VI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy pierwsze

17 maja 2014 r.

1. Liczby a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 są całkowite, zaś funkcja $f(x)$ jest określona wzorem

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Wykazać, że jeśli $f(0)$ i $f(1)$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi, to nie istnieje liczba całkowita m taka, że $f(m) = 0$.

2. Wyznaczyć najmniejszą liczbę naturalną m taką, że wśród dowolnych kolejnych m liczb całkowitych dodatnich istnieje liczba o sumie cyfr podzielnej przez 10. Odpowiedź uzasadnić.

3. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, zaś punkt E jest środkiem odcinka AC. Prosta OB przecina okrąg opisany na ABC po raz drugi w punkcie D, zaś prosta DE przecina wysokość opuszczoną z punktu A w punkcie F. Uzasadnić, że E jest środkiem odcinka DF.

4. Dla każdej niezerowej liczby całkowitej z przez $d(z)$ oznaczamy liczbę dzielników całkowitych liczby z większych od 1. Ponadto zakładamy, że $d(0) = 0$.

Robot porusza się po płaszczyźnie. Na początku znajduje się on w punkcie o współrzędnych $(5, 2014)$. Jeżeli robot stoi w punkcie (x, y), to może on przejść do każdego z punktów

$$(x + d(y),\ y + d(x)), \quad (x + d(y),\ y - d(x)), \quad (x - d(y),\ y + d(x)), \quad (x - d(y),\ y - d(x)).$$

Czy wykonując ciąg takich ruchów robot może przejść do punktu $(0, 0)$? Odpowiedź uzasadnić.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).

2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.

3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.

4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.

5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej
`http://konkurs.ptm.pb.edu.pl/` w dniu 21 maja 2014 r.