



## XVII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

### Zadania konkursowe - klasy drugie

29 marca 2025 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki parami różnych dodatnich liczb całkowitych  $(k, m, n)$  dla których zachodzi nierówność

$$k^2 + m^2 + n^2 \leq \frac{7}{3} \cdot (k + m + n).$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. W trójkącie  $ABC$  punkt  $D$  jest środkiem boku  $AB$ , zaś punkt  $E$  leży na boku  $BC$  i spełnia równość  $|BE| = 2|CE|$ . Wykaż, że jeśli kąty  $\sphericalangle DAE$  i  $\sphericalangle ADC$  są równe, to trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

3. Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste  $x, y$  spełniające układ równań

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 4. \end{cases}$$

Odpowiedź uzasadnij.

4. Niech  $k$  będzie dodatnią liczbą całkowitą niepodzielną przez 3. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej  $m$  liczba

$$(m + 1)^2 + (m + 2)^2 + (m + 3)^2 + \dots + (m + 9k - 1)^2 + (m + 9k)^2$$

nie jest potęgą liczby całkowitej, tzn. nie jest postaci  $n^l$ , gdzie  $n, l$  są liczbami całkowitymi i  $l > 1$ .

#### Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie [pb.edu.pl/km/](http://pb.edu.pl/km/) do 3 kwietnia 2025 r.
6. W tym roku tradycyjnego zakończenia konkursu nie przewidujemy; nagrody zostaną dostarczone do szkół.