XVIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania zadań konkursowych - klasy drugie

28 marca 2026 r.

1. Niech N będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią podzielną przez każdą z liczb $2, 4, 6, \ldots, 100$. Niech M będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią podzielną przez każdą z liczb $1, 3, 5, \ldots, 49$. Ile wynosi liczba wymierna N/M? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$, $p_k = 97$ liczby pierwsze mniejsze od 100. Wtedy N jest postaci

$$N = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k},$$

gdzie a_k jest największą liczbą taką, że istnieje liczba w zbiorze $\{2, 4, \ldots, 100\}$ podzielna przez $p_k^{a_k}$. Podobnie, liczba M jest postaci

$$M = p_1^{b_1} \ldots p_k^{b_k}$$

gdzie b_k jest największą liczbą taką, że istnieje liczba w zbiorze $\{1, 3, \ldots, 49\}$ podzielna przez $p_k^{b_k}$.

Zauważmy, że $b_1 = 0$, bo żadna liczba z drugiego zbioru jest niepodzielna przez 2. Podobnie, $a_1 = 6$, bowiem największa potęga pojawia się w liczbie 64.

Twierdzimy, że $a_k = b_k$ dla każdego $k \geqslant 2$. Rzeczywiście, załóżmy, że $p_k^{a_k}$ dzieli liczbę $n \in \{2, 4, \ldots, 100\}$. Niech $n = 2^e \cdot m$, gdzie m jest liczbą nieparzystą. Skoro p_k jest nieparzyste, to $p_k^{a_k}$ dzieli m. Ponadto $m \leqslant n/2 = 50$ oraz m jest nieparzyste, więc $m \in \{1, 3, \ldots, 49\}$. To pokazuje, że $a_k \leqslant b_k$. W drugą stronę, załóżmy, że $p_k^{b_k}$ dzieli liczbę $m \in \{1, 3, \ldots, 49\}$. Wtedy liczba $2m$ również jest podzielna przez $p_k^{b_k}$ i $2m \in \{2, 4, \ldots, 100\}$, zatem $b_k \leqslant a_k$. To łącznie pokazuje, że $a_k = b_k$.

Otrzymujemy zatem

$$\frac{N}{M} = p_1^{a_1 - b_1} p_2^{a_2 - b_2} \ldots p_k^{a_k - b_k} = p_1^{a_1 - b_1} = 2^6 = 64.$$

2. Trójkąt ostrokątny ABC wpisany jest w okrąg o. Wysokości tego trójkąta opuszczone z wierzchołków A, B, C, przecinają okrąg o w punktach D, E, F. Okazuje się, że odcinki DE i AB są równoległe oraz odcinki EF i BC są równoległe. Uzasadnij, że również odcinki DF i AC są równoległe.

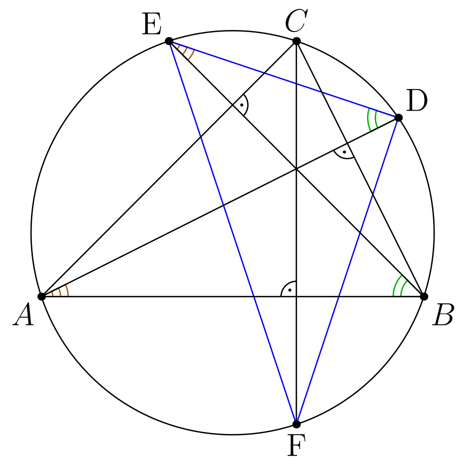
Rozwiązanie.

Skorzystamy w tym rozwiązaniu z faktu, że trzy wysokości w dowolnym trójkącie przecinają się w jednym punkcie.

Oznaczmy przez H punkt przecięcia wysokości w trójkącie ABC, zatem punkt H leży na odcinkach AD, BE, CF. Skoro DE i AB są równoległe, a prosta FH jest prostopadła do AB, to FH jest też prostopadła do DE. Podobnie, skoro EF jest równoległe do BC, a prosta DH jest prostopadła do BC, to DH jest też prostopadła do EF. To implikuje, że H jest punktem przecięcia dwóch wysokości w trójkącie DEF. Z powyższego faktu wynika, że również trzecia wysokość przechodzi przez H, czyli prosta EH zawiera wysokość opuszczoną z E w trójkącie DEF. To znaczy, że EH jest prostopadłe do DF i jednocześnie, z definicji do AC, zatem AC i DF są równoległe.

Sposób II

Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = BCA$. Skoro D leży na wysokości opuszczonej z wierzchołka A, to $\sphericalangle DAB = 90 - \beta$. Skoro kąty $\sphericalangle DAB$ oraz $\sphericalangle DEB$ są oparte na tym samym łuku, to



$$\sphericalangle DEB = \sphericalangle DAB = 90 - \beta.$$

Skoro E leży na wysokości opuszczonej z wierzchołka B, to $\sphericalangle EBA = 90 - \alpha$.

Z założenia zadania wynika, że DE jest równoległe do AB. Zatem kąty DEB oraz EBA są naprzemianległe, więc $90 - \beta = 90 - \alpha$, stąd $\beta = \alpha$.

Podobnie wnioskując, z równoległości EF i BC otrzymujemy, że $\beta = \gamma$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny, a to znaczy, że i DF i AC są równoległe.

3. Dla których liczb n zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ można rozbić na trzy rozłączne podzbiory o równych sumach liczb w nich występujących? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Jeśli zbiór ma być podzielony na trzy podzbiory o równych sumach, to jego suma $S = \frac{n(n+1)}{2}$ musi być podzielna przez 3. Zauważmy, że n musi być postaci $3k$ lub $3k+2$. Dla $n = 3k+1$ suma $S = \frac{(3k+1)(3k+2)}{2}$ nie jest podzielna przez 3.

Sprawdzamy przypadki małych wartości n:

- $n = 2$: suma wynosi 3, więc każda część miałaby sumę 1 – niemożliwe,
- $n = 3$: suma wynosi 6, więc każda część miałaby sumę 2 – niemożliwe.

Dla $n \geq 5$ warunek jest już wystarczający. Dla $n = 5, 6, 8, 9$ mamy podziały:

$$\begin{aligned}
\{1,2,3,4,5\} &= \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{5\};\\
\{1,2,3,4,6\} &= \{1,6\} \cup \{2,5\} \cup \{3,4\};\\
\{1,2,3,4,5,6,7,8\} &= \{1,3,8\} \cup \{2,4,6\} \cup \{5,7\};\\
\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} &= \{1,5,9\} \cup \{2,6,7\} \cup \{3,4,8\}.
\end{aligned}$$

Konstrukcję można dalej przeprowadzić indukcyjnie: jeśli mamy podział

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\} = A_n \cup B_n \cup C_n$$

na sumę rozłącznych podzbiorów o równych sumach, to zbiory

$$A_{n+6} = A_n \cup \{n+1, n+6\} \qquad B_{n+6} = B_n \cup \{n+2, n+5\} \qquad C_{n+6} = C_n \cup \{n+3, n+4\}$$

dają odpowiedni podział zbioru $\{1, 2, 3, \ldots n, n+1, \ldots, n+6\}$.

4. Dane są dwie funkcje $f(x) = 2x$ i $g(x) = x - 1$. Początkowo na tablicy zapisana jest liczba 1. W każdym kroku Anna wykonuje następującą procedurę: jeśli na tablicy zapisana jest liczba n, to Anna ściera ją i zapisuje $f(n)$ lub $g(n)$, wedle wyboru. Uzasadnij, że istnieje ciąg kroków, po których na tablicy pojawi się liczba 2026. Jaka jest najmniejsza liczba kroków, by otrzymać 2026? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Liczbę 2026 można otrzymać na przykład w ten sposób: Anna używa 11 razy funkcji f, otrzymując na koniec $2^{11} = 2048$. Następnie używa ona 22 razy funkcji g, by otrzymać 2026.

By otrzymać najmniejszą liczbę kroków, musimy dokładniej przyjrzeć się całemu procesowi. Gdyby Anna używała tylko funkcji f, startując z 1, otrzymałaby po prostu 2^k.

Każde użycie funkcji g zmniejsza aktualną wartość o 1. Trzeba jednak pamiętać, że jeśli po takim użyciu wykonamy jeszcze kilka razy funkcję f, to to „odjęte 1" także zostanie potem podwojone.

Załóżmy więc, że pewne użycie funkcji g nastąpiło w chwili, gdy do końca całego złożenia pozostało jeszcze dokładnie t użyć funkcji f. Wtedy to pojedyncze odjęcie 1 wpłynie na wynik końcowy nie o 1, lecz o 2^t, bo zostanie jeszcze t razy podwojone.

Jeśli zatem funkcję g zastosowano kolejno w takich miejscach, że po odpowiednich użyciach pozostawało jeszcze $t_1, t_2, \ldots, t_s$ funkcji f, to wynik końcowy jest równy

$$2^k - 2^{t_1} - 2^{t_2} - \ldots - 2^{t_s}.$$

Czyli

$$n = 2^k - \sum_{i=1}^{s} 2^{t_i}.$$

Stąd

$$2^k - n = \sum_{i=1}^{s} 2^{t_i}.$$

Prawa strona jest sumą potęg dwójki, po jednej za każde użycie funkcji g.

W przypadku $n = 2026$ bierzemy $k = 11$, bo

$$2^{10} < 2026 < 2^{11}.$$

Wtedy

$$2^{11} - 2026 = 2048 - 2026 = 22 = 16 + 4 + 2 = 2^4 + 2^2 + 2^1.$$

Dla $n = 2026$ mamy

$$2^{10} = 1024 < 2026 < 2048 = 2^{11},$$

więc potrzeba co najmniej $k = 11$ użyć funkcji f. Ponadto

$$2048 - 2026 = 22 = 16 + 4 + 2,$$

co ma 3 jedynki w zapisie binarnym, więc potrzeba co najmniej 3 użyć funkcji g.

Zatem

$$r(2026) = 11 + 3 = 14.$$

Konstrukcja w 14 krokach:

$$1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{f} 8 \xrightarrow{f} 16 \xrightarrow{f} 32 \xrightarrow{f} 64 \xrightarrow{f} 128 \xrightarrow{g} 127 \xrightarrow{f} 254 \xrightarrow{f} 508 \xrightarrow{g} 507 \xrightarrow{f} 1014 \xrightarrow{g} 1013 \xrightarrow{f} 2026.$$