XVIII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania zadań konkursowych - klasy trzecie

28 marca 2026 r.

1. Na tablicy napisano liczby całkowite dodatnie $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, tak, że utworzyły one ciąg geometryczny. Po dopisaniu jednej liczby (w pewnym miejscu, niekoniecznie na końcu) powstał ciąg arytmetyczny. Dla jakich $n \geqslant 1$ jest to możliwe? Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie.

Dla $n = 3$ jest to możliwe: z ciągu geometrycznego 1, 2, 4 można utworzyć ciąg arytmetyczny 1, 2, **3**, 4. Dla $n = 1, 2$ wystarczy wziąć początkowe wyrazy tego samego ciągu.

Pokażemy, że dla $n \geqslant 4$ odpowiednia konstrukcja nie jest możliwa. Skorzystamy ze znanej nierówności pomiędzy średnimi: jeśli $b < c$ są liczbami całkowitymi dodatnimi, to

$$\frac{b+c}{2} > \sqrt{bc}. \tag{1}$$

(Nierówność ta jest prawdziwa, bowiem $\frac{b+c}{2} - \sqrt{bc} = \frac{1}{2}(\sqrt{c} - \sqrt{b})^2 > 0$.)

Przypomnijmy, że jeśli $a_k < a_{k+1} < a_{k+2}$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k+2}}{2}$, zaś jeśli geometrycznego, to $a_{k+1} = \sqrt{a_k a_{k+2}}$. Z nierówności (1), wynika, że *nie* jest możliwe, by $a_k < a_{k+1} < a_{k+2}$ tworzyły jednocześnie ciąg arytmetyczny i geometryczny.

Ta obserwacja pozwala szybko uzyskać sprzeczność, jeśli $n \geqslant 5$. Istotnie, mamy wtedy ciągi geometryczne a_1, a_2, a_3 oraz a_3, a_4, a_5 i na mocy uwagi powyżej w każdy z nich musimy wstawić nowy element, co nie jest możliwe.

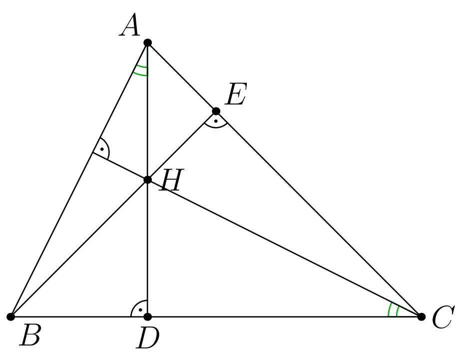
Pozostaje rozważyć przypadek $n = 4$. Mamy wtedy podciągi a_1, a_2, a_3 i a_2, a_3, a_4, więc nowy element musimy wstawić pomiędzy a_2 a a_3. Niech ten nowy element nazywa się $b = \frac{a_2 + a_3}{2}$. Z warunku ciągu arytmetycznego mamy wtedy

$$a_3 = \frac{b + a_4}{2} > \frac{a_2 + a_4}{2} \overset{(1)}{>} \sqrt{a_2 a_4} = a_3,$$

zatem sprzeczność.

2. Wysokości trójkąta ostrokątnego ABC przecinają się w punkcie H. Wyznacz miarę kąta ACB, jeśli wiadomo, że $|CH| = |AB|$.
Rozwiązanie.
Oznaczmy przez D, E punkty przecięcia wysokości opuszczonych z wierzchołków A, B, odpowiednio, z bokami BC, CA, patrz rysunek. Zauważmy, że

$$\sphericalangle DAB = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle HCD.$$



Trójkąty ABD oraz CHD są również prostokątne, więc są podobne na mocy cechy kąt-kąt-kąt. Z założenia wynika, że $|AB| = |CH|$, więc skala podobieństwa wynosi 1: trójkąty ABD i CHD są przystające.

Wynika stąd, że $|AD| = |CD|$. Trójkąt ADC jest więc prostokątny równoramienny, a zatem $\sphericalangle BCA = 45^\circ$.

3. Wykaż, że istnieje więcej niż 2026^{2026} trójek różnych liczb całkowitych dodatnich takich, że suma dowolnych dwóch spośród nich jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.
Rozwiązanie.

Szukamy liczb naturalnych a, b, c takich, że

$$a + b = p^2, \qquad a + c = q^2, \qquad b + c = r^2$$

dla pewnych liczb naturalnych p, q, r.

Z tego układu otrzymujemy

$$a = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{2}, \qquad b = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2}, \qquad c = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{2}.$$

Wybierzmy dla $n \geq 3$

$$p = 2n - 1, \qquad q = 2n, \qquad r = 2n + 1.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2n-1)^2 + (2n)^2 - (2n+1)^2}{2} = 2n(n-2), \\ b &= \frac{(2n-1)^2 + (2n+1)^2 - (2n)^2}{2} = 2n^2 + 1, \\ c &= \frac{(2n)^2 + (2n+1)^2 - (2n-1)^2}{2} = 2n(n+2). \end{aligned}$$

Są to różne liczby naturalne, a ponadto

$$a + b = (2n-1)^2, \qquad a + c = (2n)^2, \qquad b + c = (2n+1)^2.$$

Zatem suma dowolnych dwóch spośród liczb a, b, c jest kwadratem liczby naturalnej.

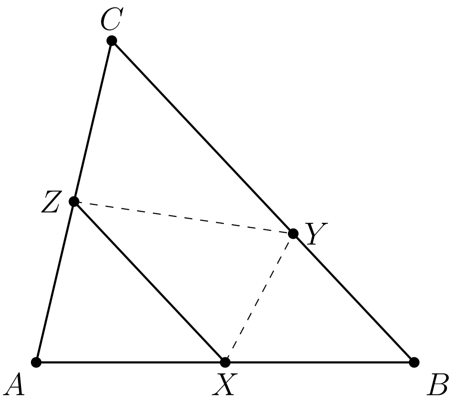
Ponieważ dla każdego $n \geq 3$ otrzymujemy taką trójkę, istnieje ich nieskończenie wiele.

4. Dany jest trójkąt ABC i dwaj gracze. Pierwszy gracz wybiera punkt X na boku AB, drugi gracz wybiera punkt Y na boku BC i w końcu gracz pierwszy wybiera punkt Z na boku AC. Celem pierwszego gracza jest otrzymanie trójkąta XYZ o największym polu, a celem drugiego jest otrzymanie trójkąta o możliwie najmniejszym polu. Jakie największe pole może zapewnić gracz pierwszy? *Odpowiedź uzasadnij.*
Rozwiązanie.

Niech $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.

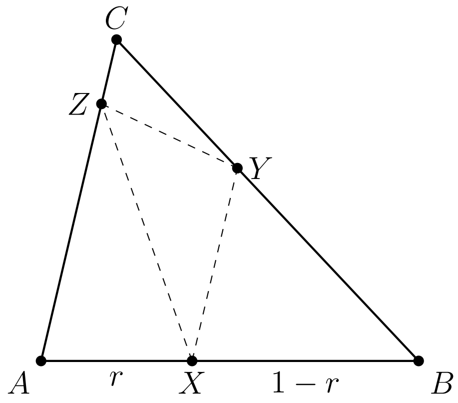
Strategia gracza pierwszego: Pierwszy gracz wybiera punkt X jako środek odcinka AB. Następnie drugi gracz wybiera pewien punkt Y na boku BC. Pierwszy gracz wybiera potem punkt Z jako środek odcinka AC.
Z twierdzenia Talesa wynika, że odcinki XZ oraz BC są równoległe oraz że punkty A i Y leżą w tej samej odległości od prostej XZ. Zatem

$$[XYZ] = [XAZ] = \frac{1}{4}[ABC].$$



To pokazuje, że pierwszy gracz może zapewnić pole $\frac{1}{4}[ABC]$ niezależnie od działań drugiego gracza.

Pozostaje pokazać, że nie może on zapewnić sobie większego pola. W tym celu gracz drugi stosuje następującą strategię *wybrać punkt Y tak, by odcinek XY był równoległy od AC.*



Również w tym przypadku z twierdzenia Talesa wynika, że wybór punktu Z nie ma znaczenia. W porównaniu w powyższą sytuacją musimy jednak wprowadzić parametr. Niech

$$r = \frac{|AX|}{|AB|} = \frac{|CY|}{|BC|}.$$

Niech h będzie długością wysokości opuszczonej z B w trójkącie ABC. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy, że Z leży w odległości $(1-r) \cdot h$ od prostej XY. Ponadto z tego samego twierdzenia, $|XY| = r \cdot |AC|$.

Obliczamy stąd, że

$$[XYZ] = \frac{1}{2} \cdot (1-r) \cdot h \cdot r \cdot |AC| = (1-r) \cdot r \cdot [ABC].$$

Jednakże zachodzi $(1-r) \cdot r \leqslant \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, zatem gracz drugi może powstrzymać gracza pierwszego przed uzyskaniem więcej niż $1/4$ pola.