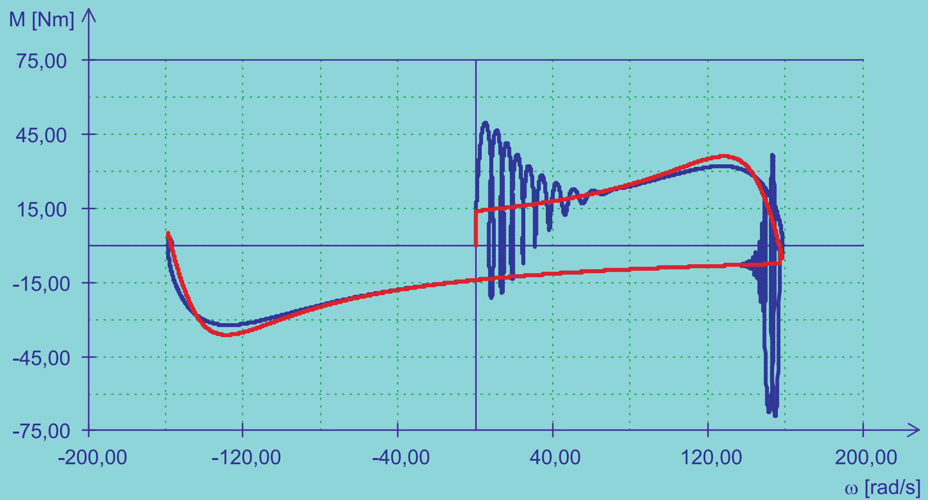
Adam Sołbut

Maszyny elektryczne 1

Transformatory
Maszyny indukcyjne



Białystok 2017

Adam Sołbut

Maszyny elektryczne 1

Transformatory

Maszyny indukcyjne

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
Białystok 2017

Recenzent:
prof. dr hab. inż. Tadeusz Glinka

Redaktor wydawnictwa:
Elżbieta Dorota Alicka

ISBN 978-83-65596-26-0 ISBN 978-83-65596-27-7 (eBook)

Redakcja techniczna, skład i druk:
Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej

Nakład: 48 egz.

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
tel.: 85 746 91 37, fax: 85 746 90 12
e-mail: oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl
www.pb.edu.pl

Spis treści

1. Wprowadzenie 5
2. Transformatory 11
    2.1. Magnesowanie rdzenia ferromagnetycznego 11
    2.2. Model matematyczny transformatora jednofazowego 19
    2.3. Stan jałowy 24
    2.4. Zwarcie pomiarowe 31
    2.5. Zmienność napięcia 33
    2.6. Transformatory trójfazowe 34
        2.6.1. Konstrukcja i sposoby połączeń 34
        2.6.2. Praca równoległa transformatorów 44
        2.6.3. Niesymetria obciążenia 45
    2.7. Straty i sprawność 48
    2.8. Wybrane stany nieustalone 49
    2.9. Uwagi ogólne 54
3. Maszyny indukcyjne 56
    3.1. Budowa i zasada działania 56
    3.2. Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej 62
    3.3. Charakterystyka mechaniczna 68
    3.4. Próba biegu jałowego 73
    3.5. Próba zwarcia maszyny indukcyjnej 77
    3.6. Przesuwnik fazowy i regulator indukcyjny 82
    3.7. Wprowadzenie do dynamiki układów trójfazowych 86
    3.8. Dynamika maszyn indukcyjnych 96
    3.9. Uwagi ogólne 108

Bibliografia 110

1. Wprowadzenie

Pole magnetyczne wytwarzane jest przez przepływ prądu elektrycznego i magnesy trwałe. Opisane jest przez wektor natężenia pola **H**, którego zwrot, kierunek i wartość są zależne od prądów przepływających przez dowolną powierzchnię *S*, ograniczoną krzywą zamkniętą *C*(*S*). Jeśli dokonamy całkowania wartości natężenia pola względem drogi wyznaczonej przez krzywą *C*(*S*) wyznaczającą powierzchnię *S*, to związek pomiędzy wartością prądów przechodzących przez tę powierzchnię a natężeniem pola magnetycznego opisany jest prawem przepływu Ampera [17]:

$$\Theta = \oint_{C(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \sum i \tag{1.1}$$

Wartość pola magnetycznego wymuszona jest przez wypadkową wartość prądu przepływającego przez powierzchnię *S*. Wielkość Θ nazywana jest przepływem lub siłą magnetomotoryczną *smm* (*smm*=Θ) i podawana w amperach (amperozwojach). Prawo to ma bezpośredni związek z pierwszym prawem Maxwella [17]:

$$rot(\mathbf{H}) = \mathbf{J} + \frac{d\mathbf{D}}{dt} \tag{1.2}$$

gdzie **J** jest gęstością prądu w danym punkcie, a **D** wektorem indukcji elektrycznej. Przy częstotliwościach technicznych (50, 60 Hz) w powyższym równaniu można pominąć pochodną zmian indukcji elektrycznej **D** względem czasu. Równanie (1.2) w postaci całkowej przyjmuje wówczas postać równania (1.1).

Skutki działania pola magnetycznego są związane z wielkością indukcji magnetycznej, której wielkość jest zależna od natężenia pola magnetycznego oraz środowiska, w jakim występuje pole magnetyczne:

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{H}) \tag{1.3}$$

Zgodnie z elektrodynamiką klasyczną obowiązuje relacja [17]:

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{1.4}$$

M oznacza moment magnetyczny jednostki objętości materiału [17] (nazywany także namagnesowaniem lub wektorem namagnesowania [8]). Dla wielu substancji, takich jak paramagnetyki i diamagnetyki, w niewielkim polu magnetycznym bardzo dobrym przybliżeniem jest zależność liniowa:

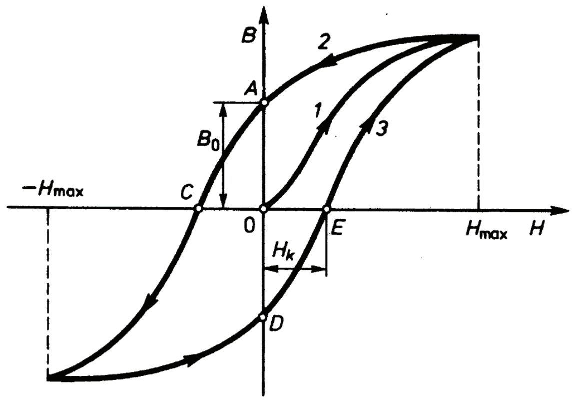
$$\mathbf{M} = \xi \mathbf{H} \tag{1.5}$$

Wówczas:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \xi \mathbf{H}) = \mu_0 (1 + \xi) \mathbf{H} \tag{1.6}$$

Wartość:

$$\mu_r = (1 + \xi) \tag{1.7}$$



Rys. 1.1. Zależność indukcji magnetycznej od natężenia pola magnetycznego w ferromagnetyku (histereza magnetyczna)

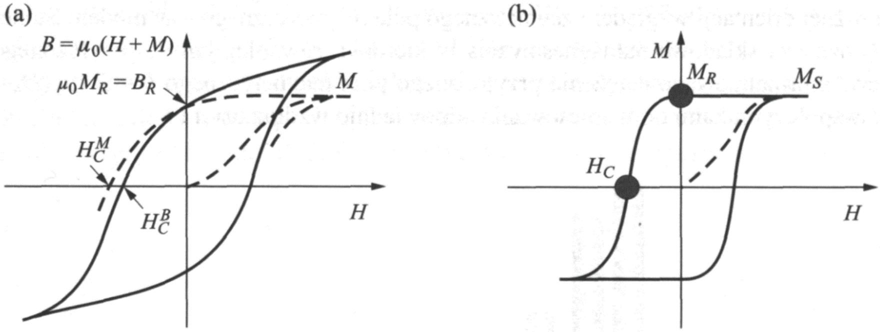
Nazywana jest często względną przenikalnością magnetyczną. W wielu środowiskach (próżnia, powietrze) wartość indukcji jest proporcjonalna do natężenia pola magnetycznego, a współczynnik proporcjonalności nazywany jest przenikalnością magnetyczną. Wygodnym i praktycznie stosowanym oznaczeniem tej proporcji jest wówczas wzór:

$$\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \tag{1.8}$$

gdzie μ_0 jest przenikalnością magnetyczną próżni, a μ_r przenikalnością względną danego środowiska (w próżni $\mu_r = 1$). Wartość przenikalności magnetycznej próżni jest równa:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \ H/m \tag{1.9}$$

W maszynach elektrycznych wykorzystywany jest materiał ferromagnetyczny, w którym zależność indukcji magnetycznej od wartości natężenia pola magnetycznego jest silnie nieliniowa. Zależność tę opisuje krzywa histerezy magnetycznej pokazana na rysunku 1.1.



Rys. 1.2. Pętle histerezy: (a) indukcja magnetyczna *B* w funkcji natężenia pola *H*, (b) moment magnetyczny (namagnesowanie) *M* w funkcji natężenia pola *H* [17]

W sytuacji, gdy ferromagnetyk nigdy nie był poddany działaniu pola magnetycznego, wartość natężenia pola (i indukcji) jest równa zero (rys. 1.1). Jeśli w pobliżu ferromagnetyka wymusimy (poprzez przepływ prądu) wartość natężenia pola magnetycznego *H* oraz będziemy zwiększać jego wartość (poprzez zwiększenie prądu), to wartość indukcji magnetycznej będzie się zwiększać w sposób pokazany przez krzywą 1 – nazywamy ją krzywą magnesowania pierwotnego. W pierwszym fragmencie wartość indukcji jest znacznie większa niż w próżni czy w powietrzu. Nachylenie krzywej w tych punktach jest zależne od przenikalności magnetycznej, której wartość względna może sięgać wartości od kilku do kilkudziesięciu tysięcy. Dalsze zwiększanie natężenia pola powoduje, że nachylenie krzywej maleje aż do pełnego nasycenia ferromagnetyka i w tym obszarze silnie spada. Jeśli w tym momencie będziemy zmniejszać prąd w otoczeniu ferromagnetyka, to indukcja magnetyczna zmienia się według krzywej 2. Spadek prądu (i natężenia pola przez niego wytwarzany) spada do zera, lecz w tym punkcie indukcja magnetyczna nie jest równa zeru. Jej wartość nazywamy remanentem magnetycznym lub pozostałością magnetyczną. Wartość indukcji magnetycznej remanentu jest wynikiem natężenia pola wytwarzanego przez ferromagnetyk. W ten sposób wytwarzany jest magnes trwały. Jeśli w tym momencie zmienimy kierunek prądu oraz kierunek zewnętrznego (względem ferromagnetyka) natężenia pola, to wartość indukcji będzie zmieniać się od punktu A do C. W przypadku magnesów trwałych odcinek ten nazywamy krzywą odmagnesowania. Wartość natężenia pola magnetycznego, wytwarzanego przez prądy na zewnątrz ferromagnetyka, przy którym wypadkowa wartość indukcji magnetycznej jest równa zeru, nazywamy natężeniem pola koercji. Dalsze zwiększanie wartości natężenia pola powoduje zmianę indukcji według krzywej 2. Jeśli po dojściu do wartości maksymalnej zaczniemy zmniejszać wartość natężenia pola, to wartość indukcji będzie zmieniać się według krzywej 3.

Dokładniejsza analiza procesu magnesowania wymaga uwzględnienia zmian momentu magnetycznego M w zależności od natężenia pola magnetycznego H (rys. 1.2b). Wypadkowa wartość indukcji magnetycznej jest wynikiem natężenia pola magnetycznego, jak i wartości momentu magnetycznego. Moment magnetyczny jest tu wynikiem magnesowania materiału, stąd wartość wypadkowego pola magnetycznego jest skutkiem wartości zewnętrznego pola magnetycznego, jak i „historii" magnesowania [17]. Na rysunku 1.2 a linią przerywaną pokazano kształt zależności $M(H)$. Kształt histerezy jest zależny od różnych czynników, jak np. składu chemicznego materiału ferromagnetycznego, sposobu jego produkcji, czystości tego materiału. W praktyce dokładna analiza rozkładu pola magnetycznego jest wykonywania z wykorzystaniem specjalnego oprogramowania i ma istotne znaczenie w procesie projektowania nowych konstrukcji maszyn i urządzeń elektrycznych. W praktyce inżynierskiej istotne znaczenie mają skutki działania pola magnetycznego wytwarzanego celowo w różnych urządzeniach. Skutki te związane są głównie z pojęciem strumienia magnetycznego, definiowanego jako:

$$\phi = \int_S \mathbf{Bds} \tag{1.10}$$

O wartości strumienia magnetycznego decyduje zatem wartość indukcji magnetycznej na obszarze danej powierzchni oraz jej wielkość. Jeśli powierzchnia wyznaczona jest przez kształt przewodnika, to sumaryczny efekt całkowania według tak wyznaczonej powierzchni nazywamy strumieniem magnetycznym skojarzonym z tym przewodnikiem (w skrócie nazywamy to strumieniem skojarzonym). Wartość tego strumienia jest zależna od wartości prądów wytwarzających wypadkowe pole magnetyczne:

$$\psi = f(i_1, i_2, ..., i_n) \tag{1.11}$$

W przypadku środowiska liniowego, gdzie wartość indukcji magnetycznej jest proporcjonalna do natężenia pola, często wykorzystujemy pojęcie indukcyjności [10] jako wielkości wyznaczającej proporcje pomiędzy pojedynczym prądem wytwarzającym pola magnetyczne a wartością strumienia skojarzonego z konkretnym przewodnikiem (uzwojeniem). W przypadku, gdy pole magnetyczne wytwarzane jest przez prąd płynący przez to samo uzwojenie, współczynnik proporcjonalności nazywany jest indukcyjnością własną L:

$$\psi_1 = Li_1 \tag{1.12}$$

W przypadku, gdy pole jest wytwarzane przez inny przewodnik niż ten, dla którego wyznaczamy strumień skojarzony, współczynnik proporcjonalności pomiędzy strumieniem a wartością prądu nazywamy indukcyjnością wzajemną *M*:

$$\psi_2 = Mi_1 \tag{1.13}$$

Ogólnie zatem strumień skojarzony jest wartością zależną od wszystkich prądów wytwarzających wypadkowe pole magnetyczne:

$$\psi = Li \pm \sum Mi_k \tag{1.14}$$

Pojęcie strumienia skojarzonego ma istotne znaczenie. Od jego wartości zależy bowiem sposób reakcji obwodu elektrycznego na zmianę wartości pola magnetycznego. Związek ten jest określony prawem Lentza, gdzie wartość indukowanego napięcia w obwodzie zależy od szybkości zmian strumienia z nim skojarzonego:

$$e = \frac{d\psi}{dt} \tag{1.15}$$

W wielu przypadkach uzwojenie ułożone jest w taki sposób, że każdy zwój obejmuje swoim zasięgiem taką samą wartość strumienia magnetycznego. W takim przypadku

$$\psi = z\phi \tag{1.16}$$

Taki sposób wytworzenia napięcia indukowanego w danym obwodzie nazywany jest często siłą elektromotoryczną transformacji. Innym sposobem wytworzenia napięcia w przewodniku jest jego ruch w polu magnetycznym. Takie napięcie nazywamy napięciem rotacji (siłą elektromotoryczną rotacji). Siła elektromotoryczna jest zależna od wartości indukcji magnetycznej, długości przewodnika, jak i prędkości poruszania się przewodnika:

$$e = Blv \tag{1.17}$$

Innym efektem działania pola magnetycznego jest wytworzenie siły mechanicznej. Wartość siły może być uzależniona od indukcji magnetycznej, wartości prądu w przewodniku oraz jego długości umieszczonej w polu. W przypadku, gdy te wielkości będą występowały pod kątem prostym względem siebie, otrzymamy proporcję:

$$F = Bil \tag{1.18}$$

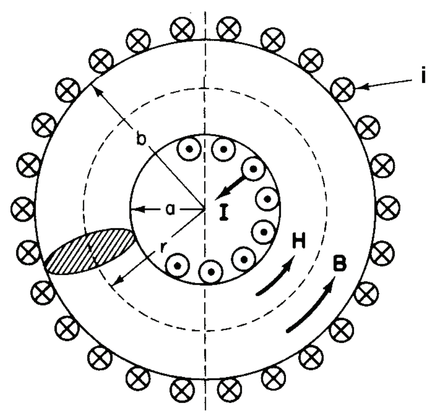
W maszynach elektrycznych wykorzystujemy materiał ferromagnetyczny, gdzie zależność pomiędzy natężeniem pola magnetycznego a wartością indukcji magnetycznej jest silnie nieliniowa. W takim przypadku trudno dokonać dokładnej analizy matematycznej takich urządzeń. Często stosujemy uproszczenie polegające na analizie matematycznej pracy urządzenia w stanie ustalonym przy sinusoidalnie zmieniających się wartościach prądów, napięć oraz strumieni skojarzonych. Istotnego znaczenia nabiera fakt użycia wartości skutecznych dla takich przebiegów. W czasie pomiaru mierzymy bowiem wartości skuteczne tych wielkości i zakładamy, że mają one charakter zmian sinusoidalnych w czasie.

2. Transformatory

2.1. Magnesowanie rdzenia ferromagnetycznego

Jako przykład wykorzystania prawa przepływu rozważmy ferromagnetyczny rdzeń toroidalny o polu przekroju S oraz wymiarach geometrycznych podanych na rysunku 2.1. Załóżmy, że uzwojenie nawiniemy równomiernie na rdzeniu, uzyskując w ten sposób równomierny rozkład pola magnetycznego, przy którym w odległości r od środka toroidu otrzymamy taką samą wartość natężenia pola magnetycznego. Wartość natężenia pola magnetycznego wyznaczyć można wówczas z zależności:

$$\oint_{C(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = H 2\pi r = iz \tag{2.1}$$



Rys. 2.1. Ferromagnetyczny rdzeń toroidalny

Natężenie pola w odległości a od środka toroidu, po jego wewnętrznej stronie, jest równe:

$$H_a = \frac{iz}{2\pi a} \tag{2.2}$$

Po zewnętrznej (przy odległości b):

$$H_b = \frac{iz}{2\pi b} \tag{2.3}$$

Wartości natężenia pola magnetycznego w zależności od odległości od środka toroidu pokazano na rysunku 2.2. W przypadku znajomości wartości prądu możemy wyznaczyć wartość strumienia magnetycznego liczonego dla pola powierzchni przekroju rdzenia. Przy znanej wartości przenikalności wartość tego strumienia możemy wyrazić wzorem:

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r iz}{2\pi} d \ln \frac{b}{a} \tag{2.4}$$

gdzie d jest grubością toroidu. Identyczną wartość strumienia uzyskamy, przyjmując, że w każdym miejscu rdzenia toroidalnego wartość indukcji jest stała. Taką wartość średnią należy obliczyć dla promienia równego $r_{śr}$:

$$r_{śr} = \frac{b-a}{\ln \frac{b}{a}} \tag{2.5}$$

$$B_{śr} = \frac{\mu_0 \mu_r iz}{2\pi R} \tag{2.6}$$

$$\phi = B_{śr} S \tag{2.7}$$

gdzie S jest powierzchnią przekroju rdzenia. W praktyce często używa się uproszczenia polegającego na wyznaczeniu jedynie wartości indukcji w środkowej części rdzenia:

$$r \approx r_{śr} = \frac{b+a}{2} \tag{2.8}$$

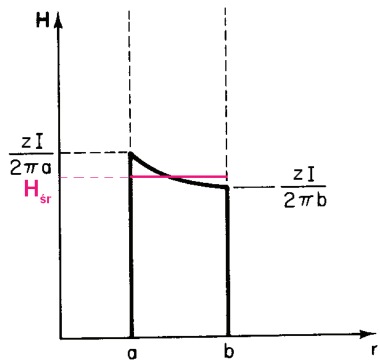
$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r iz}{2\pi r_{śr}} S \tag{2.9}$$

Błąd obliczeń wartości strumienia magnetycznego zależy od wymiarów rdzenia, a jego wartość można oszacować z zależności (2.10).

$$\varepsilon_{\%} = 100(1 - \frac{b+a}{b-a} \frac{\ln \frac{b}{a}}{2}) \tag{2.10}$$

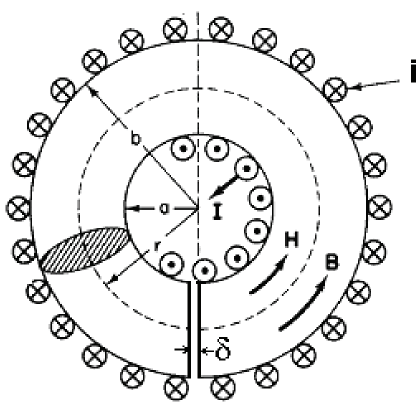
Dla większości praktycznie stosowanych rozwiązań błąd obliczeń wartości strumienia liczonego w takim przypadku jest pomijalnie mały (<1%).

Rdzeń toroidalny używany jest jedynie w transformatorach małych mocy. W maszynach o większych mocach nie jest możliwa konstrukcja transformatora, w której pole magnetyczne zamyka się tylko i wyłącznie przez jednorodny obwód ferromagnetyczny. Praktycznie obwód magnetyczny budowany jest z blach składanych w taki sposób, by zapewnić jak najlepsze wykorzystanie materiału ferromagnetycznego. Pojawia się zatem pytanie, jak zmienia się wartość natężenia pola magnetycznego w przypadku, gdy na drodze pola magnetycznego pojawia się szczelina powietrzna.



Rys. 2.2. Rozkład pola magnetycznego w rdzeniu toroidalnym

Rozważmy rdzeń toroidalny z niewielką szczeliną powietrzną (rys. 2.3). Wartość natężenia pola magnetycznego wyznaczymy z prawa przepływu, przy założeniu, że wewnątrz szczeliny powietrznej pole magnetyczne jest równomiernie rozłożone w taki sam sposób jak w rdzeniu.



Rys. 2.3. Ferromagnetyczny rdzeń toroidalny ze szczeliną powietrzną

Zgodnie z prawem przepływu możemy napisać:

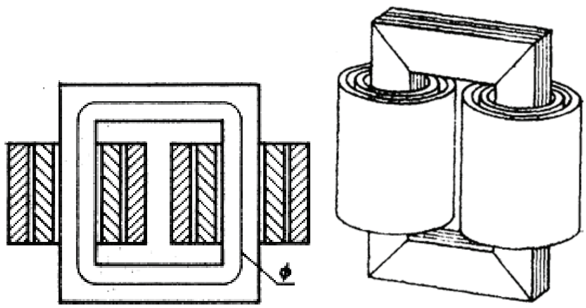
$$\oint_{C(S)} \mathbf{H}d\mathbf{l} = H_\delta \delta + H_{Fe}(2\pi r - \delta) = iz \tag{2.11}$$

Wartość strumienia magnetycznego liczonego dla powierzchni przekroju rdzenia jest przy takim założeniu równa wartości strumienia przechodzącego przez powierzchnię szczeliny powietrznej:

$$\phi = \int_S \mathbf{Bds} = \mu_0 H_\delta S = \mu_0 \mu_r H_{Fe} S \tag{2.12}$$

Z równania (2.12) wynika, że:

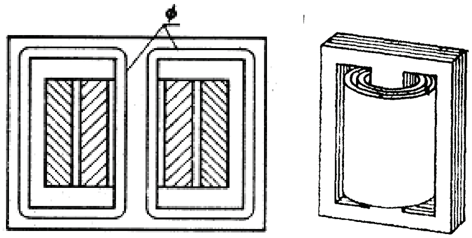
$$H_{Fe} = \frac{H_\delta}{\mu_r} \tag{2.13}$$



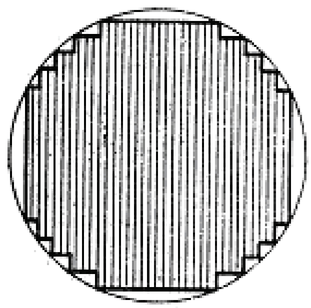
Rys. 2.4. Jednofazowy transformator rdzeniowy

Wartość natężenia pola magnetycznego w rdzeniu jest znacznie mniejsza niż w szczelinie powietrznej. W sytuacji, gdy wartość szczeliny powietrznej będzie stosunkowo duża, pomija się spadek napięcia magnetycznego ($H{\cdot}l$) w rdzeniu i o pracy maszyny decyduje rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej. Takie założenie jest często stosowane w przypadku maszyn elektrycznych wirujących. Fakt konieczności zapewnienia obrotu wirnika względem stojana wymusza istnienie stosunkowo dużej szczeliny powietrznej. W transformatorach dąży się do minimalizacji grubości szczeliny powietrznej (najlepiej do zera), lecz możliwości technologiczne wymuszają istnienie wypadkowej szczeliny powietrznej w takich urządzeniach.

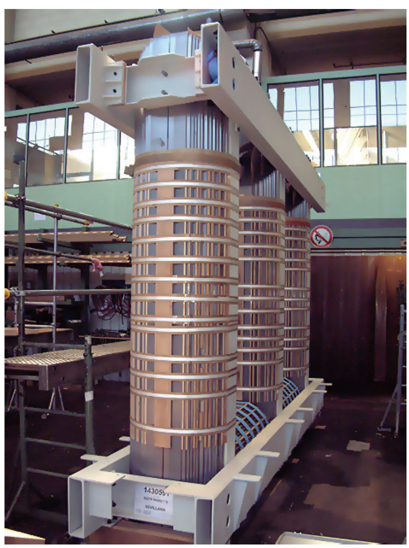
Rdzenie jednofazowych transformatorów energetycznych mają najczęściej kształt pokazany na rysunkach 2.4 i 2.5. Buduje się je z cienkich, jednostronnie izolowanych blach i składa się w taki sposób, by optymalnie wykorzystać materiał ferromagnetyczny [7]. W rdzeniach transformatorów większych mocy buduje się rdzenie z blach o różnych szerokościach (rys. 2.6), dzięki czemu uzyskuje się lepsze wypełnienie ferromagnetykiem obszaru wewnątrz uzwojenia.



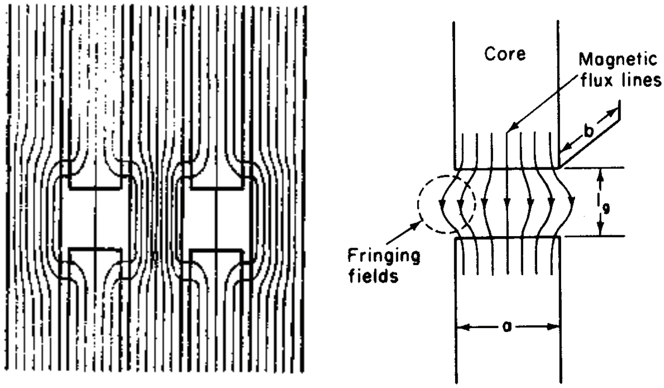
Rys. 2.5. Jednofazowy transformator płaszczowy



Rys. 2.6. Przekrój kolumny rdzenia transformatora energetycznego

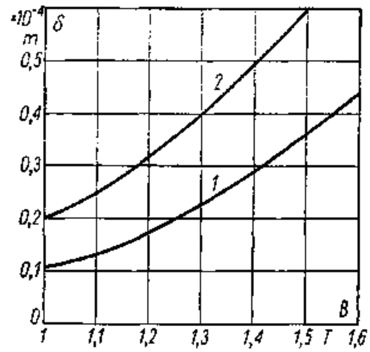


Rys. 2.7. Rdzeń transformatora 112MVA [7]



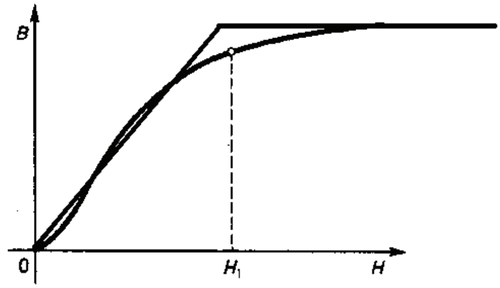
Rys. 2.8. Przebieg pola magnetycznego w miejscu zaplatania rdzenia

Szczelina powietrzna nie występuje tu w sposób jawny – wypadkowa szczelina powietrzna jest efektem nierównomierności rozkładu pola magnetycznego w miejscach zaplatania blach rdzenia (rys. 2.8). Grubość takiej „wirtualnej" szczeliny powietrznej może być szacowana na podstawie wieloletnich doświadczeń produkcyjnych (rys. 2.9).

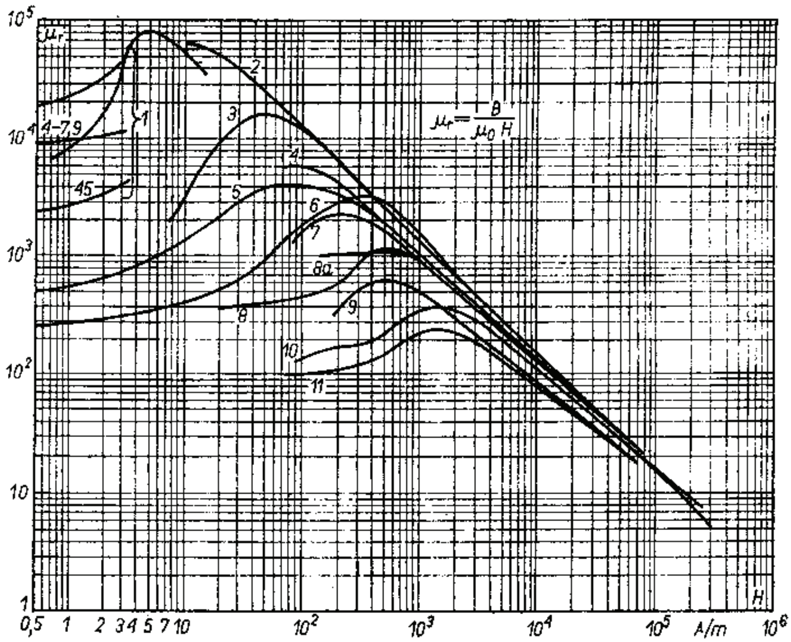


Rys. 2.9. Wartości zastępczej szczeliny w funkcji indukcji dla blachy walcowanej na zimno o grubości 0,35 mm przy zaplataniu pojedynczymi blachami (1) i dla blachy walcowanej na gorąco (2) [9]

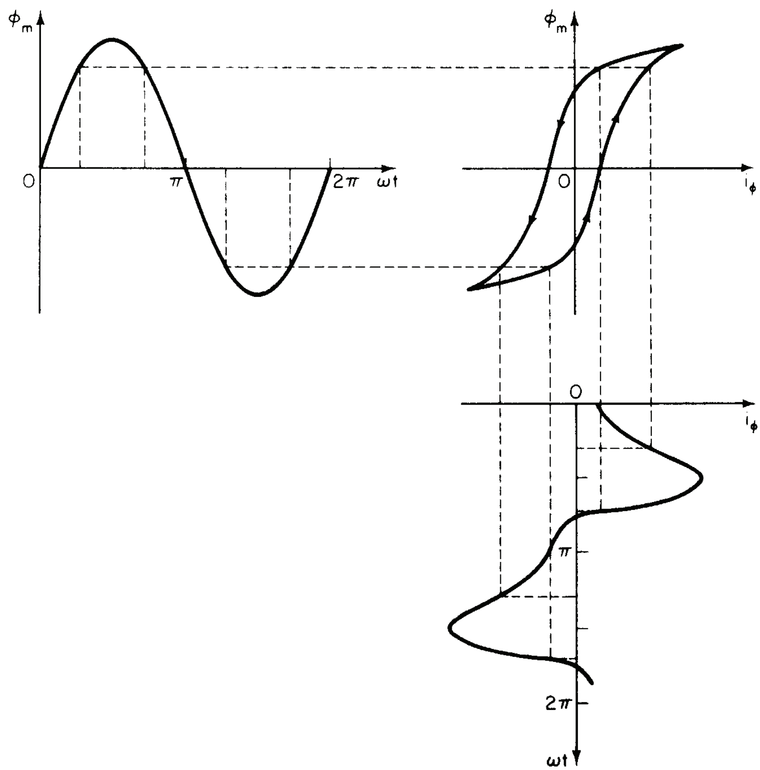
Fakt nieliniowej zależności pomiędzy natężeniem pola i wartością indukcji ma istotne znaczenie praktyczne. W celu ułatwienia analiz, często stosowana jest aproksymacja krzywej magnesowania, pokazana na rysunku 2.10. Występuje tu tzw. część prostoliniowa charakterystyki, w której zakładamy proporcjonalność indukcji i natężenia pola, oraz część, gdzie następuje nasycenie obwodu magnetycznego – linia prosta o małym nachyleniu.



Rys. 2.10. Dwuodcinkowa aproksymacja krzywej magnesowania



Rys. 2.11. Przenikalność magnetyczna względna μ_r żelaza i jego stopów w zależności od natężenia pola magnetycznego H:
1– permalloy; 2 – blacha transformatorowa walcowana na zimno w najkorzystniejszym kierunku magnesowania; 3 – żelazo elektrolityczne wytapiane w próżni; 4 – blacha transformatorowa walcowana na zimno w kierunku magnesowania najniekorzystniejszym; 5 – blacha transformatorowa walcowana na gorąco, 4% C; 6 – stal konstrukcyjna węglowa walcowana na gorąco, 0,3% C; 7 – stopy z 0,23% C; 8, 8a – staliwo; 9 – żeliwo szare wyżarzane; 10 – stopy z 1,78% C; 11 – żeliwo szare niewyżarzane [19]

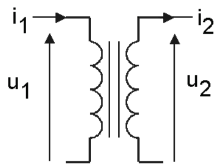


Rys. 2.12. Kształt prądu magnesującego uwzględniający nieliniową zależność pomiędzy natężeniem pola i indukcją magnetyczną ferromagnetycznego rdzenia transformatora

W rzeczywistych ferromagnetykach (rys. 2.11) przenikalność jest silnie zależna od wartości natężenia pola magnetycznego, nie ma więc odcinków prostych na charakterystyce magnesowania, a zależności są na tyle skomplikowane, że dokładniejsza analiza jest możliwa jedynie przy wykorzystaniu drogiego oprogramowania. Kształt prądu wytwarzającego sinusoidalny przebieg strumienia przedstawiono na rysunku 2.12. Wskutek istnienia histerezy magnetycznej i nasycenia w przebiegu prądu występują wszystkie harmoniczne nieparzyste, gdzie największe znaczenie mają 1, 3, 5 i 7. Współczynnik szczytu takiego przebiegu ma wartość różną od tej samej wielkości w przebiegu sinusoidalnym. W efekcie praktycznie wyznaczane są wielkości skuteczne, a w modelu matematycznym (schemacie zastępczym) używa się wielkości sinusoidalnych o identycznej wartości skutecznej. Rezultatem takich rozważań jest ułatwienie analiz matematycznych i konieczność uwzględnienia faktu, że wartości parametrów modelu matematycznego zależą od punktu pracy transformatora.

2.2. Model matematyczny transformatora jednofazowego

Transformator jednofazowy zbudowany jest z rdzenia ferromagnetycznego, na którym nawinięto dwa uzwojenia (rys. 2.13). Jedno nazywane jest uzwojeniem pierwotnym, a drugie wtórnym.



Rys. 2.13. Schemat ideowy transformatora jednofazowego

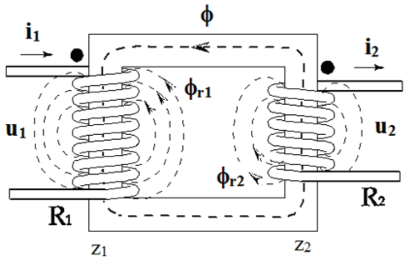
Model matematyczny transformatora opiera się na wykorzystaniu podstawowych praw teorii obwodów. Równanie Kirchhoffa dla strony pierwotnej możemy napisać w postaci (2.14) (2.15).

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \tag{2.14}$$

Jego postać jest wynikiem faktu, że poza spadkiem napięcia na rezystancji uzwojenia pierwotnego w obwodzie występuje napięcie indukowane na skutek zmian strumienia z nim skojarzonego w czasie. Równanie strony wtórnej można zapisać w postaci (2.15):

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} - R_2 i_2 \tag{2.15}$$

Źródłem prądu po stronie wtórnej jest wartość napięcia indukowanego na skutek zmian strumienia skojarzonego z tym uzwojeniem, a wartość napięcia na zaciskach strony wtórnej będzie pomniejszona o spadek napięcia na rezystancji uzwojenia wtórnego. W równaniach tych występują strumienie skojarzone z poszczególnymi uzwojeniami. Istotą opisu jest określenie, jak powiązać powyższe strumienie skojarzone z wartością indukcji wewnątrz rdzenia oraz jak uwzględnić w modelu rzeczywisty rozkład pola magnetycznego wytwarzanego przez prądy płynące przez uzwojenia. W tym celu wykorzystamy uproszczony opis zjawisk występujących w transformatorze, pokazany na rysunku 2.14.



Rys. 2.14. Zjawiska występujące w rzeczywistym transformatorze jednofazowym

Pokazano na nim, że strumień skojarzony z uzwojeniem pierwotnym ma składnik wspólny z uzwojeniem wtórnym. Ten wspólny składnik nazywany jest strumieniem głównym ϕ. Jest to część pola magnetycznego, która obejmuje swoim zasięgiem oba uzwojenia. Poza strumieniem głównym istnieje składnik pola magnetycznego wytwarzany przez prąd płynący w uzwojeniu pierwotnym. Ta część pola magnetycznego, nazywana strumieniem rozproszenia ϕ_{r1}, kojarzy się tylko z uzwojeniem pierwotnym. Oba składniki sumują się, dając całkowity strumień skojarzony z uzwojeniem pierwotnym:

$$\psi_1 = z_1(\phi + \phi_{r1}) \tag{2.16}$$

Podobny efekt występuje w uzwojeniu wtórnym, przy czym z faktu, że źródłem prądu po stronie wtórnej jest napięcie indukowane od części wspólnej pola magnetycznego (od strumienia głównego) wynika, iż strumień rozproszenia odejmuje się od strumienia głównego dając w efekcie wypadkowy strumień skojarzony z uzwojeniem wtórnym:

$$\psi_2 = z_2(\phi - \phi_{r2}) \tag{2.17}$$

W efekcie równania opisujące transformator możemy przekształcić do postaci:

$$u_1 = R_1 i_1 + z_1 \frac{d\phi}{dt} + z_1 \frac{d\phi_{r1}}{dt} \tag{2.18}$$

$$u_2 = z_2 \frac{d\phi}{dt} - z_2 \frac{d\phi_{r2}}{dt} - R_2 i_2 \tag{2.19}$$

Zwróćmy uwagę, że w obu równaniach występuje składnik wynikający tylko ze zmiany strumienia głównego w czasie. Wartość napięcia indukowanego od tego składnika pola magnetycznego występującego w uzwojeniu pierwotnym oznaczmy jako:

$$e_1 = z_1 \frac{d\phi}{dt} \tag{2.20}$$

Po pomnożeniu równania strony wtórnej przez wartość wyznaczoną przez iloraz liczby zwojów strony pierwotnej do liczby zwojów strony wtórnej, nazywaną przekładnią zwojową:

$$k = \frac{z_1}{z_2} \tag{2.21}$$

otrzymamy:

$$u_1 = R_1 i_1 + e_1 + z_1 \frac{d\phi_{r1}}{dt} \tag{2.22}$$

$$u_2 \frac{z_1}{z_2} = z_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\phi}{dt} - z_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\phi_{r2}}{dt} - \frac{z_1}{z_2} R_2 i_2 \tag{2.23}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że strumienie rozproszenia są wytwarzane przez prąd i_1 dla strony pierwotnej oraz prąd i_2 po stronie wtórnej, oraz fakt, że w obu przypadkach te składniki pola magnetycznego zamykają się głównie poza rdzeniem, oba te strumienie skojarzone mogą być opisane (zgodnie z definicją indukcyjności) jako:

$$z_1 \frac{d\phi_{r1}}{dt} = L_{r1} \frac{di_1}{dt} \tag{2.24}$$

$$z_2 \frac{d\phi_{r2}}{dt} = L_{r2} \frac{di_2}{dt} \tag{2.25}$$

Równania transformatora przyjmują postać:

$$u_1 = R_1 i_1 + e_1 + L_{r1} \frac{di_1}{dt} \tag{2.26}$$

$$u_2 \frac{z_1}{z_2} = e_1 - \frac{z_1}{z_2} L_{r2} \frac{di_2}{dt} - \frac{z_1}{z_2} R_2 i_2 \tag{2.27}$$

Równania te opisują transformator w całości. Nie są jednak wygodne do analizy, stąd w praktyce używa się wielkości strony wtórnej, określonych jako wielkości sprowadzone do strony pierwotnej. Na bazie takich przekształceń możliwe będzie odzwierciedlenie równań w postaci schematu zastępczego. Przyjęto oznaczać:

$$u_2^{'} = k u_2 \tag{2.28}$$

Tak oznaczona nowa zmienna nazywana jest napięciem sprowadzonym (do strony pierwotnej). W celu zachowania w schemacie zastępczym stałej mocy:

$$u_2^{'} i_2^{'} = u_2 i_2 = k u_2 \frac{i_2}{k} \tag{2.29}$$

Otrzymamy wartość sprowadzonego do strony pierwotnej prądu strony wtórnej równą:

$$i_2' = \frac{i_2}{k} \tag{2.30}$$

Równanie strony wtórnej „sprowadzone" do liczby zwojów z_1 przyjmuje postać:

$$u_2' = e_1 - kL_{r2}\frac{dki_2'}{dt} - kR_2ki_2' \tag{2.31}$$

Z faktu tego wynika, że wartości sprowadzonych do strony pierwotnej rezystancji oraz indukcyjności rozproszenia strony wtórnej wyliczamy z zależności:

$$R_2' = k^2 R_2 \tag{2.32}$$

$$L_{r2}' = k^2 L_{r2} \tag{2.33}$$

Komplet równań napięciowych przyjmuje postać:

$$u_1 = R_1 i_1 + e_1 + L_{r1}\frac{di_1}{dt} \tag{2.34}$$

$$u_2' = e_1 - L_{r2}'\frac{di_2'}{dt} - R_2' i_2' \tag{2.35}$$

Dokładnej analizy wymaga zależność wartości siły elektromotorycznej (napięcia indukowanego) od strumienia głównego. Z prawa przepływu wiadomo, że pole magnetyczne wytworzone wewnątrz rdzenia (opisane tu jako strumień główny) jest wynikiem prądów przepływających przez oba uzwojenia. Biorąc pod uwagę ten fakt możemy napisać dla krzywej obejmującej swoim zasięgiem oba uzwojenia:

$$\oint \mathbf{Hdl} = z_1 i_1 - z_2 i_2 \tag{2.36}$$

W modelu maszyny możemy wykorzystać ten fakt i nazwać „wirtualny" prąd wytwarzający identyczną wartość pola magnetycznego w rdzeniu jako prąd magnesujący i_μ:

$$z_1 i_\mu = z_1 i_1 - z_2 i_2 \tag{2.37}$$

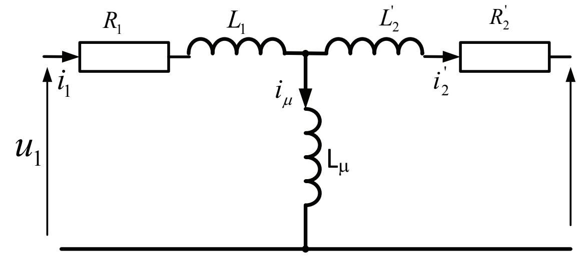
Otrzymamy wówczas:

$$i_\mu = i_1 - \frac{z_2}{z_1} i_2 = i_1 - \frac{i_2}{k} = i_1 - i_2' \tag{2.38}$$

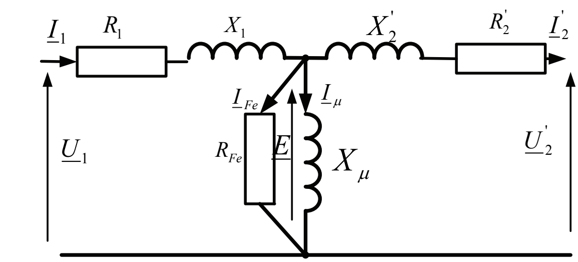
Wartość siły elektromotorycznej wytwarzanej przez ten składnik prądu jest równa e_1 stąd, przy pominięciu nasycenia rdzenia, możemy napisać:

$$e_1 = L_\mu \frac{di_\mu}{dt} \tag{2.39}$$

Tak przekształcone równania są odpowiednikiem schematu zastępczego transformatora pokazanego na rysunku 2.15. Nie są tu uwzględnione wszystkie zjawiska występujące w transformatorze.



Rys. 2.15. Schemat zastępczy transformatora wynikający z równań (2.25), (2.26) i (2.30)



Rys. 2.16. Schemat zastępczy transformatora

Wewnątrz rdzenia ferromagnetycznego występują straty mocy wynikające z istnienia histerezy magnetycznej (straty histerezowe) oraz wynikające z faktu, że w masie rdzenia indukują się napięcia i płyną przez rdzeń prądy, nazywane prądami wirowymi. Jako że za przetwarzanie energii na schematach zastępczych odpowiada rezystancja, w praktycznie stosowanym schemacie zastępczym dla transformatorów energetycznych wprowadza się równolegle do indukcyjności L_μ wartość rezystancji nazywanej rezystancją strat w żelazie R_{Fe}. W przypadku analizy pracy transformatora w stanie ustalonym, przy sinusoidalnie zmiennych w czasie wartościach prądów, napięć i strumieni, zamiast indukcyjności stosowane są odpowiednie wartości reaktancji oraz zespolone wartości prądów i napięć (rys. 2.16).

Przyjmując, że strumień główny zmienia się sinusoidalnie w czasie:

$$\varphi = \Phi \sin \omega t \tag{2.40}$$

Wartość chwilowa siły elektromotorycznej jest równa:

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(z\varphi)}{dt} = z\frac{d\varphi}{dt} \tag{2.41}$$

$$e = z\omega\Phi \cos \omega t \tag{2.42}$$

Jej wartość maksymalna jest równa:

$$E_{\max} = z\omega\Phi = 2\pi f z\Phi \tag{2.43}$$

a wartość skuteczna:

$$E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} z f \Phi = 4,44 z f \Phi \tag{2.44}$$

W przypadku transformatora jednofazowego wartości skuteczne napięć (pierwotnego i wtórnego) indukowanych przez część wspólną strumienia sinusoidalnie zmieniającego się w czasie są równe:

$$E_1 = 4,44 z_1 f \Phi \tag{2.45}$$

$$E_2 = 4,44 z_2 f \Phi \tag{2.46}$$

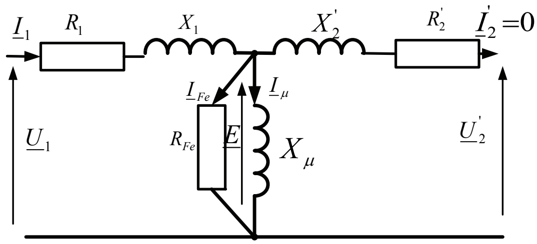
$$E_2^{'} = E_1 = k E_2 = k\, 4,44\, z_2 f \Phi \tag{2.47}$$

2.3. Stan jałowy

W transformatorze pracującym bez obciążenia (stan jałowy) wartość prądu po stronie wtórnej jest równa zeru (rys. 2.17). W takim przypadku przez uzwojenie strony pierwotnej przepływa tylko prąd biegu jałowego, którego składnikami są: prąd magnesujący I_μ oraz składnik prądu związany ze stratami w żelazie I_{Fe}.

Wartość tego prądu zwykle jest mniejsza niż 5% prądu znamionowego:

$$i_o = \frac{I_0}{I_n} 100\% \approx 0,5..5\% \tag{2.48}$$



Rys. 2.17. Stan jałowy transformatora

Spadki napięcia na rezystancji uzwojenia oraz reaktancji rozproszenia mają pomijalnie małe wartości, stąd możemy przyjąć, że w stanie jałowym:

$$\underline{U}_1 \approx \underline{E} \tag{2.49}$$

a schemat zastępczy dla stanu jałowego przyjmuje postać przedstawioną na rysunku 2.18.

Jako że wartość siły elektromotorycznej jest równa:

$$E = 4,44 z f \Phi \approx U \tag{2.50}$$

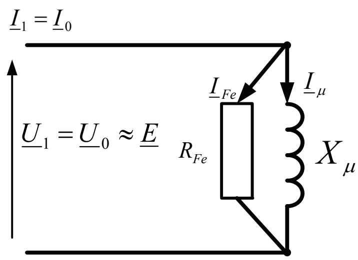
i jest w przybliżeniu równa napięciu zasilającemu, to strumień magnetyczny w rdzeniu możemy oszacować jako:

$$\Phi \approx \frac{U}{4,44zf} \tag{2.51}$$

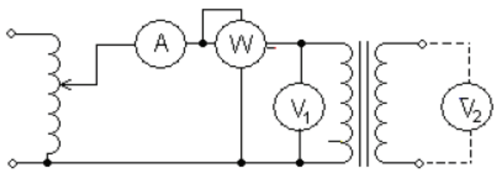
Jeśli przyjmiemy, że napięcie zasilające ma przebieg sinusoidalny w czasie, to rzeczywisty kształt prądu biegu jałowego można uzyskać w sposób zaprezentowany na rysunku 2.12.

W schemacie zastępczym nie uwzględnia się odkształcenia prądu, a wartości parametrów odzwierciedlają jedynie rzeczywiste wartości skuteczne prądów, napięć oraz strat występujących w rzeczywistym transformatorze. Parametry schematu szacuje się zwykle poprzez wykonanie próby biegu jałowego (rys. 2.19), polegającej na pomiarze mocy pobieranej przez transformator oraz wartości skutecznych prądów i napięć dla przypadku zmian napięcia zasilającego od zera do napięcia większego od znamionowego (zwykle do ok. $1{,}3U_n$).

Próba stanu jałowego ma na celu sprawdzenie stanu izolacji transformatora, pomiar rzeczywistej przekładni zwojowej k oraz wyznaczenie parametrów X_μ i R_{Fe}.



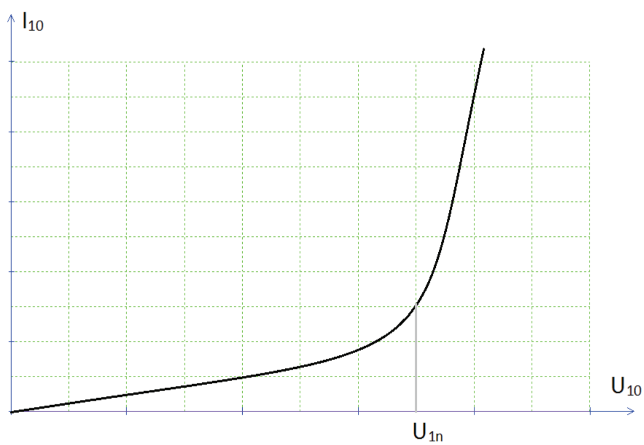
Rys. 2.18. Uproszczony schemat zastępczy transformatora dla stanu jałowego



Rys. 2.19. Układ do pomiaru stanu jałowego transformatora

W tym celu mierzymy napięcia po stronie pierwotnej i wtórnej, a przekładnia zwojowa jest obliczana ze wzoru:

$$k = \frac{U_{10}}{U_{20}} \tag{2.52}$$



Rys. 2.20. Charakterystyka biegu jałowego $I_{10} = f(U_{10})$

Rys. 2.21. Zależność wartości reaktancji X_μ od napięcia zasilającego

Parametry schematu zastępczego możemy wyznaczyć z zależności:

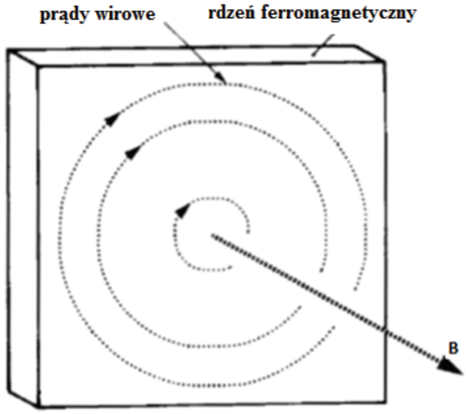
$$R_{Fe} = \frac{P_0}{U_{10}^2} \tag{2.53}$$

$$I_{Fe} = \frac{U_{10}}{R_{Fe}} \tag{2.54}$$

$$I_\mu = \sqrt{I_{10}^2 - I_{Fe}^2} \tag{2.55}$$

$$X_\mu = \frac{U_{10}}{I_\mu} \tag{2.56}$$

Na podstawie pomiarów możemy także narysować kształt charakterystyk biegu jałowego. Zależność prądu biegu jałowego jest nieliniowa i jest wynikiem krzywej magnesowania (rys. 2.20). Dominujące znaczenie (przy napięciu znamionowym) ma tu prąd magnesujący. Skutkiem nasycenia obwodu magnetycznego jest także fakt zależności wartości reaktancji magnesującej X_μ od napięcia zasilającego (rys. 2.21). Podobny kształt ma także zależność współczynnika mocy od napięcia. Wartość rezystancji związanej ze stratami w żelazie jest w przybliżeniu wartością stałą.



Rys. 2.22. Istota powstania prądów wirowych

O stratach w żelazie decydują dwa składniki: straty spowodowane histerezą, których wartość jest proporcjonalna do pola wewnątrz histerezy, oraz straty na prądy wirowe, wynikające z faktu indukowania się wewnątrz rdzenia napięć. Napięcia te powodują przepływ prądu zgodnie z drogą wyznaczoną przez kierunek zmian pola magnetycznego *B* oraz kierunek indukowanych sił elektromotorycznych (rys. 2.22). Istnienie prądów wirowych wymusza konieczność budowy rdzenia z cienkich blach, jednostronnie izolowanych. Straty histerezowe można zmniejszać jedynie poprzez stosowanie różnych domieszek do materiału ferromagnetycznego, uzyskując jak najmniejszą szerokość pętli histerezy.

Straty mocy wywołane histerezą są proporcjonalne do częstotliwości f oraz wartości maksymalnej indukcji B_m wewnątrz rdzenia w potędze zależnej od stanu nasycenia [19]:

$$\Delta P_h = k_h f B_m^x \tag{2.57}$$

Wartość stałej k_h zależy od składu chemicznego materiału ferromagnetycznego oraz jego obróbki termicznej i mechanicznej. Dla blachy anizotropowej (walcowana na zimno):

$$x \approx \begin{cases} 2 \text{ dla } B_m < 1,45 \\ 2,25 \text{ dla } 1,45 < B_m < 1,7 \\ 2,6 \text{ dla } B_m > 1,7 \end{cases} \tag{2.58}$$

Wartość stratności (straty na jednostkę masy lub objętości) zależy od indukcji nasycenia, jak i kierunku magnesowania. Wartość indukcji nasycenia dla blach zimnowalcowanych jest równa około 1,5÷1,8 T, dla blach walcowanych na gorąco 1,4÷1,6 T.

Straty mocy wywołane prądami wirowymi są proporcjonalne do częstotliwości i maksymalnej wartości indukcji w drugiej potędze:

$$\Delta P_w = k_w f^2 B_m^2 \tag{2.59}$$

W praktyce straty wyznacza się na podstawie stratności (straty mocy w jednostce masy), podawanej przy określonej częstotliwości i indukcji [19] (zwykle 50 lub 60 Hz i 1 lub 1,5 T), dla blach walcowanych na zimno $p_{1,0} \cong$ 0,4W/kg, $p_{1,5} \cong$ 0,8÷1,0 W/kg, dla blach gorącowalcowanych $p_{1,0} \cong$ (4) 1,3÷0,8 W/kg. Typowa grubość blach stosowanych na rdzenie transformatorów energetycznych to 0,35÷0,5 mm. W szacunkowych obliczeniach można przyjąć, że przy napięciu znamionowym wartość strat na prądy wirowe jest równa około 25% całkowitych strat w żelazie ($\Delta P_w \cong 0{,}25\mathrm{P_{fe}}$, $\Delta P_h \cong 0{,}75 P_{fe}$). Od wielu lat stosuje się także blachy amorficzne (szybkie studzenie gorącego żelaza). Uzyskuje się tu bardzo małe grubości blach (<0,1 mm) przy indukcji nasycenia około 2,1 T, od razu tworzy się warstwa izolacyjna (w postaci tlenku żelaza). Materiał ten jest droższy od częściej stosowanych blach zimnowalcowanych. Ma znacznie mniejszą stratność, lecz także istotne wady – jest bardzo kruchy i dzięki temu trudny w obróbce (cięcie laserem, konieczność zapewnienia dopasowanej do jego cech technologii budowy transformatorów). Stosowane są także rozwiązania w postaci blach nanokrystalicznych o bardzo małej stratności. Udział strat od prądów wirowych zwykle jest rzędu 40%-50% strat całkowitych w żelazie. Nowe materiały częściej stosuje się w transformatorach pracujących przy większej częstotliwości (energoelektronika, transmisja sygnałów).

O jakości rdzenia transformatora decyduje także tzw. współczynnik wypełnienia rdzenia:

$$k_w = \frac{S_{fe}}{S_{fe} + S_{izol}} \tag{2.60}$$

Wartość tego współczynnika stanowi podstawę do oceny proporcji pomiędzy materiałem czynnym (ferromagnetykiem) a izolacją między blachami. Dla blach walcowanych na gorąco ma on wartość około $k_w = 0{,}9$. Dla blach zimnowalcowanych $k_w = 0{,}98$.

Obliczanie strat mocy w żelazie wykonuje się zwykle na podstawie stratności blach jarzma p_j i kolumn p_k oraz ich mas m_j, m_k:

$$\Delta P_{fe} = k_p (p_k m_k + p_j m_j) \tag{2.61}$$

Występuje tu współczynnik strat dodatkowych w żelazie k_p, którego wartość rzędu 1,2÷1,5 jest zależna od sposobu zaplatania rdzenia oraz dokładności (i technologii) jego obróbki. Składowa czynna prądu jałowego jest równa:

$$I_{fe} = \frac{\Delta P_{fe}}{E} \approx \frac{\Delta P_{fe}}{U} \tag{2.62}$$

Wartość prądu magnesującego jest zwykle obliczana na podstawie prawa przepływu Ampera. Jego wartość maksymalna jest proporcjonalna do sumy spadków napięć magnetycznych na drodze pola magnetycznego wewnątrz rdzenia, z uwzględnieniem wypadkowej szczeliny powietrznej:

$$I_{\mu\max} = \frac{\sum H_x l_x}{z_1} \tag{2.63}$$

Wartość skuteczna prądu magnesującego jest równa:

$$I_{\mu} = \frac{\sum H_x l_x}{z k_s} \tag{2.64}$$

Wartość współczynnika szczytu k_s jest zależna od stanu nasycenia obwodu magnetycznego. Największy wpływ na spadek napięcia magnetycznego ma grubość wypadkowej szczeliny powietrznej δ, stąd istnieje dążność do minimalizacji grubości szczeliny powietrznej transformatora poprzez odpowiednie zaplatanie rdzeni i jarzm transformatora. Pomijając spadek napięcia magnetycznego w rdzeniu, możemy napisać, że:

$$I_{\mu} \approx \frac{H_{\delta}\delta}{z\sigma_s} \tag{2.65}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$H_{\delta} = \frac{B_{\delta}}{\mu_0} = \frac{\Phi}{S\mu_0} \tag{2.66}$$

$$\Phi = \frac{U}{4,44zf} \tag{2.67}$$

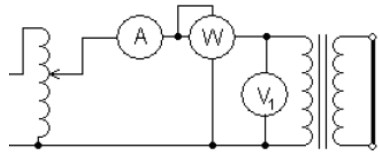
Wartość skuteczna prądu magnesującego oraz prądu biegu jałowego, przy pominięciu spadku napięcia magnetycznego w ferromagnetyku, są równe:

$$I_{\mu} \approx \frac{U\delta}{4,44z^2 k_s f S\mu_0} = c\delta \tag{2.68}$$

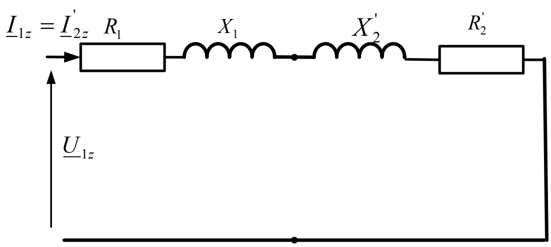
$$I_0 = \sqrt{I_{\mu}^2 + I_{fe}^2} \tag{2.69}$$

2.4. Zwarcie pomiarowe

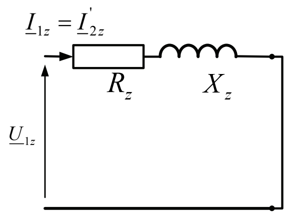
W stanie zwarcia transformatora napięcie na zaciskach strony wtórnej jest równe zeru (rys. 2.23).



Rys. 2.23. Zwarcie pomiarowe transformatora



Rys. 2.24. Schemat zastępczy transformatora w stanie zwarcia



Rys. 2.25. Uproszczony schemat zastępczy transformatora w stanie zwarcia

Transformatory energetyczne budowane są w taki sposób, by spadek napięcia na rezystancjach oraz reaktancjach rozproszenia był jak najmniejszy. Jako że prąd biegu jałowego ma małą wartość (<5% prądu znamionowego), to możemy go w czasie zwarcia transformatora pominąć. W schemacie pozostają szeregowo połączone rezystancje i reaktancje rozproszenia (rys. 2.24). W praktyce nie oblicza się ich odrębne. Wykorzystuje się ich sumy, nazywając je odpowiednio rezystancją i reaktancją zwarcia (rys. 2.25):

$$R_z = R_1 + R'_2 \tag{2.70}$$

$$X_z = X_1 + X'_2 \tag{2.71}$$

Parametry wyznaczone w czasie próby zwarcia ustalonego są wykorzystywane w wielu praktycznych zastosowaniach transformatorów. Próba zwarcia ma na celu wyznaczenie tzw. parametrów zwarciowych (rezystancji i reaktancji zwarcia) oraz jednego z podstawowych parametrów, jakim jest napięcie zwarcia. Napięcie zwarcia definiuje się jako wartość napięcia przyłożonego do zacisków strony pierwotnej, dla której, przy zwartych zaciskach strony wtórnej, przez stronę pierwotną płynie prąd o wartości znamionowej:

$$U_{1z} = \underline{I}_{2n}^{'} \sqrt{R_z^2 + X_z^2} \tag{2.72}$$

W przypadku pominięcia prądu stanu jałowego:

$$\underline{I}_{2n}^{'} = \underline{I}_{1n} \tag{2.73}$$

W danych katalogowych transformatora napięcie zwarcia podawane jest w procentach (lub w wartości względnej) w odniesieniu do napięcia znamionowego:

$$u_{z\%} = \frac{U_{1z}}{U_{1n}} 100\% \approx 5 \div 15\% \tag{2.74}$$

W praktyce używa się także pojęć takich, jak czynne i bierne napięcie zwarcia:

$$U_{Rz} = U_{1z} \cos \varphi_z \tag{2.75}$$

$$U_{Xz} = U_{1z} \sin \varphi_z \tag{2.76}$$

oraz kąt zwarciowy φ_z:

$$tg\varphi_z = \frac{X_z}{R_Z} \tag{2.77}$$

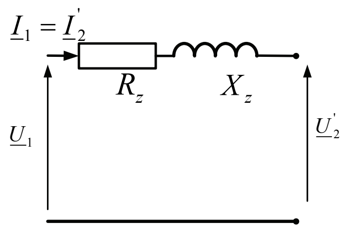
Parametry zwarcia oblicza się na podstawie próby zwarcia ustalonego. Wykonuje się tu pomiary napięcia, prądu oraz mocy pobieranej przez transformator przy zwartych zaciskach strony wtórnej. Wobec faktu, że w schemacie występują składniki o wartości stałej, nie ma konieczności wykonywania wielu pomiarów. Parametry zwarcia można oszacować według zależności [4]:

$$R_z = \frac{P_z}{I_{1z}^2} \tag{2.78}$$

$$Z_z = \frac{U_{1z}}{I_{1z}} \tag{2.79}$$

$$X_z = \sqrt{Z_z^2 - R_z^2} \tag{2.80}$$

Wobec małej wartości prądu magnesującego w stosunku do jego wartości znamionowej często używa się uproszczonego schematu zastępczego także z stanie obciążenia. Uproszczony schemat zastępczy transformatora w czasie normalnej pracy (tzn. pod obciążeniem większym od ok. 25% prądu znamionowego) pokazano na rysunku 2.26.



Rys. 2.26. Uproszczony schemat zastępczy transformatora energetycznego

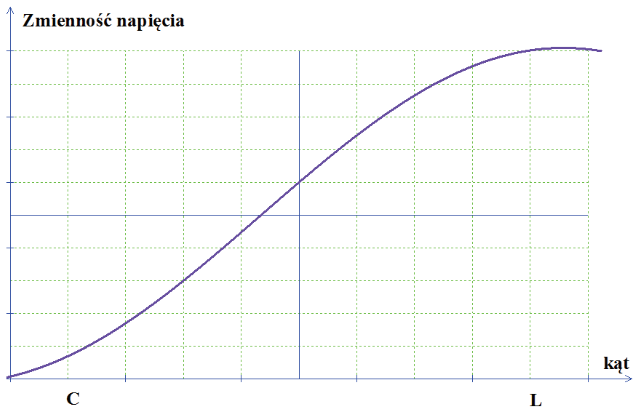
2.5. Zmienność napięcia

W przypadku zmiany obciążenia transformatora napięcie na jego zaciskach zmienia się. Zmiana spowodowana jest pojawieniem się spadków napięć na odpowiednich wartościach rezystancji i reaktancji rozproszenia strony pierwotnej i wtórnej. Używane jest tu pojęcie spadku napięcia.

Spadek napięcia jest to wartość różnicy algebraicznej pomiędzy wartościami skutecznymi napięcia, strony pierwotnej i sprowadzonego do strony pierwotnej napięcia strony wtórnej. Wartość tak zdefiniowanego spadku napięcia jest zależna zarówno od wartości prądu, jak i charakteru obciążenia. Przy pominięciu gałęzi poprzecznej schematu zastępczego, dla danego kąta przesunięcia pomiędzy napięciem a prądem strony wtórnej φ_2, spadek napięcia można oszacować na podstawie parametrów wyznaczonych przy próbie zwarcia:

$$\Delta U = U_1 - U_2' \approx U_{Rz} \cos\varphi_2 + U_{Xz} \sin\varphi_2 \tag{2.81}$$

Najważniejsze znaczenie praktyczne ma odpowiedź na pytanie, jaka jest wartość spadku napięcia, która wystąpi przy różnym charakterze obciążenia i wartości znamionowej prądu. Wartość tak zdefiniowaną nazywamy zmiennością napięcia [9]. Zależność zmienności napięcia od charakteru obciążenia pokazano na rysunku 2.27. Ważnym wnioskiem z takiego kształtu tej zależności jest stwierdzenie, że napięcie po stronie wtórnej transformatora może być mniejsze (przy obciążeniu rezystancyjnym i indukcyjnym), jak i większe (przy pojemnościowym charakterze obciążenia) niż w stanie jałowym.



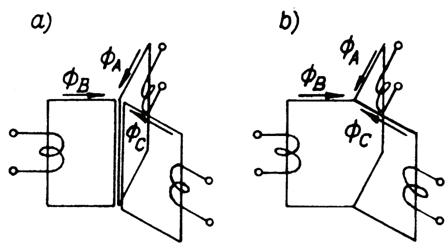
Rys. 2.27. Zależność zmienności napięcia od kąta i charakteru obciążenia (C – pojemnościowe, L – indukcyjne)

Z uwagi na zależność zmienności napięcia od charakteru obciążenia w praktyce pojawia się potrzeba regulacji napięcia po stronie wtórnej. Najczęściej zmienia się je poprzez wykorzystanie odczepów [9], zmieniając w ten sposób przekładnię transformatora w stanie beznapięciowym w zakresie do ±5% poprzez stosowanie odpowiednich przełączników zaczepów. Dla dużych transformatorów (blokowych i sieciowych) używa się także regulacji pod obciążeniem (w zakresie do ±20%).

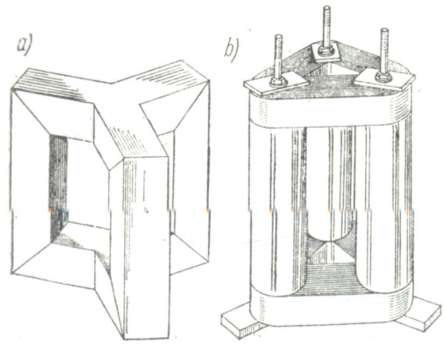
2.6. Transformatory trójfazowe

2.6.1. Konstrukcja i sposoby połączeń

Do transformacji energii elektrycznej w układach trójfazowych można wykorzystać trzy jednostki jednofazowe (rys. 2.28).

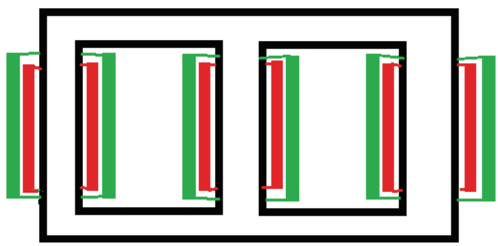


Rys. 2.28. Idea budowy transformatora trójfazowego symetrycznego [9]

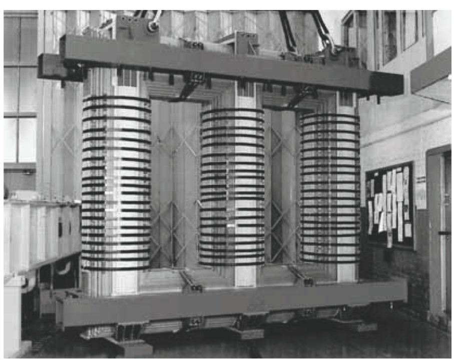


Rys. 2.29. Rdzeń trójfazowy symetryczny [9]

Rozwiązanie takie jest jednak nieekonomiczne. Na rysunku 2.28 pokazano, jakie są wady użycia trzech jednostek jednofazowych. Jeśli ustawimy trzy jednostki jednofazowe tak jak na rysunku 2.28a, to widzimy, że w trzech stykających się kolumnach występuje pole magnetyczne przesunięte w dziedzinie czasu o kąt 120°. Suma tych trzech pól magnetycznych jest równa zeru, zatem możemy te kolumny usunąć bez zmiany działania tych trzech samodzielnych jednostek (rys. 2.28b). Pierwsze transformatory miały podobną konstrukcję (rys. 2.29) [9].



Rys. 2.30. Konstrukcja typowego transformatora 3-kolumnowego



Rys. 2.31. Praktyczny rdzeń transformatora trójfazowego

Współczesne transformatory energetyczne budowane są w sposób podobny do jednofazowych rdzeni płaszczowych, różnica polega na tym, że każda z kolumn ma identyczny przekrój i wysokość. Na trzech kolumnach nawija się co najmniej po dwa uzwojenia, jedno pierwotne, a drugie wtórne (rys. 2.30). Przykładową konstrukcję pokazano także na zdjęciu na rysunku 2.31.

Tak zbudowany rdzeń nie jest symetryczny. Pole magnetyczne w każdej kolumnie wytwarzane jest poprzez wymuszenie sinusoidalnym napięciem zasilającym i w stanie jałowym, przy założeniu symetrii napięć zasilających, możemy napisać, że w każdej kolumnie wartość maksymalna strumienia jest równa:

$$\phi = \frac{U_1}{4{,}44 f z} \tag{2.82}$$

Strumienie mają przebieg sinusoidalny w czasie z przesunięciem w dziedzinie czasu o kąt 120°. Suma trzech wartości strumieni w czasie jest zatem równa zeru. Przy założeniu, że każda kolumna ma taką samą wartość powierzchni przekroju *S*, maksymalna wartość indukcji *B* w rdzeniu będzie identyczna w każdej kolumnie:

$$B = \frac{\phi}{S} \tag{2.83}$$

Wartość natężenia pola ma w każdej kolumnie wartość równą:

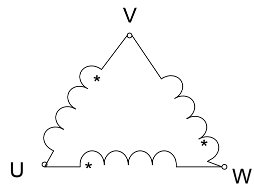
$$H = \frac{B}{\mu} \tag{2.84}$$

Jako że trzy strumienie zerują się na obrzeżach środkowej kolumny, z prawa przepływu wynika, że w dwóch skrajnych kolumnach drogi pola magnetycznego są sobie równe (L_1=L_3), a w kolumnie środkowej jest ona wyraźnie mniejsza (L_2), stąd wartości maksymalne prądów magnesujących (fazowych) dla uzwojeń nawiniętych w kolumnach skrajnych są większe:

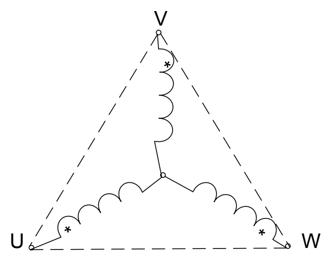
$$I_{\max 1} = I_{\max 3} = \frac{HL_1}{z} = \frac{HL_3}{z} > I_{\max 1} = \frac{HL_2}{z} \tag{2.85}$$

Jako że wartości prądów magnesujących są znacznie mniejsze od wartości znamionowych, to fakt ich niesymetrii nie ma praktycznego znaczenia. W transformatorze obciążonym prąd biegu jałowego można praktycznie pominąć. Analiza transformatora trójfazowego, przy symetrycznym zasilaniu i obciążeniu, polega na wykorzystaniu schematu zastępczego identycznego jak w transformatorze jednofazowym. W przypadku symetrii zasilania i obciążenia w każdej fazie będzie występował prąd o identycznej wartości skutecznej. Przebiegi czasowe napięć oraz strumieni w każdej kolumnie są symetryczne i przesunięte względem siebie o kąt

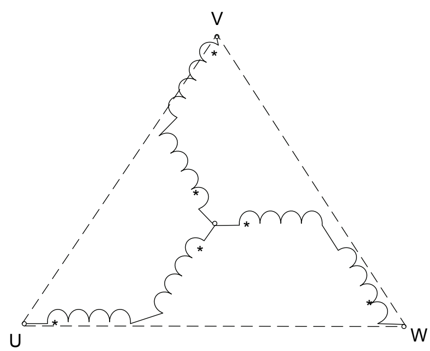
120°. Analizę pracy takiego transformatora można sprowadzić do jednej fazy i wykorzystać rozwiązania podane dla transformatora jednofazowego. Należy przy tym pamiętać, że parametry znamionowe podawane są jako napięcie międzyprzewodowe oraz prądy przewodowe, a w schemacie zastępczym używamy tylko wielkości fazowych. Efektem jest zatem konieczność uwzględnienia w analizie transformatorów trójfazowych sposobu skojarzenia uzwojeń strony pierwotnej i wtórnej.



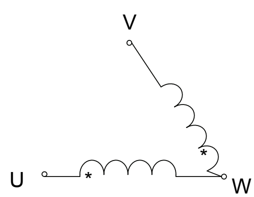
Rys. 2.32. Połączenie uzwojeń transformatora w trójkąt (*D*)



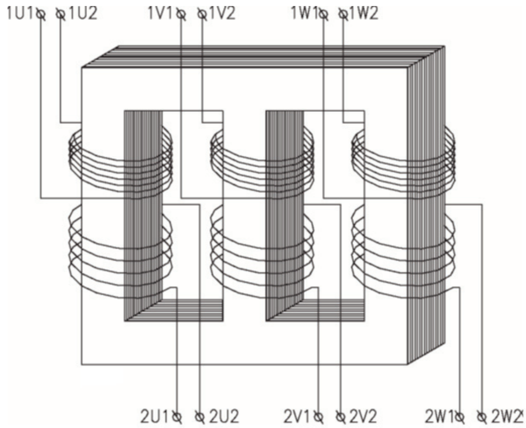
Rys. 2.33. Połączenie uzwojeń transformatora w gwiazdę (*Y*)



Rys. 2.34. Połączenie uzwojeń transformatora w zygzak (*Z*)



Rys. 2.35. Połączenie uzwojeń transformatora w tzw. otwarty trójkąt (*V*)



Rys. 2.36. Schemat i oznaczenia uzwojeń w transformatorze trójfazowym [6]

Uzwojenia strony pierwotnej i wtórnej mogą być łączone w trójkąt (rys. 2.32), w gwiazdę (rys. 2.33), zygzak (rys. 2.34) lub tzw. otwarty trójkąt (rys. 2.35). Sposób połączeń uzwojeń oznaczany jest jako tzw. grupa połączeń transformatora trójfazowego. Producent transformatorów energetycznych zwykle nie podaje oznaczeń w odniesieniu to strony pierwotnej i wtórnej. Przyjęto oznaczać wielkości znamionowe jako odniesione do tzw. strony górnej i dolnej. Strona górna dotyczy uzwojeń o wyższej wartości napięcia znamionowego, stąd grupa połączeń składa się z dużych i małych liter oznaczających sposób skojarzenia strony górnej i dolnej. Ważnym parametrem jest także cyfrowe oznaczenie tzw. przesunięcia godzinowego. Przesunięcie godzinowe jest kątem przesunięcia fazowego pomiędzy wektorem napięcia międzyfazowego strony górnej i dolnej, liczonej od strony górnej w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, do wektora odpowiadającego takim samym oznaczeniom końcówek wektora strony dolnej.

We wszystkich grupach połączeń mogą wystąpić przesunięcia godzinowe będące wielokrotnością 30°, stąd oznaczenie grup połączeń informuje nas o sposobie połączenia uzwojeń po stronie górnej, dolnej oraz o przesunięciu godzinowym podanej w jednostkach będących liczbą całkowitą podaną jako krotność 30°. Na przykład grupa *Dy*5 informuje, że strona górnego napięcia połączona jest w trójkąt, dolnego w gwiazdę o przesunięciu godzinowym równym 5x30°=150°.

Przyjęto stosować litery *D*, *Y* dla połączeń strony górnej (trójkąt, gwiazda) oraz dla strony dolnej odpowiednio *d*, *y*, *z*. Poza literami wskazującymi połączenie uzwojeń ważnym składnikiem jest także informacja o tym, czy na tabliczkę zaciskową wyprowadzony jest przewód neutralny (*N* lub *n*). W przypadku zygzaka nie trzeba wpisywać tej informacji, gdyż zygzaka używa się tylko z wyprowadzonym punktem zerowym (neutralnym). Wartość możliwych przesunięć godzinowych jest zależna od sposobu połączeń transformatorów:

Yy, *Dd* – 0, 2, 4, 6, 8, 10
Yd, *Yz* – 1, 3, 5, 7, 9, 11
Dz – 0, 2, 4, 6, 8, 10

W praktyce energetycznej buduje się transformatory o przesunięciach godzinowych zalecanych przez Polskie Normy, są to wartości 0, 5, 6 i 11.

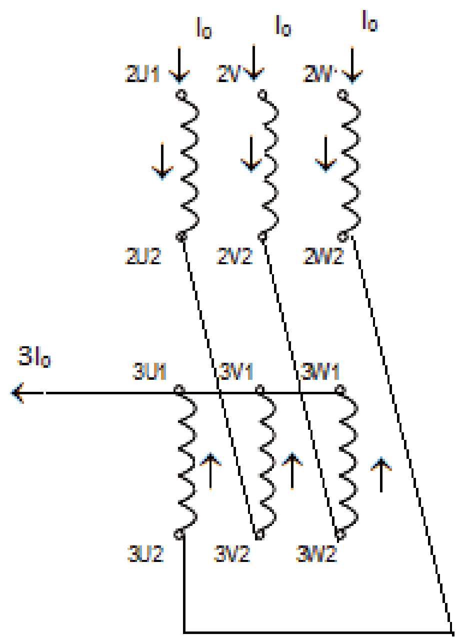
Skąd bierze się potrzeba stosowania różnych grup połączeń transformatorów trójfazowych? Związane to jest z odpowiedzią na pytania:

a) jakie są skutki wytworzenia pola magnetycznego w transformatorach trójkolumnowych w zależności od sposobu połączeń strony pierwotnej (zasilanej)?

b) jakie są skutki pracy transformatorów energetycznych przy niesymetrycznym obciążeniu?

W pierwszym przypadku odpowiedzi należy szukać w analizie magnesowania rdzenia ferromagnetycznego. W przypadku wymuszenia sinusoidalnego przebiegu wartości strumienia magnetycznego w każdej fazie prąd magnesujący zawierać musi wszystkie nieparzyste harmoniczne. Największe znaczenie mają harmoniczne niskich rzędów, tzn. 1, 3, 5, 7… Ich amplitudy maleją wraz z ich rzędem, stąd największe znaczenia (poza pierwszą harmoniczną) ma harmoniczna trzecia. Proszę zwrócić uwagę na fakt, że w układzie trójfazowym symetrycznym 3-harmoniczna w przebiegu prądu ma przebieg identyczny w każdej fazie. W takim przypadku połączenie w trójkąt zapewnia możliwość przepływu prądu 3-harmonicznej. Prąd ten zamyka się wewnątrz trójkąta. W przypadku połączenia w gwiazdę bez przewodu zerowego składnik ten nie występuje. Jeśli nie ma składnika 3-harmonicznej w prądzie magnesującym, składnik ten pojawić się musi w przebiegu strumienia magnetycznego. Problem jest istotny przede wszystkim w transformatorach o dużej mocy. Składnik 3-harmonicznej w przebiegu strumieni skojarzonych z uzwojeniami w trzech fazach sumuje się i pole magnetyczne z nim związane zamyka się poza rdzeniem ferromagnetycznym. Stanowi on jeden ze składników tzw. składowej zerowej strumienia magnetycznego. W przypadku połączenia po stronie pierwotnej w gwiazdę bez przewodu zerowego, a w trójkąt po stronie wtórnej występuje 3-harmoniczna w polu magnetycznym wytworzonym przez prądy uzwojenia pierwotnego. W trójkącie po stronie wtórnej pola indukują się napięcia 3-harmonicznej wewnątrz trójkąta. Napięcia te powodują przepływ prądu, który będzie przeciwdziałał wymuszeniu i zmniejszał (działanie „tłumiące”) wartość tego niepożądanego składnika pola. Zatem od strony magnesowania najlepiej jest stosować grupy, które mają połączenie w trójkąt po jednej ze stron. W przypadku konieczności stosowania obu uzwojeń połączonych w gwiazdę często stosuje się dodatkowe uzwojenie połączone w trójkąt, przy czym nie wyprowadza się zacisków tego uzwojenia na zaciski transformatora.

Istotny problem dotyczy skutków niesymetrii obciążenia transformatora trójfazowego, szczególnie w przypadku, gdy dopuszczamy pracę transformatora obciążonego po stronie wtórnej prądem jednakofazowym w każdej fazie (tzw. składowa zerowa prądu obciążenia). Rozważmy przypadek połączenia strony wtórnej w gwiazdę z przewodem zerowym (np. grupę *Yyn*). Jeśli przez przewód neutralny płynie prąd, to w każdej fazie pojawi się prąd składowej zerowej, który będzie, zgodnie z prawem przepływu Ampera, wytwarzał pole magnetyczne (składową zerową strumienia skojarzonego z każdym z uzwojeń fazowych). Ten składnik pola zamyka się na zewnątrz transformatora. W otoczeniu transformatora pojawi się zatem pole magnetyczne o wartości zależnej od wartości prądu składowej zerowej. Transformator budujemy w taki sposób, aby jego oddziaływanie na otoczenie było jak najmniejsze. Istnienie składnika składowej zerowej strumienia może powodować silne zakłócenia elektromagnetyczne w otoczeniu transformatora oraz często zwiększenie napięć po stronie wtórnej w fazach z mniejszą wartością prądu (mniej obciążonych). Napięcie to może mieć wówczas wartość większą niż dopuszczalna przez normy. Jeśli chcemy dopuścić pracę transformatora z możliwym obciążeniem składową zerową prądu, musimy dokonać zmian w połączeniu uzwojeń transformatora. Wykorzystujemy tu wcześniej opisany sposób połączenia transformatora w zygzak.



Rys. 2.37. Idea eliminacji składowej zerowej strumienia magnetycznego przy obciążeniu transformatora składową zerową prądu

Zygzak powstaje poprzez rozdzielenie uzwojeń strony wtórnej transformatora na dwa identyczne składniki (rys. 2.37). Zgodnie z prawem przepływu prąd składowej zerowej wymusza powstanie siły magnetomotorycznej (*smm)* w jednym kierunku w górnym składniku połączeń, pokazanym na rysunku 2.37, oraz w kierunku przeciwnym w składniku dolnym. Pole magnetyczne powstaje na skutek sumy sił magnetomotorycznych obu składników. W przypadku, gdy każda z powyższych części ma identyczną liczbę zwojów, wypadkowa wartość *smm* składowej zerowej jest równa zeru. Uzyskujemy dzięki temu efekt eliminacji składowej zerowej strumienia magnetycznego przy umożliwieniu przepływu prądu składowej zerowej. Efekt ten uzyskany jest tu, przy zachowaniu takich samych napięć międzyfazowych, kosztem zwiększenia fizycznej liczby zwojów po stronie wtórnej.

Jeśli przyjmiemy, że wartość skuteczna napięcia indukowanego od strumienia głównego jest równa U w każdej z części zygzaka, to napięcie fazowe, będące sumą fragmentów zygzaka z obu kolumn, gdzie strumień jest przesunięty o 120°, będzie równe:

$$U_{fz} = \sqrt{3}U \tag{2.86}$$

Napięcie międzyfazowe jest równe:

$$U_{pz} = \sqrt{3}\sqrt{3}U = 3U \tag{2.87}$$

Połączenie w gwiazdę tych samych uzwojeń spowoduje, że napięcie fazowe będzie wynosiło:

$$U_{fy} = 2U \tag{2.88}$$

zaś wartość napięcia międzyfazowego:

$$U_{py} = 2\sqrt{3}U \tag{2.89}$$

Stąd przy identycznej liczbie zwojów przełączenie układu z gwiazdy w zygzak powoduje zmniejszenie napięć po stronie wtórnej w proporcji:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}865 \tag{2.90}$$

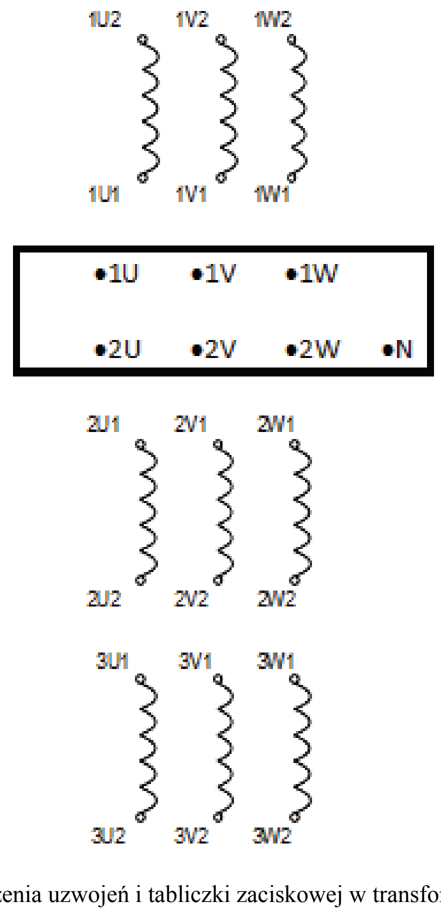
W celu utrzymania takiej samej wartości napięć należy zwiększyć całkowitą liczbę zwojów po stronie wtórnej o około 15%.

W katalogach transformatorów trójfazowych nie ma zwykle informacji o przekładni zwojowej. Podawane są wartości znamionowe napięć strony górnej i dolnej oraz oznaczenie grupy połączeń. Analiza pracy transformatora, oparta na wykorzystaniu jego schematu zastępczego, wymaga wiedzy o sposobie przeliczania wielkości ze strony wtórnej na pierwotną. Wielkość ta może być wyznaczana jako skutek indukowania się napięć fazowych po obu stronach transformatora i w praktyce przeliczana jako proporcje odpowiednich napięć fazowych strony górne i dolnej:

$$k = \frac{U_{fG}}{U_{fd}} \tag{2.91}$$

Definiowana jest także wartość tzw. przekładni napięciowej jako proporcje napięć międzyfazowych strony górnej i dolnej:

$$k_u = \frac{U_G}{U_d} \tag{2.92}$$



Rys. 2.38. Schemat umieszczenia uzwojeń i tabliczki zaciskowej w transformatorze trójfazowym

Z faktu tego wynika prosty sposób wyznaczania przekładni transformatora k na podstawie znajomości przekładni napięciowej. Na przykład dla połączeń Dy możemy napisać:

$$k_u = \frac{U_D}{U_y} = \frac{U_{fD}}{\sqrt{3}U_{fy}} = \frac{k}{\sqrt{3}} \tag{2.93}$$

a dla grupy Yz:

$$k_u = \frac{U_Y}{U_z} = \frac{\sqrt{3}U_{fY}}{\sqrt{3}U_{fz}} = k \tag{2.94}$$

Sposób połączenia transformatora trójfazowego dla zadanej grupy połączeń możemy uzyskać według następującego algorytmu:

I. Rysujemy fizyczne rozmieszczenie uzwojeń wraz z oznaczeniami końcówek (np. według schematu na rys. 2.38).

II. Łączymy uzwojenie strony górnej.

III. Rysujemy trójkąt napięć międzyfazowych strony górnej (pamiętając o kolejności oznaczeń UVW, zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara) wraz z zaznaczeniem połączeń na tabliczce zaciskowej zgodnie z przyjętym połączeniem w pkt II.

IV. Rysujemy położenie wektorów napięć fazowych wewnątrz trójkąta napięć międzyfazowych.

V. Wyznaczamy kąt przesunięcia godzinowego i rysujemy trójkąt napięć strony dolnej, obrócony o kąt równy przesunięciu godzinowemu.

VI. Biorąc pod uwagę fakt, że napięcia fazowe indukowane po stronie górnej i dolnej na tych samych kolumnach są ze sobą w fazie, na boki (w trójkącie) lub do wewnątrz trójkąta strony dolnej (w gwieździe lub zygzaku) przesuwamy równolegle wektory odpowiednich napięć fazowych.

VII. Łączymy uzwojenie strony dolnej, zgodnie z oznaczeniami uzyskanymi z pkt 6 .

Analizę pracy transformatorów trójfazowych, łącznie z obliczaniem wartości parametrów schematu zastępczego na podstawie wiedzy o wartości mocy znamionowej, mocy strat w żelazie i w uzwojeniach, wartości prądu biegu jałowego oraz napięcia zwarcia możemy wykonać według następującego algorytmu:

I. Z wielkości znamionowych (międzyfazowych), w zależności od grupy połączeń, wszystkie wielkości przeliczamy do wielkości fazowych.

II. Wykorzystujemy przeliczone wielkości do szacowania parametrów schematu zastępczego oraz do wyznaczenia „efektywnej” przekładni zwojowej.

III. Wykonujemy analizę obwodu według schematu zastępczego dla transformatora jednofazowego.

IV. Wyniki analiz przeliczamy na wielkości międzyfazowe dla danej grupy połączeń.

2.6.2. Praca równoległa transformatorów

W energetyce często używa się rozwiązań polegających na wykorzystaniu kilku transformatorów energetycznych pracujących równolegle. Wiąże się z tym kilka ważnych warunków zapewniających poprawną pracę [9]:

1) Przy nieobciążonej stronie wtórnej, w uzwojeniach transformatorów nie płyną żadne prądy poza prądami jałowymi.

2) Ze wzrostem prądu obciążenia transformatory obciążają się równomiernie i osiągają swe prądy znamionowe jednocześnie.

3) Prądy transformatorów są ze sobą w fazie (prąd obciążenia jest równy sumie algebraicznej prądów transformatorów).

Warunek 1 jest spełniony, gdy przekładnie transformatorów są sobie równe oraz gdy przesunięcia godzinowe są identyczne, co jest równoważne z warunkiem, żeby wartości chwilowe odpowiednich napięć były w każdej chwili sobie równe. Nierówność przekładni pociąga za sobą istnienie prądów wyrównawczych, ograniczonych tylko impedancją transformatorów. Dopuszcza się odchyłkę przekładni, z tym że nie może być ona większa niż 0,5%.

Warunek 2 będzie spełniony, gdy wartości względne prądów względem ich prądów znamionowych są sobie równe:

$$\frac{I^{(1)}}{I_n^{(1)}} = \frac{I^{(2)}}{I_n^{(2)}} = \frac{I^{(3)}}{I_n^{(3)}} = \dots \tag{2.95}$$

Dla uproszczonego schematu zastępczego warunek ten będzie równoważny:

$$\underline{I}^{(1)}\underline{Z}_z^{(1)} = \underline{I}^{(2)}\underline{Z}_z^{(2)} = \underline{I}^{(2)}\underline{Z}_z^{(2)} = \dots \tag{2.96}$$

Biorąc pod uwagę, że napięcie zwarcia jest równe:

$$u_{z\%}^{(i)} = \frac{I_n^{(i)}Z_z^{(i)}}{U_n} \tag{2.97}$$

otrzymamy dla wartości bezwzględnych:

$$\frac{I^{(1)}}{I_n^{(1)}}u_z^{(1)} = \frac{I^{(2)}}{I_n^{(2)}}u_z^{(2)} = \frac{I^{(3)}}{I_n^{(3)}}u_z^{(3)} = \dots \tag{2.98}$$

Warunek 2 będzie zatem spełniony, gdy napięcia zwarcia transformatorów przeznaczonych do pracy równoległej będą jednakowe. Przepisy polskie dopuszczają odchyłkę ±10% napięcia zwarcia. Warunek 3 będzie spełniony, gdy pokrywają się trójkąty zwarcia poszczególnych transformatorów, w praktyce spełnione jedynie dla nieznacznych różnic mocy znamionowych transformatorów, więc stosunek mocy znamionowych nie może przekraczać proporcji 1:3.

2.6.3. Niesymetria obciążenia

W praktyce dążymy do symetrycznej pracy w układach trójfazowych. Niestety, symetryczne obciążenie transformatorów nie zawsze jest możliwe do uzyskania, stąd ważna jest umiejętność analizy ich pracy przy niesymetrycznym obciążeniu. Od wielu lat do analizy pracy w stanach ustalonych używana jest metoda składowych symetrycznych. Istota tej metody polega na tym, że każdy trójfazowy układ liniowy napięć, prądów czy strumieni skojarzonych można matematycznie przekształcić do trzech składników symetrycznych, nazywanych składową zgodną, przeciwną i zerową. Składowa zgodna wektorów jest składnikiem, w którym wielkości w fazach *UVW* są przesunięte względem siebie o kąt 120° w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Dla składowej przeciwnej wielkości w poszczególnych fazach są przesunięte także o kąt 120°, lecz w kierunku przeciwnym. Składowa zerowa to składnik, którego wartość, kierunek i zwrot są w każdej fazie identyczne. Matematycznie można dokonać przeliczenia wielkości zespolonych w układzie trójfazowym (np. prądów $\underline{I}_U$, $\underline{I}_V$, $\underline{I}_W$) na poszczególne składowe symetryczne (zgodną $\underline{I}_1$, przeciwną $\underline{I}_2$ i zerową $\underline{I}_0$) według zależności:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_U \\ \underline{I}_V \\ \underline{I}_W \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

Po analizie obwodu niezależnie dla każdej ze składowych możemy przeliczyć wielkości na ich rzeczywiste wartości w każdej z faz:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_U \\ \underline{I}_V \\ \underline{I}_W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

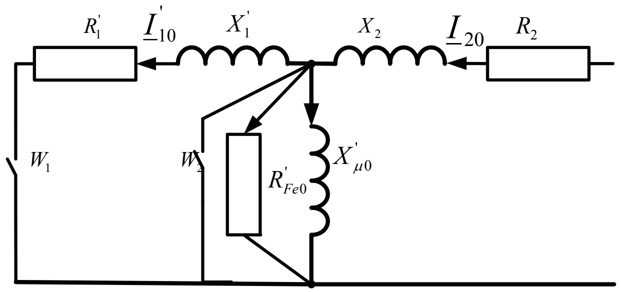
gdzie:

$$a = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2.101}$$

$$a^2 = e^{j4\pi/3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{2.102}$$

$$a + a^2 = -1 \tag{2.103}$$

$$1 + a + a^2 = 0 \tag{2.104}$$



Rys. 2.39. Schemat zastępczy transformatora dla składowej zerowej

Dla składowej zgodnej i przeciwnej schemat zastępczy transformatora jest identyczny jak dla transformatora jednofazowego. Wyróżnić należy schemat zastępczy dla składowej zerowej. Jego postać oraz wartość jego parametrów zależy od grupy połączeń transformatora. Składowa zerowa może płynąć jedynie wówczas, gdy w układzie połączeń wyprowadzono przewód zerowy. Składowa zerowa może także pojawić się wewnątrz trójkąta i występuje tam tylko w prądach fazowych (zamyka się wewnątrz trójkąta).

Schemat zastępczy dla składowej zerowej pokazano na rysunku 2.39 [9]. Wartości parametrów zostały sprowadzone tu do strony wtórnej. Rezystancje uzwojeń oraz reaktancje rozproszenia są tu identyczne jak dla składowej zgodnej i przeciwnej. Stan łączników W_1 i W_2 zależy od grupy połączeń. Łącznik W_1 jest włączony w przypadku, gdy po stronie pierwotnej uzwojenia są połączone w trójkąt. Łącznik W_2 jest włączony dla zygzaka po stronie wtórnej (brak strumienia składowej zerowej). Wartość rezystancji związanej ze stratami w żelazie jest związana z faktem, że przy istnieniu strumienia składowej zerowej pole magnetyczne obejmuje swoim zasięgiem między innymi kadź transformatora, w której występują duże straty (lity materiał). Istotnym czynnikiem, który może spowodować problemy w praktyce, jest możliwość wzrostu napięcia po stronie wtórnej w fazach mniej obciążonych, stąd przy niesymetrii obciążenia najlepszym rozwiązaniem jest dążność do minimalizacji impedancji dla składowej zerowej prądu. Najmniejsza wartość tej impedancji występuje przy połączeniu uzwojenia w zygzak.

W układach połączeń z wyprowadzonym punktem neutralnym (zerowym) po stronie wtórnej (*Yyn*, *Yz*) prądy składowej zerowej płyną jedynie po stronie wtórnej, przy czym wytwarzają one strumień składowej zerowej (tylko przy połączeniu w gwiazdę), który zamyka się w transformatorach 3-kolumnowych przez powietrze (oraz kadź i elementy konstrukcyjne, zwiększając straty transformatora), natomiast w transformatorach 5-kolumnowych przez kolumny skrajne. Dla układów połączonych po stronie pierwotnej w trójkąt (*Dyn*) strumień składowej zerowej wytwarza w trójkącie napięcia, które powodują przepływ prądu wewnątrz trójkąta, tłumiąc w ten sposób strumień tej składowej. Daje to możliwość pracy takiego układu przy niewielkich obciążeniach niesymetrycznych. W dużych transformatorach o grupie *Yyn* – dodatkowo nawija się uzwojenie połączone w trójkąt bez wyprowadzania jego końcówek na zewnątrz jedynie po to, by wytłumić składową zerową strumienia magnetycznego. W połączeniach strony wtórnej w zygzak strumienie składowej zerowej znoszą się, co umożliwia pracę w pełnym zakresie niesymetrycznego obciążenia.

Jako przykład analizy obciążenia niesymetrycznego rozważmy stan obciążenia jednofazowego w układzie *Yyn.* Pomińmy w schemacie zastępczym prąd stanu jałowego. Prąd po stronie wtórnej występuje tylko w fazie U, więc $I_U = I$, $I_V = I_W = 0$.

Składowe symetryczne prądów po stronie wtórnej dla tego przypadku są równe:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_{w1} \\ \underline{I}_{w2} \\ \underline{I}_{w0} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.105}$$

Składowa zgodna, przeciwna i zerowa są sobie równe:

$$\underline{I}_{w1} = \underline{I}_{w2} = \underline{I}_{w0} = \frac{1}{3}\underline{I} \tag{2.106}$$

Odpowiednie wartości składowych po stronie pierwotnej są równe:

$$\underline{I}_{p1} = \frac{\underline{I}_{w1}}{k} = \frac{\underline{I}}{3k} \tag{2.107}$$

$$\underline{I}_{p2} = \frac{\underline{I}_{w2}}{k} = \frac{\underline{I}}{3k} \tag{2.108}$$

Prąd składowej zerowej po stronie pierwotnej nie płynie (brak przewodu neutralnego):

$$\underline{I}_p^{(0)} = 0 \tag{2.109}$$

Odpowiednie prądy fazowe po stronie pierwotnej są równe:

$$\underline{I}_{pU} = \underline{I}_{p0} + \underline{I}_{p1} + \underline{I}_{p2} = \frac{\underline{I}}{3k} + \frac{\underline{I}}{3k} = \frac{2}{3}\frac{1}{\vartheta}\underline{I} \tag{2.110}$$

$$\underline{I}_{pV} = \underline{I}_{p0} + a^2\underline{I}_{p1} + a\underline{I}_{p2} = \frac{\underline{I}}{3k}(a^2 + a) = -\frac{\underline{I}}{3k} \tag{2.111}$$

$$\underline{I}_{pW} = \underline{I}_{p0} + a\underline{I}_{p1} + a^2\underline{I}_{p2} = \frac{\underline{I}}{3k}(a^2 + a) = -\frac{\underline{I}}{3k} \tag{2.112}$$

2.7. Straty i sprawność

W energetyce istotne znaczenie ma parametr związany z oceną jakości urządzeń elektrycznych. Jest to sprawność definiowana jako iloraz wartości mocy czynnej oddawanej przez transformator do mocy pobranej:

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + \Delta P_j + \Delta P_{\text{obc}}} \tag{2.113}$$

Moc P_2 po stronie wtórnej jest równa:

$$P_2 = 3U_2 I_2 \cos\varphi_2 \tag{2.114}$$

Starty jałowe ΔP_j są to głównie straty w żelazie, natomiast straty obciążeniowe ΔP_{obc} to straty mocy na rezystancji zwarcia:

$$\Delta P_{\text{obc}} = 3I_1^2 R_z = 3I_2^2 \frac{1}{\vartheta^2} R_z \tag{2.115}$$

$$\eta = \frac{3U_2 I_2 \cos\varphi_2}{3U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \Delta P_j + 3I_2^2 \frac{1}{\vartheta^2} R_z} \tag{2.116}$$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{\Delta P_j}{mU_2 I_2 \cos\varphi_2} + \frac{I_2}{U_2 \cos\varphi_2} \frac{1}{\vartheta^2} R_z} \tag{2.117}$$

Przy danej wartości prądu obciążenia I_2 sprawność maleje wraz ze zmniejszaniem się współczynnika mocy strony wtórnej. Przy stałym współczynniku mocy sprawność zależy jedynie od I_2. Wartość maksymalna występuje wówczas, gdy:

$$\frac{d\eta}{dI_2} = 0 \tag{2.118}$$

$$\frac{d}{dI_2}\left(1 + \frac{\Delta P_j}{3U_2 I_2 \cos\varphi_2} + \frac{I_2}{U_2 \cos\varphi_2} \frac{1}{\vartheta^2} R_z\right) = 0 \tag{2.119}$$

$$-\frac{\Delta P_j}{3U_2 I_2^2 \cos\varphi_2} + \frac{1}{U_2 \cos\varphi_2} \frac{1}{\vartheta^2} R_z = 0 \tag{2.120}$$

czyli w sytuacji, gdy straty obciążeniowe są równe stratom jałowym

$$\Delta P_j = \Delta P_{\text{obc}} \tag{2.121}$$

W praktyce sprawność definiowana przez moce nie jest najlepszym wskaźnikiem efektywności przetwarzania energii. Znacznie lepszym wskaźnikiem jest tzw. sprawność energetyczna, definiowana jako iloraz odpowiednich energii przetwarzanych w dłuższym okresie czasu (doba, tydzień, miesiąc itd.):

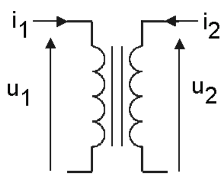
$$\eta_e = \frac{\sum_1^k t_i P_{2i}}{\sum_1^k t_i P_{2i} + \Delta P_j \sum_1^k t_i + \sum_1^k t_i \Delta P_{(\mathrm{obc})i}} \tag{2.122}$$

2.8. Wybrane stany nieustalone

Analizę pracy transformatora w stanach przejściowych można przeprowadzić w oparciu o równania dynamiki. Oznaczmy kierunki prądów i napięć w transformatorze tak jak na rysunku 2.40. Równania dynamiki przyjmują postać:

$$\frac{d\psi_1}{dt} = u_1 - R_1 i_1 \tag{2.123}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = u_2 - R_1 i_1 \tag{2.124}$$



Rys. 2.40. Schemat ideowy transformatora jednofazowego

Wartość strumieni skojarzonych z uzwojeniami jest wynikiem rozkładu pola magnetycznego wytwarzanego przez prądy w obu uzwojeniach transformatora. Są one zależne zatem zarówno od prądów, jak i od stanu nasycenia rdzenia ferromagnetycznego:

$$\psi_1 = f_1(i_1, i_2) \tag{2.125}$$

$$\psi_2 = f_2(i_1, i_2) \tag{2.126}$$

Ich rozwiązanie jest trudne i większości przypadków stosuje się wiele uproszczeń. Jednym z uproszczeń jest założenie o liniowości obwodu magnetycznego – można używać w takim przypadku stałych wartości, będących wynikiem proporcji pomiędzy strumieniami skojarzonymi a prądami, które wytwarzają pole magnetyczne (nazywanych indukcyjnością własną L_1 i L_2 oraz indukcyjnością wzajemną M):

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M i_2 \tag{2.127}$$

$$\psi_2 = M i_1 + L_2 i_2 \tag{2.128}$$

Taka postać równań dynamiki ma zastosowanie jedynie w transformatorach, które pracują na liniowej części charakterystyki magnesowania. W transformatorach stosowanych w energetyce do przesyłania energii elektrycznej model liniowy jest poprawny jedynie w stanie zwarcia lub przy obciążeniu strony wtórnej impedancją zbliżoną do znamionowej.

Rozpatrzmy przypadek transformatora energetycznego jednofazowego, gdy zwarte jest uzwojenie strony wtórnej, czyli tzw. zwarcie udarowe. Przyjmijmy, że amplituda napięcia na zaciskach pierwotnych ma wartość stałą niezależnie od zjawisk zachodzących w transformatorze. Stan zwarcia udarowego możemy analizować jako włączenie transformatora przy zwartych zaciskach wtórnych. Możemy wówczas skorzystać z uproszczenia polegającego na pominięciu prądu jałowego. Uproszczone równanie dynamiki będzie wówczas zawierać jedynie rezystancję oraz indukcyjność zwarcia [13]:

$$u_1 = R_z i_z + L_z \frac{di_z}{dt} \tag{2.129}$$

Napięcie zasilające możemy przedstawić wzorem:

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \alpha) \tag{2.130}$$

gdzie kąt α wyznacza nam moment załączenia transformatora do sieci. Rozwiązanie takiego równania jest sumą dwóch składowych (periodycznej i aperiodycznej):

$$i_z = i_{zp} + i_{za} \tag{2.131}$$

Składowa periodyczna przyjmuje postać:

$$i_{zp} = \frac{U_{1m}}{Z_z} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \tag{2.132}$$

gdzie φ jest kątem pomiędzy prądem a napięciem w stanie ustalonym.

Składową aperiodyczną można przedstawić zależnością:

$$i_{za} = \frac{U_{1m}}{Z_z} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T_z}} \qquad (2.133)$$

Stała czasowa obwodu jest równa:

$$T_z = \frac{L_z}{R_z} \qquad (2.134)$$

Wypadkowy prąd zwarcia zależy więc od momentu, w którym nastąpiło zwarcie. W momencie, gdy włączymy napięcie dla α równego φ, mamy stan ustalony (bez stanu przejściowego). Największa możliwa wartość prądu udarowego występuje w momencie $(\alpha - \varphi) = 90°$:

$$i_z \cong 2\sqrt{2} I_z \qquad (2.135)$$

gdzie I_z jest wartością skuteczną prądu zwarcia w stanie ustalonym.

Jako że wartość prądu zwarcia w stanie ustalonym może być nawet 20-krotnie większa od znamionowej wartości prądu, to wartość maksymalna w stanie zwarcia udarowego może przekraczać ponad 40-krotnie wartość maksymalną prądu znamionowego. Tak duże wartości prądu udarowego mogą powodować nadmierne grzanie się uzwojeń w czasie trwania zwarcia oraz prowadzić do rozrywania uzwojeń na skutek wytworzenia siły dynamicznej. Znajomość największej możliwej wartości prądu w stanie przejściowym jest istotna z uwagi na konieczność zapewnienia odpowiedniej wytrzymałości mechanicznej uzwojeń.

Drugim ważnym przypadkiem jest tzw. prąd włączenia transformatora. Istotne problemy pojawiają się tu w sytuacji, gdy włączamy transformator na pełne napięcie przy rozłączonym obwodzie strony wtórnej. Równanie dynamiki wynika z faktu, że następuje tu proces przejściowy związany z wytworzeniem dużej wartości pola magnetycznego (tzw. strumienia głównego). W takim przypadku nie można pominąć zjawiska nasycenia obwodu magnetycznego, a równanie dynamiki należy opisać zależnością:

$$u_0 = R_0 i_0 + \frac{d\Psi_0}{dt} \qquad (2.136)$$

Wartość chwilowa napięcia zasilającego wynosi:

$$u_0 = U_m \sin(\omega t + \alpha) \qquad (2.137)$$

W stanie jałowym wartość indukcyjności L_0 nie jest stała i zależy od stanu nasycenia maszyny, stąd dla potrzeb analizy równanie dynamiki zapiszemy dla pochodnej strumienia. Dla uproszczenia w równaniu (2.136) możemy przyjąć, że spadek napięcia na rezystancji jest znacznie mniejszy od napięcia indukowanego na skutek zmian pola magnetycznego w czasie. Możemy zatem przyjąć, że spadek napięcia na rezystancji jest równy:

$$R_0 i_0 \approx \frac{R_0}{L_0}\Psi \tag{2.138}$$

Równanie dynamiki przyjmuje postać:

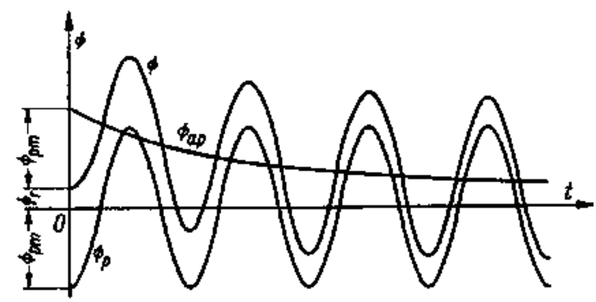
$$U_m \sin(\omega t + \alpha) = \frac{R_0}{L_0}\Psi + \frac{d\Psi}{dt} \tag{2.139}$$

Rozwiązanie równania ma dwie składowe strumienia, periodyczną:

$$\Psi_{0p} = \Psi_{pm} \sin(\omega t + \alpha - \varphi) \tag{2.140}$$

i aperiodyczną:

$$\Psi_{0a} = \Psi_{am} \sin(\alpha - \varphi) e^{-\frac{t}{T_0}} \tag{2.141}$$

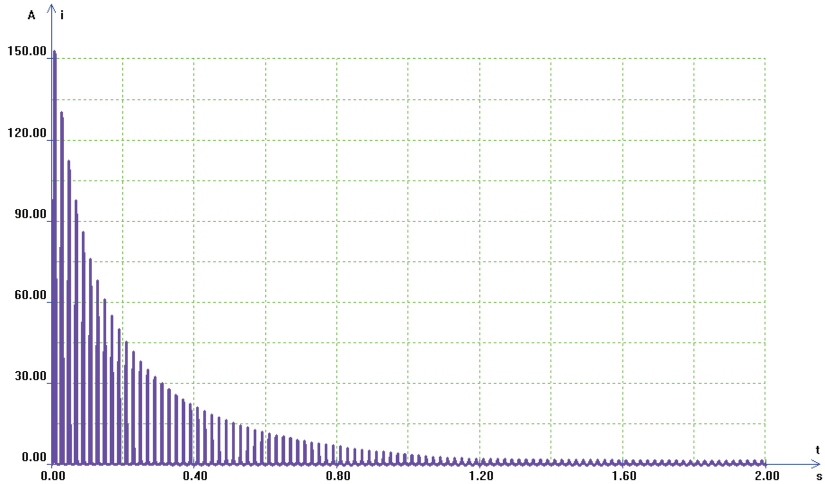


Rys. 2.41. Przykładowy przebieg strumienia magnetycznego w stanie przejściowym [9]

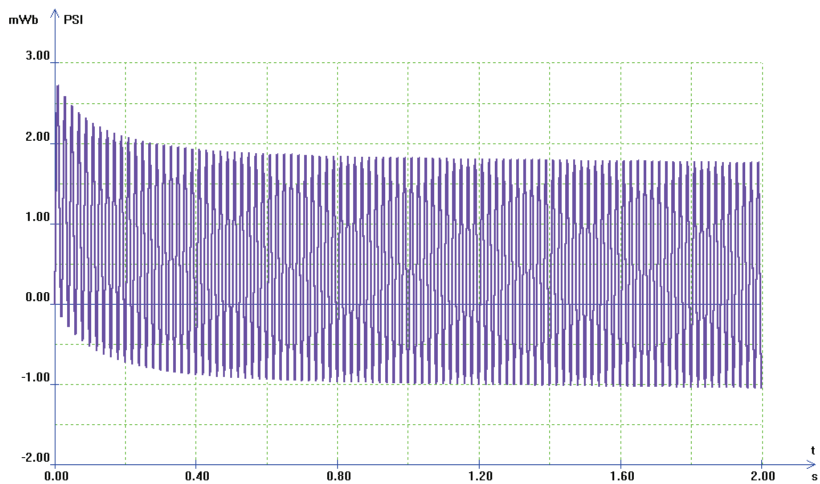
Podobnie jak przy zwarciu stan przejściowy zależy od chwili włączenia transformatora do sieci. W najkorzystniejszym przypadku, gdy $(\alpha_0 - \varphi_0) = 0$, od razu powstaje strumień sinusoidalny równy strumieniowi w stanie ustalonym.

Biorąc pod uwagę fakt istnienia remanentu magnetycznego ψ_r, w najgorszym przypadku wartość chwilowa strumienia magnetycznego może osiągnąć wynik (rys. 2.41):

$$\Psi_{max} \approx 2\Psi_u + \Psi_r \tag{2.142}$$



Rys. 2.42. Przykładowy przebieg prądu włączenia transformatora (symulacje numeryczne)



Rys. 2.43. Przykładowy przebieg strumienia w czasie włączenia transformatora (symulacje numeryczne)

Ponad dwukrotny wzrost strumienia powoduje silne nasycenie rdzenia i duży wzrost prądu magnesującego, nawet do wartości ponad 200 razy większej niż w stanie ustalonym [8]. Jeśli prąd biegu jałowego jest równy na przykład 1% prądu znamionowego, to w najgorszym przypadku wartość maksymalna prądu włączenia może być dwukrotnie większa od prądu znamionowego. Stan taki może powodować zadziałanie zabezpieczeń transformatora. Silne nasycenie skutkuje nie tylko dużą wartością prądu w stanie przejściowym, lecz także znacznie wydłuża czas dojścia do stanu ustalonego. Przykładowe wyniki modelowania matematycznego załączenia transformatora jednofazowego pracującego bez obciążenia pokazano na rysunkach 2.42 (prąd) i 2.43 (strumień).

2.9. Uwagi ogólne

Transformatory energetyczne używane są przede wszystkim do przesyłania energii na duże odległości i występują w różnych rodzajach pracy:

- transformatory podwyższające napięcie (blokowe – moc rzędu setek MVA, przy wysokim napięciu wtórnym do 400 kV);
- transformatory obniżające napięcie (zwykle dwustopniowo: np. 220/15 kV, sieciowe – moce rzędu dziesiątek i setek MVA; 15/0,4 kV – rozdzielcze 63÷1600 kVA);
- transformatory przekazujące energię w kierunku zależnym od pracy układu energetycznego (np. sprzęgające – dołączenia sieci o różnych wartościach wysokich napięć, np. 220/400 kV).

W zależności od mocy oraz miejsca instalacji używa się transformatorów powietrznych oraz olejowych. W transformatorach olejowych zalewa się uzwojenie z rdzeniem olejem (lub innymi płynami), którego celem jest poprawa własności izolacyjnych, jak i polepszenie oddawania ciepła do otoczenia. Poza rdzeniem i uzwojeniami transformatory są wyposażone w wiele urządzeń wspomagających ich eksploatację. W starszych rozwiązaniach stosowano na przykład.:

- konserwator oleju – ograniczenie styku oleju z powietrzem,
- rurę wybuchową (przy mocach większych od 2 MVA) – zawór bezpieczeństwa, który ma zapobiegać możliwości rozsadzenia kadzi wskutek zbyt dużego ciśnienia wewnętrznego,
- przekaźnik gazowo-podmuchowy (w starszych konstrukcjach przekaźnik Buchholtza z 1921 r.),

Współcześnie stosuje się transformatory hermetyczne, czyli zamknięte przed dostępem powietrza do czynnika chłodzącego (głównie olej). W takim przypadku niezbędna jest kontrola stanu oleju (tzn. jego temperatury, ciśnienia czy składu chemicznego). Konieczne jest także stosowanie różnego typu zabezpieczeń zapewniających poprawną pracę w zależności od mocy, typu, grupy połączeń, dopuszczalnej niesymetrii obciążenia oraz innych czynników, takich jak na przykład udary piorunowe.

Jednym z parametrów opisujących maszyny elektryczne jest informacja o rodzaju zastosowanej izolacji. O jej jakości decyduje tzw. klasa ciepłoodporności izolacji, dla której w starszych normach definiowano dopuszczalne przyrosty temperatur względem znamionowej temperatury otoczenia (40°C w Europie) i oznaczano:

- Klasa A - 60°
- Klasa E - 65°÷75°
- Klasa B - 70°÷80°
- Klasa F - 85°÷100°
- Klasa H - 105°÷125°

Aktualne normy podają maksymalne dopuszczalne wartości temperatur w najcieplejszym miejscu transformatora:

- Klasa A - 105°
- Klasa B - 130°
- Klasa F - 155°
- Klasa H - 180°
- Klasa N - 200°
- Klasa R - 220°
- Klasa S - 240°
- Klasa C > 240°

Poza konstrukcjami transformatorów energetycznych w praktyce transformatory używane są w wielu innych zastosowaniach. Transformatory występują jako transformatory spawalnicze, prostownikowe, autotransformatory. Poza zagadnieniami energetyki transformatory wykorzystywane są w większości urządzeń stosowanych w praktyce. Występują w zasilaczach urządzeń elektronicznych, są niezbędne jako układy zapewniające izolację galwaniczną w elektronice, w medycynie i telekomunikacji. Pracują w zakresie małych częstotliwości, jak i częstotliwości rzędu kilkuset kHz. Budowane są transformatory kriogeniczne (wykorzystujące zjawisko nadprzewodnictwa), jak i bez rdzenia ferromagnetycznego (powietrzne), głównie przy większych częstotliwościach w układach zasilania bezprzewodowego (np. samochodów elektrycznych).

Transformatory pracują jako urządzenia pomiarowe. Przekładniki prądowe to urządzenia zapewniające bezpieczny pomiar dużych prądów lub prądów w układach wysokonapięciowych i są to transformatory pracujące przy zwarciu strony wtórnej. Przekładniki napięciowe to urządzenia do pomiaru wysokich napięć i pracują przy braku obciążenia (stan jałowy transformatora).

Niezależnie od mocy, przeznaczenia, rozwiązań konstrukcyjnych należy pamiętać, że podstawowa zasada ich działania jest identyczna. Różnice dotyczą celu stosowania i wynikających stąd cech szczególnych.

3. Maszyny indukcyjne

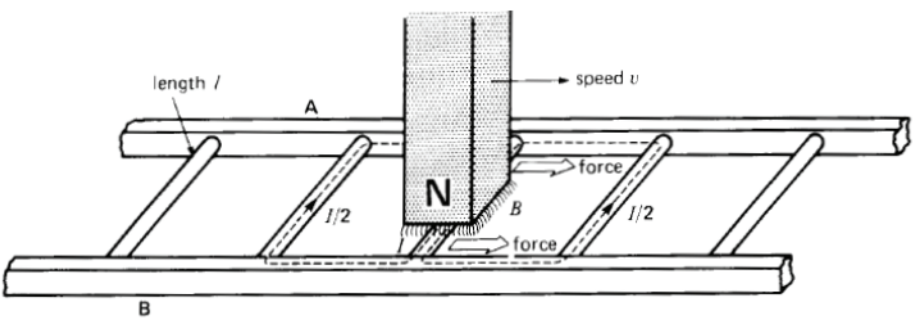
3.1. Budowa i zasada działania

Zasada działania maszyny indukcyjnej (asynchronicznej) opiera się na zjawiskach, które występują w przypadku, gdy pole magnetyczne porusza się względem przewodnika pokazanego na rys. 3.1. Jeśli wymusimy ruch pola magnetycznego z prędkością v, w przewodniku (pręcie o długości l pod wpływem indukcji magnetycznej B) pojawi się napięcie (siła elektromotoryczna e):

$$e = Blv \tag{3.1}$$

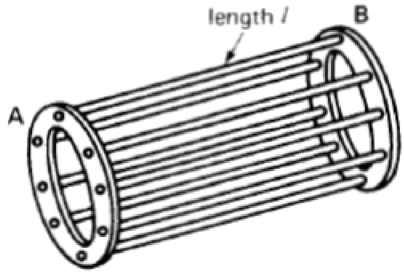
Wobec faktu, że obwód elektryczny na tym rysunku jest zamknięty, przez pręt przepłynie prąd o wartości i. Prąd ten, współdziałając z polem magnetycznym, spowoduje powstanie siły mechanicznej F o wartości:

$$F = Bil \tag{3.2}$$

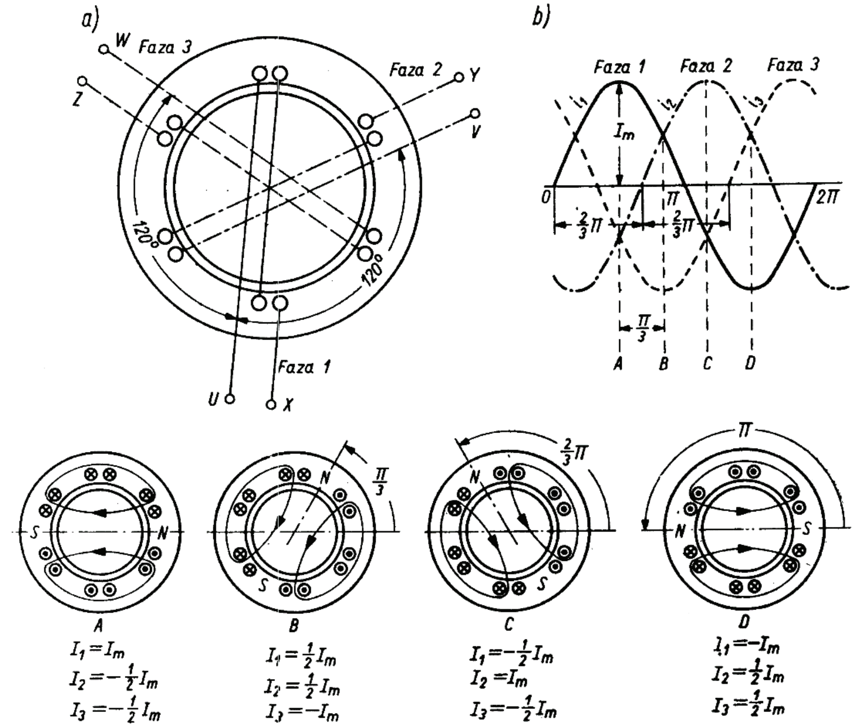


Rys. 3.1. Przesuwanie pola magnetycznego nad przewodnikiem [20]

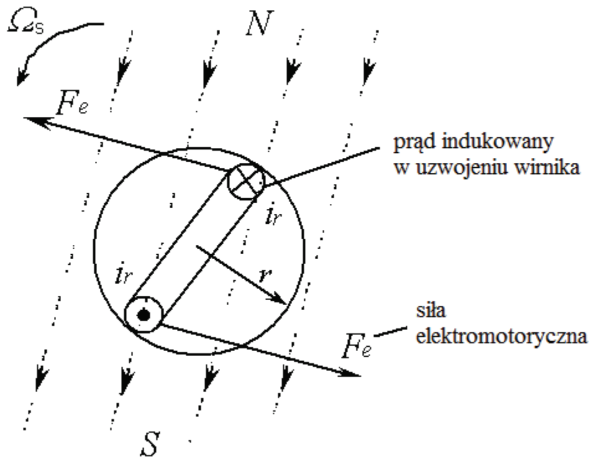
Praktycznym rozwiązaniem wykorzystującym taką ideę pracy jest wytworzenie pola poruszającego się ze stałą prędkością wobec przewodnika (klatki) pokazanego na rysunku 3.2.



Rys. 3.2. Klatka wirnika maszyny indukcyjnej [20]



Rys. 3.3. Zasada wytworzenia wirującego pola magnetycznego z wykorzystaniem uzwojenia trójfazowego rozłożonego w żłobkach stojana maszyny indukcyjnej



Rys. 3.4. Zasada działania maszyny indukcyjnej

Wirujące pole magnetyczne można wytworzyć poprzez umieszczenie w żłobkach stojana (rys. 3.3a) trójfazowego uzwojenia zasilonego trzema prądami przesuniętymi w dziedzinie czasu o kąt 120° (rys. 3.3b). Na rysunku 3.3 pokazano rozkład pola magnetycznego wytworzonego na skutek prądów płynących w 3-fazowym uzwojeniu stojana w czterech chwilach czasu A, B, C i D. Widoczna jest tu zmiana rozkładu pola magnetycznego w szczelinie powietrznej pomiędzy stojanem a wirnikiem. W takim przypadku pole magnetyczne porusza się wobec prętów klatki (rys. 3.4) ze stałą prędkością kątową (nazywaną prędkością synchroniczną), wynikającą z częstotliwości napięcia zasilającego, w prętach wirnika indukuje się napięcie, które wobec zamkniętego obwodu wirnika wymusi przepływ prądu. Prąd, współdziałając z polem magnetycznym, spowoduje powstanie momentu elektromagnetycznego. Moment obrotowy, zgodnie z zależnością (3.3), będzie powodował wzrost prędkości obrotowej.

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_d \tag{3.3}$$

gdzie J jest momentem bezwładności podanym w kgm^2, ω jest prędkością kątową w rad/s, M_d jest momentem dynamicznym. Moment M_d jest wynikiem różnicy momentu wytwarzanego w maszynie M_e oraz momentu oporowego M_o:

$$M_d = M_e - M_o \tag{3.4}$$

W przypadku, gdy pominiemy moment oporowy (hamujący), prędkość wirowania wirnika będzie zwiększać się aż do momentu, gdy wartość momentu wytwarzanego w maszynie spadnie do zera. Stan taki wystąpi tylko w przypadku, gdy prąd płynący przez pręty wirnika spadnie do zera. Ma to miejsce w sytuacji, gdy wirnik porusza się z prędkością równą prędkości przemieszczania się pola magnetycznego (pręty i pole magnetyczne są wówczas nieruchome względem siebie).

Pole magnetyczne wirujące wewnątrz maszyny może zmieniać się na obwodzie wirnika (w szczelinie powietrznej pomiędzy stojanem a wirnikiem), może mieć liczbę par biegunów $p>1$ (rys. 3.5). W przypadku jednej liczby par biegunów (rys. 3.5A), gdy do wytworzenia pola wirującego magnetycznego wykorzystamy uzwojenia zasilone napięciem o częstotliwości f, a identyczny rozkład pola magnetycznego w przestrzeni będzie powtarzał się zgodnie z częstotliwością zmian prądu, kąt przemieszczenia pola jest równy 2π. Prędkość wirowania tak wytworzonego pola jest równa pulsacji napięcia zasilającego:

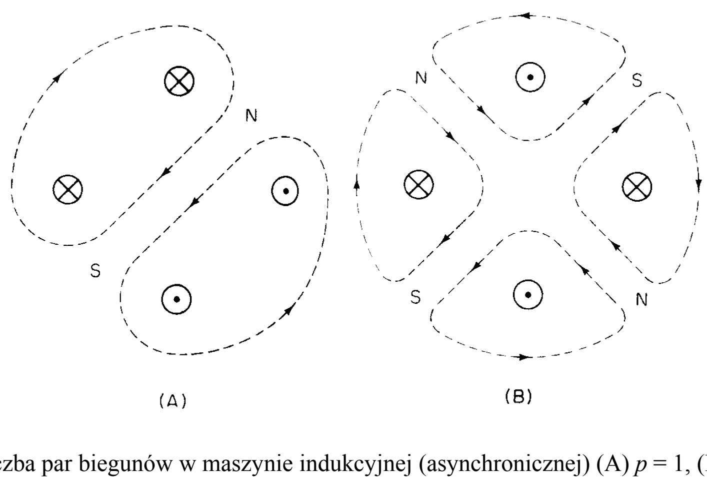
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f = \omega_1 \tag{3.5}$$

W przypadku dwóch par biegunów na obwodzie (rys. 3.5B), po jednym odcinku czasu T, pole magnetycznie przemieści się o kąt mechaniczny równy π. W takiej sytuacji prędkość wirowania pola magnetycznego jest równa:

$$\omega_s = \frac{\pi}{T} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{2\pi f}{2} = \frac{\omega_1}{2} \tag{3.6}$$

W ogólnym przypadku, gdy liczba par biegunów jest równa p, otrzymamy wzór na prędkość synchroniczną kątową w rad/s:

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{p} = \frac{\omega_1}{p} \tag{3.7}$$



Rys. 3.5. Liczba par biegunów w maszynie indukcyjnej (asynchronicznej) (A) $p = 1$, (B) $p = 2$

W praktyce używa się prędkości obrotowej w jednostkach obr/min jako że jeden obrót to 2π rad, a w minucie mamy 60 s, to prędkość synchroniczną wyrażoną w obr/min możemy przedstawić według zależności:

$$n_s = \frac{60f}{p} \tag{3.8}$$

W literaturze angielskojęzycznej ([2], [3], [11], [12], [16], [20]) często używa się pojęcia liczby biegunów $p' = 2p$, wówczas:

$$n_s = \frac{120f}{p'} \tag{3.9}$$

$$\omega_s[\text{rad / s}] = \frac{2\pi}{60} n_s[\text{obr / min}] \tag{3.10}$$

$$n_s[\text{obr / min}] = 9{,}55\omega_s[\text{rad / s}] \tag{3.11}$$

W przypadku, gdy poza momentem wytworzonym w maszynie będzie występował moment hamujący, w stanie ustalonym prędkość obrotowa wału wirnika n musi różnić się od synchronicznej – tylko w takim przypadku maszyna może wytworzyć moment o wartości równej momentowi obciążenia. Pojawi się w takiej sytuacji różnica pomiędzy tymi prędkościami, a jej wartość w odniesieniu do prędkości synchronicznej nazywamy poślizgiem:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} \tag{3.12}$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że w przypadku nieruchomego ($n = 0$) wirnika $s = 1$ w wirniku indukuje się napięcie o wartości U_{r0} i częstotliwości równej częstotliwości napięcia zasilającego uzwojenia stojana. W miarę wzrostu prędkości obrotowej maleje poślizg, maleje także napięcie indukowane w uzwojeniach wirnika, jak i jego częstotliwość:

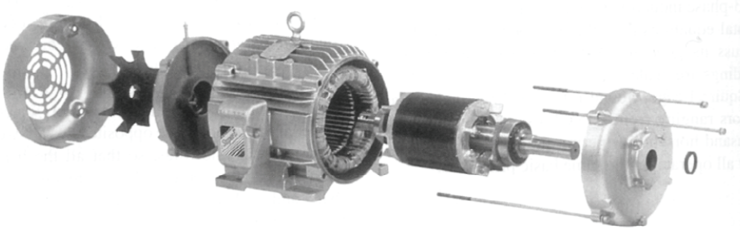
$$f_2 = |s| f \tag{3.13}$$

$$U_2 = |s| U_{r0} \tag{3.14}$$

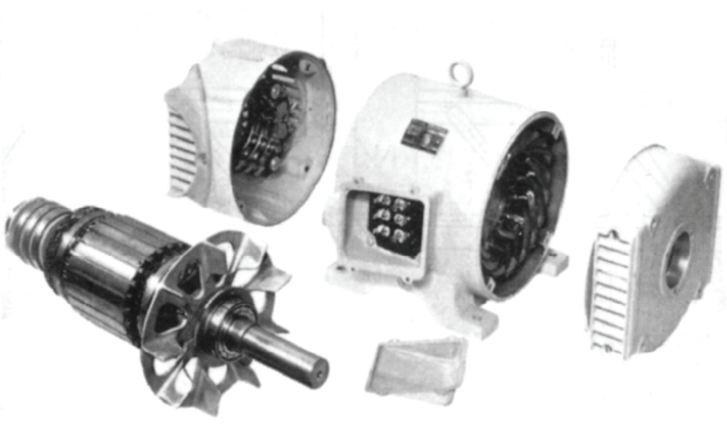
Maszyna asynchroniczna (indukcja) zbudowana jest z nieruchomego stojana oraz ruchomego wirnika (rys. 3.6). Wirnik mocowany jest do części nieruchomej poprzez umieszczenie na jego wale łożysk, montowanych w gniadach tarcz łożyskowych dokręcanych do obu stron stojana. Zwykle na wale maszyny asynchronicznej umieszczony jest wentylator, którego celem jest wymuszenie ruchu powietrza wewnątrz maszyny, odbierając w ten sposób energię cieplną wytwarzaną w uzwojeniach i rdzeniach stojana i wirnika (wymuszone chłodzenie).

Zamiast wirnika klatkowego możemy na żłobkach wirnika umieścić uzwojenie trójfazowe (pobobne jak w stojanie). Uzwojenie jest zwykle połączone w gwiazdę, a końce jego połączone są z trzema pierścieniami (rys. 3.7). Do pierścieni dosunięte są szczotki umieszczone w szczotkotrzymaczach i dalej są podłączone do zasisków na tabliczce zaciskowej maszyny.

Rozwiązanie takie umożliwia dołączenie do obwodu wirnika dodatkowych elementów (np. rezystancji). Maszyna o takiej budowie może także być wykorzystana jako przesuwnik fazowy, regulator indukcyjny, czy też elektromaszynowa przetwornica częstotliwości.



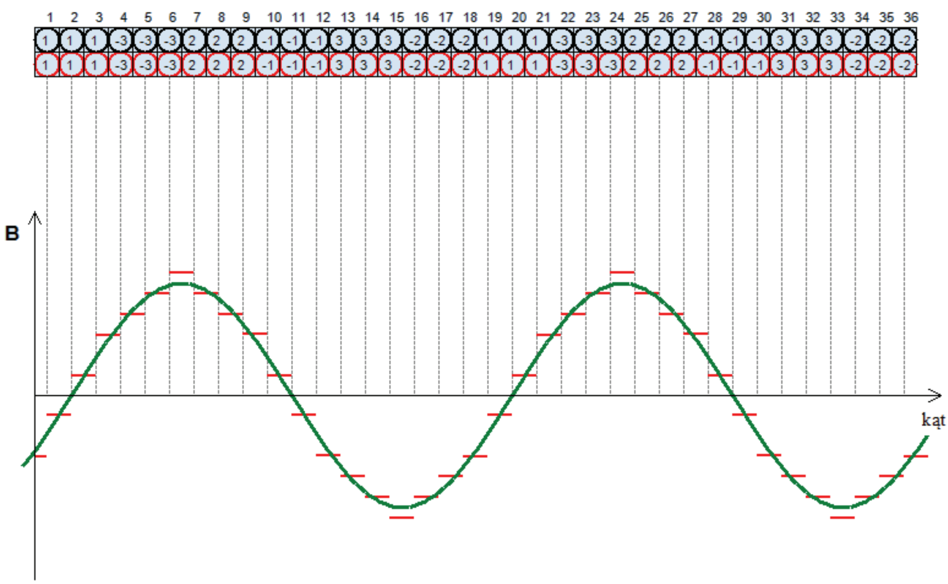
Rys. 3.6. Przykład budowy maszyny indukcyjnej klatkowej [20]



Rys. 3.7. Przykład budowy maszyny indukcyjnej pierścieniowej [20]

Uzwojenie stojana (także wirnika) powinno wytwarzać wirujące pole kołowe. Rozkład pola magnetycznego na obwodzie maszyny powinien być jak najbliższy funkcji sinusoidalnej. Taki kształt pola powoduje, że przy stałej prędkości wirowania wirnika napięcie indukowane (oraz prąd) ma także przebieg sinusoidalnie zmienny w czasie o częstotliwości podanej wzorem (3.13).

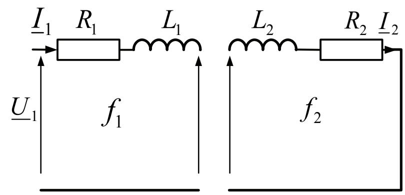
Wirującym polem kołowym możemy zatem nazwać pole magnetyczne o sinusoidalnym rozkładzie w szczelinie powietrznej maszyny, przy czym wartość maksymalna (amplituda) jest niezależna od czasu, a jego położenie względem stojana zmienia się w czasie ze stałą prędkością, nazywaną prędkością synchroniczną. Rozkład pola o takich cechach uzyskuje się poprzez odpowiednie rozłożenie uzwojeń trzech faz na obwodzie stojana, co pokazano na rysunku 3.8. Zielona linia oznacza rozkład idealny, który stanowi 1-harmoniczna rzeczywistego rozkładu pola (linia czerwona). Rysunek pokazuje rozkład pola wyznaczony dla dwuwarstwowego uzwojenia stojana umieszczonego w 36 żłobkach dla liczby par biegunów $p = 2$, przy założeniu, że szczelina powietrzna jest równomierna.



Rys. 3.8. Rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej maszyny asynchronicznej

3.2. Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej

Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej pierścieniowej opiera się na zjawiskach wynikających z jego zasady działania (rys. 3.4). Przyjmijmy, że maszyna zasilana jest symetrycznym napięciem trójfazowym. Napięcie to wymusi przepływ prądów, które wytworzą wirujące pole magnetyczne. Pole to spowoduje zaindukowanie się napięć w wirniku. Jego częstotliwość będzie proporcjonalna do poślizgu s oraz częstotliwości napięcia stojana f.



Rys. 3.9. Reprezentacja zjawisk w maszynie indukcyjnej klatkowej

Napięcie indukowane w wirniku spowoduje przepływ prądu w trzech fazach. W takiej sytuacji w szczelinie powietrznej wystąpi wypadkowe wirujące pole magnetyczne, które w stanie ustalonym będzie powodowało indukowanie się napięć w uzwojeniach stojana i wirnika. Wartości napięć indukowanych będą różniły się wartością z uwagi na różną liczbę zwojów w stojanie i wirniku oraz innym sposobem rozłożenia uzwojeń w żłobkach stojana i wirnika. W równaniu jednej fazy stojana należy uwzględnić rezystancję uzwojenia stojana R_1, indukcyjność rozproszenia L_1 oraz napięcie indukowane od wirującego wypadkowego pola magnetycznego e_1. Prąd oraz napięcia w stojanie zmieniają się sinusoidalnie z częstotliwością f, stąd (rys. 3.9):

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j2\pi f L_1 \underline{I}_1 + \underline{E}_1 \tag{3.15}$$

Równanie Kirchhoffa dla jednej fazy wirnika w przypadku, gdy pierścienie są zwarte, można opisać wzorem:

$$\underline{E}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j2\pi |s| f L_2 \underline{I}_2 \tag{3.16}$$

Taka postać wzoru wynika z faktu, że napięcie w wirniku jest proporcjonalne do poślizgu. Wartość napięcia indukowanego w wirniku E_2 jest proporcjonalna do jego wartości przy prędkości równej zeru U_{20} oraz do wartości poślizgu s, stąd:

$$\underline{E}_2 = s\underline{U}_{20} = R_2 \underline{I}_2 + j2\pi |s| f L_2 \underline{I}_2 \tag{3.17}$$

Równanie wirnika możemy obustronnie podzielić przez poślizg s. Otrzymamy:

$$\underline{U}_{20} = \frac{R_2}{s} \underline{I}_2 + j2\pi f L_2 \underline{I}_2 \tag{3.18}$$

Dla maszyny indukcyjnej pierścieniowej możemy zdefiniować pojęcie przekładni k, której wartość jest związana z ilością zwojów uzwojenia stojana i wirnika oraz ze sposobu ich rozłożenia na obwodzie stojana i wirnika:

$$k = \frac{E_1}{U_{20}} \tag{3.19}$$

W takim przypadku możemy wykonać przeliczenia parametrów wirnika do obwodu stojana, uzyskując w ten sposób wartość napięcia sprowadzonego do obwodu stojana w sposób identyczny jak w transformatorze. Oznaczamy parametry sprowadzone do obwodu stojana jako:

$$\underline{I}_2^{'} = \frac{\underline{I}_2}{k} \tag{3.20}$$

$$R_2^{'} = k^2 R_2 \tag{3.21}$$

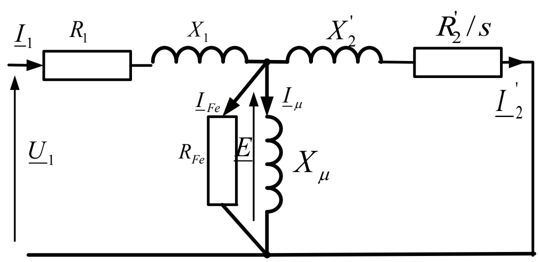
$$X_2^{'} = k^2 2\pi f L_2 \tag{3.22}$$

$$X_1 = 2\pi f L_1 \tag{3.23}$$

Otrzymamy:

$$k\underline{U}_{20} = \underline{E}_1 = \frac{R_2^{'}}{s}\underline{I}_2^{'} + jX_2^{'}\underline{I}_2^{'} \tag{3.24}$$

Równania stojana i wirnika mają część wspólną, jaką jest wartość napięcia indukowanego od wypadkowego pola wirującego i podobnie, jak w przypadku transformatora, możemy je zastąpić spadkiem napięcia na reaktancji magnesującej X_μ. Możemy także uwzględnić fakt istnienia strat w żelazie stojana poprzez dołączenie równolegle do reaktancji magnesującej wartości rezystancji odpowiadającej za straty w żelazie R_{fe}, uzyskując schemat zastępczy maszyny asynchronicznej pokazany na rysunku 3.10.



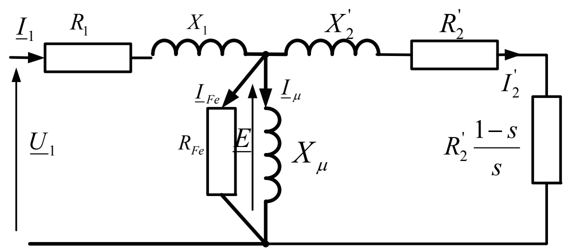
Rys. 3.10. Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej klatkowej

Biorąc pod uwagę, że:

$$\frac{R_2^{'}}{s} = R_2^{'} + R_2^{'}\frac{1-s}{s} \tag{3.25}$$

schemat zastępczy możemy narysować w postaci (rys. 3.11) pokazującej zamianę energii elektrycznej na mechaniczną oraz wskazującej składniki związane ze stratami energii na rezystancji stojana R_1, wirnika $R_2^{'}$, jak też straty w żelazie R_{fe}. Przekształcenie mocy elektrycznej na mechaniczną można wyrazić zależnością:

$$P_M = \frac{1-s}{s} 3R_2^{'} I_2^{'2} \tag{3.26}$$



Rys. 3.11. Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej uwzględniający zamianę energii elektrycznej na mechaniczną

Oznaczając straty w wirniku jako sumę strat w 3 fazach na rezystancji wirnika w postaci:

$$\Delta P_{cu2} = 3R_2^{'} I_2^{'2} \tag{3.27}$$

otrzymamy:

$$P_M = \frac{1-s}{s} \Delta P_{cu2} \tag{3.28}$$

Całkowita moc przekazywana za pośrednictwem wirującego pola magnetycznego nazywana jest często mocą idealną (mocą szczelinową) i jest równa:

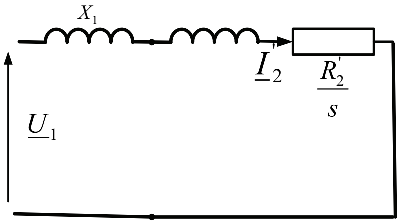
$$P_i = \frac{\Delta P_{cu2}}{s} \tag{3.29}$$

stąd:

$$P_M = (1-s)P_i \tag{3.30}$$

Moment elektromagnetyczny, wytworzony w maszynie indukcyjnej, jest równy:

$$M_e = \frac{P_M}{\omega} = \frac{(1-s)P_i}{(1-s)\omega_s} = \frac{P_i}{\omega_s} = \frac{\Delta P_{cu2}}{\omega_s s} \tag{3.31}$$



Rys. 3.12. Uproszczony schemat zastępczy maszyny indukcyjnej

Schemat zastępczy maszyny klatkowej ma identyczną postać jak dla maszyny pierścieniowej. Praktyczna różnica polega na tym, że do uzwojeń wirnika w maszynie pierścieniowej możemy dołączyć dodatkowe składniki, natomiast maszyna klatkowa ma trwale uzwojenie zwarte. Rozwiązanie takie jest znacznie tańsze, a jednocześnie bardziej niezawodne od maszyny pierścieniowej.

W praktyce istotną zależnością w maszynie indukcyjnej jest zależność momentu od prędkości obrotowej. Zależność tę nazywamy charakterystyką mechaniczną. W celu jej uzyskania przyjmijmy, że możemy pominąć prąd biegu jałowego. W przypadku małej wartości poślizgu s możemy także pominąć wartość rezystancji stojana:

$$R_1 << \frac{R_2^{'}}{s} \tag{3.32}$$

Tak uproszczony schemat zastępczy maszyny indukcyjnej pokazano na rysunku 3.12. Wartość prądu wirnika możemy wówczas oszacować według zależności:

$$\underline{I}_2^{'} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{R_2^{'}}{s} + j(X_1 + X_2^{'})} \tag{3.33}$$

Moment elektromagnetyczny jest równy:

$$M_e = \frac{3}{\omega_s} \frac{U_1^2}{\frac{R_2^{'2}}{s^2} + (X_1 + X_2^{'})^2} \frac{R_2^{'}}{s} \tag{3.34}$$

Po przekształceniu otrzymamy:

$$M_e = \frac{3}{\omega_s} \frac{U_1^2 R_2^{'}}{\frac{R_2^{'2}}{s} + s(X_1 + X_2^{'})^2} \tag{3.35}$$

Wartości ekstremalne wyznaczymy z warunku:

$$\frac{dM_e}{ds} = 0 \tag{3.36}$$

stąd:

$$-\frac{R_r^{'2}}{s^2} + (X_s + X_r^{'})^2 = 0 \tag{3.37}$$

$$s_k = \pm \frac{R_r^{'}}{X_s + X_r^{'}} \tag{3.38}$$

Tak wyznaczoną wartość poślizgu nazywamy poślizgiem krytycznym, przy czym wartość dodatnia wyznacza nam maksymalną (krytyczną) wartość momentu przy pracy silnikowej, a ujemna przy pracy generatorowej:

$$M_k = \pm \frac{3}{\omega_s} \frac{U_1^2}{2(X_1 + X_1^{'})} \tag{3.39}$$

Prędkość krytyczną możemy obliczyć z zależności:

$$\omega_k = \omega_s (1 - s_k) \tag{3.40}$$

Podstawiając wzory (3.40) i (3.39) do równania (3.35) otrzymamy tzw. uproszczony wzór Klossa:

$$M_e = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \tag{3.41}$$

Wzór Klossa jest bardzo wygodnym uproszczeniem charakterystyki mechanicznej silnika asynchronicznego, stąd często używany jest w technice do szacowania różnych wielkości w maszynie indukcyjnej. W katalogach producent podaje wartość tzw. przeciążalności momentem λ, która wyraża proporcje pomiędzy momentem krytycznym M_k a momentem znamionowym M_n:

$$\lambda = \frac{M_k}{M_n} \tag{3.42}$$

Wartość poślizgu krytycznego możemy wówczas obliczyć ze wzoru Klossa:

$$\frac{s_n}{s_k} + \frac{s_k}{s_n} = 2\lambda \tag{3.43}$$

$$s_k^2 - 2\lambda s_n s_k + s_n^{\ 2} = 0 \tag{3.44}$$

$$\Delta = 4\lambda^2 s_n^2 - 4s_n^2 = 4s_n^2(\lambda^2 - 1) \tag{3.45}$$

$$s_k = s_n(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}) \tag{3.46}$$

Dwa rozwiązania są efektem symetrii względem poślizgu znamionowego i krytycznego. Jeśli obliczamy wartość poślizgu krytycznego na podstawie znajomości poślizgu znamionowego, wówczas liczymy jego wartość według zależności:

$$s_k = s_n(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \tag{3.47}$$

Analogiczne obliczenia poślizgu dla danego momentu obciążenia (na części stabilnej charakterystyki mechanicznej) należy wykonywać według zależności:

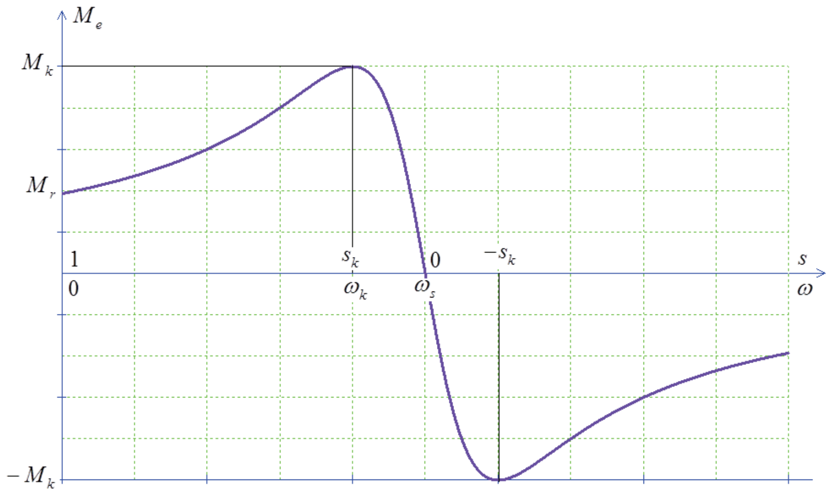
$$s = s_k\left(\frac{M_k}{M} - \sqrt{(\frac{M_k}{M})^2 - 1}\right) \tag{3.48}$$

Postępowanie takie umożliwia szacowanie prędkości obrotowej dla znanej wartości momentu obciążenia. Wykorzystanie wzoru Klossa umożliwia analizę pracy maszyny indukcyjnej bez wyznaczania parametrów schematu zastępczego. Istotne znaczenie w przewidywaniu, jak zmienią się wielkości typu moment krytyczny, poślizg krytyczny czy prędkość krytyczna, ma znajomość wpływu takich wielkości, jak częstotliwość napięcia stojana f, wartość skuteczna napięcia stojana U_1 oraz rezystancji w obwodzie wirnika $R_2^{'}$, na wartość momentu i poślizgu krytycznego.

3.3. Charakterystyka mechaniczna

Na postawie uproszczonego wzoru Klossa możemy narysować kształt charakterystyki mechanicznej (rys. 3.13). Charakterystyczne dla tego przebiegu są następujące wielkości:

- moment krytyczny dla pracy silnikowej M_k,
- moment krytyczny dla pracy prądnicowej – M_k,
- moment rozruchowy M_r (moment dla prędkości równej zeru, $s = 1$),
- prędkość synchroniczna ω_s ($s = 0$),
- poślizg krytyczny s_k (oraz prędkość krytyczna ω_k) dla pracy silnikowej,
- poślizg krytyczny – s_k dla pracy generatorowej.



Rys. 3.13. Charakterystyka mechaniczna maszyny indukcyjnej

Kształt charakterystyki jest zależny od parametrów zasilania (częstotliwości i napięcia stojana) oraz od wartości rezystancji w obwodzie wirnika R_2'. W celu przewidywania zmian kształtu oraz wyznaczenia prędkości obrotowej w różnych warunkach pracy warto znać podstawowe zależności i proporcje dotyczące opisanych wyżej punktów charakterystycznych:

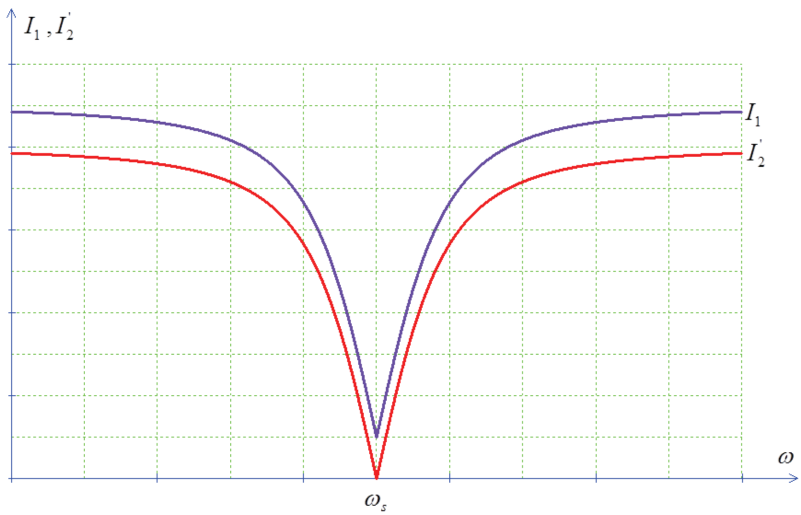
$$s_k = c_1 \frac{R_r'}{f} \tag{3.49}$$

$$M_k = c_2 \frac{U_1^2}{f^2} \tag{3.50}$$

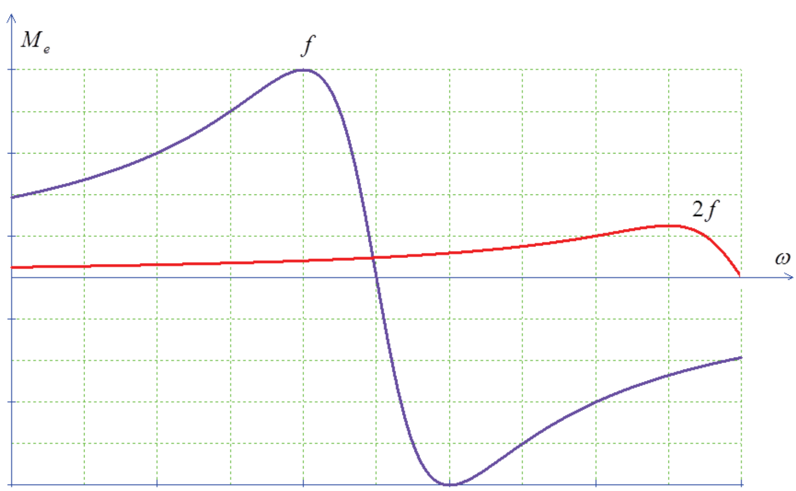
$$\omega = \omega_s (1 - s) \tag{3.51}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{p} = \frac{\omega_1}{p} \tag{3.52}$$

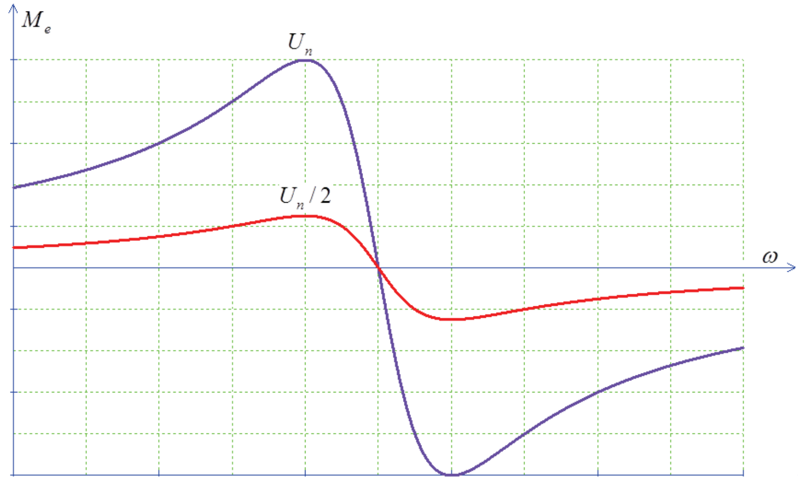
Wartość skuteczna prądu wirnika jest równa zeru jedynie przy prędkości synchronicznej i wraz ze wzrostem modułu poślizgu rośnie. Wartość minimalna prądu stojana występuje wówczas, gdy poślizg jest równy zeru – jest to prąd idealnego biegu jałowego (rys. 3.14). Na podstawie wyżej wymienionej zależności w prosty sposób możemy przewidywać zmianę kształtu charakterystyki mechanicznej. Możemy przewidywać, jak zmieni się prędkość przy danej wartości momentu obciążenia i zmianie parametrów zasilania. Jeśli na przykład dwukrotnie zwiększymy częstotliwość napięcia zasilającego to moment krytyczny zmaleje czterokrotnie, zaś prędkość synchroniczna wzrośnie dwukrotnie (rys. 3.15). Dwukrotne zmniejszenie napięcia zasilającego spowoduje czterokrotne zmniejszenie momentu krytycznego (rys. 3.16). Dwukrotne zwiększenie rezystancji w obwodzie wirnika spowoduje jedynie zwiększenie nachylenia charakterystyki mechanicznej (dwukrotne zwiększenie poślizgu krytycznego) (rys. 3.17).



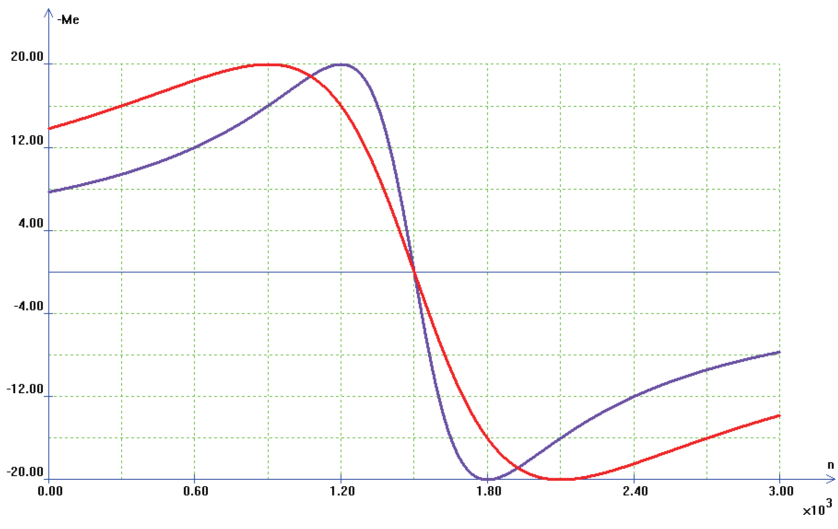
Rys. 3.14. Wartość skuteczna prądu stojana I_1 i wirnika $I_2^{'}$ w zależności od prędkości kątowej



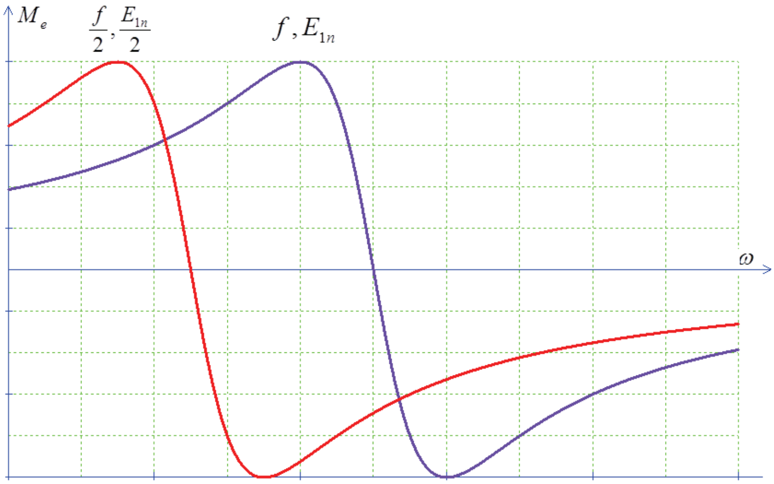
Rys. 3.15. Wpływ wzrostu częstotliwości napięcia zasilającego na kształt charakterystyki mechanicznej



Rys. 3.16. Wpływ zmiany napięcia zasilającego na kształt charakterystyki mechanicznej



Rys. 3.17. Wpływ zmiany rezystancji w obwodzie wirnika na kształt charakterystyki mechanicznej



Rys. 3.18. Wpływ zmian częstotliwości i napięcia (przy zachowaniu stałego strumienia) na kształt charakterystyki mechanicznej

Dokładniejszej analizy wymaga wpływ zmniejszenia częstotliwości lub zwiększenia napięcia zasilającego. W obu przypadkach takie zmiany mogą prowadzić do zniszczenia maszyny. Przy biegu jałowym maszyny indukcyjnej wartość napięcia indukowanego na skutek wirowania pola magnetycznego jest w przybliżeniu równa napięciu zasilającemu. Zależność na wartość napięcia indukowanego, przy sinusoidalnej zmienności strumienia magnetycznego w czasie, można, podobnie jak w transformatorach, wyrazić wzorem:

$$U_1 \approx E_1 = 4,44 f z_1 \varphi k_u \tag{3.53}$$

Współczynnik k_u, nazywany współczynnikiem uzwojenia, ma wartość mniejszą od jedności i jest wynikiem rozłożenia uzwojenia na obwodzie maszyny. Wartość maksymalna strumienia magnetycznego jest wymuszona wartością napięcia zasilającego:

$$\phi \approx \frac{U_1}{4,44 f z_1 k_u} \tag{3.54}$$

Zmniejszenie częstotliwości, przy zachowaniu tej samej wartości napięcia, spowoduje wzrost strumienia magnetycznego. Strumień magnetyczny jest wytworzony przez prąd płynący w uzwojeniach, stąd wartość prądu musi także wzrastać. Strumień znamionowy ma wartość bliską kolana krzywej magnesowania, więc próba jego zwiększenia będzie skutkowała znacznym wzrostem prądu magnesującego. Stan taki może spowodować, iż wartość prądu magnesującego wzrośnie po-wyżej wartości prądu znamionowego i może uszkodzić uzwojenie stojana. Przy zmniejszaniu częstotliwości należy zatem zmieniać także napięcie zasilające, aby zachować stałą wartość maksymalną strumienia magnetycznego (rys. 3.18):

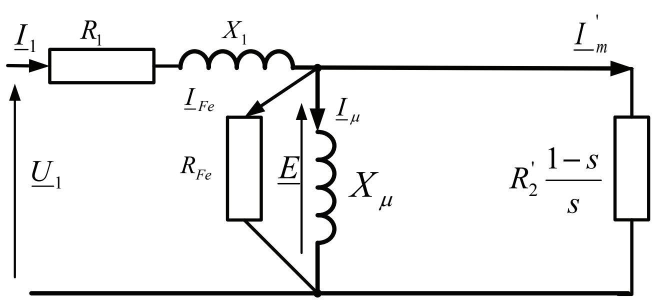
$$\frac{E_1}{f} = \mathrm{const} \tag{3.55}$$

Utrzymanie stałej wartości strumienia wymaga estymacji napięcia indukowanego od strumienia głównego (lub estymacji strumienia). Częściej stosuje się uproszczoną wersję tego warunku, zachowując proporcje pomiędzy napięciem a częstotliwością:

$$\frac{U_1}{f} = \mathrm{const} \tag{3.56}$$

3.4. Próba biegu jałowego

Stan pracy maszyny asynchronicznej pracującej bez momentu obciążenia na wale (z odłączoną maszyną roboczą), w odróżnieniu od idealnego biegu jałowego, nazywamy rzeczywistym biegiem jałowym. Z uwagi na występujące w maszynie straty mechaniczne, które są wynikiem tarcia w łożyskach oraz wymuszeniem ruchu powietrza przez łopatki wentylatora, przez uzwojenie wirnika płynie niewielki prąd, a poślizg jest nieznacznie większy od zera. Wobec małej wartości poślizgu możemy pominąć w schemacie zastępczym reaktancję rozproszenia wirnika [5] (rys. 3.19).



Rys. 3.19. Schemat zastępczy maszyny asynchronicznej przy rzeczywistym biegu jałowym

Schemat zastępczy maszyny trójfazowej jest zawsze opisany dla wielkości fazowych, stąd w dalszej części pracy będziemy wykorzystywali wszystkie wielkości (prąd, napięcie oraz moc) sprowadzone do jednej fazy stojana i wirnika. Wykorzystanie podanych niżej równań wymaga, w zależności od sposobu skojarzenia uzwojeń, przeliczenia wielkości zmierzonych jako przewodowe i międzyfazowe na wielkości fazowe, a wartość całkowitej mocy zmierzonej na przykład w układzie Arona, na moc jednej fazy (czyli całkowitą moc zmierzoną dzielimy na trzy).

Prąd stojana składa się z prądu magnesującego I_μ, prądu strat w żelazie I_{fe}, oraz prądu wirnika wynikającego z istnienia strat mechanicznych. Prąd magnesujący zmienia się wraz z napięciem zgodnie z krzywą magnesowania. Składnik prądu strat w żelazie rośnie praktycznie liniowo. Wyjaśnienia wymaga zależność prądu wirnika związanego ze stratami mechanicznymi. Dominujące znaczenie w tych stratach mają straty wentylacyjne, których moment jest zależny od kwadratu prędkości kątowej. W czasie próby biegu jałowego poślizg jest bliski zeru, więc możemy przyjąć, że prędkość ma wartość stałą i stała jest wartość strat mechanicznych:

$$\Delta P_m = 3EI_m^{'} = \text{const} \tag{3.57}$$

Wartość siły elektromotorycznej E jest bliska napięciu zasilającemu, możemy więc napisać:

$$\Delta P_m \approx 3U_1 I_m^{'} \approx \text{const} \tag{3.58}$$

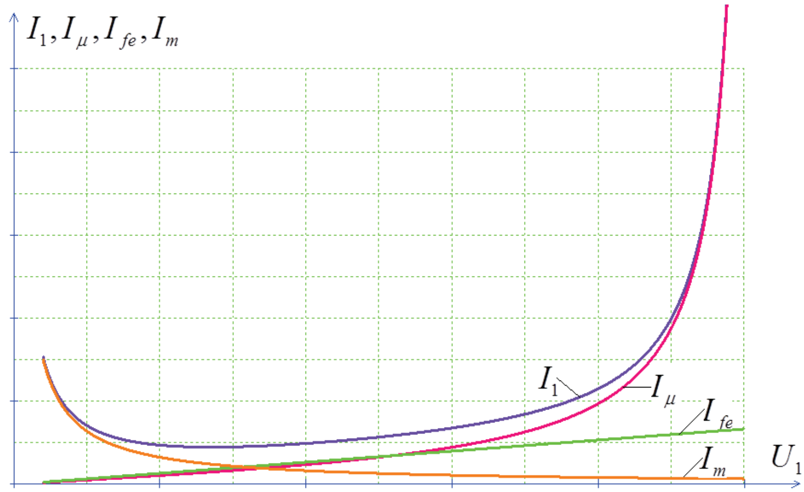
Stąd hiperboliczna zależność tego prądu od napięcia zasilającego:

$$I_m^{'} \approx \frac{\text{const}}{U_1} \tag{3.59}$$

Prąd stojana jest równy (rys. 3.20):

$$I_1 = \sqrt{(I_m^{'} + I_{fe})^2 + I_\mu^2} \tag{3.60}$$

Próbę biegu jałowego rozpoczynamy od wartości napięcia o około 30% większej od znamionowej i zmniejszamy jego wartość do momentu, gdy zaobserwujemy wzrost prądu stojana przy zmniejszaniu napięcia. Oczywistym jest, że dalsze zmniejszanie napięcia spowoduje wzrost poślizgu i w tym momencie należy próbę zakończyć. W czasie próby mierzymy wartość skuteczną prądu stojana, wartość skuteczną napięcia zasilającego oraz moc pobieraną przez silnik.



Rys. 3.20. Prąd biegu jałowego maszyny asynchronicznej

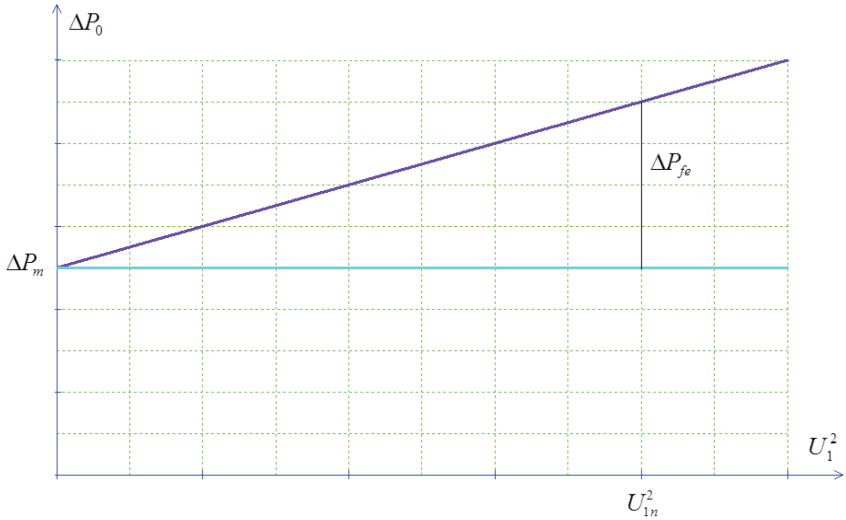
Wartość prądu biegu jałowego, przy znamionowej wartości napięcia, jest znacznie większa niż w transformatorach. Fakt ten jest wynikiem istnienia szczeliny powietrznej pomiędzy stojanem a wirującym wirnikiem. W maszynach indukcyjnych wartość tego prądu jest równa od 20 do 80% prądu znamionowego, stąd w analizie wyników badań należy uwzględnić straty w uzwojeniu stojana. W celu ich obliczenia niezbędny jest pomiar wartości rezystancji R_1, a ich wartość możemy obliczyć z zależności:

$$\Delta P_{cu1} = 3R_1 I_1^2 \tag{3.61}$$

Od zmierzonej mocy przy próbie biegu jałowego P_0 odejmujemy straty w uzwojeniu stojana ΔP_{cu1}, otrzymując tzw. straty jałowe ΔP_0:

$$\Delta P_0 = P_0 - \Delta P_{cu1} \tag{3.62}$$

Składnikami strat jałowych są straty w żelazie oraz straty mechaniczne, które w czasie próby mają wartość stałą. Wobec faktu, że straty w żelazie są proporcjonalne do kwadratu maksymalnej wartości indukcji, a indukcja jest wymuszona wartością napięcia zasilającego, możemy w prosty sposób rozdzielić straty jałowe na powyższe składniki. W tym celu rysujemy zależność strat jałowych od kwadratu napięcia stojana, uzyskując liniowy wzrost strat jałowych (rys. 3.21). W celu oszacowania strat mechanicznych wystarczy dokonać ekstrapolacji linii będącej wynikiem pomiarów biegu jałowego do przecięcia się jej z osią $0Y$. Punkt przecięcia wyznaczy nam wartość strat mechanicznych ΔP_m, a straty w żelazie ΔP_{fe} uzyskamy po odjęciu od strat jałowych ΔP_0 mocy strat mechanicznych.



Rys. 3.21. Sposób rozdzielenia strat mechanicznych i strat w żelazie

W przypadku badania silnika pierścieniowego możemy mierzyć poślizg. Pomiar poślizgu opiera się na pomiarze częstotliwości prądu w wirniku oraz wykorzystania zależności:

$$|s| = \frac{f_2}{f} \tag{3.63}$$

Wyniki próby biegu jałowego wykorzystać można do szacowania parametrów schematu zastępczego R_{fe} oraz X_μ:

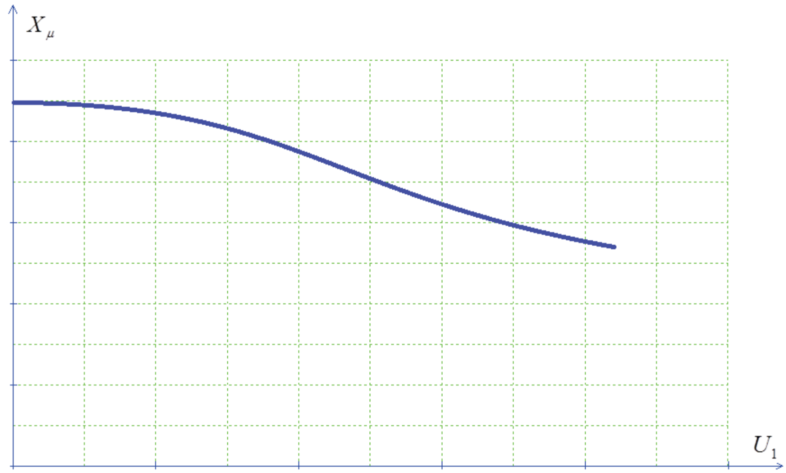
$$R_{fe} = \frac{3U_1^2}{\Delta P_{fe}} \tag{3.64}$$

$$I_{fe} = \frac{U_1}{R_{fe}} \tag{3.65}$$

$$I_\mu = \sqrt{I_1^2 - I_{fe}^2} \tag{3.66}$$

$$X_\mu = \frac{U_1}{I_\mu} \tag{3.67}$$

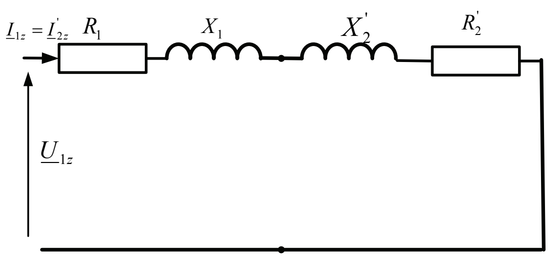
W tym momencie należy podkreślić, że wartość X_μ na skutek nasycenia obwodu magnetycznego nie jest wartością stałą, tylko zależy od wartości napięcia zasilającego uzwojenie stojana (rys. 3.22). W podobny sposób zmienia się także współczynnik mocy przy biegu jałowym.



Rys. 3.22. Zależność reaktancji X_μ od wartości napięcia zasilającego U_1

3.5. Próba zwarcia maszyny indukcyjnej

Pozostałe parametry schematu można wyznaczyć na podstawie próby zwarcia. Próba zwarcia maszyny indukcyjnej polega na zablokowaniu wirnika (s = 1) i pomiarach prądu I_{1z}, napięcia zwarcia U_{1z} oraz mocy P_z pobieranej przez maszynę. W tym przypadku, podobnie jak w odniesieniu do transformatorów, możemy pominąć prąd biegu jałowego i w schemacie zastępczym wystąpią jedynie rezystancja stojana R_1, reaktancja rozproszenia stojana X_1 oraz sprowadzone do obwodu stojana wartości rezystancji $R_2^{'}$ oraz reaktancji $X_2^{'}$ wirnika (rys. 3.23).



Rys. 3.23. Uproszczony schemat zastępczy w stanie zwarcia maszyny indukcyjnej

Wartości parametrów wyznaczamy w sposób identyczny jak dla transformatorów:

$$R_z = R_1 + R_2^{'} \tag{3.68}$$

$$X_z = X_1 + X_2^{'} \tag{3.69}$$

$$R_z = \frac{P_z}{I_{1z}^2} \tag{3.70}$$

$$Z_z = \frac{U_{1z}}{I_{1z}} \tag{3.71}$$

$$X_z = \sqrt{Z_z^2 - R_z^2} \tag{3.72}$$

Rezystancję uzwojenia fazowego stojana R_1 możemy zmierzyć metodą techniczną mostkiem Thompsona lub specjalnymi urządzeniami do pomiaru małych rezystancji, wyznaczając w ten sposób sprowadzoną do obwodu stojana wartość rezystancji wirnika:

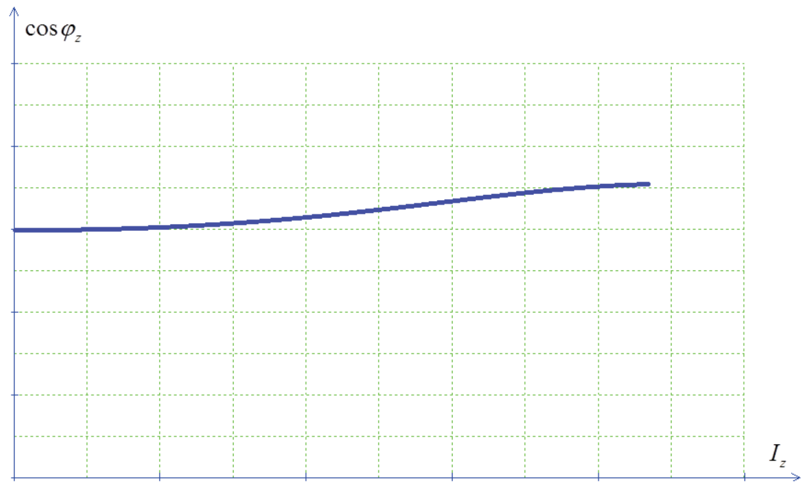
$$R_2^{'} = R_z - R_1 \tag{3.73}$$

W przypadku maszyny pierścieniowej możliwy jest bezpośredni pomiar rezystancji uzwojenia wirnika oraz przekładni. Należy przy tym pamiętać, że pomiar rezystancji obwodu elektrycznego, w których występują styki ruchome (połączenie pomiędzy szczotką i pierścieniami), musi być wykonany pod kontrolą prądu pomiarowego. Jego wartość musi być większa niż 20% prądu znamionowego. W tym przypadku konieczne jest zastosowanie metody technicznej lub specjalnych urządzeń, w którym mamy dostępną informację o wartości prądu pomiarowego.

Nie ma możliwości prostego rozdzielenia reaktancji zwarcia na odpowiednie składniki reaktancji rozproszenia. Zwykle przyjmuje się, że są one sobie równe:

$$X_1 = X_2^{'} = \frac{X_z}{2} \tag{3.74}$$

Wartość reaktancji zwarcia nie jest jednak wartością stałą. Mimo schematu zastępczego identycznego jak w transformatorach, w których reaktancja rozproszenia związana jest głównie z polem magnetycznym przechodzącym przez powietrze, w maszynach indukcyjnych część pola rozproszenia zamyka się w obrębie rdzenia stojana i wirnika. Fakt ten powoduje, że przy większych wartościach prądu może następować lokalne nasycenie rdzeni ferromagnetycznych, głównie w strefie tzw. otwarcia żłobka. W takim przypadku przy zwiększaniu prądu zwarcia następuje zmniejszanie się wartości reaktancji zwarcia. Na skutek szeregowego połączenia rezystancji i reaktancji zwarcia wzrost prądu powoduje zwykle zwiększenie wartości współczynnika mocy (rys. 3.24).



Rys. 3.24. Współczynnik mocy przy zwarciu jako funkcja prądu w maszynie indukcyjnej

Wartości parametrów schematu zastępczego silników asynchronicznych mogą być także oszacowane na podstawie danych katalogowych. W katalogach podaje się zwykle następujące wartości:

P_n – moc znamionowa,
U_n – napięcie znamionowe.
Układ połączeń uzwojenia stojana: gwiazda (*Y*) lub trójkąt (*D*)
I_n – prąd znamionowy,
n_n – znamionowa prędkość obrotowa,
$\cos\varphi_n$ – znamionowy współczynnik mocy,
f_n – częstotliwość znamionowa,
i_r – krotność prądu rozruchowego,
m_r – przeciążalność momentem.

Napięcia i prądy fazowe (U_{fn}, I_{fn}) wyznaczamy z wartości znamionowych dla danej grupy połączeń. Poślizg znamionowy jest równy:

$$s_n = \frac{n_s - n_n}{n_s} \tag{3.75}$$

gdzie n_s jest prędkością synchroniczną wyznaczoną dla częstotliwości znamionowej i liczby par biegunów z zależności:

$$n_s = \frac{60f}{p} \tag{3.76}$$

Wartość liczby par biegunów może być podana w oznaczeniu typu, lecz w praktyce wystarczająca jest znajomość prędkości i częstotliwości znamionowej. Znamionowa prędkość obrotowa jest zwykle bliska prędkości synchronicznej, stąd znajomość częstotliwości umożliwia określenie możliwych prędkości synchronicznych, np. przy 50 Hz możemy uzyskać następujące wartości prędkości synchronicznych: 3000, 1500, 1000, 750, 600 obr/min. Jeśli wartość prędkości znamionowej jest równa na przykład 920 obr/min, to z pewnością prędkość synchroniczna jest równa 1000 obr/min, a liczba par biegunów równa się 3.

Napięcie zwarcia w silnikach klatkowych przyjmuje wartości z zakresu 10÷25% napięcia znamionowego. Wraz ze wzrostem mocy silnika jego procentowa wartość maleje. Można także wyznaczyć napięcie zwarcia ze znajomości prądu rozruchowego (prądu zwarcia):

$$U_z = \frac{U_n}{i_r} \tag{3.77}$$

Prąd biegu jałowego przyjmuje wartości z zakresu 20÷80% prądu znamionowego. Wartość mniejsza dotyczy niskoobrotowych silników dużej mocy. Wartości większe dotyczą silników małych mocy.

Straty mechaniczne przyjmują zwykle wartości z przedziału 0,2÷1,8% mocy znamionowej. Dokładniejsze dane można ustalić z charakterystyk uzyskanych w drodze wieloletnich doświadczeń produkcyjnych [18], przy czym dla większości maszyn małej i średniej mocy można przyjąć, że straty mechaniczne stanowią około 0,5% mocy znamionowej.

$$\Delta P_m = (0{,}2 \div 1{,}8)\% P_n \tag{3.78}$$

Moc czynna pobierana z sieci zasilającej jest równa:

$$P_{1n} = \sqrt{3} U_n I_n \cos\varphi_n \tag{3.79}$$

Straty w uzwojeniu wirnika możemy oszacować na podstawie mocy znamionowej i szacowanych strat mechanicznych:

$$\Delta P_{cu2n} = \frac{s_n}{1 - s_n}(P_n + \Delta P_m) \tag{3.80}$$

Zwykle przyjmuje się, że straty w uzwojeniu stojana są równe stratom w wirniku:

$$\Delta P_{cu2n} = \Delta P_{cu1n} \tag{3.81}$$

Niekiedy w danych katalogowych podawana jest wartość rezystancji uzwojenia stojana i wówczas moc strat w stojanie można policzyć ze znajomości prądów fazowych:

$$\Delta P_{cu1n} = 3R_1 I_{1n}^2 \tag{3.82}$$

Straty w rdzeniu silnika są równe:

$$\Delta P_{Fe} = P_{1n} - P_n - \Delta P_{cu2n} - \Delta P_{cu1n} - \Delta P_m \tag{3.83}$$

Wartości parametrów schematu zastępczego obliczamy kolejno według zależności:

$$R_s = R_r^{'} = \frac{\Delta P_{cu1n}}{3I_{fn}^2} \tag{3.84}$$

$$R_{Fe} = \frac{3U_{fn}^2}{\Delta P_{Fe}} == \frac{U_n^2}{\Delta P_{Fe}} \tag{3.85}$$

$$I_\mu = \sqrt{I_o^2 - (I_{Fe} + I_{20})^2} \tag{3.86}$$

$$I_{Fe} + I_{20} = \frac{\Delta P_{Fe} + \Delta P_m}{3U_{fn}} \tag{3.87}$$

$$X_\mu = \frac{U_{fn}}{I_\mu} \tag{3.88}$$

$$R_z = R_s + R_r^{'} \tag{3.89}$$

$$Z_z = \frac{U_z}{I_{fn}} \tag{3.90}$$

$$X_s = X_r^{'} = \frac{\sqrt{Z_z^2 - R_z^2}}{2} \tag{3.91}$$

Przeliczanie wartości rezystancji na umowną temperaturę odniesienia wyznaczamy z zależności:

$$R_s = R_{s0}(1 + \alpha \Delta T) \tag{3.92}$$

Wartość temperaturowego współczynnika rezystancji jest równa:
dla miedzi:

$$\alpha_{Cu} = 0,0039 \ \ [1/\deg] \tag{3.93}$$

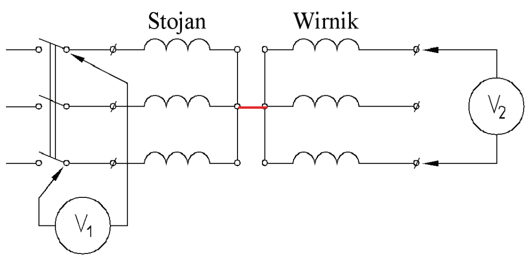
dla aluminium:

$$\alpha_{Al} = 0,00415 \quad [1/\deg] \tag{3.94}$$

Temperatura odniesienia zależy od klasy ciepłoodporności izolacji i wynosi 75°C dla klasy A, B, E oraz 115°C dla F i M.

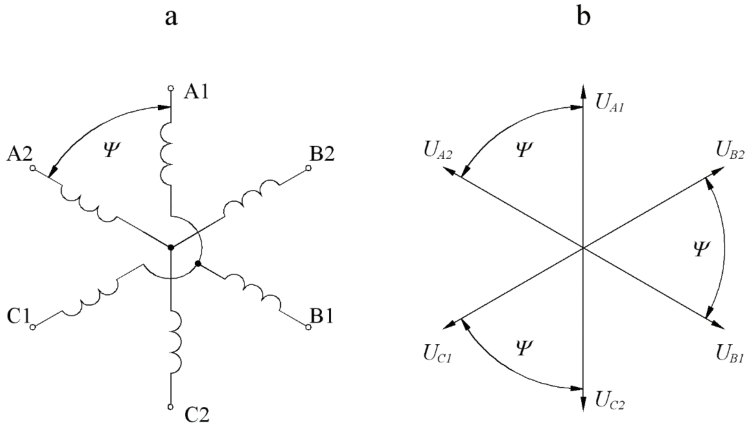
3.6. Przesuwnik fazowy i regulator indukcyjny

Maszyny indukcyjne pierścieniowe, dzięki wyprowadzeniu na zewnątrz końców uzwojenia wirnika, możemy wykorzystać jako maszyny specjalne. W momencie potrzeby regulacji przesunięcia fazowego napięć trójfazowych można użyć maszyny indukcyjnej pierścieniowej do budowy przesuwnika fazowego (rys. 3.25). Jest to związane z koniecznością ingerencji wewnątrz maszyny. Niezbędne jest także zablokowanie możliwości obrotu z jednoczesnym zapewnieniem możliwości obrotu wału wirnika względem stojana. Zwykle stosuje się tu klasyczną przekładnię ślimakową.



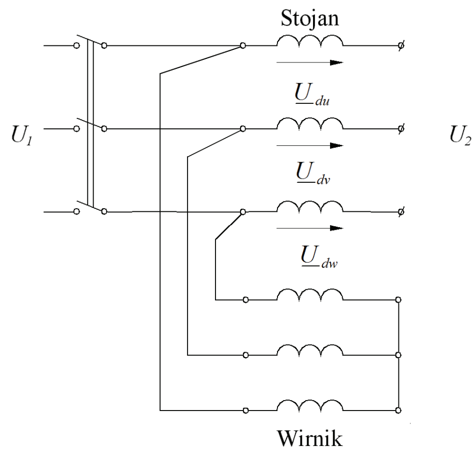
Rys. 3.25. Przesuwnik fazowy

Zasada działania przesuwnika fazowego polega na wytworzeniu wirującego pola kołowego poprzez trójfazowe zasilanie uzwojeń stojana. Wartości napięć indukowanych w poszczególnych uzwojeniach stojana i wirnika są zależne od ich kąta przesunięcia względem wirującego pola (rys. 3.26). W przypadku, gdy pokrywają się osie odpowiednich uzwojeń stojana i wirnika, napięcia są ze sobą w fazie. Przesunięcie wirnika o kąt różny od zera spowoduje, że wartość maksymalna indukowanych napięć pojawi się w różnych uzwojeniach po upływie czasu zależnym od prędkości synchronicznej i wartości kąta. Przy przesunięciu uzwojeń o kąt 180° napięcia będą w przeciwfazie. Dzięki temu przesunięcie mechaniczne wału wirnika względem stojana spowoduje płynną zmianę fazy napięć indukowanych w uzwojeniu wirnika.

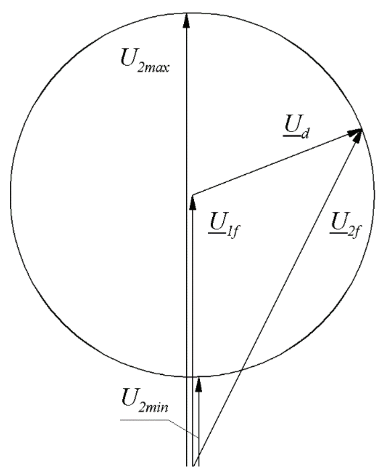


Rys. 3.26. Kąty przesunięcia fazowego pomiędzy osiami uzwojeń oraz napięć fazowych

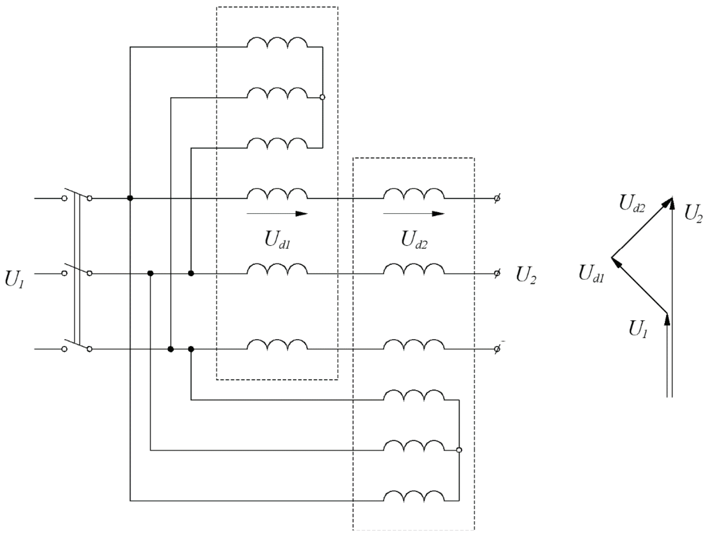
Efekt uzależnienia przesunięcia fazowego pomiędzy napięciami stojana i wirnika daje możliwość zbudowania urządzenia do płynnej regulacji napięcia trójfazowego bez użycia ruchomego styku (jak to ma miejsce w autotransformatorach). Urządzenia takie nazywamy regulatorem indukcyjnym. Sposób połączenia uzwojeń regulatora indukcyjnego pokazano na rysunku 3.27. Z uwagi na konieczność dostępu do wszystkich końcówek jednego z uzwojeń w regulatorze zasilane jest uzwojenie wirnika. Uzwojenie to wytwarza wirujące pole kołowe w szczelinie powietrznej pomiędzy stojanem a wirnikiem. Pole to powoduje zaindukowanie się napięć w uzwojeniu stojana. Każda z faz wirnika jest połączona z odpowiednim uzwojeniem stojana, dzięki czemu, względem punktu neutralnego, na wyjściu regulatora otrzymamy napięcie będące sumą geometryczną wektorów napięcia zasilającego oraz napięcia dodawczego indukowanego w stojanie. Wartości skuteczne napięć na poszczególnych uzwojeniach nie zmieniają się. Zmiana położenia wirnika względem stojana powoduje zmianę przesunięcia fazowego pomiędzy wektorami odpowiednich napięć fazowych (rys. 3.28). W wyniku otrzymamy napięcie o wartości zmieniającej się – od minimalnej (przy kącie przesunięcia fazowego równym 180°) do maksymalnej (przy kącie równym zeru). Regulator indukcyjny wymaga zmian w konstrukcji maszyny indukcyjnej polegającej, podobnie jak w przesuwniku fazowym, na zastosowaniu przekładni ślimakowej, blokując w ten sposób ruch wirnika w przypadku wystąpienia momentu obrotowego (przy obciążeniu regulatora) z jednoczesnym umożliwieniem płynnej zmiany położenia wirnika względem stojana.



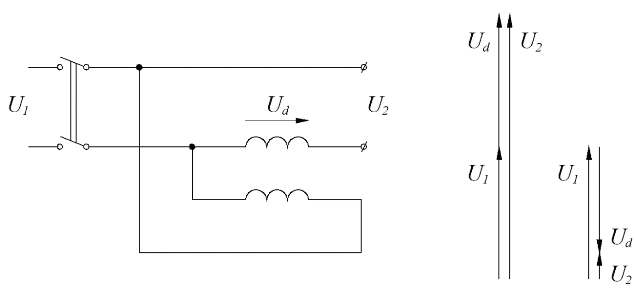
Rys. 3.27. Układ połączeń regulatora indukcyjnego [14]



Rys. 3.28. Wykres wskazowy napięć w jednej fazie regulatora indukcyjnego



Rys. 3.29. Regulator indukcyjny dwumaszynowy (układ połączeń i wykres wskazowy [14])



Rys. 3.30. Regulator indukcyjny jednofazowy (układ połączeń i wykres wskazowy)

Innym problemem różniącym te konstrukcje od typowej maszyny indukcyjnej pracującej jako silnik jest konieczność zmiany sposobu chłodzenia. W silniku indukcyjnym na wale wirnika mocowany jest wentylator wymuszający ruch powietrza wewnątrz maszyny. Przesuwnik fazowy, jak i regulator, mają zablokowany wirnik, stąd konieczność zmiany systemu chłodzenia. Czasami konieczna jest regulacja napięcia, w której nie wystąpi przesunięcie fazowe pomiędzy napięciem zasilającym a wyjściowym. W takich przypadkach w układach trójfazowych można wykorzystać regulator dwumaszynowy (rys. 3.29) lub regulator indukcyjny jednofazowy (rys. 3.30). Może to być także jedna maszyna, w której są umieszczone wszystkie uzwojenia pokazane na rysunku 3.29.

3.7. Wprowadzenie do dynamiki układów trójfazowych

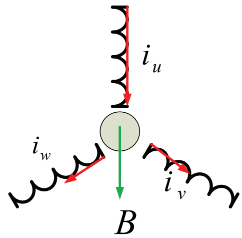
Przyjmijmy, że w żłobkach na obwodzie stojana maszyny indukcyjnej nawiniemy uzwojenie, które wytworzy sinusoidalny rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej. Jeśli nawiniemy takie trzy uzwojenia przesunięte na obwodzie stojana o kąt 120° i zasilimy każde z nich różną wartością prądu, to wypadkowa siła magnetomotoryczna będzie sumą *smm* wytworzonych przez prądy w kolejnych fazach. Jeśli na przykład we wszystkich trzech uzwojeniach będą płynęły trzy prądy o identycznej wartości, to wypadkowe pole magnetyczne generowane w szczelinie przez sumaryczną *smm* będzie się znosić. Możemy to porównać do sumy trzech wektorów przesuniętych wzgędem siebie o kąt 120°. Sytuację taką możemy rozszerzyć na dowolne wartości prądów płynących w danej chwili przez każde z uzwojeń. Wypadkowe pole magnetyczne będzie wówczas sumą trzech rozkładów sinusoidalnych, które można traktować jak trzy wektory przesunięte względem siebie o kąt 120°, wymuszające wypadkowe pole magnetyczne. Wypadkowe pole może być traktowane jak wektor, którego położenie w przestrzeni jest zależne od wartości prądów w poszczególnych fazach. Wektor taki może być równoważnie traktowany jako wytworzony przez trzy wektory będące rzutami wektora wypadkowego na poszczególne osie uzwojeń (rys. 3.31). Identyczną wartość wektora wypadkowego możemy uzyskać, stosując dwa uzwojenia przesunięte na obwodzie maszyny o kąt elektryczny 90° (rys. 3.32). Poszczególne wielkości w układzie dwufazowym także możemy traktować jako rzuty wektora wypadkowego na osie dwóch uzwojeń, oznaczanych zwykle literami α i β. Przeliczenie wielkości z układu trójfazowego do dwufazowego musi być także prawidłowe, nie tylko w odniesieniu do wektora wypadkowego, lecz także do ich rzutów na osie uzwojeń, stąd do przeliczenia wartości na przykład *smm* (jako źródła pola magnetycznego) z układu trójfazowego na równoważny dwufazowy można wykorzystać zależności:

$$w_\alpha = (w_U - w_V \sin 30° - w_W \sin 30°)k \tag{3.95}$$

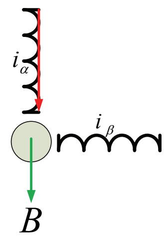
$$w_\beta = (w_V \sin 60° - w_W \sin 60°)k \tag{3.96}$$

Wartość współczynnika k jest dowolna i wynika z faktu, że tę samą wartość pola magnetycznego można wytworzyć przez wykorzystanie różnej liczby zwojów. Jeśli w układzie trójfazowym suma wartości chwilowych prądów jest różna od zera, to w układzie występuje składowa zerowa, która nie wytwarza pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, stąd możemy użyć innej wartości współczynnika proporcjonalności:

$$w_o = (w_U + w_V + w_W)kk_2 \tag{3.97}$$



Rys. 3.31. Wirujące pole kołowe wytworzone przez uzwojenie trójfazowe



Rys. 3.32. Wirujące pole kołowe wytworzone przez uzwojenie dwufazowe

Wygodniejszym zapisem tych równań jest zapis macierzowy (3.98), (3.99). W praktyce analiza dynamiki w układach trójfazowych polega na przeliczaniu wielkości trzech faz na równoważny układ dwufazowy i składową zerową wielkości występujących w opisie układów trójfazowych. Dotyczy to prądów, napięć i strumieni skojarzonych. Przeliczenie wielkości z równoważnego układu dwufazowego do trójfazowego związane jest z użyciem macierzy odwrotnej. Wartości współczynników k i k_2 zależą od założeń dotyczących transformacji. Jeśli będziemy w identyczny sposób transformowali na przykład prąd i napięcie, to jako kryterium doboru współczynników możemy przyjąć równość mocy chwilowej przed i po transformacji.

$$\begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \\ w_o \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 & k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_U \\ w_V \\ w_W \end{bmatrix} \tag{3.98}$$

$$[S]=k\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 & k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

Moc chwilową przed transformacją można przedstawić jako:

$$p=[u_U \quad u_V \quad u_W]\begin{bmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{bmatrix}=[u]^T[i] \tag{3.100}$$

Po transformacji (przy założeniu, że do transformacji prądów i napięć używamy takiej samej wartości k i k_2) otrzymamy:

$$p^{'}=([S][u])^T[S][i]=[u]^T[S]^T[S][i] \tag{3.101}$$

Dla zachowania stałości mocy musi być spełniony warunek:

$$[S]^T[S]=[1] \tag{3.102}$$

Warunek ten umożliwia wyznaczenie wartości poszukiwanych stałych:

$$k^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & k_2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 & k_2 & k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.103}$$

$$k^2\begin{bmatrix} 1+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 \\ -\frac{1}{2}+k_2^2 & 1+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 \\ -\frac{1}{2}+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 & 1+k_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Stąd otrzymamy:

$$-\frac{1}{2}+k_2^2=0 \quad -> \qquad k_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.105}$$

$$k^2(1+k_2^2)=1 \quad -> \quad k^2=\frac{2}{3} \;->\; k=\sqrt{\frac{2}{3}} \tag{3.106}$$

Macierz transformacji, nazywanej od autora, Edyty Clark [1], transformacją Clarke'a, to:

$$[S]=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

Macierz odwrotna przyjmuje postać:

$$[S]^{-1}=[S]^T=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

Inne metody wyboru wartości współczynników k i k_2 w praktyce opierają się na przyjmowaniu innych wartości przy przeliczaniu prądu, a innych w odniesieniu do napięcia. Oczywistym jest, że zachowując moc chwilową współczynniki te muszą spełniać warunek:

$$k_u k_i=\frac{2}{3} \tag{3.109}$$

Brak zachowania tego warunku powoduje, że wartość chwilowa mocy po transformacji ulega zmianie, co należy uwzględnić w analizie mocy, strat i momentu elektromagnetycznego maszyny. Często stosowanym współczynnikiem dla prądów i napięć jest:

$$k=\frac{2}{3} \tag{3.110}$$

Macierz transformacji przyjmuje wówczas postać:

$$[S] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.111}$$

$$[S]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{3.112}$$

Moc chwilowa po transformacji jest zbyt mała, gdyż:

$$k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \tag{3.113}$$

W takim przypadku moc chwilową po transformacji należy zwiększyć i obliczać według zależności:

$$p = \frac{3}{2}(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + u_0 i_0) \tag{3.114}$$

Współczynnik o tej wartości jest bardzo wygodny, macierz odwrotna ma bowiem taką postać, w której, przy pominięciu składowej zerowej, wartości wielkości w fazie A są równe wielkościom w fazie α. Wielkości (prądu, napięcia czy strumieni) w osiach α i β prezentuje się zwykle w postaci wektorów przestrzennych:

$$\underline{w} = w_\alpha + jw_\beta \tag{3.115}$$

Często metodą opisu jest stosowanie dodatkowej transformacji, wyznaczającej od razu wektory przestrzenne w opisie liczb zespolonych. Przy transformacji zachowującej stałą moc przy przekształceniu należy wówczas pomnożyć równania we współrzędnych α, β, 0 przez macierz:

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{3.116}$$

Wartość współczynnika przed macierzą transformacji wyznacza się z warunku stałości mocy:

$$[C][C]^{*T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.117}$$

Postępowanie takie jest równoznaczne z transformacją z układu współrzędnych naturalnych do postaci wektorowej poprzez stosowanie macierzy:

$$[C][S] = [T] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.118}$$

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}} \tag{3.119}$$

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi}{3}} = e^{-\frac{2\pi}{3}} \tag{3.120}$$

Macierz odwrotna przyjmuje wówczas postać:

$$[T]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

Przy stosowaniu macierzy w postaci zespolonej w takiej postaci należy pamiętać o założeniach dotyczących doboru współczynników. Całkowita moc po przekształceniu jest równa mocy przed transformacją, natomiast moc chwilową należy tu liczyć jako:

$$p = \underline{u}\underline{i}^* + \underline{u}^*\underline{i} + u_0 i_0 \tag{3.122}$$

Częściej stosowaną w praktyce postacią macierzy transformacyjnej o współczynnikach zespolonych jest:

$$[T^{'}] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.123}$$

Stosowanie takiej postaci macierzy do układu trójfazowego bez składowej zerowej sprowadza przekształcenie trzech wielkości fazowych do jednego wektora przestrzennego. Przekształcenie prądów fazowych daje wówczas następującą postać:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}} \\ \underline{\mathbf{i}}^* \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{bmatrix} \tag{3.124}$$

gdzie:

$$\underline{\mathbf{i}} = i_\alpha + j i_\beta \tag{3.125}$$

Macierz odwrotna przyjmuje postać:

$$[T^{'}]^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.126}$$

Prąd fazy A można (przy pominięciu składowej zerowej) wyznaczyć ze wzoru:

$$i_A = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{i}} + \underline{\mathbf{i}}^*) = i_\alpha \tag{3.127}$$

Wartość mocy po transformacji będzie zaniżona i wówczas przy pominięciu składowej zerowej moc w układzie należy liczyć jako:

$$p = \frac{3}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{ui}^*\} = \frac{3}{2}(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) \tag{3.128}$$

Do tej pory opisywano transformacje wielkości typu prąd, napięcie, strumień układu trójfazowego do układu dwufazowego. W praktyce należy rozważyć, w jaki sposób następuje przekształcenie równań opisujących stan dynamiczny w układach trójfazowych. Równania układu trójfazowego można przedstawić w postaci:

$$u_A = R i_A + \frac{d\psi_A}{dt} \tag{3.129}$$

$$u_B = Ri_B + \frac{d\psi_B}{dt} \tag{3.130}$$

$$u_C = Ri_C + \frac{d\psi_C}{dt} \tag{3.131}$$

Równania te można przedstawić w postaci macierzowej:

$$[u] = [R][i] + \frac{d[\Psi]}{dt} \tag{3.132}$$

Zastosowanie transformacji S sprowadza się do pomnożenia powyższego równania przez macierz S, otrzymując:

$$[S][u] = [S][R][S]^{-1}[S][i] + \frac{d[S][\psi_\alpha]}{dt} \tag{3.133}$$

Przy założeniu jednakowych wartości rezystancji w każdej fazie otrzymamy:

$$[u_{\alpha\beta 0}] = [R][i_{\alpha\beta 0}] + \frac{d[\psi_{\alpha\beta 0}]}{dt} \tag{3.134}$$

lub:

$$u_\alpha = Ri_\alpha + \frac{d\psi_\alpha}{dt} \tag{3.135}$$

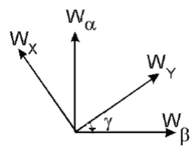
$$u_\beta = Ri_\beta + \frac{d\psi_\beta}{dt} \tag{3.136}$$

$$u_o = Ri_o + \frac{d\psi_o}{dt} \tag{3.137}$$

Jeśli pomijamy składową zerową prądu, to opis matematyczny sprowadza się do dwóch pierwszych równań. Równania te można traktować jak jedno równanie przy wykorzystaniu zmiennych zespolonych w postaci:

$$\underline{u} = R\underline{i} + \frac{d\underline{\psi}}{dt} \tag{3.138}$$

Bardzo często dokonuje się transformacji tych równań do innych układów współrzędnych, przesuniętych względem układu stacjonarnego o pewien kąt γ (rys. 3.33).



Rys. 3.33. Przeliczenie wielkości do innego układu współrzędnych

Transformacji do układu *xy* dokonuje się w sposób następujący:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{bmatrix} \tag{3.139}$$

Transformacja odwrotna:

$$\begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \tag{3.140}$$

Przy uwzględnieniu składowej zerowej otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \\ w_o \end{bmatrix} \tag{3.141}$$

Przy transformacji do układu *xy* kąt γ może się zmieniać w czasie, stąd równania w układzie *xy* będą miały postać:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\alpha \cos\gamma + u_\beta \sin\gamma \\ u_y &= -u_\alpha \sin\gamma + u_\beta \cos\gamma \end{aligned} \tag{3.142}$$

Po pomnożeniu przez *j* drugiego równania i dodaniu stronami otrzymamy:

$$u_x + ju_y = u_\alpha \cos\gamma + u_\beta \sin\gamma - ju_\alpha \sin\gamma + ju_\beta \cos\gamma \tag{3.143}$$

$$\underline{u}_{xy} = (u_\alpha + ju_\beta)\cos\gamma - j(u_\alpha + ju_\beta)\sin\gamma$$

$$\underline{u}_{xy} = \underline{u}(\cos\gamma - j\sin\gamma) \tag{3.144}$$

$$\underline{u}_{xy} = \underline{u}e^{-j\gamma}$$

Przekształcenie do drugiego układu współrzędnych jest zatem równoznaczne z pomnożeniem równań w postaci zespolonej przez $e^{j\gamma}$:

$$\underline{u}e^{-j\gamma} = R\underline{i}e^{-j\gamma} + e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} \tag{3.145}$$

Otrzymamy:

$$\underline{u}_{xy} = R\underline{i}_{xy} + e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} \tag{3.146}$$

$$e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} \tag{3.147}$$

Składnik podany wzorem (3.147) nie daje się przedstawić jako pochodna strumienia w układzie xy, gdyż kąt γ w ogólnym przypadku może być funkcją czasu. Możemy wyznaczyć pochodną strumienia w układzie xy. Otrzymamy:

$$\frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} = \frac{d(e^{-j\gamma}\underline{\underline{\psi}})}{dt} = e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} - j\frac{d\gamma}{dt}e^{-j\gamma}\underline{\psi} \tag{3.148}$$

oraz:

$$e^{j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} = \frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} + j\frac{d\gamma}{dt}\underline{\psi_{dq}} \tag{3.149}$$

$$\underline{u}_{xy} = R\underline{i}_{xy} + \frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} + j\frac{d\gamma}{dt}\underline{\psi_{xy}} \tag{3.150}$$

W przypadku ogólnym oś xy wiruje z prędkością ω_x:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x \tag{3.151}$$

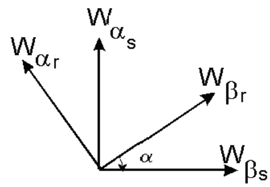
Stąd ostateczna postać równania w układzie wirującym ma postać:

$$\underline{u}_{xy} = R\underline{i}_{xy} + \frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} + j\omega_x\underline{\psi}_{xy} \tag{3.152}$$

W przypadku, gdy przeliczamy wielkości do układu wirującego z prędkością wirnika, przekształcenie takie nazywa się w literaturze transformacją Parka-Goriewa (dq), natomiast gdy jest to prędkość wirowania pola magnetycznego, jest to transformacja Krona (xy) [1].

3.8. Dynamika maszyn indukcyjnych

W maszynach elektrycznych oprócz uzwojeń stacjonarnych (stojan) występują także uzwojenia wirujące umieszczone w wirniku. Rozpatrzmy zatem sytuację, w której występują uzwojenia dwufazowe zarówno w stojanie, jak i wirniku maszyny Uzwojenia wirnika są przesunięte względem stojana o kąt α (rys. 3.34):



Rys. 3.34. Przeliczanie wielkości z wirującego wirnika do układu stacjonarnego

W opisie matematycznym wygodnie jest przedstawić równania wirnika widziane od strony nieruchomych uzwojeń stojana. Przeliczenie wielkości wirnika do obwodu stojana odbywa się zatem podobnie jak w przypadku różnych układów współrzędnych zgodnie z zależnością:

$$\begin{bmatrix} w'_{r\alpha} \\ w'_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{r\alpha} \\ w_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

Jedyna różnica, jaka występuje w powyższych zależnościach, dotyczy znaku przy funkcjach sinus w obu wierszach równania, co wynika z założeń dotyczących kierunku wirowania wirnika względem stojana. Zgodnie z normami kierunek dodatni wyznaczony jest przez kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara, stąd znak „–” w powyższych równaniach.

Przeliczenie obwodu wirującego do układu stojana prowadzi zatem do równania:

$$\underline{u}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} - j\frac{d\alpha}{dt}\underline{\psi}_r \tag{3.154}$$

Szybkość zmiany kąta pomiędzy uzwojeniami stojana i wirnika związana jest z prędkością kątową:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \tag{3.155}$$

Łącząc transformacje wirnika do układu stacjonarnego i transformacje do dowolnego układu wirującego otrzymamy znaną z literatury postać równań opisujących maszyny trójfazowe w dowolnym układzie współrzędnych wirujących:

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j\omega_x \underline{\psi}_s \tag{3.156}$$

$$\underline{u}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + j(\omega_x - \omega)\underline{\psi}_r \tag{3.157}$$

Równania te należy uzupełnić o zależności pomiędzy strumieniami skojarzonymi a wartościami prądów. Dla maszyny asynchronicznej pierścieniowej, przy stosowaniu założeń upraszczających, uwzględniających jedynie pierwszą harmoniczną pola, magnetycznego w szczelinie powietrznej i, przy idealnej symetrii maszyny, równania te w układzie współrzędnych naturalnych mają postać:

$$[\psi_s] = [L_{\sigma s}][i_s] + [M_{ss}][i_s] + [M_{sr}][i_r] \tag{3.158}$$

$$[\psi_r] = [L_{\sigma r}][i_r] + [M_{rr}][i_r] + [M_{sr}]^T[i_s] \tag{3.159}$$

Macierz indukcyjności związanych ze strumieniem rozproszenia stojana ma postać:

$$[L_{\sigma s}] = L_{\sigma s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.160}$$

Macierz indukcyjności wzajemnych w obrębie uzwojeń stojana to:

$$[M_{ss}] = M_{ss}\begin{bmatrix} 1 & \cos 120° & \cos 240° \\ \cos 240° & 1 & \cos 120° \\ \cos 120° & \cos 240° & 1 \end{bmatrix} \tag{3.161}$$

$$[M_{ss}] = M_{ss}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{3.162}$$

W równaniach (3.158) i (3.159) występują składniki macierzy indukcyjności mnożone przez wektor prądu:

$$[\psi]=[L][i] \tag{3.163}$$

Transformacja każdego z tych składników polega na lewostronnym mnożeniu przez macierz transformacji [*S*]. Wektor prądu także podlega transformacji, stąd każdy z tych składników musi być przeliczany zgodnie z równaniem:

$$[S][\psi]=[S][L][S]^{-1}[S][i] \tag{3.164}$$

Macierze indukcyjności są zatem transformowane zgodnie z zależnością:

$$[L_{\alpha\beta 0}]=[S][L_{UVW}][S]^{-1} \tag{3.165}$$

Macierz diagonalna indukcyjności rozproszenia nie zmienia swojej postaci, natomiast macierz indukcyjności wzajemnych po transformacji uzyska postać*:*

$$[M_{ss}^{\alpha\beta 0}]=\frac{3}{2}M_{ss}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.166}$$

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik zależy od liczby faz wirnika. Można udowodnić, że każde symetryczne uzwojenie wielofazowe, przy uwzględnieniu jedynie podstawowej harmonicznej pola, można przedstawić w postaci równoważnego układu dwufazowego. Dla wirnika klatkowego jako liczbę faz przyjmuje się liczbę prętów klatki wirnika. Dla uproszczenia analizy przyjmijmy, że liczba faz wirnika jest równa liczbie faz stojana (silnik pierścieniowy). Przy takich założeniach macierze indukcyjności wirnika mają postać identyczną jak w stojanie:

$$[L_{\sigma r}]=L_{\sigma r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.167}$$

Macierz indukcyjności związanych ze strumieniem głównym w obrębie wirnika ma postać identyczną jak w obrębie stojana i po transformacji przyjmie postać:

$$[M_{rr}^{\alpha\beta 0}]=\frac{3}{2}M_{rr}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.168}$$

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik ma postać zależną od kąta pomiędzy uzwojeniem stojana i wirnika:

$$[M_{sr}] = M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha + 120°) & \cos(\alpha + 240°) \\ \cos(\alpha + 240°) & \cos\alpha & \cos(\alpha + 120°) \\ \cos(\alpha + 120°) & \cos(\alpha + 240°) & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{3.169}$$

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik przyjmuje po transformacji postać:

$$[M_{sr}^{\alpha\beta 0}] = \frac{3}{2} M_{sr} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.170}$$

Uzwojenie wirnika i stojana różnią się liczbą zwojów, liczbą faz (w silniku klatkowym liczba faz jest równa liczbie prętów wirnika) oraz sposobem rozłożenia uzwojeń w przestrzeni. Efekt rozłożenia uzwojeń w przestrzeni uwzględnia się poprzez stosowanie współczynników uzwojenia. Stąd wygodnie jest przekształcić równania wirnika w taki sposób, aby wielkości występujące w równaniach stojana i wirnika były porównywalne. Zwykle operację taką przeprowadza się, podobnie jak w transformatorach, przez zastosowanie przekładni prądowej i napięciowej:

$$\vartheta_i = \frac{m_r}{m_s} \frac{z_r k_r}{z_s k_s} \tag{3.171}$$

$$\vartheta_u = \frac{z_s k_s}{z_r k_r} \tag{3.172}$$

Przyjęcie takich wartości przekładni prądowej wynika z dostosowania siły magnetomotorycznej wirnika do siły magnetomotorycznej stojana, natomiast przekładni napięciowej z wyrównania sił elektromagnetycznych fazowych wirnika do fazy stojana. Równania wirnika można wówczas przedstawić jako:

$$u_r \vartheta_u = R_r \vartheta_u \frac{\vartheta_i}{\vartheta_i} i_r + \frac{d\psi_r \vartheta_u}{dt} \tag{3.173}$$

Wielkości wirnika należy przeliczać według zależności:

$$u_r^{'} = u_r \vartheta_u \tag{3.174}$$

$$i_r^{'} = i_r \vartheta_i \tag{3.175}$$

$$R_r^{'} = R_r \frac{\vartheta_u}{\vartheta_i} = \frac{m_s}{m_r}(\frac{z_s k_s}{z_r k_r})^2 \tag{3.176}$$

$$L_r^{'} = L_r \frac{\vartheta_u}{\vartheta_i} = \frac{m_s}{m_r}(\frac{z_s k_s}{z_r k_r})^2 \tag{3.177}$$

Biorąc pod uwagę definicje współczynnika indukcyjności wzajemnej M_{sr}, można wykazać, że przy założeniu sinusoidalnego rozkładu pola magnetycznego na obwodzie maszyny wartości współczynników indukcyjności wzajemnej są równe:

$$M_{ss} = \vartheta_u M_{sr} \tag{3.178}$$

$$M_{ss} = \frac{\vartheta_u}{\vartheta_i} M_{rr} \tag{3.179}$$

Wygodnie jest, po przeliczeniu wielkości strony wirnika na stronę stojana, oznaczyć wielkości występujące w równaniach jako:

$$L_\mu = \frac{3}{2} M_{ss} \tag{3.180}$$

$$L_s = L_{\sigma s} + L_\mu \tag{3.181}$$

$$L_r^{'} = L_{\sigma r}^{'} + L_\mu \tag{3.182}$$

Po wykonaniu takich podstawień otrzymamy równania opisujące model dynamiki silnika posiadający dwa uzwojenia w stojanie i dwa w wirniku. Równania maszyny (przy pominięciu składowej zerowej) przyjmują postać:

$$u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} \tag{3.183}$$

$$u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} \tag{3.184}$$

$$u_{r\alpha}^{'} = R_r^{'} i_{r\alpha} + \frac{d\psi_{r\alpha}^{'}}{dt} \tag{3.185}$$

$$u_{r\beta}^{'} = R_r^{'} i_{r\beta}^{'} + \frac{d\psi_{r\beta}^{'}}{dt} \tag{3.186}$$

W dalszych równaniach dla uproszczenia opuścimy znak ’ – oznaczający zastosowanie przekładni prądowej i napięciowej maszyny. Zależności strumieniowo-prądowe przyjmują postać:

$$\psi_{s\alpha} = L_s i_{s\alpha} + L_\mu i_{r\alpha} \cos\alpha - L_\mu i_{r\beta} \sin\alpha \tag{3.187}$$

$$\psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + L_\mu i_{r\alpha} \sin\alpha + L_\mu i_{r\beta} \cos\alpha \tag{3.188}$$

$$\psi_{r\alpha} = L_r i_{r\alpha} + L_\mu i_{s\alpha} \cos\alpha + L_\mu i_{s\beta} \sin\alpha \tag{3.189}$$

$$\psi_{r\beta} = L_r i_{r\beta} - L_\mu i_{s\alpha} \sin\alpha + L_\mu i_{s\beta} \cos\alpha \tag{3.190}$$

Po pomnożeniu równań z indeksem β przez j i dodaniu stronami odpowiednich równań otrzymamy:

$$\psi_{s\alpha} + j\psi_{s\beta} = L_s(i_{s\alpha} + ji_{s\beta}) + L_\mu \cos\alpha(i_{r\alpha} + ji_{r\beta}) + jL_\mu \sin\alpha(i_{r\alpha} + ji_{r\beta}) \tag{3.191}$$

$$\psi_{r\alpha} + j\psi_{r\beta} = L_r(i_{r\alpha} + ji_{r\beta}) + L_\mu \cos\alpha(i_{s\alpha} + ji_{s\beta}) - jL_\mu \sin\alpha(i_{s\alpha} + ji_{s\beta}) \tag{3.192}$$

Uzyskamy opis równań strumieniowo-prądowych w postaci zespolonej:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{3.193}$$

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + L_\mu \underline{i}_s e^{-j\alpha} \tag{3.194}$$

Pomnożenie równań wirnika przez wielkość $e^{j\alpha}$ jest równoznaczne z transformacją równań opisujących wirnik do układu stacjonarnego, otrzymamy wówczas:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}_r^{'} \tag{3.195}$$

$$\underline{\psi}_r^{'} = L_r \underline{i}_r^{'} + L_\mu \underline{i}_s \tag{3.196}$$

$$\underline{i}_r^{'} = \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{3.197}$$

$$\underline{\psi}_r^{'} = \underline{\psi}_r^{'} e^{j\alpha} \tag{3.198}$$

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} \tag{3.199}$$

$$\underline{u}_r e^{j\alpha} = R_r e^{j\alpha} \underline{i}_r + e^{j\alpha} \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} \tag{3.200}$$

$$\underline{u}_r^{'} = R_r \underline{i}_r^{'} + e^{j\alpha} \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} \tag{3.201}$$

$$\frac{d\underline{\psi}_r'}{dt}=\frac{d(e^{j\alpha}\underline{\psi}_r)}{dt}=e^{j\alpha}\ \frac{d\underline{\psi}_r}{dt}+\underline{\psi}_r\ \frac{de^{j\alpha}}{dt} \tag{3.202}$$

$$\frac{d\underline{\psi}_r'}{dt}=e^{j\alpha}\ \frac{d\underline{\psi}_r'}{dt}+\underline{\psi}_r' je^{j\alpha}\ \frac{d\alpha}{dt} \tag{3.203}$$

$$e^{j\alpha}\ \frac{d\underline{\psi}_r}{dt}=\frac{d\underline{\psi}_r'}{dt}-j\frac{d\alpha}{dt}\underline{\psi}_r' \tag{3.204}$$

Równana strumieniowo-prądowe maszyny asynchronicznej przyjmują postać:

$$\underline{\psi}_s=L_s\underline{i}_s+L_\mu\underline{i}_r' \tag{3.205}$$

$$\underline{\psi}_r'=L_r\underline{i}_r'+L_\mu\underline{i}_s \tag{3.206}$$

Ostateczna postać równań dynamiki w układzie stacjonarnym to:

$$\underline{u}_s=R_s\underline{i}_s+\frac{d\underline{\psi}_s}{dt} \tag{3.207}$$

$$\underline{u}_r'=R_r\underline{i}_r'+\frac{d\underline{\psi}_r'}{dt}-j\frac{d\alpha}{dt}\underline{\psi}_r' \tag{3.208}$$

Wyprowadzone równania należy uzupełnić równaniem dynamiki masy wirującej, która, przy założeniu stałej wartości momentu bezładności, ma postać:

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{J}(M_e-M_0) \tag{3.209}$$

gdzie J jest momentem bezwładności, M_e momentem elektromagnetycznym wytworzonym w maszynie indukcyjnej, a M_0 momentem obciążenia. W celu uzyskania zależności na moment maszyny indukcyjnej należy wyznaczyć energię zgromadzoną w polu magnetycznym E_e oraz jej pochodną względem kąta obrotu α:

$$M_e=-\frac{dE_e}{d\alpha} \tag{3.210}$$

Wzór na energię zgromadzoną w polu magnetycznym możemy wyprowadzić, wykorzystując równania napięciowe n obwodów sprzężonych magnetycznie ($k=1..n$):

$$u_k=Ri_k+\frac{d\Psi_k}{dt} \tag{3.211}$$

Po wymnożeniu tego *k*-tego równania opisującego *k*-te uzwojenie przez wartość chwilową prądu otrzymamy zależność na moc chwilową dostarczoną do *k*-tego uzwojenia:

$$p_k = u_k i_k = R i_k^2 + i_k \frac{d\Psi_k}{dt} \tag{3.212}$$

W równaniu występują dwa składniki (dla danej wartości kąta obrotu):
– straty mocy w uzwojeniach (w miedzi),
– moc pola magnetycznego

Energię zgromadzoną w polu magnetycznym możemy zatem obliczyć ze wzoru:

$$E_e = \sum_k \int_0^t i_k \frac{d\Psi_k}{dt} dt \tag{3.213}$$

$$E_e = \sum_k \int_0^t i_k d\Psi_k \tag{3.214}$$

Przyjmijmy, że indukcyjności własne i wzajemne są wartościami stałymi (założenie liniowości obwodu magnetycznego), wówczas:

$$\Psi_k = L_k i_k + M_{ki(k \neq i)} i_i \tag{3.215}$$

Dla uproszczenia analizy dalsze rozważania będą obejmowały tylko dwa uzwojenia sprzężone:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \tag{3.216}$$

$$\Psi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1 \tag{3.217}$$

Energię zgromadzoną w polu magnetycznym dwóch uzwojeń sprzężonych możemy wyznaczyć z zależności:

$$E_e = \int i_1 d(L_1 i_1 + M_{12} i_2) + \int i_2 d(L_2 i_2 + M_{12} i_1) \tag{3.218}$$

$$E_e = L_1 \int i_1 di_1 + M_{12} \int i_1 di_2 + L_2 \int i_2 di_2 + M_{12} \int i_2 di_1 \tag{3.219}$$

$$E_e = L_1 \int i_1 di_1 + M_{12} \int (i_1 di_2 + i_2 di_1) + L_2 \int i_2 di_2 \tag{3.220}$$

$$E_e = L_1 \int i_1 di_1 + M_{12} \int d(i_1 i_2) + L_2 \int i_2 di_2 \tag{3.221}$$

$$E_e = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2 \tag{3.222}$$

$$E_e = \frac{1}{2} i_1 (L_1 i_1 + M_{12} i_2) + \frac{1}{2} i_2 (L_2 i_2 + M_{12} i_1) \tag{3.223}$$

Energię zgromadzoną w dwóch uzwojeniach można wyznaczyć z zależności:

$$E_e = \frac{1}{2} i_1 \psi_1 + \frac{1}{2} i_2 \psi_2 \tag{3.224}$$

W ogólnym przypadku dla n uzwojeń (k=1..*n*):

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_k i_k \psi_k \tag{3.225}$$

Wzór ogólny na moment elekromagnetyczny można zatem wyrazić zależnością:

$$M_e = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha_m} (\sum_k i_k \psi_k) \tag{3.226}$$

W przypadku przekształcenia równań maszyny indukcyjnej do układu stacjonarnego, przy pominięciu składowej zerowej, energię zgromadzoną w polu magnetycznym można wyrazić zależnością [15]:

$$E = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4} (i_{s\alpha} \psi_{s\alpha} + i_{s\beta} \psi_{s\beta} + i_{r\alpha} \psi_{r\alpha} + i_{r\beta} \psi_{r\beta}) \tag{3.227}$$

W zapisie wektorowym możemy napisać:

$$E = \frac{3}{4} \sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4} \mathrm{Re}\{\underline{i}_s^* \underline{\psi}_s + \underline{i}_r^* \underline{\psi}_r\} \tag{3.228}$$

Biorąc pod uwagę równania strumieniowo-prądowe:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{3.229}$$

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + L_\mu \underline{i}_s e^{-j\alpha} \tag{3.230}$$

Otrzymamy:

$$E = \frac{3}{4}\sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4}\mathrm{Re}\{L_s \underline{i}_s^* + L_\mu \underline{i}_s \underline{i}_s^* e^{-j\alpha} + L_r \underline{i}_s^* \underline{i}_r + L_\mu \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\alpha}\} \tag{3.231}$$

Jako że zależność na moment wyznaczona jest jako pochodna po kącie obrotu, to po wykonaniu różniczkowania otrzymamy:

$$M_e = -\frac{3}{4} p\,\mathrm{Re}\{-jL_\mu \underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\alpha} + jL_\mu \underline{i}_r^* \underline{i}_r e^{j\alpha}\} \tag{3.232}$$

$$M_e = -\frac{1}{2} pL_\mu\, \mathrm{Im}\{-\underline{i}_s \underline{i}_s^* e^{-j\alpha} + \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\alpha}\} \tag{3.233}$$

Oznaczając:

$$\underline{i}_r^{'} = \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{3.234}$$

otrzymamy:

$$M_e = -\frac{3}{4} pL_\mu\, \mathrm{Im}\{-\underline{i}_s \underline{i}_r^{'*} + \underline{i}_s^* \underline{i}_r^{'}\} \tag{3.235}$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{i}_s \underline{i}_r^{'*}\} = -\mathrm{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{i}_r^{'}\} \tag{3.236}$$

$$M_e = \frac{3}{2} pL_\mu\, \mathrm{Im}\{\underline{i}_s \underline{i}_r^{'*}\} \tag{3.237}$$

$$M_e = \frac{3}{2} pL_\mu (i_{s\beta} i_{r\alpha}^{'} - i_{s\alpha} i_{r\beta}^{'}\} \tag{3.238}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_{s_r} + L_\mu \underline{i}_{rs}^{'} \tag{3.239}$$

oraz:

$$M_e = -\frac{3}{2} pL_\mu\, \mathrm{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{i}_r^{'}\} \tag{3.240}$$

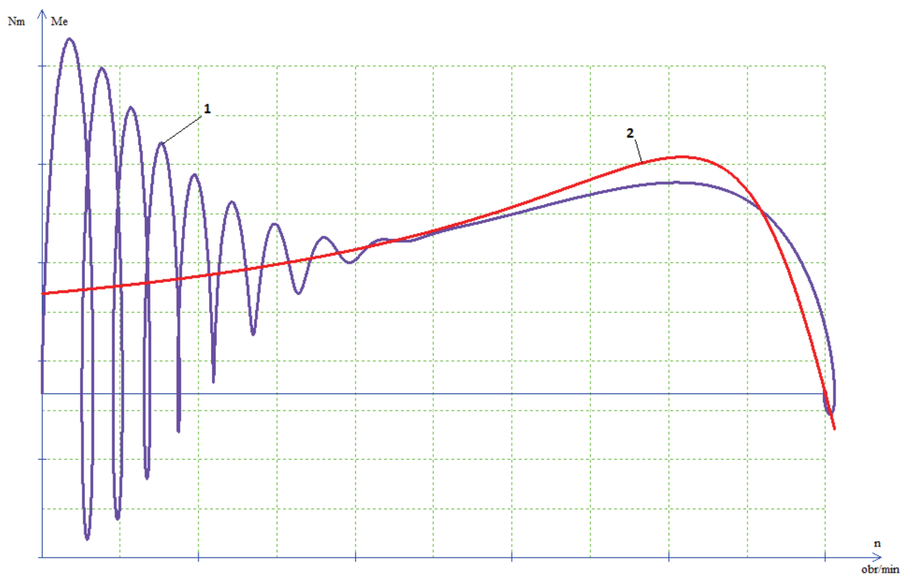
otrzymamy:

$$\underline{i}_r^{'} = \frac{\underline{\psi}_s - L_s \underline{i}_s}{L_\mu} \tag{3.241}$$

$$M_e = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{\psi}_s^{'}\} \tag{3.242}$$

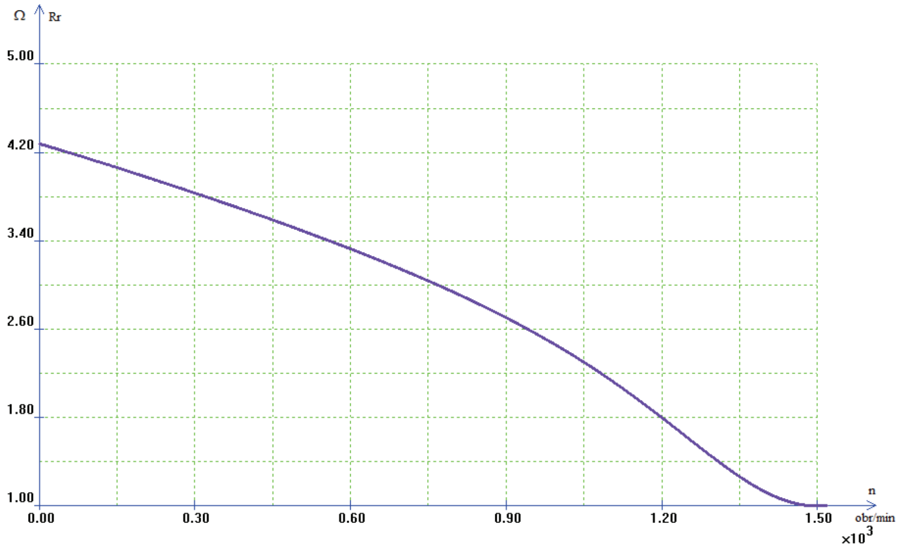
$$M_e = \frac{3}{2} p (i_{s\alpha}\psi_{s\beta} - i_{s\beta}\psi_{s\alpha}) \tag{3.243}$$

Równania dynamiki można rozwiązać numerycznie korzystając z wielu dostępnych pakietów oprogramowania (np. Matlab, Simulink) lub tworząc własne rozwiązania programów symulacyjnych. Na rysunku 3.35 pokazano przykładowe zależności momentu elektromagnetycznego wytwarzanego w maszynie w czasie rozruchu (krzywa 1), opisanego równaniem (3.243). Rysunki są wykonane przy wykorzystaniu autorskiego programu *asynch_c.exe*. Krzywa 2 przedstawia charakterystykę mechaniczną silnika i jest wyznaczona na podstawie analizy schematu zastępczego (rys. 3.10).

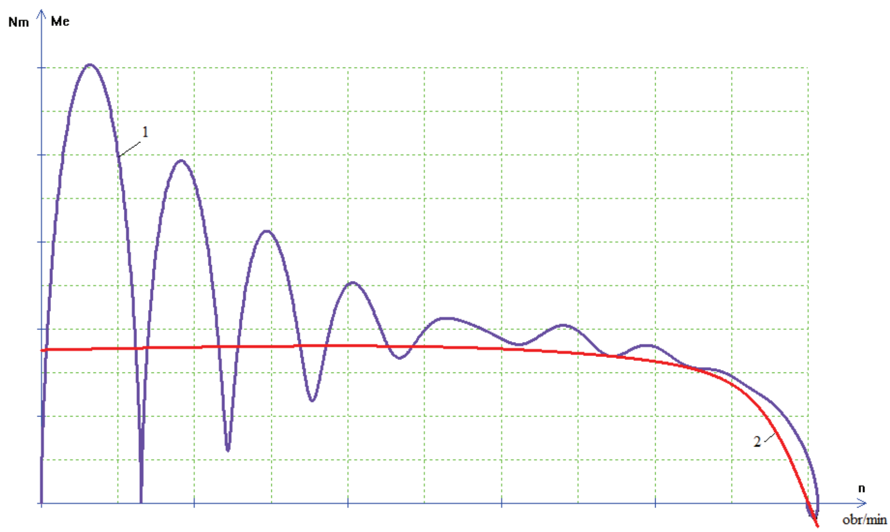


Rys. 3.35. Zależność momentu od prędkości obrotowej silnika klatkowego małej mocy

Przedstawiony wyżej model dynamiki maszyny indukcyjnej klatkowej jest poprawny dla maszyn o małej mocy. W równaniach tych pomijamy zmiany parametrów modelu wynikające ze zmian temperatury uzwojeń. Pomija się także wpływ wartości częstotliwości prądu w prętach wirnika na wartość rezystancji wirnika. W zależności od wymiarów pręta klatki wirnika należy uwzględnić zjawisko wypierania prądu w prętach klatki [18]. Na rysunku 3.36 pokazano przykładowy zakres zmiany wartości rezystancji klatki wirnika w zależności od prędkości obrotowej maszyny o liczbie par biegunów równej 2 przy rozruchu bezpośrednim i zasilaniu silnika z sieci (50 Hz). Efektem zmiany wartości rezystancji jest zmiana kształtu zależności momentu od prędkości obrotowej; dla prezentowanej maszyny krzywe te pokazano na rysunku 3.37.

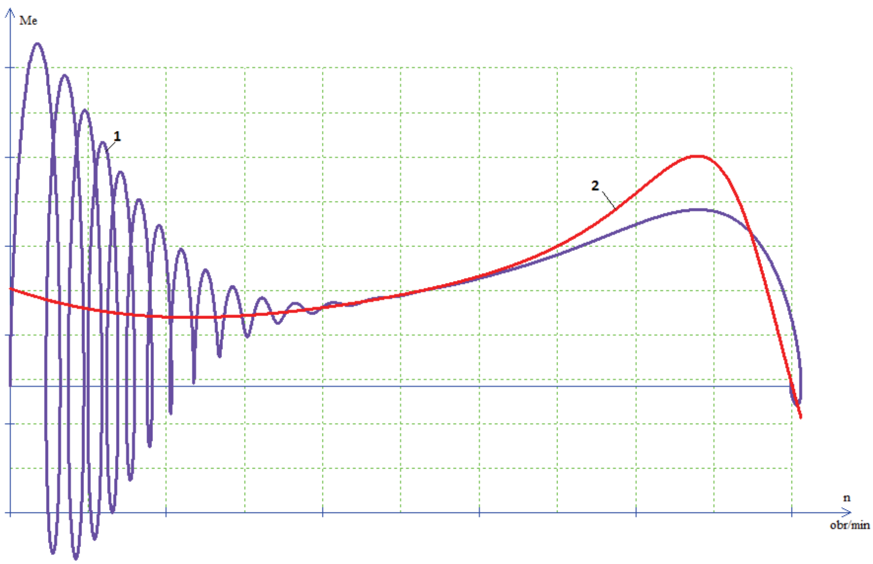


Rys. 3.36. Przykładowy zakres zmian rezystancji wirnika w zależności od prędkości obrotowej w silniku klatkowym głębokożłobkowym



Rys. 3.37. Zależność momentu od prędkości obrotowej silnika klatkowego głębokożłobkowego

Niekiedy celowo buduje się maszyny klatkowe, w których na wirniku są umieszczone dwie klatki o różnej wartości rezystancji prętów. Uzyskuje się w ten sposób wzrost wartości momentu rozruchowego, przy zachowaniu podobnej zależności prędkości od momentu w zakresie normalnej pracy. Skutkiem stosowania takiego rozwiązania jest kształt charakterystyki prędkości od momentu z charakterystycznym obniżeniem wartości momentu w trakcie rozruchu rysunku 3.38.



Rys. 3.38. Zależność momentu od prędkości obrotowej silnika dwuklatkowego

W ogólnym przypadku kształt charakterystyki mechanicznej silnika klatkowego zależy od konstrukcji i wielkości maszyny, szczególnie kształtu i wielkości prętów klatki wirnika [18].

3.9. Uwagi ogólne

65% energii elektrycznej wytworzonej na całym świecie przetwarza się na energię mechaniczną głównie poprzez wykorzystanie silników indukcyjnych. Maszyny indukcyjne pracują jako generatory w wielu małych elektrowniach wodnych i wiatrowych. Istota budowy i zjawiska fizyczne występujące w maszynach indukcyjnych wykorzystywane są w wielu innych urządzeniach automatyki przemysłowej, są to na przykład elektromaszynowe przetwornice częstotliwości, przesuwniki fazowe, regulatory indukcyjne, transformatory położenia kątowego (resorvery), selsyny i inne. Maszyny indukcyjne pracują zwykle jako trójfazowe, lecz w zależności od potrzeb stosowane są rozwiązania jedno- i dwufazowe. Przy dużych mocach spotyka się maszyny wielofazowe (o liczbie faz większej niż 3). Silniki indukcyjne zasilane są zarówno z sieci trójfazowej, jak i z przekształtników energoelektronicznych. Rozwiązania takie dają możliwość zmiany wartości prędkości obrotowej poprzez regulację częstotliwości z jednoczesną zmianą wartości napięcia zasilającego. Sposoby sterowania wymagają estymacji wielkości niedostępnych pomiarowo, takich jak na przykład strumień skojarzony z uzwojeniami wirnika występującymi w modelu opisanym w rozdziale poprzednim. Należy zatem zauważyć, że maszyny indukcyjne są wykorzystywane w większości procesów technologicznych. Ich znajomość jest więc niezbędna dla każdego inżyniera w praktyce przemysłowej. Pamiętać także należy, że wykorzystanie współczesnych rozwiązań energoelektronicznych wymusza również wiele zmian w praktycznym stosowaniu układów napędowych z maszynami indukcyjnymi. Konieczne jest na przykład uwzględnienie zmian w wydajności chłodzenia, stąd stosuje się tu chłodzenie wymuszone innymi maszynami. Niezbędne jest uwzględnienie zjawisk wynikających ze specyfiki działania przekształtników częstotliwości, zmiany dotyczą tu między innymi konieczności stosowania odpowiedniego okablowania, uwzględnienia znacznie większego prądu upływu, istnienia tzw. prądów łożyskowych oraz innych zjawisk nie omawianych w tej publikacji. Zagadnienia opisane w niniejszym skrypcie dotyczą jedynie podstawowych zjawisk oraz modeli matematycznych transformatorów i maszyn indukcyjnych.

Bibliografia

[1] Anuszczyk J.: Maszyny elektryczne w energetyce, WNT, Warszawa 2005

[2] Chapman Stephen J.: Electrical Machinery Fundamentals. McGraw Hill, New York 2005

[3] Fitzgerald A. E., Kingsley Ch., Unmans S. D.: Electric Machinery. McGraw Hill Higher Education 2003

[4] Fleszar J., Śliwińska D., Zadania z maszyn elektrycznych, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2003

[5] Hebenstreit J., Gientkowski Z., Maszyny elektryczne w zadaniach, Wydawnictwo Akademii Rolniczo-Technicznej, Bydgoszcz 2003

[6] http://www.noratel.com/fileadmin/content/downloads/school/3phTransformer.pdf

[7] http://www.sgb-smit.pl/transformatory-mocy/etapy-produkcji-unikalna-technologia-transformatorow-mocy-sgb/obwod-magnetyczny-rdzen-transformatora-mocy/

[8] Jaworski B.M., Diełtaf A.A.: Fizyka. Poradnik encyklopedyczny, PWN, Warszawa 1998

[9] Jezierski E.: Transformatory. WNT, Warszawa 1983

[10] Krakowski M.: Elektrotechnika teoretyczna, PWN, Warszawa 1999

[11] Krause P. C., Wasynczuk O., Sudhoff S. D.: Analysis of Electric Machinery and Drive Systems, John Wiley & Sons Inc. IEEE Press Piscataway, New York 2002

[12] Le Doeuff R., El Hodi Zaim M.: Rotating Electrical Machines. John Wiley & Sons Inc., Hoboken 2010

[13] Mitew E., Maszyny elektryczne, t. 1 i t. 2, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 2005

[14] Plamitzer A.: Maszyny elektryczne. WNT, Warszawa 1982

[15] Przyborowski W., Kamiński G.: Maszyny elektryczne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014

[16] Sen P. G.: Principles of electric machines and Power electronics, John Wiley & Sons, Ontario 1997

[17] Szewczyk A., Wiśniewski A., Puźniak R., Szymczak H.: Magnetyzm i nadprzewodnictwo, PWN, Warszawa 2012
[18] Śliwiński T.: Metody obliczania silników indukcyjnych. t. 1: Analiza, PWN, Warszawa 2008
[19] Turowski J.: Elektrodynamika techniczna, PWN, Warszawa 2014
[20] Wildi Th.: Electrical Machines, Drives and Power Systems, Pearson Education, New Jersey 2006