II Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie

22 maja 2010 r.

1. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2 + 5b^2 + 4c^2 \geqslant 4b(a + c).$$

2. Niech $p > 3$ będzie liczbą pierwszą. Ile rozwiązań w liczbach całkowitych (x, y) ma równanie

$$x^2 - xy - 2y^2 = p^2 \ ?$$

Odpowiedź uzasadnić.

3. Dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Proste zawierające wysokości trójkąta opuszczone z wierzchołków A, B i C przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach E, F i G. Proste CE i BG przecinają się w punkcie K zaś proste CF i AG przecinają się w punkcie L. Udowodnić, że punkt przecięcia wysokości trójkąta ABC należy do prostej KL.

4. Czy istnieje podzbiór V zbioru dodatnich liczb całkowitych składający się z przynajmniej dwóch liczb i taki, że dla dowolnych różnych liczb $a, b \in V$ liczby $\sqrt{a+b}$ i $\sqrt{a+2b}$ są całkowite? Odpowiedź uzasadnić.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.

4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.

5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej `http://signum.pb.bialystok.pl` w dniu 24 maja 2010 r.