XVII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania zadań konkursowych - klasy pierwsze

29 marca 2025 r.

1. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x spełniające równanie:

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = x,$$

gdzie $\lfloor r \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą k taką, że $k \leqslant r$. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie. Lewa strona równania jest liczbą całkowitą, więc x jest też liczbą całkowitą. Niech q, r będą ilorazem i resztą z dzielenia x przez 6, czyli niech $x = 6q + r$, gdzie $0 \leqslant r < 6$. Równanie przyjmuje postać

$$\left\lfloor 3q + \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor 2q + \frac{r}{3} \right\rfloor = 6q + r$$

Ponieważ dla dowolnej liczby całkowitej m i liczby rzeczywistej α zachodzi równość $\lfloor m + \alpha \rfloor = m + \lfloor \alpha \rfloor$, otrzymujemy

$$q = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - r.$$

. Dla $r = 0, 1, \ldots, 5$ otrzymujemy następujące rozwiązania:

r	0	1	2	3	4	5
q	0	-1	-1	-1	-1	-2
x	0	-5	-4	-3	-2	-7

□

2. Wyznacz wszystkie pary (p, q) liczb pierwszych spełniających równanie:

$$p^2 - 2q^2 = 17.$$

Odpowiedź uzasadnij.

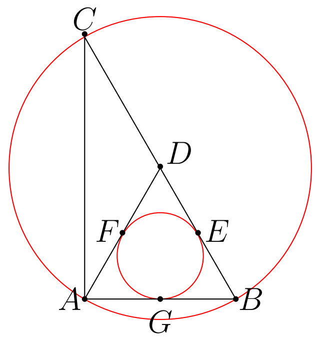
Rozwiązanie. Zauważmy, że para $(p, q) = (5, 2)$ spełnia rozważane równanie. Jeśli $q > 2$, to q, jako liczba pierwsza, jest postaci $q = 2k + 1$. Tak więc

$$p^2 = 2q^2 + 17 = 2 \cdot (2k + 1)^2 + 17 = 8k^2 + 8k + 19 = 4(2k^2 + 2k + 4) + 3.$$

Jednak $p = 2l + 1$ dla pewnej liczby naturalnej l, czyli $p^2 = 4l^2 + 4l + 1$. Oznacza to, że p^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 4, zaś prawa strona powyższej równości daje resztę 3. Tak więc $(p, q) = (5, 2)$ jest jedyną parą spełniającą równanie $p^2 - 2q^2 = 17$. □

3. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty. Punkt D jest środkiem boku BC, zaś E jest punktem styczności z bokiem BD okręgu wpisanego w trójkąt ABD. Jakie są miary pozostałych kątów trójkąta ABC, jeśli wiadomo, że E jest środkiem odcinka BD? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.



Oznaczmy przez F i G punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABD z bokami AD i AB, odpowiednio. Ponieważ E jest środkiem odcinka BD mamy równości

$$|DF| = |DE| = |EB| = |BG|.$$

Ponieważ D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC mamy równość $|AD| = |BD|$, czyli $|AF| + |FD| = |DE| + |EB|$. Z powyższych równości wynika, że $|AF| = |EB|$. Ostatecznie

$$|AB| = |AG| + |GB| = |AF| + |BE| = |AF| + |ED| = |AF| + |DF| = |AD|.$$

Stąd trójkąt ABD jest równoboczny oraz $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$, $|\sphericalangle ACB| = 30^\circ$.

4. Niech x, y, z, t będą czterema liczbami rzeczywistymi takimi, że

$$x + y = z + t \quad \text{oraz} \quad |x - y| < |z - t|.$$

Wykaż, że $xy > zt$. □

Rozwiązanie, I sposób. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $x \leqslant y$ oraz $z \leqslant t$. Z założeń wynika że przedziały $[x, y]$ i $[z, t]$ mają wspólny środek $s = \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{z+t}{2}$. Rozważmy liczby dodatnie $a = s - x = y - s$ oraz $b = s - z = t - s$. Wówczas $a < b$, $a^2 < b^2$ oraz

$$xy = (s - a)(s + a) = s^2 - a^2 > s^2 - b^2 = (s - b)(s + b) = zt.$$

□

Rozwiązanie, II sposób. Z założeń wynika, że $|x - y|^2 < |z - t|^2$, czyli

$$x^2 + y^2 - 2xy < z^2 + t^2 - 2zt.$$

Z drugiej strony $(x + y)^2 = (z + t)^2$, czyli

$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + t^2 + 2zt.$$

Odejmując stronami od powyższej nierówności ostatnią równość otrzymujemy:

$$-4xy < -4zt, \quad \text{czyli} \quad xy > zt.$$

□