



Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy pierwsze

30 maja 2009 r.

1. Na okręgu o środku O opisano czworokąt wypukły, którego kolejne wierzchołki oznaczono literami A, B, C i D . Udowodnić, że suma miar kątów $\angle AOB$ i $\angle COD$ jest równa 180° .

2. Niech $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną, zaś x_1, x_2, \dots, x_n liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba

$$x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5$$

jest również podzielna przez 10.

3. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia

$$f(x, y) = xy^2 + 2x(x-1)y + x^3 - 5x + 4,$$

gdzie y jest dowolną liczbą rzeczywistą, zaś x dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

4. Sześcian S o krawędzi długości n (gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną) podzielono na n^3 małych sześcianów o krawędzi długości 1. Na ile sposobów można wybrać n małych sześcianów, tak aby środki żadnych dwóch z wybranych sześcianów nie leżały na prostej równoległej do którejkolwiek ściany sześcianu S ?

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy pisać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów i telefonów komórkowych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie internetowej <http://signum.pb.bialystok.pl> w dniu 2 czerwca 2009 r.