# Podlaski Konkurs Matematyczny 2006

## Rozwiązania zadań przygotowawczych - klasy pierwsze

**Zadanie 1.** Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia
$$\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{ab},$$
gdzie $a, b$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

*Rozwiązanie.*

Funkcja $f(x) = x + \frac{1}{x}$ jest rosnąca w przedziale $(1, +\infty)$. Istotnie, jeśli $x > y > 1$, to
$$x+\frac{1}{x} > y+\frac{1}{y} \iff x-y > \frac{x-y}{xy} \iff 1 > \frac{1}{xy} \iff xy > 1.$$
Z nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną wynika, że
$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 1,$$
czyli dla dowolnych dodatnich liczb $a$ i $b$ zachodzi nierówność:
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2.$$
Z powyższego wnioskujemy, że
$$\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{1}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = f(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}) \geqslant f(2) = \frac{5}{2}.$$
Zauważmy, że dla $a = b = 1$ rozważane wyrażenie przyjmuje wartość $\frac{5}{2}$.

□

* * *

**Zadanie 2.** Dla danych liczb naturalnych $n > k$ wyznaczyć sumę:
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\ .$$

*Rozwiązanie.*

Zauważmy, że dla dowolnej liczby $i \geqslant 0$ zachodzi równość:
$$\frac{1}{(k+i)(k+i+1)(k+i+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+i)(k+i+1)}-\frac{1}{(k+i+1)(k+i+2)}\right).$$
Rozważana suma jest zatem równa:
$$S(n,k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right)$$
$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)(n+2)-k(k+1)}{k(k+1)(n+1)(n+2)}\right).$$

□

* * *

**Zadanie 3.** Liczby rzeczywiste $a, b, c$ są takie, że $a + b + c = 0$. Wykazać, że
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

*Rozwiązanie.*

Z założeń wynika, że $c = -(a + b)$, czyli
$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 - (a + b)^3 = a^3 + b^3 - (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) \\ &= -3ab(a + b) = 3abc. \end{aligned}$$

□

* * *

**Zadanie 4.** Czy istnieją liczby pierwsze $p, q, r$ takie, że
$$p^2 + q^3 = r^4 \ ?$$

*Rozwiązanie.*

Niech liczby pierwsze $p, q, r$ spełniają równość $p^2 + q^3 = r^4$. Ponieważ $r > 2$ jest liczbą nieparzystą, jedna z liczb $p$ lub $q$ musi być równa 2, a druga musi być nieparzystą liczbą pierwszą. Jeśli $q = 2$, to $r^4 = 8 + p^2$, czyli $(r^2 - p)(r^2 + p) = 8$. Ostatnia równość nie może jednak zajść, gdyż $r^2 + p > 3^2 + p > 9$. Jeśli zaś $p = 2$, to $r^4 = q^3 + 4$, czyli $q^3 = (r^2 - 2)(r^2 + 2)$. Zauważmy, że $r^2 - 2$ i $r^2 + 2$ są liczbami względnie pierwszymi większymi od 1 (obie są nieparzyste i różnią się o 4). Liczba $q^3$ jako potęga liczby pierwszej nie posiada jednak względnie pierwszych dzielników większych od 1. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje trójka liczb pierwszych $p, q, r$ takich, że $p^2 + q^3 = r^4$.

□

* * *

**Zadanie 5.** Wszystkie cyfry liczby sześciocyfrowej $a$ podzielnej przez 37 są różne i żadna z nich nie jest zerem. Wykazać, że przestawiając cyfry liczby $a$ można utworzyć przynajmniej 23 inne liczby podzielne przez 37.

*Rozwiązanie.*

Niech $A = \overline{abcdef}$ będzie liczbą podzielną przez 37 przy czym $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ są jej różnymi cyframi. Zauważmy, że $10^3 - 1 = 999$ jest liczbą podzielną przez 37. Tak więc
$$\begin{aligned} A &= 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f \\ &= 10^2(999 + 1)a + 10(999 + 1)b + (999 + 1)c + 10^2d + 10e + f \\ &= 37B + 10^2(a + d) + 10(b + e) + (c + f), \end{aligned}$$
dla pewnej liczby całkowitej $B$. Wynika stąd, że przestawiając cyfry w parach $\{a, d\}$, $\{b, e\}$ oraz $\{c, f\}$ otrzymujemy również liczby podzielne przez 37. W ten sposób z liczby $A$ możemy utworzyć siedem innych liczb podzielnych przez 37. Analogicznie, z łatwością stwierdzamy, że istnieją liczby całkowite $C, D$ takie, że
$$10^2A = 37C + 10^2(c + f) + 10(a + d) + (b + e)$$
oraz
$$10^4A = 37D + 10^2(b + e) + 10(c + f) + (a + d).$$

Z powyższych równości wynika, że jeśli $37 \mid A$, to również $37 \mid \overline{efabcd}$ i $37 \mid \overline{cdefab}$. Z każdej z tych liczb możemy, podobnie jak z liczby $A$, utworzyć siedem innych liczb podzielnych przez 37. Łącznie otrzymujemy zatem co najmniej 23 różne od $A$ liczby podzielne przez 37. □

* * *

**Zadanie 6.** Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ liczba $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ jest podzielna przez 8.

*Rozwiązanie.*

*Sposób I.* Wprowadźmy oznaczenie $A_n = 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$. Oczywiście $A_1 = 8$ oraz $A_2 = 32$, a więc 8 dzieli liczby $A_1$ i $A_2$. Zauważmy, że jeśli $n$ jest liczbą naturalną, to dla dowolnej liczby całkowitej $a$ istnieje liczba całkowita $A$ taka, że $(8a+1)^n = 8A+1$. W szczególności dla liczby naturalnej $k$ istnieją liczby całkowite $x_k, y_k$ takie, że $25^k = (24+1)^k = 8x_k + 1$ oraz $9^k = (8+1)^k = 8y_k + 1$. Rozważymy przypadki, gdy $n = 2k+1$ lub $n = 2k$. Mamy

$$\begin{aligned} A_{2k+1} &= 5^{2k+1} + 2 \cdot 3^{2k} + 1 = 5 \cdot 25^k + 2 \cdot 9^k + 1 \\ &= 5(8x_k + 1) + 2(8y_k + 1) + 1 \\ &= 8(5x_k + 2y_k + 1) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} A_{2k} &= 5^{2k} + 2 \cdot 3^{2k-1} + 1 = 25^k + 6 \cdot 9^{k-1} + 1 \\ &= 8x_k + 1 + 6(8y_{k-1} + 1) + 1 \\ &= 8(x_k + 6y_{k-1} + 1) \end{aligned}$$

*Sposób II.* Zauważmy, że

$$A_{n+1} - A_n = 5^{n+1} - 5^n + 2(3^n - 3^{n-1}) = 4 \cdot 5^n + 4 \cdot 3^{n-1} = 4(5^n + 3^{n-1}).$$

Liczba $5^n + 3^{n-1}$ jest parzysta, więc różnica $A_{n+1} - A_n$ jest podzielna przez 8. Liczby $A_n$ i $A_{n+1}$ dają zatem takie same reszty z dzielenia przez 8 dla $n = 1, 2, \ldots$ . Ponieważ $A_1 = 8$, więc wszystkie liczby ze zbioru $\{A_1, A_2, \ldots\}$ są podzielne przez 8. □

* * *

**Zadanie 7.** a) Jakie warunki powinny spełniać liczby całkowite $a$ i $b$ aby liczby $P(x) = x^2 + ax + b$ były parzyste dla wszystkich wartości całkowitych $x$? b) Jakie warunki powinny spełniać liczby całkowite $a$ i $b$ aby liczby $Q(x) = x^3 + ax + b$ były podzielne przez 3 dla wszystkich wartości całkowitych $x$?

*Rozwiązanie.*

a) Liczby $P(0) = b$ oraz $P(1) = 1 + a + b$ muszą być parzyste, a więc $b$ musi być liczbą parzystą, zaś $a$ nieparzystą. Z drugiej strony jeśli $b = 2m$ i $a = 2n - 1$, to

$$P(x) = (x^2 - x) + 2nx + 2m$$

jest liczbą parzystą, gdyż $x^2 - x = x(x-1)$ jest liczbą parzystą dla każdej liczby całkowitej $x$.

b) Liczby $Q(0) = b$ oraz $Q(1) = 1 + a + b$ mają być podzielne przez 3, więc $b$ musi być podzielna przez 3 zaś $a$ powinna dawać resztę 2 przy dzieleniu przez 3. Z drugiej strony, jesli $b = 3k$ oraz $a = 3l - 1$, to

$$Q(x) = x^3 - x + 3lx + 3k = (x-1)x(x+1) + 3lx + 3k.$$

Dla dowolnej liczby całkowitej $x$, $(x-1)x(x+1)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb całkowitych, a więc dzieli się przez 3. Mamy więc podzielność przez 3 dowolnej liczby $Q(x)$.

□

* * *

**Zadanie 8.** W trójkąt $ABC$ wpisano okrąg styczny do boków $AB$, $BC$, $CA$ w punktach $C_1, A_1, B_1$ odpowiednio. Wykazać, że jeśli odcinki $AA_1$, $BB_1$ i $CC_1$ są równej długości, to trójkąt $ABC$ jest równoboczny.

*Rozwiązanie.*

Ponieważ $CB_1 = CA_1$, trójkąt $A_1B_1C$ jest równoramienny. W szczególności $\angle A_1B_1C = \angle B_1A_1C < 90°$. Stąd wynika, że

$$\angle AB_1A_1 = \angle BA_1B_1.$$

i oba kąty są oczywiście rozwarte. Z twierdzenia sinusów wynika, że

$$\sin\angle A_1AB_1 = \frac{A_1B_1}{A_1A}\sin\angle AB_1A_1 = \frac{A_1B_1}{B_1B}\sin\angle BA_1B_1 = \sin\angle B_1BA_1,$$

a więc $\angle A_1AB_1 = \angle B_1BA_1$ a w konsekwencji $\angle AA_1B_1 = \angle BB_1A_1$. Trójkąty $AA_1B_1$ i $BB_1A_1$ są zatem przystające. Z równości $AB_1 = BA_1$ wynika, że $AC = BC$. Analogicznie dowodzimy równości $AC = AB$.

□

* * *

**Zadanie 9.** W danym trójkącie dwa boki mają długości $a$ i $b$, zaś wysokości opuszczone na te boki mają odpowiednio długości $h_a$ i $h_b$. Wykazać, że jeśli $a > b$, to

$$a + h_a \geqslant b + h_b.$$

*Rozwiązanie.*

Oznaczając przez $S$ pole rozważanego trójkąta, mamy $2S = ab\sin\gamma$, gdzie $\gamma$ jest miarą kąta między bokami długości $a$ i $b$. W szczególności $2S \leqslant ab$. Mamy także $h_a = 2S/a$ oraz $h_b = 2S/b$. Stąd

$$a + h_a - (b + h_b) = a + \frac{2S}{a} - (b + \frac{2S}{b}) = (a-b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) \geqslant 0.$$

□

* * *

**Zadanie 10.** Wykazać, że suma odległości między środkami przeciwległych boków czworokąta jest równa połowie jego obwodu wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest równoległobokiem.

*Rozwiązanie.*

Niech $ABCD$ będzie danym czworokątem. Oznaczmy przez $K$, $L$, $M$, $N$ środki boków $AB$, $BC$, $CD$ i $DA$. Zauważmy, że

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}$$

oraz

$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}.$$

Ponieważ $\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{CM}$ oraz $\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$, po dodaniu powyższych równości otrzymujemy

$$\overrightarrow{KM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

Analogicznie obliczmy, że

$$\overrightarrow{NL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB})$$

Korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$KM = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}| \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC),$$

$$NL = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \leqslant \frac{1}{2}(AB + DC).$$

W powyższych nierównościach równości zachodzą tylko wtedy, gdy występujące w nich wektory są równoległe. Sumując je stronami otrzymujemy

$$KM + NL \leqslant \frac{1}{2}(AD + BC + AB + DC).$$

Ostatecznie suma $KM + NL$ jest równa połowie obwodu czworokąta wtedy i tylko wtedy, gdy czworokąt jest równoległobokiem. □

* * *

**Zadanie 11.** W trójkącie $T$ suma długości jego wysokości jest równa $9r$, gdzie $r$ jest długością promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt. Wykazać, że $T$ jest trójkątem równobocznym.

*Rozwiązanie.*

Oznaczmy długości boków rozważanego trójkąta przez $a, b, c$, długości odpowiednich wysokości trójkata przez $h_a$, $h_b$ $h_c$ zaś pole trójkata przez $S$. Zachodzą równości:

$$h_a + h_b + h_c = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c},$$

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Z założeń otrzymujemy równość:

$$\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = 9\frac{2S}{a + b + c},$$

czyli

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 9.$$

Po wymnożeniu prawej strony otrzymamy

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) = 6.$$

Dla liczb dodatnich $a, b$ zachodzi jednak nierówność:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \quad \left(\Longleftrightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geqslant 0\right),$$

przy czym równość ma miejsce tylko wtedy, gdy $a = b$. Wynika stąd, że $a = b = c$, a więc $T$ jest trójkątem równobocznym. □

* * *

**Zadanie 12.** W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona na przeciwprostokątną ma długość $h$, zaś dwusieczna kąta prostego ma długość $m$. Obliczyć pole tego trójkąta.

*Rozwiązanie.*

Niech kąt przy wierzchołku $C$ trójkąta $ABC$ będzie prosty, zaś kąty przy wierzchołkach $A$ i $B$ mają miary $\alpha$ i $\beta$ odpowiednio. Niech $H$ będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka $C$ oraz niech $M$ oznacza punkt przecięcia dwusiecznej kąta prostego z przeciwprostokątną. Szukane pole $S$ wynosi

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin\beta} \cdot \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{h^2}{2\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{h^2}{\sin 2\alpha}.$$

Z drugiej strony (zakładając, że $\alpha \leqslant 45°$) otrzymujemy: $\angle MCH = (90° - \alpha) - 45° = 45° - \alpha$ oraz z trójkąta prostokątnego $MCH$ obliczamy $\cos(45° - \alpha) = h/m$. Tak więc $\sin 2\alpha = \cos 2(45° - \alpha) = 2\cos^2(45° - \alpha) - 1 = 2(h/m)^2 - 1$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$S = \frac{h^2}{2h^2/m^2 - 1} = \frac{h^2 m^2}{2h^2 - m^2}.$$

□

* * *

**Zadanie 13.** Suma dziesięciu liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ jest równa 1001. Wyznaczyć możliwie największą wartość największego wspólnego dzielnika tych liczb.

*Rozwiązanie.*

Niech $d = NWD(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$. Z równości $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 1001$ oraz podzielności $d \mid a_j$ wynika, że $10d \leqslant 1001$, czyli $d \leqslant 100$. Z rozkładu $1001 = 99 \cdot 11$ oraz faktu, że $d$ jest dzielnikiem liczby 1001 otrzymujemy $d \leqslant 99$. Sytuacja $d = 99$ jest możliwa, bo wystarczy rozważyć $a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = 99$ oraz $a_{10} = 2 \cdot 99$.

□

* * *

**Zadanie 14.** Wierzchołki wypukłego czworokąta $\mathcal{C}$ leżą na różnych bokach kwadratu $1\times1$. Wykazać, że obwód czworokąta $\mathcal{C}$ jest nie mniejszy niż $2\sqrt{2}$.

*Rozwiązanie.*

Umieśćmy kwadrat w układzie współrzędnych tak by punkty $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ i $(0,1)$ były kolejnymi wierzchołkami kwadratu. Możemy przyjąć, że wierzchołki czworokąta $\mathcal{C}$ znajdują się w punktach $(0,x)$, $(1,y)$, $(z,1)$ i $(0,t)$, gdzie $0 < x,y,z,t < 1$. Obwód $\ell$ czworokąta wynosi zatem:

$$\ell = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-z)^2 + (1-y)^2}\sqrt{z^2 + (1-t)^2} + \sqrt{x^2 + t^2}$$

Skorzystamy z łatwej do wykazania nierówności między średnią kwadratową i średnią arytmetyczną dwóch liczb $a$ i $b$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \iff \sqrt{a^2+b^2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b).$$

Z powyższej nierówności wynika, że

$$\ell \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x+y+1-z+1-y+z+1-t+x+t) = 2\sqrt{2}.$$

$\square$

* * *

**Zadanie 15.** Kwadrat i trójkąt mają równe pola. Która z tych figur ma większy obwód?

*Rozwiązanie.*

Zauważmy, ze dla dowolnego trójkąta istnieje prostokąt o takim samym polu co trójkąt, ale o mniejszym obwodzie. Własność tę ma np. prostokąt którego jeden bok ma długość równą połowie długości podstawy trójkąta, a drugi bok ma długość równą wysokości trójkąta. Udowodnimy, że wśród prostokątów o stałym polu $S$ najmniejszy obwód ma kwadrat. Istotnie, jeśli boki prostokąta mają długość $a$ i $b$ to na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną mamy

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \iff 2(a+b) \geqslant 4\sqrt{S}.$$

Prostokąt ma zatem obwód nie mniejszy od obwodu kwadratu o polu $S$. Ostatecznie, obwód trójkąta jest większy od obwodu kwadratu. $\square$

* * *