku (6). W takim stanie następuje zderzenie koła ze sztywnymi ograniczeniami. W trakcie tego zderzenia prędkość koła zmienia się gwałtownie (skokowo) i osiąga wartość, która spełnia relację (6). Sformułowanie opisu zmiany prędkości w trakcie zderzenia będzie przedstawione dalej.

Jak już wspomniano, następstwa $D\Omega$ i $D^2\Omega$ określają zbiory dopuszczalnych prędkości i przyspieszeń koła, które styka się z powierzchnią ograniczającą (rys. 1). Zasady ustalania tych odwzorowań zostały szczegółowo opisane w pracach [1, 9]. Biorąc pod uwagę stosunkowo prostą postać brzegu zbioru Ω (rys. 2), ustalimy opisy tych odwzorowań w formie niewymagającej objaśnień.

3. Model oddziaływania więzów na koło

Oddziaływanie więzów na koło powstaje wtedy, gdy koło styka się z ograniczeniem. W takim położeniu może powstać siła reakcji działająca na koło, co szczegółowo omówimy dalej.



RYS. 4. Wektory prędkości, przyspieszenia i reakcji działające na koło stykające się z brzegiem zbioru Ω w punkcie A

FIG. 4. The velocity, acceleration and reaction vectors acting on a wheel in contact with the border of the set Ω at point A

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

Na rysunku 4 pokazano przykładową ilustrację koła stykającego się z płaszczyzną ograniczającą jego ruch w punkcie *A*. Na rysunku 4a zaznaczono lokalny układ współrzędnych *Ant*, którego oś *An* jest prostopadła, a *At* – styczna do brzegu Fr Ω; zaznaczono również prędkość punktu *A* leżącego na obwodzie koła. Ograniczenia ruchu koła powodują, że składowa normalna tej prędkości powinna spełniać warunek:

$$v_n \geq 0 \tag{10}$$

Prędkość, dla której $v_n < 0$ jest niedopuszczalna przez więzy; w takiej sytuacji powstaje zderzenie, które będzie rozważane dalej.

Jeżeli $v_n > 0$, to więzy nie ograniczają ruchu, gdyż koło oddala się od brzegu.

Na rysunku 4b pokazano wektor przyspieszenia punktu A.

Jeżeli prędkość punktu A jest taka, że $v_n = 0$, to wtedy więzy ograniczają to przyspieszenie

$$a_n \geq 0 \quad \text{gdy} \quad v_n = 0 \tag{11}$$

W opisanej wyżej sytuacji powstaje siła reakcji, którą zilustrowano na rysunku 4c. W przypadku więzów idealnych działa tylko siła docisku $R_n \geq 0$, natomiast składowa styczna nie powstaje, czyli $R_t = 0$.

Dla więzów nieidealnych przyjmuje się hipotezę, według której składowa styczna odwzorowuje siłę tarcia między kołem i brzegiem więzów. Tak określony model więzów nieidealnych opisujemy relacjami, które wyznaczają związek pomiędzy siłą reakcji R a przyspieszeniem i prędkością punktu A należącego do koła:

- dla składowej normalnej R_n mamy:

$$R_n \geq 0, \quad a_n \geq 0, \quad a_n R_n = 0, \quad \text{gdy} \quad v_n = 0 \tag{12a}$$

- składowa styczna R_t, gdy $R_n > 0$ jest określona relacjami:

$$R_t = \mu\, R_n \tau\ , \quad \tau := \operatorname{sign} v_t, \quad \text{gdy} \quad v_t \neq 0 \tag{12b}$$

$$R_t = \mu\, R_n \tau\ , \quad \tau \in \begin{Bmatrix} \{\operatorname{sign} a_t\} & \text{gdy} & a_t \neq 0 \\ [-1,+1] & \text{gdy} & a_t = 0 \end{Bmatrix} \quad \text{gdy} \quad v_t = 0 \qquad 12c$$

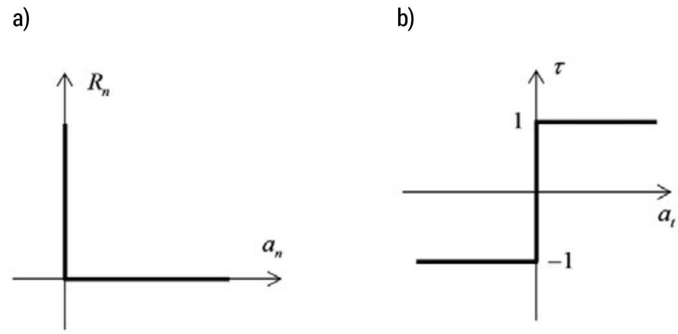
gdzie μ – współczynnik tarcia między kołem i brzegiem więzów; τ – mnożnik tarcia.

Te relacje można zilustrować wykresami; na rysunku 5a zamieszczono wykres relacji (12a), natomiast relację (12c) zilustrowano na rysunku 5b. Poza tym relacje (12a) (rys. 5a) można równoważnie opisać zależnością

$$R_n = \left[R_n - \rho\, a_n \right]^+, \quad \rho > 0 \tag{13a}$$

gdzie $[\cdot]^+$ oznacza funkcję taką, że:

$$[\xi\,]^+ := \begin{cases} \xi & \text{gdy} \quad \xi \geq 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad \xi < 0 \end{cases} \tag{13b}$$



RYS. 5. Wykresy relacji (12a) i (12c)
FIG. 5. The relation graphs (12a) i (12c)

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

Analogicznie, w przypadku relacji (11c) (rys. 5b) otrzymujemy

$$\tau = \Pi\left(\tau + \rho a_t\right), \ \ \rho > 0 \tag{14a}$$

gdzie funkcję Π zdefiniowano następująco:

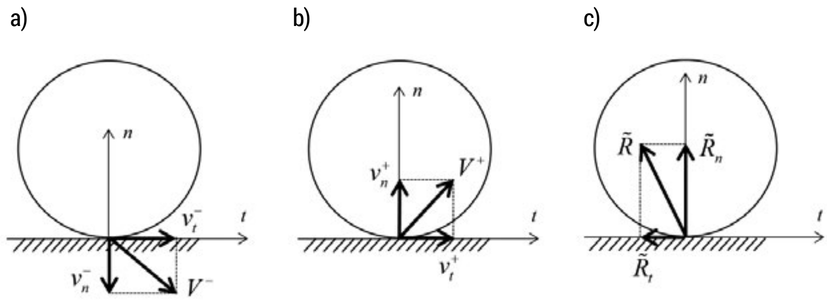
$$\Pi(\xi) := \begin{cases} \xi & \text{gdy} \ \ |\xi| \le 1 \\ \operatorname{sign} \xi & \text{gdy} \ \ |\xi| > 1 \end{cases} \tag{14b}$$

W przedstawionej powyżej hipotezie, dotyczącej wzajemnego oddziaływania stykających się nieodkształcalnych ciał, nie uwzględniliśmy momentu sił nazywanego *oporami toczenia się koła*. Jest to moment tarcia, którego graniczna wartość jest proporcjonalna do siły nacisku R_n. Moment ten jest przeciwnie skierowany do prędkości kątowej koła. W celu uproszczenia opisu reakcji działającej na koło, a także zakładając bardzo małą wartość oporów toczenia, pominięto ich wpływ na ruch koła.

Teraz rozpatrzymy sytuację, w której koło zderza się z więzami, czyli gdy $v_n < 0$. Schematyczny opis prędkości koła tuż przed zderzeniem V^- oraz po zderzeniu V^+ pokazano na rysunkach 6a i 6b, natomiast na rysunku 6c zaznaczono impulsy siły reakcji $\tilde{R}_n$ i $\tilde{R}_t$, wywołujące zmianę prędkości koła. Impuls cierny $\tilde{R}_t$ ustalamy według hipotezy Routha [3].

Wspomniany efekt zderzenia opisuje się relacją między prędkościami po zderzeniu V^+ (rys. 6b) a impulsami reakcyjnymi (rys. 6c). Postać tej relacji formułuje się stosownie do przyjętej hipotezy. Na przykład, gdy analizuje się więzy gładkie (doskonałe), to pomija się składową styczną, czyli $\tilde{R}_t = 0$.

W niniejszej pracy przedstawimy opis hipotezy o zderzeniu plastycznym, a także zderzeniu sprężystym lub sprężysto-plastycznym, przy założeniu, że więzy są niedoskonałe.



RYS. 6. Prędkości i impulsy działające na koło zderzające się z więzami
FIG. 6. The velocities and impulses acting on a wheel colliding with ties

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

Opis zderzenia plastycznego ma postać analogiczną do opisu siły reakcji podanego we wzorach (12). Zderzenie plastyczne jest określone relacjami:

$$\tilde{R}_n \geq 0, \quad v_n^+ \geq 0, \quad v_n^+ \tilde{R}_n = 0 \tag{15a}$$

$$\tilde{R}_t = \mu \, \tilde{R}_n \tau \,, \quad \tau \in \begin{cases} \left\{ \text{sign } v_t^+ \right\} & \text{gdy} \quad v_t^+ \neq 0 \\ \left[-1,+1 \right] & \text{gdy} \quad v_t^+ = 0 \end{cases} \tag{15b}$$

Relację (15b) ustalono na podstawie hipotezy Routha [3].

Wykresy ilustrujące te relacje są analogiczne do pokazanych na rysunku 5 i można je przedstawić w równoważnej postaci, analogicznie do wzorów (13) i (14).

Opis zderzenia sprężystego lub sprężysto-plastycznego opiera się na hipotezie Newtona-Poissona analizowanej w pracy [1]. Według tej hipotezy wypadkowy impuls siły reakcji w trakcie takiego zderzenia określają wzory:

$$\tilde{R}_n^* = \left(1 + \beta\right) \tilde{R}_n \tag{16a}$$

$$\tilde{R}_t^* = \mu \, \tilde{R}_n^* \tau^* \tag{16b}$$

$$\tau^* \in \begin{cases} \left\{ \text{sign } v_t^+ \right\} & \text{gdy} \quad v_t^+ \neq 0 \\ \left[-1,+1 \right] & \text{gdy} \quad v_t^+ = 0 \end{cases} \tag{16c}$$

gdzie $\tilde{R}_n$, $\tilde{R}_t$ – impulsy opisane we wzorach (15); $\beta \in \left(0,1\right]$ – współczynnik restytucji, którego wartość dla zderzenia sprężystego wynosi 1.

4. Opis ruchu koła

Opis ruchu koła przedstawimy w postaci macierzowej przy użyciu współrzędnych uogólnionych. W tym celu wprowadzamy następujące oznaczenia:

$X := \begin{bmatrix} x \\ y \\ \varphi \end{bmatrix}$ – wektor współrzędnych uogólnionych,

$M := \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$ – macierz bezwładności koła,

$Q := \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}$ – wektor siły grawitacji działającej na koło,

$F_n \in R^3$ – wektor siły reakcji prostopadły do brzegu zbioru Ω,

$F_t \in R^3$ – wektor siły reakcji styczny do brzegu zbioru Ω,

$X \in \Omega \subset R^3$ – relacja opisująca ograniczenie ruchu koła.

Jeżeli położenie koła jest takie, że $X \in \operatorname{Int} \Omega$, to wtedy więzy nie działają, a opis ruchu koła ma postać:

$$M\ddot{X} = Q \tag{17a}$$

a jeżeli ruch koła jest ograniczany, co może nastąpić, gdy $X \in \operatorname{Fr} \Omega$, to wtedy w równaniu ruchu należy uwzględnić opis sił reakcji:

$$M\ddot{X} = Q + F_n - F_t \tag{17b}$$

W następnym podrozdziale ustalimy metodę wyznaczania sił reakcji.

Wyznaczanie sił reakcji

W przedstawionych dalej opisach ograniczeń oraz sił reakcji będą stosowane funkcje wektorowe G i H, które każdemu wektorowi X spełniającemu relację $X \in \operatorname{Fr} \Omega$ przyporządkowują parę wektorów: prostopadły $G \in R^3$ oraz styczny $H \in R^3$. Za pomocą tych wektorów można wyznaczyć prędkości i przyspieszenie punktu koła stykającego się z brzegiem zbioru Ω (patrz rys. 3):

$$v_n := G^T(X)\dot{X}, \quad v_t := H^T(X)\dot{X} \tag{18a}$$

$$a_n := G^T(X)\ddot{X} + \gamma_n(X,\dot{X}), \quad a_t := H^T(X)\ddot{X} + \gamma_t(X,\dot{X}) \tag{18b}$$

gdzie γ_n i γ_t są funkcjami skalarnymi. Szczegółowe postacie funkcji wektorowych G i H oraz skalarnych γ_n i γ_t będą podane dalej.

Przy użyciu funkcji G oraz γ_n można opisać następstwo $\mathsf{D}\Omega$, według wzoru (6), wyznaczające zbiór dopuszczalnych prędkości $\dot{X}$:

$$\mathsf{D}\Omega(X) := \left\{\dot{X} \in R^3 : \quad G^T(X)\dot{X} \geq 0\right\}, \text{ gdy } X \in \mathrm{Fr}\,\Omega \tag{19a}$$

a także zbiór dopuszczalnych przyspieszeń według wzoru (8b):

$$\mathsf{D}^2\Omega(X,\dot{X}) := \left\{\ddot{X} \in R^3 : \quad G^T(X)\ddot{X} + \gamma_n(X,\dot{X}) \geq 0\right\}, \ X \in \mathrm{Fr}\,\Omega \text{ i } G^T(X)\dot{X} = 0 \tag{19b}$$

Jeżeli położenie X i prędkość $\dot{X}$ spełniają relacje wymienione we wzorze (19b), to wtedy powstaje siła reakcji F, której dwie składowe F_n i F_t występują w równaniu ruchu (17b).

Uogólnione siły reakcji F_n, $F_t \in R^3$ opiszemy na podstawie relacji, które podano we wzorach (12).

Siłę reakcji normalnej wyznacza wzór:

$$F_n := G(X)\lambda \tag{20a}$$

jeśli $\lambda \geq 0$ jest mnożnikiem reakcji spełniającym relacje wynikające ze wzoru (12a), czyli:

$$\lambda \geq 0, \quad G^T(X)\ddot{X} + \gamma_n(X,\dot{X}) \geq 0, \quad \lambda\left(G^T(X)\ddot{X} + \gamma_n(X,\dot{X})\right) = 0 \tag{20b}$$

Jeżeli uwzględnimy opis relacji ze wzoru (11), to otrzymamy opis równoważny:

$$\lambda = \left[\lambda - \rho\left(G^T(X)\ddot{X} + \gamma_n(X,\dot{X})\right)\right]^+, \text{ gdy } X \in \mathrm{Fr}\,\Omega \text{ oraz } G^T(X)\dot{X} = 0 \tag{21}$$

jeśli ρ jest dowolną liczbą dodatnią.

Podobnie, według wzorów (12b) i (12c), wyznaczamy relacje opisujące reakcję styczną $F_t \in R^3$:

$$F_t = \mu\, H(X)\|G\|\lambda\tau \tag{22a}$$

$$\tau = \mathrm{sign}\ v_t \equiv \mathrm{sign}\left(H^T(X)\dot{X}\right), \text{ gdy } v_t \neq 0 \tag{22b}$$

$$\tau \in \begin{Bmatrix} \{\mathrm{sign}\ a_t\} & \text{gdy} & a_t \neq 0 \\ [-1,+1] & \text{gdy} & a_t = 0 \end{Bmatrix} \text{ gdy } v_t = 0 \tag{22c}$$

jeśli wektor a_t opisano we wzorach (18b).

We wzorze (20a) uwzględniono fakt, że nacisk koła na brzeg ograniczeń, określony siłą ze wzoru (20a), wynosi:

$$N := \|F_n\| = \|G\|\lambda \tag{23a}$$

a wynikająca stąd graniczna wartość siły tarcia (wg Coulomba) jest równa:

$$T_o := \mu N = \mu \|G\|\lambda \tag{23b}$$

Relację między mnożnikiem τ i przyspieszeniem $\ddot{X}$ daną wzorem (22c) można, analogicznie do relacji (21), przedstawić w postaci:

$$\tau = \Pi\left(\tau + \rho\left(H^T(X)\ddot{X} + \gamma_t(X,\dot{X})\right)\right), \text{ gdy } \lambda > 0 \tag{23c}$$

gdzie ρ jest dowolną liczbą dodatnią.

Przyspieszenie koła

Równania ruchu przedstawiają zestaw relacji, na podstawie których w każdej chwili $t \in [0, t_{end})$ można wyznaczyć wektor przyspieszenia koła $\ddot{X}(t) \in R^3$, pod warunkiem, że są spełnione ograniczenia ruchu, czyli gdy $X(t) \in \Omega$ oraz $\dot{X}(t) \in \mathsf{D}\Omega(X(t))$.

Jeżeli koło styka się z brzegiem ograniczenia, czyli gdy

$$X(t) \in \mathrm{Fr}\,\Omega \text{ oraz } \dot{X}(t) \in \mathrm{Fr}\,\mathsf{D}\Omega(X(t)) \tag{24}$$

to na koło działają siły reakcji więzów rozpatrywane w poprzednim podrozdziale.

Na tej podstawie formułujemy zestaw relacji, z których można jednoznacznie wyznaczyć wartość wektora przyspieszenia. Zestaw ten zawiera:

- równanie ruchu (17b), które jest napisane z uwzględnieniem wzorów (20a) i (22a):

$$M\ddot{X} = Q + G\lambda - \mu H\|G\|\lambda\tau \tag{25a}$$

- relacje określające mnożniki według wzorów (21) i (24):

$$\lambda = \left[\lambda - \rho_1\left(G^T\ddot{X} + \gamma_n\right)\right]^+, \quad \rho_1 > 0 \tag{25b}$$

$$\tau = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(H^T\dot{X}\right) & \text{gdy} \quad H^T\dot{X} \neq 0 \\ \Pi\left(\tau + \rho_2\left(H^T\ddot{X} + \gamma_t\right)\right), \quad \rho_2 > 0 & \text{gdy} \quad H^T\dot{X} = 0 \end{cases} \tag{25c}$$

przy czym we wzorach (25) nie wymieniono argumentów odwzorowań G, H, γ_n, γ_t.

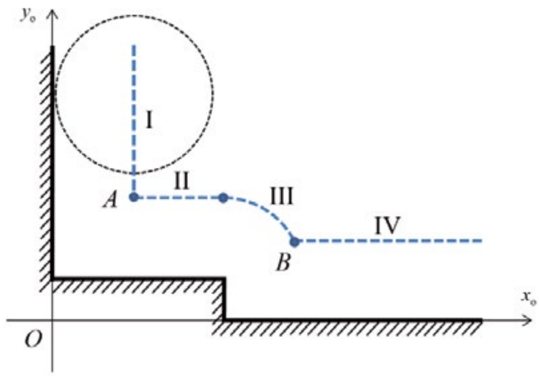
Równania (25) wyznaczają w każdej chwili t $\in$ $[0, t_{end})$, wartość wektora przyspieszenia $\ddot{X}(t)$ oraz mnożników $\lambda(t)$ i $\tau(t)$, które określają wartości sił reakcji.

W relacjach (25) występują odwzorowania G, H, γ_n i γ_t, których opis przedstawimy w następnym podrozdziale.

Opis dodatkowych odwzorowań

Wymienione w poprzednim podrozdziale odwzorowania G, H, γ_n i γ_t służą do opisu geometrycznych cech brzegu ograniczeń $\mathrm{Fr}\Omega$ przy użyciu współrzędnych uogólnionych. Jak już wspomniano, odwzorowanie wektorowe G wyznacza, w każdym punkcie brzegu $X \in \mathrm{Fr}\Omega$, wektor $G(X) \in R^3$, który jest prostopadły, a odwzorowanie H wyznacza wektor $H(X)$, który jest styczny do brzegu ograniczeń. Odwzorowania skalarne γ_n i γ_t służą do wyznaczenia wpływu krzywizny brzegu oraz prędkości koła na jego przyspieszenie.

Rozpatrywany brzeg zbioru przedstawiono na rysuku 2; jest to krzywa złożona z czterech segmentów, zawierająca dwa punkty osobliwe A i B (por. rys. 7).



RYS. 7. **Brzeg zbioru Fr Ω z zaznaczonymi segmentami i punktami osobliwymi**
FIG. 7. **The boundary of the set with selected segments and singular points**

ŹRÓDŁO: **opracowanie własne.**
SOURCE: **own elaboration.**

Opis rozpatrywanych odwzorowań zależy od segmentu krzywej i wynika ze wzorów (3) i (4). Stąd otrzymujemy:

- segment I, $\mathrm{Fr}^{\mathrm{I}}\,\Omega := \left\{(x, y):\quad x = r,\ \ y > r + h\right\}$

$$G_{\mathrm{I}} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_{\mathrm{I}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -r \end{bmatrix}, \quad \gamma_n^{\mathrm{I}} = \gamma_t^{\mathrm{I}} = 0 \tag{26a}$$

- segment II, $\mathrm{Fr}^{\mathrm{II}}\,\Omega := \left\{(x, y):\quad r < x \le l_1,\ \ y = r + h\right\}$

$$G_{\mathrm{II}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_{\mathrm{II}} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad \gamma_n^{\mathrm{II}} = \gamma_t^{\mathrm{II}} = 0 \tag{26b}$$

- segment III, $\mathrm{Fr}^{\mathrm{III}}\,\Omega := \{(x,y):\quad l_1 < x < l_1 + a,\ \ y = f(x)\}$

$$G_{\mathrm{III}} := \begin{bmatrix} -f'(x) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad H_{\mathrm{III}} := \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x) \\ r \end{bmatrix},\quad \gamma_n^{\mathrm{III}} := f''(x)\dot{x}^2,\quad \gamma_t^{\mathrm{III}} := f''(x)\dot{x}\dot{y} \tag{26c}$$

- segment IV, $\mathrm{Fr}^{\mathrm{IV}}\,\Omega := \{(x,y):\quad x > l_1 + a,\ \ y = r\}$

$$G_{\mathrm{IV}} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad H_{\mathrm{IV}} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ r \end{bmatrix},\quad \gamma_n^{\mathrm{IV}} = \gamma_t^{\mathrm{IV}} = 0 \tag{26d}$$

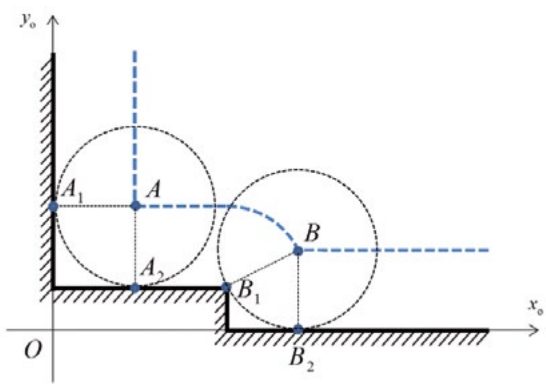
We wzorach (26) użyto oznaczeń zaznaczonych na rysunku 2 oraz związanych z funkcją *f*, opisaną we wzorze (4c); stąd otrzymuje się:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &:= -\frac{x - l_1}{\sqrt{r^2 - (x - l_1)^2}} \\ f''(x) &:= -\frac{r^2}{\left[r^2 - (x - l_1)^2\right]^{3/2}} \end{aligned}\right\} \text{gdy}\quad l_1 < x \le l_1 + a \tag{26e}$$

Osobliwe położenia koła są określone współrzędnymi środka koła, tzn.:

$$\text{punkt } A:\quad x = r,\ \ y = r + h \tag{27a}$$

$$\text{punkt } B:\quad x = l_1 + a,\ \ y = r \tag{27b}$$



RYS. 8. Osobliwe położenia, w których koło styka się z ograniczeniami w dwóch punktach
FIG. 8. The singular positions in which the wheel is in contact with the constraints in two points

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

W tych położeniach koło styka się z ograniczeniami w dwóch punktach (rys. 8). Stąd wynikają następujące opisy zbiorów dopuszczalnych prędkości

$$\mathsf{D}\Omega\left(X_A\right) := \left\{\dot{X} \in R^3 : \quad G_{\mathrm{I}}^T \dot{X} \geq 0, G_{\mathrm{II}}^T \dot{X} \geq 0\right\} \tag{28a}$$

$$\mathsf{D}\Omega\left(X_B\right) := \left\{\dot{X} \in R^3 : \quad G_{\mathrm{II}}^T \dot{X} \geq 0, G_{\mathrm{III}}^T \dot{X} \geq 0\right\} \tag{28b}$$

gdzie użyto oznaczeń ze wzorów (26).

Jak już wcześniej wspomniano, ograniczenie przyspieszenia koła oraz siła reakcji powstają wtedy, gdy wektor prędkości znajduje się na brzegu zbioru $\mathsf{D}\Omega$, co zostało opisane we wzorach (19) i (20).

Na tej podstawie określamy relacje dla normalnej składowej siły reakcji w położeniu A (27a):

$$F_n^A := \begin{cases} G_{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{I}} & \text{gdy} \quad G_{\mathrm{I}}^T \dot{X} = 0, G_{\mathrm{II}}^T \dot{X} > 0 \quad \text{dla punktu } A_1 \\ G_{\mathrm{II}}\lambda_{\mathrm{II}} & \text{gdy} \quad G_{\mathrm{I}}^T \dot{X} > 0, G_{\mathrm{II}}^T \dot{X} = 0 \quad \text{dla punktu } A_2 \\ G_{\mathrm{I}}\lambda_{\mathrm{I}} + G_{\mathrm{II}}\lambda_{\mathrm{II}} & \text{gdy} \quad G_{\mathrm{I}}^T \dot{X} = 0, G_{\mathrm{II}}^T \dot{X} = 0 \quad \text{dla obu punktów} \end{cases} \tag{29}$$

Wartości mnożników λ_{I} i λ_{II} są związane z wektorem przyspieszenia $\ddot{X}$ relacją opisaną we wzorze (25b).

Siłę reakcji F_n^B, działającą na koło w położeniu B (27b), obliczamy analogicznie do wzoru (29), czyli:

$$F_n^B := \begin{cases} G_{\mathrm{III}}\lambda_{\mathrm{III}} & \text{gdy} \quad G_{\mathrm{III}}^T \dot{X} = 0, G_{\mathrm{IV}}^T \dot{X} > 0 \quad \text{dla punktu } B_1 \\ G_{\mathrm{IV}}\lambda_{\mathrm{IV}} & \text{gdy} \quad G_{\mathrm{III}}^T \dot{X} > 0, G_{\mathrm{IV}}^T \dot{X} = 0 \quad \text{dla punktu } B_2 \\ G_{\mathrm{III}}\lambda_{\mathrm{III}} + G_{\mathrm{IV}}\lambda_{\mathrm{IV}} & \text{gdy} \quad G_{\mathrm{III}}^T \dot{X} = 0, G_{\mathrm{IV}}^T \dot{X} = 0 \quad \text{dla obu punktów} \end{cases} \tag{30}$$

Postać opisu relacji między mnożnikami λ i wektorem przyspieszenia $\ddot{X}$ określono wzorem (25b).

Styczną składową siły reakcji F_t określimy na podstawie relacji (22), ale po uwzględnieniu właściwego indeksu przy wektorach G, H i mnożnikach λ, τ.

5. Opis zderzenia

W sytuacji określonej relacją (9) prędkość koła jest niedopuszczalna przez więzy, co skutkuje zderzeniem, w czego efekcie powstaje impulsowa reakcja więzów, dostosowująca prędkość koła do ograniczeń. W rozdziale 3 przedstawiono lokalny opis modelu zderzenia w postaci relacji określającej związek między reakcją impulsową i skokową zmianą prędkości koła. Zamieszczone tam relacje przedstawimy teraz przy użyciu współrzędnych uogólnionych.

Opis zderzenia plastycznego obejmuje równanie bilansu pędu oraz relacje określające impulsowe siły reakcji. Ogólna postać tego opisu jest analogiczna do równań ruchu (17) i (25), czyli:

$$M\dot{X}^{+} - M\dot{X}^{-} = \tilde{F}_n - \tilde{F}_t \tag{31}$$

$$\tilde{F}_n = G\tilde{\lambda}, \quad \tilde{F}_t = \mu \left\|G\right\| H\tilde{\lambda}\tau \tag{32}$$

a opis relacji ze wzorów (15) ma teraz postać analogiczną do (25b) i (25c), czyli:

$$\tilde{\lambda} = \left[\tilde{\lambda} - \rho_1 G^T \dot{X}^{+}\right]^{+} \tag{33a}$$

$$\tau = \Pi\left(\tau + \rho_2 H^T \dot{X}^{+}\right) \tag{33b}$$

gdzie indeksem „~" zaznaczono impulsy siły działającej na koło.

Gdy zderzenie koła z więzami powstaje w osobliwym położeniu koła, określanym punktem A lub B (według wzorów (27)), to wtedy na koło działają dwie reakcje, czyli:

$$\tilde{F}_n = G_{\mathrm{I}}\tilde{\lambda}_{\mathrm{I}} + G_{\mathrm{II}}\tilde{\lambda}_{\mathrm{II}} \text{ dla punktu } A \tag{34a}$$

$$\tilde{F}_n = G_{\mathrm{III}}\tilde{\lambda}_{\mathrm{III}} + G_{\mathrm{IV}}\tilde{\lambda}_{\mathrm{IV}} \text{ dla punktu } B \tag{34b}$$

Relacje określające mnożniki $\tilde{\lambda}$ i τ ze wzorów (34) mają postać taką jak we wzorach (33), ale po uwzględnieniu stosownych indeksów.

Jak już wspomniano, relacje ze wzorów (32) i (33) określają skokową zmianę prędkości koła $\Delta V := V^{+} - \mathrm{V}^{-}$ oraz impulsy siły reakcji $\tilde{F}_n$ i $\tilde{F}_t$ powstające podczas zderzenia plastycznego.

Jeżeli rozważa się zderzenie sprężyste lub sprężysto-plastyczne, to – zgodnie z hipotezą Newtona-Poissona określoną we wzorach (16) – należy uwzględnić dodatkową fazę zderzenia (restytucji) opisaną równaniami:

$$M\dot{X}^{*} - M\dot{X}^{+} = \tilde{F}_n^{*} - \tilde{F}_t^{*} \tag{35a}$$

gdzie $\dot{X}^{*} \in R^3$ – wektor prędkości po zderzeniu sprężystym lub sprężysto-plastycznym; F_n^{*}, F_t^{*} – impulsy sił reakcji powstające w tej fazie, określone relacjami:

$$F_n^{*} = G\lambda^{*}, \; \lambda^{*} = \beta\,\tilde{\lambda} \tag{35b}$$

$$F_t^{*} = \mu \left\|G\right\| H\lambda^{*}\tau^{*}, \; \tau^{*} = \Pi\left(\tau^{*} + \rho_2 H^T \dot{X}^{*}\right) \tag{35c}$$

W wymienionych relacjach wartość mnożnika λ^{*} jest znana, co wynika ze wzoru (35c), gdzie $\beta \in (0, 1]$ jest współczynnikiem restytucji, którego wartość dla zderzenia sprężystego wynosi 1.

Relacje (35) wyznaczają wektor prędkości po zderzeniu $\dot{X}^*$ oraz mnożnik τ^* określający wpływ tarcia na tę fazę zderzenia.

6. Symulacja ruchu koła

Opis metody rozwiązania zagadnienia początkowego

Niegładkie zagadnienie ruchu układu mechanicznego było szczegółowo analizowane w monografii [3], gdzie rozpatrywano jednostronne więzy doskonałe. Z przedstawionych tam rozważań wynika, że ruch takiego układu opisuje funkcja absolutnie ciągła. Określono również etapową metodę wyznaczania takiej funkcji. Metody tej użyjemy do wyznaczenia funkcji opisującej ruch koła.

Rozpatrywane w rozdziałach 4 i 5 opisy relacji, określające ruch koła, przedstawimy teraz w syntetycznej postaci za pomocą dwóch równań

$$\ddot{X} = \mathsf{A}\left(X, \dot{X}\right), \quad \text{gdy} \quad X \in \Omega, \ \dot{X} \in \mathsf{D}\Omega\left(X\right) \tag{36}$$

$$\dot{X}^+ = \mathsf{Z}\left(\dot{X}^-, X\right), \quad \text{gdy} \quad X \in \mathrm{Fr}\,\Omega, \ \dot{X}^- \notin \mathsf{D}\Omega\left(X\right) \tag{37}$$

gdzie $X \in R^3$ – wektor współrzędnych uogólnionych, $\mathsf{A} : R^6 \to R^3$ – odwzorowanie wyznaczające wektor przyspieszenia, a $\mathsf{Z} : R^3 \to R^3$ – odwzorowanie wyznaczające skokową zmianę prędkości w chwilach zderzenia.

Odwzorowanie A jest określone w postaci uwikłanej za pomocą relacji (25). W tym przypadku ustalenie wartości odwzorowania A sprowadza się do wyznaczenia rozwiązania relacji (25), czyli obliczenia wartości mnożników λ i τ oraz wektora $\ddot{X}$.

Odwzorowanie Z jest również uwikłane, a jego wartości wyznacza rozwiązanie relacji (32)÷(35), określone mnożnikami $\tilde{\lambda}$ i τ oraz wektorem $\dot{X}^*$.

W każdym etapie wspomnianej wyżej metody wyznacza się rozwiązanie zagadnienia początkowego określonego wzorem (36). Tak ustalona funkcja X, która jest ciągła i różniczkowalna, opisuje ruch koła do chwili, w której powstaje zderzenie określone warunkami ze wzoru (37). Wówczas następuje skokowa zmiana prędkości opisana odwzorowaniem Z; w tej sytuacji kończy się rozpatrywany etap rozwiązania.

Według tej etapowej metody wyznaczania rozwiązania zagadnienia początkowego opracowano program obliczeń komputerowych służący do symulacji ruchu koła. Program ten zawiera algorytmy wyznaczania wartości niejawnych odwzorowań A i Z we wszystkich segmentach zbioru $\mathrm{Fr}\Omega$ opisanych wzorami (26) oraz obu punktach osobliwych (27) zaznaczonych na rysunku 8. Należy dodać, że aby ustalić wartości odwzorowania niejawnego A, trzeba rozwiązać układ równań algebraicznych zawierający pięć niewiadomych: $\ddot{X} \in R^3$, λ i τ. Analogicznie wyznacza się wartości niejawnego odwzorowania Z.

Szczegółowa postać równań ruchu i reakcji

Na początku rozważymy szczegółową postać równań ruchu i reakcji, w której koło styka się z brzegiem w sektorze IV (patrz rys. 7). Na rysunku 3 koło z indeksem 6 ilustruje takie położenie. W rozpatrywanej sytuacji są spełnione warunki określone we wzorze (24), czyli $x > l_1 + a$, $y = r$ oraz $\dot{y} = 0$, gdzie a, l_1 – wymiary opisane we wzorze (4b).

Równania ruchu (25), w rozwiniętej postaci oraz po uwzględnieniu wzorów (26d), dla sektora IV, mają postać:

$$m\ddot{x} = -\mu\,\lambda\tau \tag{38}$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \tag{39}$$

$$J\ddot{\varphi} = -\mu\,\lambda r\tau \tag{40}$$

$$\lambda = \left[\lambda - \rho\,\ddot{y}\right]^{+}, \quad \rho > 0 \tag{41}$$

$$\tau = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\dot{x} + r\dot{\varphi}\right) & \text{gdy} \quad \dot{x} + r\dot{\varphi} \neq 0 \\ \Pi\left(\tau + \rho\left(\ddot{x} + r\ddot{\varphi}\right)\right), \ \rho > 0 & \text{gdy} \quad \dot{x} + r\dot{\varphi} = 0 \end{cases} \tag{42}$$

Powyższy układ równań opisuje przyspieszenia koła ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$) oraz mnożniki reakcji (λ, τ). Jest to uwikłana postać odwzorowania A, w której koło styka się z brzegiem sektora IV. Wyznaczenie rozwiązania powyższych równań jest stosunkowo proste:

- jeżeli koło ślizga się, czyli $\dot{x} + r\dot{\varphi} \neq 0$, to z równania ($42_1$) wyznacza się wprost wartość τ;
- jeżeli koło toczy się bez poślizgu, to z równań (42_2) oraz (38) i (39) otrzymujemy, że $\tau = 0$;
- ze stosunkowo prostego układu równań (39) i (41) otrzymujemy $\lambda = mg$;
- po ustaleniu wartości λ i τ można z równań (38), (39) i (40) wyznaczyć wartości przyspieszeń, a w szczególności $\ddot{y} = 0$.

Opisane równania (38-42) dotyczą ruchu koła poruszającego się (toczącego się) po brzegu. Teraz zajmiemy się opisem zderzenia koła z brzegiem w sektorze IV. Ogólny opis zderzenia zamieszczono we wzorach (32), (33) oraz (35). W rozpatrywanej sytuacji rozwinięty opis zderzenia, przy założeniu hipotezy zderzenia plastycznego, ma postać:

$$m\dot{x}^{+} - m\dot{x}^{-} = -\mu\,\tilde{\lambda}\tau \tag{43}$$

$$m\dot{y}^{+} - m\dot{y}^{-} = \tilde{\lambda} \tag{44}$$

$$J\dot{\varphi}^{+} - J\dot{\varphi}^{-} = -\mu\,\tilde{\lambda} r\tau \tag{45}$$

$$\tilde{\lambda} = \left[\tilde{\lambda} - \rho\,\dot{x}^{+}\right]^{+}, \quad \rho > 0 \tag{46}$$

$$\tau = \Pi\left(\tau + \rho v_t^{+}\right), \;\; \rho > 0 \tag{47}$$

$$v_t^{+} := \dot{x}^{+} + r\dot{\varphi}^{+} \tag{48}$$

Jest to układ równań względem $\dot{x}^{+}$, $\dot{y}^{+}$, $\tilde{\lambda}$, τ. Wyznaczenie rozwiązania uzyskujemy w następujących krokach:

- z równań (44) i (46) można bezpośrednio wyznaczyć $\tilde{\lambda} = -m\dot{y}^{-}$;
- według wzoru (48) oraz równań (43) i (44) otrzymujemy zależność:

$$v_t^{+} := v_t^{-} - \left(\frac{1}{m} + \frac{r^2}{J}\right)\mu\,\tilde{\lambda}\tau \;; \quad v_t^{-} := \dot{x}^{-} + r\dot{\varphi}^{-} \tag{49}$$

następnie, z równania (47), wyznaczamy wartości τ oraz v_t^{+};

- po ustaleniu wartości $\tilde{\lambda}$ i τ obliczamy prędkości po zderzeniu $\dot{x}^{+}$ oraz $\dot{y}^{+}$.

Wyznaczone rozwiązanie określa efekt zderzenia plastycznego. Jeżeli rozpatruje się zderzenie sprężyste albo sprężysto-plastyczne, to należy uwzględnić zmianę prędkości w drugiej fazie zderzenia, opisanej we wzorach (35). W rozpatrywanym przykładzie opis ten, w odniesieniu do współczynnika restytucji $\beta \in (0,1]$, ma postać:

$$\tilde{\lambda}^{*} = \beta\,\tilde{\lambda} \;\; \tilde{\lambda}^{*} = \beta\tilde{\lambda} \tag{50}$$

$$m\dot{x}^{*} = m\dot{x}^{+} - \mu\,\tilde{\lambda}^{*}\tau^{*} \tag{51}$$

$$m\dot{y}^{*} = m\dot{y}^{+} + \tilde{\lambda}^{*} \tag{52}$$

$$J\dot{\varphi}^{*} = J\dot{\varphi}^{+} - \mu\,\tilde{\lambda}^{*} r\tau^{*} \tag{53}$$

$$\tau^{*} = \Pi\left(\tau^{*} + \rho v_t^{*}\right), \;\; \rho > 0 \tag{54}$$

$$v_t^{*} := \dot{x}^{*} + r\dot{\varphi}^{*} = v_t^{+} - \left(\frac{1}{m} + \frac{r^2}{J}\right)\mu\,\tilde{\lambda}^{*}\tau^{*} \tag{55}$$

Efekt zderzenia opisują prędkości $\dot{x}^{*}$, $\dot{y}^{*}$, $\dot{\varphi}^{*}$ oraz mnożniki λ^{*} i τ^{*}. Wartość λ^{*} jest określona wzorem (50), natomiast z równań (54) i (55) otrzymuje się bezpośrednio wartości τ^{*} i v_t^{+}.

Podczas ruchu koła w sektorze III (por. rys. 7), koło styka się tylko z narożnikiem krawężnika, co ilustruje rysunek 3 (koło z indeksem nr 4). W tym przypadku środek koła zajmuje położenie określone warunkami (patrz wzór (26c)):

$$l_1 \le x < l_1 + a, \; y = f(x) \tag{56a}$$

a prędkość koła jest taka, że

$$v_n := \dot{y} - f'(x)\dot{x} = 0 \tag{56b}$$

Warunek (56b) oznacza, że normalna składowa prędkości punktu koła (rys. 3 oraz wzór (10)) stykającego się z więzami jest równa zero, czyli koło nie odrywa się od krawężnika.

We wzorach (26c) zamieszczono definicje wektorów G i H oraz wyrażeń γ_n i γ_t. W celu uproszczenia dalszych opisów pominiemy indeksy „III” znajdujące się przy wymienionych oznaczeniach.

Dla tak określonego stanu koła (wzory (56a) i (56b)) formułujemy rozwinięty opis przyspieszenia koła i reakcji więzów według wzorów (25):

$$m\ddot{x} = -f'(x)\lambda - \mu\,\|G\|\lambda\tau \tag{57}$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda - \mu\,\|G\|\,f'(x)\lambda\tau \tag{58}$$

$$J\ddot{\varphi} = -\mu\,\|G\|\lambda r\tau \tag{59}$$

$$\lambda = \left[\lambda - \rho\, a_n\right]^+, \quad \rho > 0 \tag{60}$$

$$\tau = \begin{cases} \operatorname{sign} v_t & \text{gdy} \quad v_t \neq 0 \\ \Pi\left(\tau + \rho\, a_t\right), \ \ \rho > 0 & \text{gdy} \quad v_t = 0 \end{cases} \tag{61}$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia:

$$G(x) := \left[-f'(x) \quad 1 \quad 0\right]^{\mathrm{T}} \ \text{(wg wzoru (26c))} \tag{62}$$

$\|G\|\lambda$ – siła nacisku koła na krawężnik

v_t – styczna składowa prędkości punktu koła stykającego się z krawężnikiem

$$v_t := \dot{x} + f'(x)\dot{y} + r\dot{\varphi} \tag{63}$$

a_n – normalna składowa przyspieszenia punktu koła stykającego się z krawężnikiem

$$a_n := \ddot{y} - f'(x)\ddot{x} + f''(x)\dot{x}^2 \tag{64a}$$

z warunku więzów (11) wynika, że wartość tego przyspieszenia może być większa bądź równa zero. Jeżeli we wzorze (64a) uwzględnimy równania (57) i (58), to otrzymamy

$$a_n := \frac{1}{m}\left(\|G\|^2\lambda + (\gamma - g)\right), \ \ \gamma := f''(x)\dot{x}^2 \tag{64b}$$

gdzie a_t – styczna składowa przyspieszenia punktu koła stykającego się z krawężnikiem:

$$a_t := \ddot{x} + f'(x)\ddot{y} + r\ddot{\varphi} + f''(x)\dot{x}\dot{y} \tag{65a}$$

Jeżeli w powyższym równaniu uwzględnimy równania (57), (58) i (59) oraz wykonamy stosowne przekształcenia, to uzyskamy:

$$a_t := -\left(\frac{1}{m}\|G\|^2 + \frac{r^2}{J}\right)\mu\,\|G\|\lambda\tau + f'(x)g + f''(x)\dot{x}\dot{y} \tag{65b}$$

Aby wyznaczyć wartość mnożnika λ, należy do równania (60) wstawić wyrażenie a_n według wzoru (64b); stąd można bezpośrednio obliczyć wartość λ.

Gdy wartość prędkości poślizgu koła po krawężniku v_t (według wzoru (63)) jest różna od zera, to ze wzoru (61_1) otrzymujemy wartość mnożnika $\tau = \operatorname{sing} v_t$. Jeżeli $v_t = 0$, to do równania (61_2) należy wstawić wyrażenie a_t według wzoru (65b); stąd wynika wartość mnożnika τ.

Po wyznaczeniu wartości mnożników λ i τ obliczamy wartości przyspieszeń $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ i $\ddot{\varphi}$ według wzorów (57), (58) i (59).

Zderzenie koła z krawężnikiem powstaje, gdy prędkość v_n według wzoru (56b) jest ujemna, czyli $v_n < 0$ (patrz rys. 4a). Efekt tego zjawiska, przy założeniu hipotezy zderzenia plastycznego, opisują równania:

$$m\dot{x}^+ - m\dot{x}^- = -f'(x)\tilde{\lambda} - \mu\,\|G\|\tilde{\lambda}\tau \tag{66}$$

$$m\dot{y}^+ - m\dot{y}^- = \tilde{\lambda} - \mu\, f'(x)\|G\|\tilde{\lambda}\tau \tag{67}$$

$$J\dot{\varphi}^+ - J\dot{\varphi}^- = -\mu\,\|G\|\tilde{\lambda} r\tau \tag{68}$$

$$\tilde{\lambda} = \left[\tilde{\lambda} - \rho v_n^+\right]^+, \quad \rho > 0 \tag{69}$$

$$\tau = \Pi\left(\tau + \rho v_t^+\right), \quad \rho > 0 \tag{70}$$

Rozwiązanie tych równań względem $\dot{x}^+$, $\dot{y}^+$, $\dot{\varphi}^+$, $\tilde{\lambda}$, τ wyznacza prędkość koła po zderzeniu plastycznym oraz impulsy siły reakcji. W celu wyznaczenia rozwiązania ustalamy wyrażenia określające v_n^+ i v_t^+ w zależności od mnożników $\tilde{\lambda}$ i τ:

$$v_n^+ := \dot{y}^+ - f'(x)\dot{x}^+ = v_n^- + \frac{1}{m}\|G\|^2\tilde{\lambda} \tag{71}$$

$$v_t^+ := \dot{x}^+ - f'(x)\dot{y}^+ + r\dot{\varphi}^+ = v_t^- + \left(\frac{1}{m}\|G\|^2 + \frac{r^2}{J}\right)\mu\,\|G\|\tilde{\lambda}\tau \tag{72}$$

Po uwzględnieniu wzoru (71) w równaniu (69) otrzymujemy wartość mnożnika $\tilde{\lambda}$. Następnie z równania (70) oraz z zależności (72) wyznaczamy wartości τ oraz v_t^+. Po wyznaczeniu mnożników obliczamy wartości poszukiwanych prędkości po zderzeniu plastycznym $\dot{x}^+$, $\dot{y}^+$ i $\dot{\varphi}^+$.

Jeżeli rozpatrujemy zderzenie sprężyste albo sprężysto-plastyczne, to należy rozważyć opis drugiej fazy zderzenia (35), analogiczny do wzorów (50)÷(55):

$$\tilde{\lambda}^* = \beta\,\tilde{\lambda}, \ \beta \in (0,1] \tag{73}$$

$$m\dot{x}^{*} = m\dot{x}^{+} - f'(x)\tilde{\lambda}^{*} - \mu \|G\| \tilde{\lambda}^{*}\tau^{*} \tag{74}$$

$$m\dot{y}^{*} = m\dot{y}^{+} - \mu f'(x)\|G\| \tilde{\lambda}^{*}\tau^{*} \tag{75}$$

$$J\dot{\varphi}^{*} = J\dot{\varphi}^{+} - \mu \|G\| \tilde{\lambda}^{*} r\tau^{*} \tag{76}$$

$$\tau^{*} = \Pi\left(\tau^{*} + \rho v_t^{*}\right), \quad \rho > 0 \tag{77}$$

$$v_t^{*} := v_t^{+} + \left(\frac{1}{m}\|G\|^2 + \frac{r^2}{J}\right)\mu \|G\| \tilde{\lambda}^{*}\tau^{*} \tag{78}$$

Na podstawie równań (77) i (78) można bezpośrednio wyznaczyć wartość mnożnika τ^*, a następnie wartości prędkości koła.

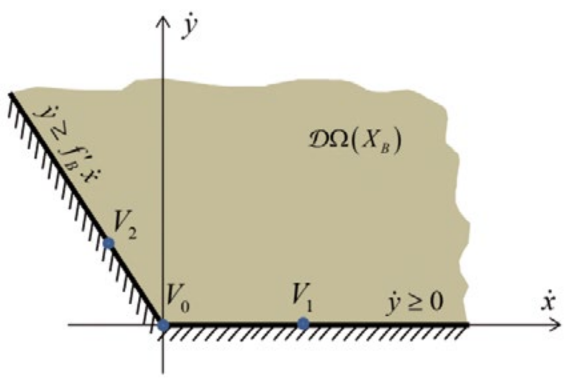
Jeśli koło zajmuje położenie osobliwe, określone punktem B (rys. 8), to opis oddziaływania na koło komplikuje się, gdyż styka się ono z więzami w dwóch punktach B_1 i B_2 zaznaczonych na rysunku 8. Położenie koła wyznaczają współrzędne środka $x = l_1 + a$, $y = r$, natomiast opis zbioru dopuszczalnych prędkości koła w tym położeniu jest następujący:

$$\mathrm{D}\Omega\left(X_B\right) := \left\{\dot{x}, \dot{y} \in R^1 : \quad -f_B'\dot{x} + \dot{y} \geq 0,\ \dot{y} \geq 0\right\} \tag{79}$$

gdzie f_B' – wartość pochodnej funkcji f dla $x = l_1 + a$

$$f_B' := -\frac{a}{\sqrt{r^2 - a^2}}, \; a < r \tag{80}$$

Na rysunku 9 zamieszczono schematyczny wykres zbioru DΩ.



RYS. 9. **Wykres zbioru DΩ w osobliwym punkcie B (por. rys. 8)**
FIG. 9. **The graph of the set DΩ at a singular point B (see Fig. 8)**

ŹRÓDŁO: **opracowanie własne.**
SOURCE: **own elaboration.**

Na podstawie analizy rysunku 9 widać, że w rozpatrywanym położeniu więzy działają, czyli ograniczają przyspieszenia tylko wtedy, gdy wektor prędkości należy do brzegu zbioru $\mathsf{D}\Omega$, co zapisano we wzorze (8a). Na rysunku 9 zaznaczono trzy przykładowe wektory prędkości $V := \left[\dot{x}, \dot{y}\right]^{\mathrm{T}}$ leżące na brzegu. W przypadku wektorów V_1 i V_2 działa tylko jedno ograniczenie, natomiast dla wektora V_0 – oba.

Działanie pojedynczych ograniczeń opisano wcześniej, a teraz zajmiemy się sytuacją określoną prędkością V_0, czyli gdy $\dot{y} - f_B' \dot{x} = 0$ oraz $\dot{y} = 0$. Z tych warunków wynika, że postępowa prędkość jest równa zero, ale zakładamy, że koło się obraca, czyli $\dot{\varphi} \neq 0$. W takiej sytuacji koło ślizga się po ograniczeniach.

W opisanym stanie przyspieszenie koła jest ograniczane, a zbiór dopuszczalnych przyspieszeń ma postać

$$\mathsf{D}^2\,\Omega\left(X_B, V_B\right) := \left\{\ddot{x}, \ddot{y} \in R^1 : \quad -f_B' \ddot{x} + \ddot{y} \geq 0,\ \ddot{y} \geq 0\right\} \tag{81}$$

Równania określające przyspieszenie i siły reakcji mają natomiast teraz postać

$$m\ddot{x} = -f_B' \lambda_1 - \mu \left\|G\right\| \lambda_1 \tau_1 - \mu \lambda_2 \tau_2 \tag{82}$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda_1 - \mu \left\|G\right\| f_B' \lambda_1 \tau_1 + \lambda_2 \tag{83}$$

$$J\ddot{\varphi} = -\mu \left\|G\right\| r \lambda_1 \tau_1 - \mu r \lambda_2 \tau_2 \tag{84}$$

$$\lambda_1 = \left[\lambda_1 - \rho a_1^n\right]^+, \quad \rho > 0 \tag{85}$$

$$\lambda_2 = \left[\lambda_2 - \rho a_2^n\right]^+, \quad \rho > 0 \tag{86}$$

gdzie przez λ_i, τ_i, dla $i \in \{1,2\}$, oznaczono mnożniki reakcji działające na koło w punktach B_i pokazanych na rysunku 8; ponadto a_1^n, a_2^n – składowe normalne przyspieszenia koła punktach B_1 i B_2:

$$a_1^n := \ddot{y} - f_B' \ddot{x}\,,\ a_2^n := \ddot{y} \tag{87}$$

W związku z tym, że przyjęto, iż $\dot{\varphi} \neq 0$, to

$$\tau_1 = \tau_2 = \operatorname{sign} \dot{\varphi} \tag{88}$$

Na podstawie przytoczonych powyżej równań należy wyznaczyć wartości $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$ oraz λ_1 i λ_2. W tym celu ze wzorów (87) oraz równań (82), (83) i (84) ustalamy wyrażenia:

$$a_1^n = -g + \frac{1}{m}\left[\left\|G\right\|^2 \lambda_1 + \left(\mu f_B' \tau_2 + 1\right)\lambda_2\right] \tag{89}$$

$$a_2^n = -g + \frac{1}{m}\left[\left(1 - \mu f_B' \left\|G\right\| \tau_1\right)\lambda_1 + \lambda_2\right] \tag{90}$$

Wstawiając wyrażenie (89) do wzoru (85) oraz przyjmując $\rho := m / \|G\|^2$, otrzymujemy:

$$\lambda_1 = \|G\|^{-2} \left[mg - \gamma_2 \lambda_2 \right]^+, \text{ jeśli } \gamma_2 := \mu f_B' \tau_2 + 1 \tag{91}$$

Podobnie ze wzorów (90) i (86), gdy $\rho := m$, otrzymujemy:

$$\lambda_2 = \left[mg - \gamma_1 \lambda_1 \right]^+, \text{ jeśli } \gamma_1 := 1 - \mu f_B' \|G\| \tau_1 \tag{92}$$

Rozwiązanie równań (91) i (92) wyznacza wartości mnożników λ_1 i λ_2, natomiast wartości przyspieszeń $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\varphi}$ obliczamy ze wzorów (82), (83) i (84), po uwzględnieniu (88).

Z analizy równań (91) i (92) wynika, że jeżeli:

$$\dot{\varphi} < 0, \text{ czyli } \tau_1 = \tau_2 = -1, \text{ to} \tag{92a}$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = mg, \tag{92b}$$

czyli otrzymuje się oczywisty rezultat: koło odjeżdża od krawężnika, czyli $\ddot{x} = -\mu g$, $\ddot{y} = 0$, $\ddot{\varphi} = -\frac{1}{J} \mu mgr$.

Jeżeli

$$\dot{\varphi} > 0, \text{ czyli } \tau_1 = \tau_2 = 1 \tag{93a}$$

to są możliwe dwa rozwiązania:

$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \text{ gdy } \|G\|^2 > \gamma_1 \tag{93b}$$

$$\lambda_1 = \frac{mg}{\|G\|^2}, \ \lambda_2 = 0, \text{ gdy } \|G\|^2 \le \gamma_1 \tag{93c}$$

W przypadku określonym wzorem (93b) środek koła nie przemieszcza się – $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$, ale obraca – $\dot{\varphi} > 0$, $\ddot{\varphi} < 0$ (buksuje); natomiast w drugim przypadku (93c) koło wspina się na krawężnik, gdyż $\ddot{x} < 0$, $\ddot{y} > 0$.

W rozpatrywanym położeniu koła powstaje zderzenie z krawężnikiem, gdy prędkości $\dot{x}^-$ oraz $\dot{y}^-$ nie spełniają warunków wymienionych we wzorze (79), czyli nie należą do zbioru D $\Omega(X_B)$, którego wykres pokazano na rysunku 9. Powstające wtedy zderzenie plastyczne opisują następujące relacje, które zamieszczono w rozdziale 5, we wzorach (32)÷(34):

$$m\dot{x}^+ = m\dot{x}^- - f_B' \tilde{\lambda}_1 - \mu \|G\| \tilde{\lambda}_1 \tau_1 - \mu \tilde{\lambda}_2 \tau_2 \tag{94}$$

$$m\dot{y}^+ = m\dot{y}^- + \tilde{\lambda}_1 - \mu f_B' \|G\| \tilde{\lambda}_1 \tau_1 + \tilde{\lambda}_2 \tag{95}$$

$$J\dot{\varphi}^+ = J\dot{\varphi}^- - \mu \|G\| r \tilde{\lambda}_1 \tau_1 - \mu r \tilde{\lambda}_2 \tau_2 \tag{96}$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \left[\tilde{\lambda}_1 - \rho\, v_{n1}^+\right]^+, \quad \rho > 0 \tag{97}$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \left[\tilde{\lambda}_2 - \rho\, v_{n2}^+\right]^+, \quad \rho > 0 \tag{98}$$

$$\tau_1 = \Pi\left(\tau_1 + \rho\, v_{t1}^+\right), \ \ \rho > 0 \tag{99}$$

$$\tau_2 = \Pi\left(\tau_2 + \rho\, v_{t2}^+\right), \ \ \rho > 0 \tag{100}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia:

$$v_{n1}^- := \dot{x}^- - f_B'\,\dot{y}^-\,,\ v_{n1}^+ := \dot{x}^+ - f_B'\,\dot{y}^+ \tag{101}$$

$$v_{n2}^- := \dot{y}^-\,,\ v_{n2}^+ := \dot{y}^+ \tag{102}$$

$$v_{t1}^- := \dot{x}^- + f_B'\,\dot{y}^- + r\dot{\varphi}^-\,,\ v_{t1}^+ := \dot{x}^+ + f_B'\,\dot{y}^+ + r\dot{\varphi}^+ \tag{103}$$

$$v_{t2}^- := \dot{x}^- + r\dot{\varphi}^-\,,\ v_{t2}^+ := \dot{x}^+ + r\dot{\varphi}^+ \tag{104}$$

Z przytoczonych wyżej równań należy wyznaczyć prędkości kół po zderzeniu $\dot{x}^+$, $\dot{y}^+$, $\dot{\varphi}^+$ oraz mnożniki impulsów reakcji $\tilde{\lambda}_1$, $\tilde{\lambda}_2$, τ_1, τ_2. Ponieważ jest to stosunkowo złożony układ nieliniowych równań, to do wyznaczenia jego rozwiązania wykorzystano metodę iteracyjną. W tej metodzie poszukuje się wektora $Y := \left[\dot{x}^+, \dot{y}^+, \dot{\varphi}^+, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tau_1, \tau_2\right]^{\mathrm{T}} \in R^7$, który spełnia równanie:

$$Y = \Psi(Y) \tag{105}$$

gdzie $\Psi : R^7 \to R^7$ oznacza odwzorowanie określone prawymi stronami podanych wyżej równań.

Gdy rozpatrujemy zderzenie sprężyste lub sprężysto-plastyczne, to na podstawie równań (35) należy sformułować stosowne relacje uwzględniające szczegółowe dane określające stan koła w punkcie *B*. Na tej podstawie ustalamy następujące równania:

$$\tilde{\lambda}_i^* = \beta\,\tilde{\lambda}_i\,,\ i = 1,2 \tag{106}$$

$$m\dot{x}^* = m\dot{x}^+ - f_B'\,\tilde{\lambda}_1^* - \mu\,\|G_1\|\,\tilde{\lambda}_1^*\tau_1^* - \mu\,\tilde{\lambda}_2^*\tau_2^* \tag{107}$$

$$m\dot{y}^* = m\dot{y}^+ + \tilde{\lambda}_1^* - \mu\, f_B'\,\|G_1\|\,\tilde{\lambda}_1^*\tau_1^* + \tilde{\lambda}_2^* \tag{108}$$

$$J\dot{\varphi}^* = J\dot{\varphi}^+ - \mu\,\|G_1\|\,r\,\tilde{\lambda}_1^*\tau_1^* - \mu\,\tilde{\lambda}_2^*\tau_2^* \tag{109}$$

$$\tau_i^* = \Pi\left(\tau_i^* + \rho\, v_{ti}^*\right), \ \ \rho > 0,\ i = 1,2 \tag{110}$$

$$v_{t1}^{*} := \dot{x}^{*} + f_B' \dot{y}^{+} + r\dot{\varphi}^{*} \tag{111}$$

$$v_{t2}^{*} := \dot{x}^{*} + r\dot{\varphi}^{*} \tag{112}$$

Na podstawie powyższych relacji można uzyskać dwa nieliniowe równania względem τ_1^* oraz τ_2^*, które rozwiązujemy metodą iteracyjną. Po ustaleniu ich wartości można wyznaczyć wartości prędkości po drugiej fazie rozpatrywanego zderzenia $\dot{x}^+$, $\dot{y}^+$, $\dot{\varphi}^+$.

Relacje podane w niniejszym podrozdziale dotyczą wyznaczenia przyspieszenia koła oraz jego prędkości po zderzeniu wtedy, gdy koło znajduje się w segmentach IV, II i III (rys. 7) oraz w punkcie *B* (rys. 8). Nie podajemy równań dla segmentu I, gdyż są one analogiczne do równań segmentu IV; natomiast równania w osobliwym punkcie *A* są podobne do opisanych wyżej równań dla punktu *B*.

Wyniki obliczeń komputerowych

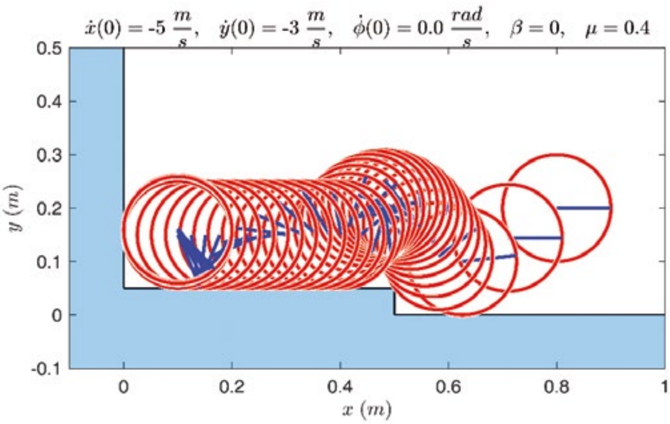
Rozpatrujemy płaski ruch nieodkształcalnego koła, na które działają ograniczenia przedstawione na rysunkach 1, 2 i 7. Symulację ruchu koła wykonujemy, przyjmując następujące wartości parametrów koła: masa m = 10 kg, moment bezwładności J = 0,05 kg m^2 i promień r = 0,1 m. Wymiary zaznaczone na rysunku 1 wynoszą h = 5 cm oraz l = 0,50 m. Poza tym przyjmujemy, że przyspieszenie ziemskie wynosi g = 9,81 m/s^2, a warunki początkowe są określone dwoma wektorami

$$X_o = \begin{bmatrix} 0{,}8 \text{ m} \\ 0{,}2 \text{ m} \\ 0 \text{ rad} \end{bmatrix}, \; V_o = \begin{bmatrix} -5 \text{ m/s} \\ -3 \text{ m/s} \\ 0 \text{ rad/s} \end{bmatrix} \tag{113}$$

Na podstawie relacji zamieszczonych w rozdziale 4 ustalono dla każdego segmentu brzegu ograniczeń (rys. 7) zestawy relacji określających przyspieszenie koła i siły reakcji oraz relacje określające nieciągłe zmiany prędkości koła spowodowane zderzeniem.

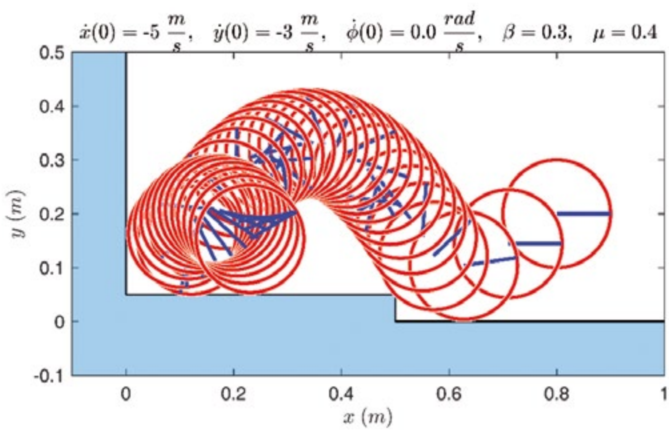
Symulację ruchu koła przeprowadzono w przedziale czasu t ∈ (0,1] s. Przyjęto wartość współczynnika tarcia pomiędzy kołem i brzegiem więzów μ = 0,4. Rozpatrywano dwa zadania, które różniły się jedynie wartością współczynnika restytucji β. W pierwszym zadaniu symulowano ruch koła przy założeniu hipotezy zderzeń plastycznych β = 0. W przypadku drugiego zadania przyjęto β = 0,3, co odpowiada hipotezie zderzenia sprężysto-plastycznego.

Sekwencje położeń koła w trakcie symulacji obrazują rysunek 10 (zderzenia plastyczne) i rysunek 11 (zderzenia sprężysto-plastyczne). Na tych rysunkach podano również warunki początkowe koła; wynika stąd, że w pierwszym okresie ruchu koło porusza się ruchem postępowym, a po pierwszym zderzeniu zaczyna się obracać.



RYS. 10. **Sekwencja położeń koła w trakcie symulacji (zderzenia plastyczne)**
FIG. 10. **The sequence of wheel positions during computer simulation (plastic collisions)**

ŹRÓDŁO: **opracowanie własne.**
SOURCE: **own elaboration.**

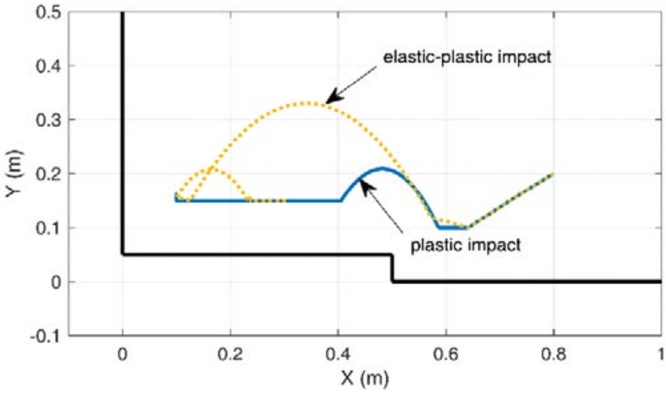


RYS. 11. **Sekwencja położeń koła w trakcie symulacji (zderzenia sprężysto-plastyczne)**
FIG. 11. **The sequence of wheel positions during computer simulation (resilient-plastic collisions)**

ŹRÓDŁO: **opracowanie własne.**
SOURCE: **own elaboration.**

Na kolejnym rysunku (12) przedstawiono dwie trajektorie (tory ruchu) zakreślone przez środek koła w przypadku dwóch analizowanych zadań.

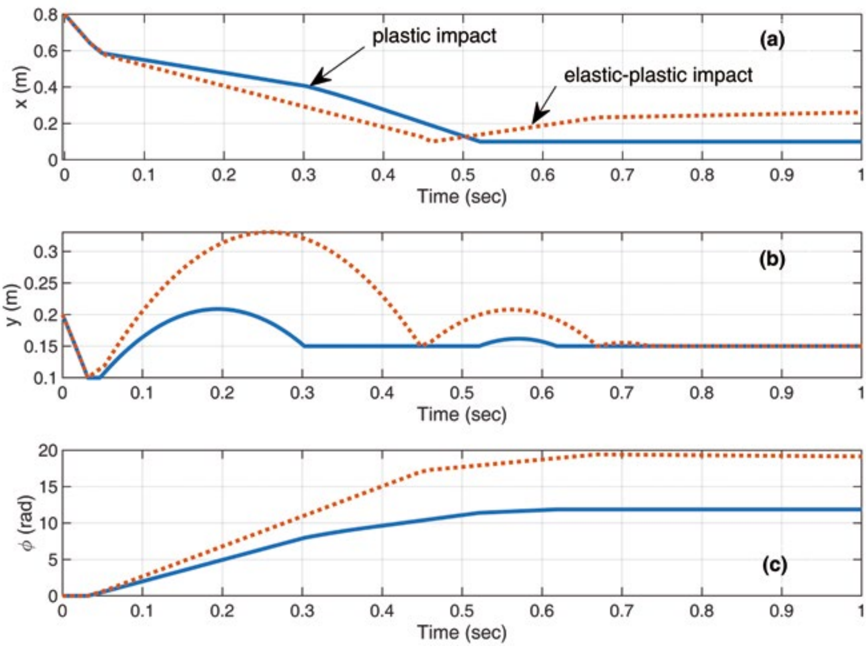
Dwa ostatnie wykresy obrazują przebiegi czasowe położeń środka koła oraz kąta obrotu (rys. 13) a także przebiegi czasowe prędkości zmiany tych wielkości (rys. 14). Wyniki zilustrowane na zamieszczonych rysunkach wskazują na istotne różnice w zachowaniu się koła w zależności od przyjętej hipotezy zderzenia.



RYS. 12. Trajektorie zakreślone przez środek koła: zderzenia plastyczne (linia ciągła), zderzenia sprężysto-plastyczne (linia przerywana)

FIG. 12. Trajectories circled by the center of the circle: plastic collisions (solid line), resilient-plastic collisions (dashed line)

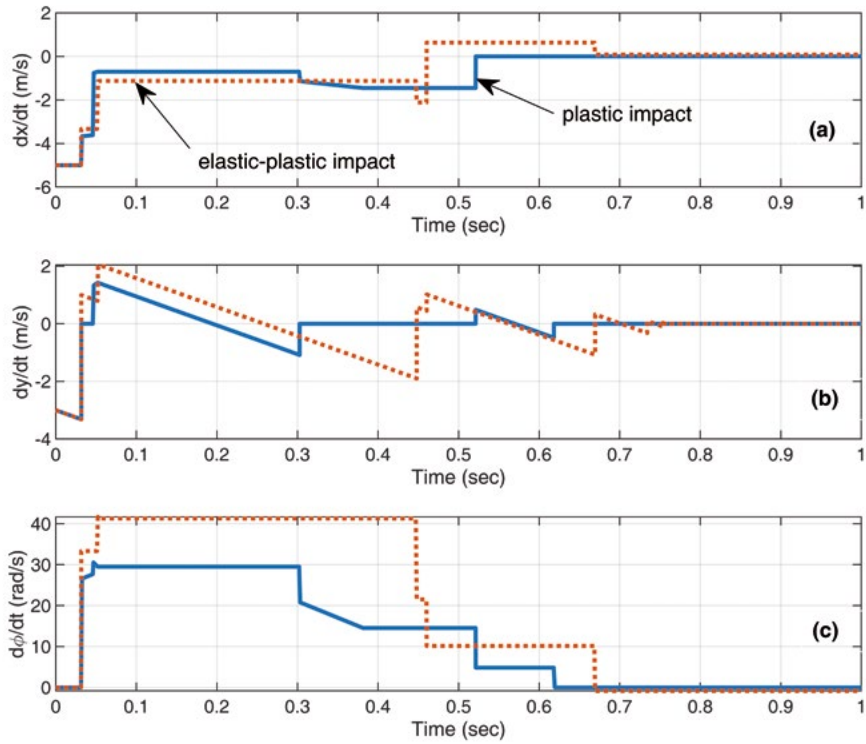
ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.



RYS. 13. Przebiegi czasowe położeń środka koła (a) i (b) oraz kąta obrotu (c): zderzenia plastyczne (linia ciągła), zderzenia sprężysto-plastyczne (linia przerywana)

FIG. 13. The time responses of wheel position (a) and (b) and angle of rotation (c): plastic collisions (solid line), resilient-plastic collisions (doshed line)

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.



RYS. 14. Przebiegi czasowe prędkości środka koła (a) i (b) oraz prędkości kątowej (c): zderzenia plastyczne (linia ciągła), zderzenia sprężysto-plastyczne (linia przerywana)

FIG. 14. The time responses of wheel center velocity (a) and (b) and angular velocity (c): plastic collisions (solid line), resilient-plastic collisions (doshed line)

ŹRÓDŁO: opracowanie własne.
SOURCE: own elaboration.

7. Wnioski

W pracy przedstawiono analizę niegładkiego zagadnienia ruchu układu mechanicznego na przykładzie koła, którego ruch jest ograniczany.

Pokazano, że sformułowanie niegładkiego zagadnienia ruchu składa się z relacji wyznaczających przyspieszenia ciał oraz z relacji określających nieciągłe zmiany prędkości ciał spowodowane zderzeniem. Opisy tych relacji ustalono według hipotez określających oddziaływania (reakcje) między stykającymi się ciałami nieodkształcalnymi.

W rozpatrywanym tu przykładzie z kołem przyjęte hipotezy mają jasną interpretację, dzięki czemu sformułowanie niegładkiego zagadnienia ruchu jest stosunkowo proste. W przypadku ciała sztywnego w przestrzeni trójwymiarowej opis reakcji jest bardziej złożony, a poza tym w szczególnych położeniach ciała nie można jednoznacznie wyznaczyć jego przyspieszenia i siły reakcji. Takie osobliwe stany układu wynikają z przybliżonego charakteru hipotez określających siły działające między stykającymi się ciałami, a zwłaszcza dotyczy to siły tarcia.

Niegładkie zagadnienia ruchu poszerzają klasyczną problematykę mechaniki teoretycznej. Dzięki temu zwiększa się zakres metod modelowania i symulacyjnych badań ruchu oraz obciążeń maszyn, pojazdów i elementów konstrukcji inżynierskich.

Literatura

1. Grzesikiewicz W, Zbiciak A. *Opis ruchu układu mechanicznego z więzami jednostronnymi*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej; 2018.
2. Painlevé P. *Leçons sur le frottement*. Paris: Hermann; 1895.
3. Routh EJ. *Dynamics of a system of rigid bodies*. London: MacMillan; 1905.
4. Jean M, Moreau JJ. *Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections*. Proc. Contact Mechanics International Symposium. Lausanne: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes; 1992 ; 31-48.
5. Jean M. The nonsmooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1999; 177: 235-257. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.
6. Moreau JJ, Panagiotopoulos PD. Eds.: Non-Smooth Mechanics and Applications. CISM Courses and Lectures, vol. 302.Wien: Springer; 1988.
7. Panagiotopoulos PD. *Inequality Problems in Mechanics and Applications: Convex and Nonconvex Energy Functions*. Basel: Birkhäuser; 1985.
8. Panagiotopoulos PD. *Hemivariational Inequalities: Applications in Mechanics and Engineering.* Springer-Verlag; 1993.
9. Grzesikiewicz W. Dynamika układów mechanicznych z więzami. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej*, Mechanika. 1990; 117.
10. Grzesikiewicz W, Wakulicz A. Dynamics of non-smooth mechanical system. *Machine Dynamics Problems*. 1999; 23(1): 25-37.
11. Grzesikiewicz W, Wakulicz A, Zbiciak A. *Succession of constraint imposed on time function. Monograph: Polioptimization and Computer Aided Design*, vol. 7. Koszalin: Publishing House of Koszalin University of Technology; 2009; 49-56.
12. Stronge WJ. Smooth dynamics of oblique impact with friction. *International Journal of Impact Engineering.* 2013; 51: 36-49.
13. Stewart DE. Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact. *SIAM Review, Society for Industrial and Applied Mathematics*. 2000; 42(1): 3-39.

14. Le xuan Anh: *Dynamics of Mechanical Systems with Coulomb Friction*. Berlin –Heidelberg: Springer-Verlag; 2003.
15. Rutczyńska-Wdowiak K. *Replacement strategies of genetic algorithm in parametric identification of induction motor*. 22nd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics; 2017; 971-975.
16. Rutczyńska-Wdowiak K. The generating new individuals of the population in the parametric identification of the induction motor problem with the use of the genetic algorithm. *Technical Transactions*. 2019; 2: 5-13.

Streszczenie

W pracy przedstawiono problem modelowania i symulacji niegładkiego zagadnienia ruchu. Rozpatrujemy ruch układu, na który działają niedoskonałe więzy jednostronne. Matematyczny opis ruchu takiego układu ma postać niegładkiego zagadnienia początkowego (Cauchy'ego). Niegładkość tego zagadnienia oznacza, że jego rozwiązanie wyznacza funkcja absolutnie ciągła, czyli mająca nieciągłą pierwszą pochodną. Z tego powodu, obok równań ruchu określających przyspieszenie i siłę reakcji, sformułowano dodatkowe zagadnienie zderzenia, opisujące skokową zmianę prędkości oraz impuls reakcji. Do wyznaczenia przybliżonego rozwiązania sformułowanego zagadnienia ruchu koła opracowano oryginalną metodę numeryczną oraz program do obliczeń komputerowych służący do symulacji ruchu koła. Przedstawiono wybrane wyniki ilustrujące przebieg przemieszczeń i prędkości oraz sił reakcji więzów.

Słowa kluczowe: mechanika niegładka, więzy nieidealne, zderzenie, tarcie, dynamika bryły sztywnej

Summary
The modeling and simulation of non-smooth motion problem

The paper presents the problem of modeling and simulation of non-smooth motion issue. We consider the motion of the system into which imperfect unilateral constraints operate. The mathematical description of the movement of such a system takes the form of a non-smooth initial problem (Cauchy's). The non-smoothness of this problem means that its solution is determined by an absolutely continuous function, i.e. having a discontinuous first derivative. For this reason, along with motion equations determining acceleration and reaction force, an additional collision issue was formulated, describing the step change in speed and the impulse of reaction. To determine the approximate solution of the formulated issue of the wheel motion, the original numerical method was developed as well as a computer calculation program for simulating wheel motion. Selected results illustrating the displacements and velocities as well as reaction forces of constraints are presented.

Keywords: non-smooth mechanics, non-ideal constraints, impact, friction, rigid-body dynamics