



II Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy pierwsze

22 maja 2010 r.

1. Dany jest okrąg \circ z zaznaczonym środkiem S . Udowodnić, że za pomocą cyrkla i linijki można koło ograniczone okręgiem \circ podzielić na siedem części o równych polach.
2. Wyznaczyć wszystkie liczby trzycyfrowe m takie, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$, ostatnie trzy cyfry liczby m^k są takie same jak cyfry liczby m .
3. Punkt F leży na przekątnej AC kwadratu $ABCD$ oraz $AF : FC = 3 : 1$. Punkt E jest środkiem boku AD . Udowodnić, że kąt BFE jest prosty.
4. Operacja \mathcal{S} przyporządkowuje ciągowi liczb $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ ciąg

$$\left(\frac{a_1 + 2a_2}{3}, \frac{a_2 + 2a_3}{3}, \dots, \frac{a_{n-1} + 2a_n}{3}, \frac{a_n + 2a_1}{3} \right).$$

Wykazać, że jeśli wśród dodatnich liczb całkowitych a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 2$) są liczby różne, to po wykonaniu pewnej liczby kolejnych operacji \mathcal{S} otrzymamy ciąg, w którym nie wszystkie liczby są całkowite.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej <http://signum.pb.bialystok.pl> w dniu 24 maja 2010 r.