XVIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania zadań konkursowych - klasy pierwsze

28 marca 2026 r.

1. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie:

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor = x,$$

gdzie $\lfloor r \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą k taką, że $k \leqslant r$. Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie.

Z równości z zadania wynika, że x jest liczbą całkowitą. Zauważmy, że $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{x}{2}$ lub $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{x-1}{2}$, w zależności od parzystości liczby x. W szczególności, dla każdego x zachodzi

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \geqslant \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

Podobnie otrzymujemy, że $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor \geqslant \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$ oraz $\left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \geqslant \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$. Podstawiając to do równania z zadania, otrzymujemy

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \geqslant \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{x}{4} - \frac{3}{4} = x + \frac{x}{12} - \frac{23}{12}.$$

Wynika stąd, że $x \leqslant 23$. Podobnie, skoro część całkowita jest nie większa od liczby, to

$$x = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = x + \frac{x}{12},$$

więc $x \geqslant 0$.

Pozostaje sprawdzić liczby $0, 1, 2, \ldots, 23$. Okazuje się, że rozwiązaniami są liczby $0, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 17, 19, 23$.
Rozwiązanie.

Z równości z zadania wynika, że x jest liczbą całkowitą. Zapiszmy $x = 12q + r$, gdzie q, r są całkowite oraz $0 \leqslant r \leqslant 11$. Równanie z zadania zamienia się na

$$(6 + 4 + 3)q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor = 12q + r,$$

czyli na równanie

$$q = r - \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{4} \right\rfloor \right).$$

Podstawiając kolejno $r = 0, 1, \ldots, 11$, otrzymujemy 12 rozwiązań jak powyżej.

2. Udowodnij, że jeśli liczby a, b, sa dodatnie to

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2a} \geq \frac{2}{3}$$

Rozwiązanie.

Niech $x = a + 2b$ oraz $y = b + 2a$. Wówczas

$$a = \frac{2y - x}{3}, \qquad b = \frac{2x - y}{3}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2a} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{2y-x}{3x} + \frac{2x-y}{3y} \\ &= \frac{1}{3}\left(2\frac{y}{x} - 1 + 2\frac{x}{y} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 1\right). \end{aligned}$$

Ponieważ dla dodatnich x, y mamy

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2,$$

więc

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2a} \geq \frac{2}{3}(2-1) = \frac{2}{3}.$$

Co należało dowieść.

3. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są takie, że $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$ oraz $|BC| + |AC| = |B'C'| + |A'C'|$. Udowodnij, że te trójkąty są przystające.
Rozwiązanie.

Ponieważ

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C' \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A',$$

to trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (cecha kąt–kąt). Niech k oznacza skalę podobieństwa. Wtedy

$$|A'C'| = k \cdot |AC|, \qquad |B'C'| = k \cdot |BC|.$$

Dodając powyższe równości, otrzymujemy

$$|A'C'| + |B'C'| = k(|AC| + |BC|).$$

Z założenia mamy

$$|AC| + |BC| = |A'C'| + |B'C'|.$$

Stąd

$$|AC| + |BC| = k(|AC| + |BC|).$$

Ponieważ $|AC| + |BC| > 0$, więc

$$k = 1.$$

Skala podobieństwa jest równa 1, zatem odpowiednie boki są równe i trójkąty są przystające:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

4. Udowodnij, że nie istnieje liczba całkowita $n \geqslant 2$ oraz liczba pierwsza p taka, że liczba $2^p + 3^p$ jest n-tą potęgą liczby całkowitej.
Rozwiązanie.

Dla $p = 2$ liczba $2^p + 3^p = 13$ nie jest n-tą potęgą liczby całkowitej. Dalej w rozwiązaniu zakładamy, że $p > 2$, zatem p jest nieparzysta. Korzystając z tożsamości

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

wnosimy, że

$$2^p + 3^p = 3^p - (-2)^p = 5 \cdot (3^{p-1} - 3^{p-2} \cdot 2 + \cdots - 3 \cdot 2^{n-p} + 2^{p-1}),$$

czyli 5 dzieli $2^p + 3^p$. Rozważmy liczbę

$$M = 3^{p-1} - 3^{p-2} \cdot 2 + \cdots - 3 \cdot 2^{p-2} + 2^{p-1}.$$

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$

$$3^k = (5-2)^k = (5-2) \cdot (5-2) \cdot \ldots \cdot (5-2) = 5a_k + (-1)^k \cdot 2^k,$$

gdzie a_k jest pewną liczba całkowitą.

Wynika stąd, że k-ty składnik liczby M jest postaci

$$(-1)^{k-1} \cdot 3^{p-k} \cdot 2^{k-1} = (-1)^{k-1}(5a_{p-k} + (-1)^{p-k} \cdot 2^{p-k}) \cdot 2^{k-1} = 5b_k + 2^{p-1},$$

gdzie b_k jest liczbą całkowitą. Po zsumowaniu wynika stąd, że M jest sumą liczby podzielnej przez 5 oraz p składników równych 2^{p-1}, czyli

$$M = 5q + p \cdot 2^{p-1}.$$

Stąd wynika, że

$$2^p + 3^p = 25q + 5 \cdot p \cdot 2^{p-1}.$$

Widzimy zatem, że jeśli $p \neq 5$, to liczba $2^p + 3^p$ jest podzielna przez 5, ale nie jest podzielna przez 25. Tym samym nie może być potęgą liczby całkowitej o wykładniku > 1. Pozostaje sprawdzić przypadek $p = 5$. Jednak $2^5 + 3^5 = 32 + 243 = 275 = 25 \cdot 11$ nie jest potegą liczby całkowitej.