



XVII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy trzecie

29 marca 2025 r.

1. Liczby całkowite dodatnie a, b, c są takie, że każda z liczb

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{b+c}{a}, \quad \frac{a+c}{b}$$

jest też całkowita. Udowodnij, że

$$6 \leq \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} \leq 8.$$

2. W trójkącie ABC dwusieczna kąta $\sphericalangle BAC$ przecina bok BC w punkcie D . Udowodnij, że

$$|AD| < \sqrt{|AB| \cdot |AC|}.$$

3. Niech $n > 1$ będzie daną liczbą naturalną. W kwadraty $\square$ wpisujemy znak “+” lub “−”. Wykaż, że jest co najmniej 2^{n-1} sposobów wpisania znaków tak, że otrzymujemy prawdziwą nierówność

$$\left| \frac{\square 1 \square 2 \square 3 \square \dots \square n}{n} \right| \geq 1.$$

Dla jakich n liczba tych sposobów jest większa od 2^{n-1} ? Odpowiedź uzasadnij.

4. W nieskończonym ciągu arytmetycznym

$$a, a+r, a+2r, \dots, a+nr, \dots$$

gdzie $r \neq 0$, pewne trzy (niekoniecznie kolejne) wyrazy tworzą ciąg geometryczny. Wykaż, że $\frac{a}{r}$ jest liczbą wymierną.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie pb.edu.pl/km/ do 3 kwietnia 2025 r.
6. W tym roku tradycyjnego zakończenia konkursu nie przewidujemy; nagrody zostaną dostarczone do szkół.