

## XVII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

### Rozwiązania zadań konkursowych - klasy trzecie

29 marca 2025 r.

1. Liczby całkowite dodatnie  $a, b, c$  są takie, że każda z liczb

$$\frac{a+b}{c}, \frac{b+c}{a}, \frac{a+c}{b}$$

jest też całkowita. Udowodnij, że

$$6 \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \leq 8.$$

*Rozwiązanie.* Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że  $a \leq b \leq c$ . Rozważmy najpierw przypadek, gdy  $a \neq c$ . Wtedy  $a+b < 2c$ , a więc  $\frac{a+b}{c}$  jest dodatnią liczbą całkowitą mniejszą od 2. Zatem  $\frac{a+b}{c} = 1$ , czyli  $a+b = c$ .

Ponieważ liczba  $\frac{b+c}{a} = \frac{2b+a}{a} = 1 + \frac{2b}{a}$  jest całkowita, więc  $m = \frac{2b}{a}$  jest też całkowita.

Z tych samych powodów liczba  $n = \frac{2a}{b}$  jest też całkowita. Ich iloczyn to  $mn = \frac{2a}{b} \cdot \frac{2b}{a} = 4$ , więc albo obie są równe 2 albo jedna jest równa 1, a druga 4. Zatem  $m+n \in \{4, 5\}$ . Stąd otrzymujemy

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} = 1 + \frac{2b+a}{a} + \frac{2a+b}{b} = 3 + \frac{2b}{a} + \frac{2a}{b} = 3 + m + n \in \{7, 8\}.$$

Pozostał do rozpatrzenia przypadek, gdy  $a = b = c$ . Wtedy

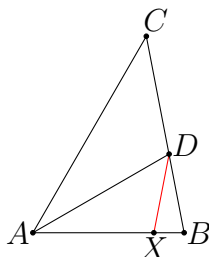
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} = 2 + 2 + 2 = 6.$$

□

2. W trójkącie  $ABC$  dwusieczna kąta  $\sphericalangle BAC$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $D$ . Udowodnij, że

$$|AD| < \sqrt{|AB| \cdot |AC|}.$$

*Rozwiązanie, sposób I.*



Obliczamy, że  $|\sphericalangle ADB| = 180^\circ - |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DAC| + |\sphericalangle ACD| > |\sphericalangle ACD|$ , więc na odcinku  $AB$  istnieje punkt  $X$  taki, że  $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle ADX|$ . W szczególności  $|AX| < |AB|$ . Ponieważ  $AD$  jest dwusieczną kąta  $\sphericalangle BAC$ , trójkąty  $ADC$  oraz  $AXD$  są podobne. Mamy więc

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AX|}{|AD|}.$$

Stąd otrzymujemy  $|AD|^2 = |AC| \cdot |AX| < |AC| \cdot |AB|$ , czyli  $|AD| < \sqrt{|AB| \cdot |AC|}$ .  $\square$

*Rozwiązanie, sposób II.* Przyjmijmy standardowe oznaczenia:  $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ ,  $|AB| = c$ ,  $|BC| = a$ ,  $|AC| = b$ . Niech  $|AD| = d$  oraz  $|CD| = x$ . Zauważmy, że dowodzona nierówność jest prawdziwa gdy  $b = c$  (tzn. dla trójkąta równoramiennego). Dalej będziemy zakładać, że  $b \neq c$ . Z twierdzenia o dwusiecznej w trójkącie otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{b}{x} = \frac{c}{a-x}.$$

Stąd obliczamy  $|CD| = x = \frac{ab}{b+c}$  oraz  $|BD| = a - x = \frac{ac}{b+c}$ . Z twierdzenia cosinusów zastosowanego do trójkątów  $ADC$  i  $ADB$  wynika, że

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{d^2 + b^2 - x^2}{2bd} = \frac{d^2 + c^2 - (a-x)^2}{2cd},$$

czyli

$$c(d^2 + b^2 - x^2) = b(d^2 + c^2 - (a-x)^2).$$

Podstawiając obliczoną wartość  $x$ , po przekształceniach (z uwzględnieniem założenia  $b \neq c$ ), otrzymujemy

$$d^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} = bc \left( 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2} \right).$$

Stąd wynika nierówność  $d^2 < bc$ .  $\square$

*Rozwiązanie, sposób III* Ponieważ pole trójkąta  $ABC$  jest sumą pól trójkątów  $ABD$  i  $ACD$  mamy równość:

$$\frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}cd \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bd \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Korzystając z tożsamości  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$  otrzymujemy

$$2bc \cos \frac{\alpha}{2} = bd + cd.$$

Stąd  $d = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\alpha}{2}$ . Ponieważ  $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$  zachodzi nierówność  $0 < \cos \frac{\alpha}{2} < 1$ , więc

$$d < \frac{2bc}{b+c} = \sqrt{bc} \frac{\sqrt{bc}}{(b+c)/2} \leq \sqrt{bc}.$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną, czyli  $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ .  $\square$

**3.** Niech  $n > 1$  będzie daną liczbą naturalną. W kwadraty  $\square$  wpisujemy znak “+” lub “-”. Wykaż, że jest co najmniej  $2^{n-1}$  sposobów wpisania znaków tak, że otrzymujemy prawdziwą nierówność

$$\left| \frac{\square 1 \square 2 \square 3 \square \dots \square n}{n} \right| \geq 1.$$

Dla jakich  $n$  liczba tych sposobów jest większa od  $2^{n-1}$ ? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Układ znaków dla którego otrzymujemy prawdziwą nierówność nazwiemy *układem poprawnym*. Wzorzec nierówności z zadania możemy zapisać w postaci:

$$\left| \frac{\square 1 \square 2 \square 3 \square \dots \square (n-1)}{n} \square 1 \right| \geq 1.$$

Rozważmy licznik ułamka z lewej strony:

$$\square 1 \square 2 \square 3 \square \dots \square (n-1) \quad (1)$$

Liczba sposobów wpisania znaków “+” lub “-” w powyższe kwadraty (których jest  $n-1$ ) jest równa  $2^{n-1}$ . Zauważmy, że dla dowolnego układu znaków “+” lub “-” w (1) w ostatnim kwadracie można dobrać znak tak by rozważana nierówność była prawdziwa. Jeśli bowiem liczba otrzymana w (1) jest nieujemna, to w ostatnim kwadracie możemy wpisać “+”, a otrzymany układ będzie poprawny. Jeśli liczba w (1) jest niedodatnia, to w ostatnim kwadracie możemy wpisać “-”. Stąd widać, że liczba układów poprawnych jest co najmniej równa liczbie sposobów wpisania znaków “+” lub “-” w (1), a więc  $2^{n-1}$ . W szczególności, jeśli w (1) można otrzymać zero, to liczba poprawnych układów przekracza  $2^{n-1}$ .

Zauważmy, że dla  $n=2$  mamy prawdziwą nierówność w dwóch przypadkach; gdy w kwadraty wpisujemy dwa plusy lub dwa minusy. Również dla  $n=3$  mamy dokładnie połowę poprawnych układów (tzn. cztery). Odpowiadają im następujące ciągi kolejnych znaków:  $---$ ,  $-+-$ ,  $+ - +$  oraz  $+++$ . W pozostałych czterech układach znaków otrzymujemy nierówności fałszywe.

Udowodnimy, że liczba poprawnych układów jest większa od  $2^{n-1}$  dla wszystkich liczb całkowitych  $n \geq 4$ .

Gdy  $n=4$  lub  $n=5$ , to w (1) można otrzymać zero, gdyż np.  $1+2-3=0$  oraz  $1-2-3+4=0$ . Zatem, na podstawie powyższych uwag, w tych przypadkach liczba poprawnych układów przekracza  $2^{n-1}$ .

Zauważmy, że jeśli  $n \geq 5$ , to

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{(n-1)n}{2} \geq 2n.$$

Tak więc, jeśli w (1) wpisujemy w każdym kwadracie “+”, to w ostatnim kwadracie możemy wpisać zarówno “-” jak i “+”. Rzeczywiście, zachodzą nierówności

$$[1+2+\dots+(n-1)] - n \geq n \quad \text{oraz} \quad [1+2+\dots+(n-1)] + n \geq 3n.$$

Tak więc liczba poprawnych układów jest większa od  $2^{n-1}$  dla  $n \geq 4$ . □

#### 4. W nieskończonym ciągu arytmetycznym

$$a, a+r, a+2r, \dots, a+nr, \dots$$

gdzie  $r \neq 0$ , pewne trzy (niekoniecznie kolejne) wyrazy tworzą ciąg geometryczny. Wykaż, że  $\frac{a}{r}$  jest liczbą wymierną.

*Rozwiązanie.* Jeśli  $a = 0$ , to liczba  $\frac{a}{r} = 0$  jest wymierna. Dalej zakładamy, że  $a \neq 0$ . Przypuśćmy, że istnieją nieujemne liczby całkowite  $k < m < n$  takie, że liczby  $a + kr$ ,  $a + mr$ ,  $a + nr$  tworzą ciąg geometryczny. Wówczas

$$(a + mr)^2 = (a + kr)(a + nr).$$

Stąd  $a^2 + 2amr + m^2r^2 = a^2 + anr + akr + mnr^2$ , czyli

$$a(k + n - 2m) = r(m^2 - nk).$$

Gdyby obie strony powyższej równości były równe 0, mielibyśmy:  $k + n = 2m$  oraz  $m^2 = kn$ . Wówczas

$$(k - n)^2 = (k + n)^2 - 4kn = (2m)^2 - 4m^2 = 0,$$

więc  $k = n$ , wbrew założeniu. Zatem  $k + n - 2m \neq 0$ , więc

$$\frac{a}{r} = \frac{m^2 - nk}{k + n - 2m}$$

jest wymierna. □