KONKURS KLAS PIERWSZYCH

SZKÓŁ PONADGIMNAZJALNYCH

ZADANIA PRZYGOTOWAWCZE
ROZWIĄZNIA

opracował Piotr Grzeszczuk

Oddział Białostocki Polskiego Towarzystwa Matematycznego
Białystok 2003

1. KOMBINATORYKA

Zadanie 1. W turnieju szachowym uczestniczy 30 zawodników (gra każdy z każdym jedną partię). Wykazać, że w dowolnej chwili trwania turnieju pewnych dwóch szachistów rozegrało tyle samo partii.

Rozwiązanie.

Jeśli w danej chwili pewien zawodnik nie rozegrał żadnej partii, to liczba partii rozegranych przez każdego z zawodników należy do zbioru 29-elementowego $\{0, 1, 2, ..., 28\}$. Zawodników jest trzydziestu, więc pewnych dwóch rozegrało tę samą liczbę partii. Podobnie, jeśli każdy z zawodników rozegrał przynajmniej jedną partię, to liczba partii rozegranych przez każdego z trzydziestu zawodników należy do zbioru 29-elementowego $\{1, 2, ..., 28, 29\}$. W tym przypadku również znajdą się przynajmniej dwaj zawodnicy, którzy rozegrali tę samą liczbę partii. □

* * *

Zadanie 2. Wykazać, że wśród dowolnych 101 liczb całkowitych istnieją dwie których różnica jest podzielna przez 100.

Rozwiązanie

Wśród dowolnych 101 liczb całkowitych istnieją przynajmniej dwie dające taką samą resztę z dzielenia przez 100, bo wszyskich możliwych reszt jest 100. Różnica tych liczb jest podzielna przez 100. □

* * *

Zadanie 3. W każdym spośród 500 koszy znajdują się jabłka, przy czym w koszu mieści się nie więcej niż 240 jabłek. Wykazać, że w przynajmniej trzech koszach jest taka sama liczba jabłek.

Rozwiązanie

Powiemy, że dwa kosze są tego samego *typu,* jeśli znajduje się w nich taka sama liczba jabłek. Z założeń wynika, że mamy co najwyżej 240 typów koszy. Gdyby było co najwyżej dwa kosze każdego typu, to łącznie mielibyśmy co najwyżej $2 \times 240 = 480$ koszy. Stąd wynika, że muszą istnieć przynajmniej trzy kosze tego samego typu. □

* * *

Zadanie 4. W trzydziestoosobowej klasie 20 uczniów uczy się języka angielskiego, 14 niemieckiego oraz 10 francuskiego. Żadne dziecko nie uczy się wszystkich trzech języków, a ośmioro nie uczy się żadnego z tych języków. Ilu uczniów uczy się zarówno języka niemieckiego jak i francuskiego?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez A, F, N zbiory, których elementami są odpowiednio uczniowie uczący się języka angielskiego, francuskiego oraz niemieckiego. Z założeń wynika, że $|A \cup F \cup N| = 22$ oraz $|A \cap F \cap N| = 0$ (przez $|X|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru X). Z zależności (zwanej zasadą włączeń i wyłączeń)

$$|A \cup F \cup N| = |A| + |F| + |N| - |A \cap F| - |A \cap N| - |F \cap N| + |A \cap F \cap N|$$

[spróbuj ją uzasadnić!] wynika, że $|A \cap F| + |A \cap N| + |F \cap N| = 20 + 10 + 14 - 22 = 22$. Z drugiej strony zbiory $A \cap F$, $A \cap N$, $F \cap N$ są parami rozłączne oraz zawarte w zbiorze 22-elementowym $A \cup F \cup N$. Stąd wnosimy, że

$$(A \cap F) \cup (A \cap N) \cup (F \cap N) = A \cup F \cup N,$$

czyli każdy uczeń uczący się jakiegoś z języków uczy sie dokładnie dwóch języków. Tak wiec $20 = |A| = |A \cap F| + |A \cap N|$ oraz $|F \cap N| = 22 - 20 = 2$. □

* * *

Zadanie 5. Wewnątrz kwadratu o boku 1 umieszczono pewną ilość okręgów o sumie obwodów równej 10. Wykazać, że istnieje prosta przecinająca przynajmniej 4 okręgi.

Rozwiązanie

Niech A, B, C, D będą kolejnymi wierzchołkami kwadratu oraz $d_1, d_2, \ldots, d_n$ będą długościami średnic okręgów. Mamy równość $\pi d_1 + \pi d_2 + \cdots + \pi d_n = 10$. Stąd $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 10/\pi > 3$. Rozważmy rzuty prostopadłe okręgów na bok AB kwadratu (wzdłuż boku AD). Rzuty te wyznaczają na boku AB rodzinę odcinków o łącznej długości $d_1+d_2+\cdots+d_n > 3$. Stąd wnosimy, że pewien punkt X boku AB jest *nakryty* przynajmniej czterema odcinkami. Prosta prostopadła do AB przechodząca przez X przecina oczywiście te okręgi (jest ich przynajmniej 4), których rzuty na bok AB zawierają punkt X. □

* * *

Zadanie 6. Ile różnych (nieuporządkowanych) par rozłącznych podzbiorów posiada zbiór składający się z 2003 elementów?

Rozwiązanie

Niech $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2003}\}$ będzie danym zbiorem składającym się z 2003 elementów. Zauważmy, że każda para uporządkowana (A, B) rozłącznych podzbiorów zbioru X wyznacza jednoznacznie trójkę uporządkowaną (A, B, C) parami rozłącznych podzbiorów, gdzie $C = X \setminus (A \cup B)$ jest dopełnieniem podzbioru $A \cup B$ (czyli $A \cup B \cup C = X$). Aby wyznaczyć liczbę takich uporządkowanych trójek zauważmy, że każdy element x_i należy do dokładnie jednego ze zbiorów A, B lub C. Stąd widać, że takich trójek jest tyle ile ciągów 2003-wyrazowych o wyrazach A, B lub C, a więc 3^{2003}. [Każdemu elementowi x_i przyporządkowujemy jedną z liter A, B lub C.] Dwie trójki uporządkowane (A, B, C) oraz (B, A, C), gdzie przynajmniej jeden ze zbiorów A lub B jest niepusty wyznaczają tę samą parę (nieuporządkowaną) rozłącznych podzbiorów zbioru X. Zatem liczba takich par jest równa

$$\frac{3^{2003} - 1}{2} + 1 = \frac{3^{2003} + 1}{2}.$$

□

* * *

Zadanie 7. Wewnątrz trójkąta równobocznego o boku 1 wybrano pięć punktów. Wykazać, że odległość między pewnymi dwoma punktami jest mniejsza od 1/2.

Rozwiązanie

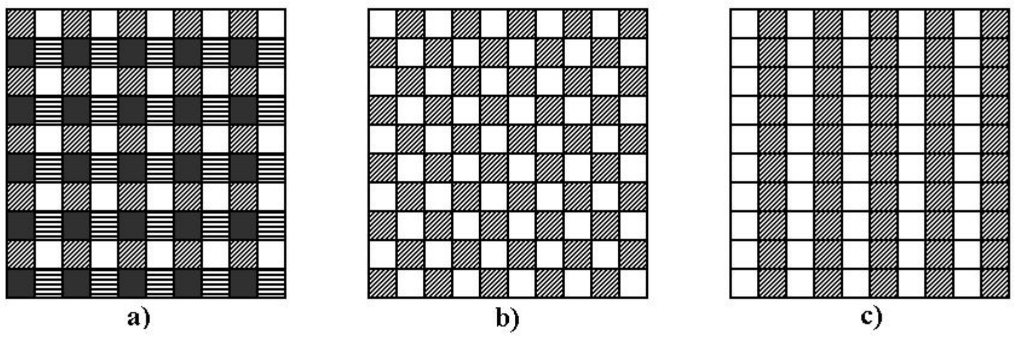
Oznaczmy przez A, B, C wierzchołki rozważanego trójkąta równobocznego oraz przez K, L, M środki jego boków. Łącząc punkty K, L, M odcinkami otrzymujemy podział trójkąta ABC na cztery trójkąty równoboczne o boku 1/2 każdy. Wtedy przynajmniej dwa spośród wybranych punktów należą do jednego z *mniejszych* trójkątów. Ponieważ wybrane punkty nie leżą na brzegu trójkąta ABC, więc żaden z tych dwóch punktów nie jest wierzchołkiem *mniejszego* trójkąta. Stąd wynika, że odległość między nimi jest mniejsza od 1/2. □

* * *

Zadanie 8. Czy szachownicę 10×10 można pokryć 25 jednakowymi płytkami w kształcie:
a) prostokąta rozmiarów 1×4?
b) litery T składającej się z czterech kwadratów 1×1?
c) litery L składającej się z czterech kwadratów 1×1?

Rozwiązanie

Do każdej z części zadania rozważymy inne kolorowanie pól szachownicy.



W przypadku a) każda płytka nakrywa cztery pola pomalowane dwoma kolorami, przy czym po dwa pola tego samego koloru. Wynika stąd, że gdyby istniało pokrycie całej szachownicy, to płytki nakryłyby parzystą liczbę pól każdego koloru. Jednak w tym przypadku na szachownicy mamy po 25 pól każdego koloru.

W przypadkach b) i c) pola szachownicy pokolorowane są dwoma kolorami, przy czym liczba pól każdego z kolorów jest parzysta. Jednak każda z płytek nakrywa nieparzystą liczbę pól tego samego koloru. Do pokrycia całej szachownicy potrzeba 25 płytek. Stąd wynika, że w każdym z przypadków b) i c) nie istnieją żądane pokrycia. □

* * *

Zadanie 9. Na ile sposobów można wybrać $m + n$ kul spośród $2m$ jednakowych kul białych i $2n$ jednakowych kul czarnych?

Rozwiązanie

Załóżmy, że $m \leq n$. Wtedy $2m \leq m + n \leq 2n$. Rozważmy dowolny układ złożony z $m + n$ kul i niech b oraz c oznaczają odpowiednio ilość kul białych i czarnych w tym układzie. Wtedy $b + c = m + n$ oraz b może przyjmować wartości ze zbioru $\{0, 1, \ldots, 2m\}$. Ponadto, jeśli $0 \leq b \leq 2m$, to $m + n - b \leq m + n \leq 2n$, a więc istnieje układ złożony z b kul białych i $m + n - b$ kul czarnych. Mamy zatem $2m + 1$ wszystkich możliwych układów. Podobnie rozumujemy, gdy $n \leq m$. Ostateczną odpowiedź możemy podać w postaci $2k + 1$, gdzie $k = \min\{m, n\}$. □

* * *

Zadanie 10*. Na konkurs matematyczny przybyło n uczniów. Są wśród nich osoby znające się wzajemnie, przy czym każde dwie osoby znające się nie mają wspólnych znajomych oraz każde dwie osoby nie znające się mają dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Wykazać, że każdy z uczniów ma taką samą liczbę znajomych wśród uczestników konkursu.

Rozwiązanie

Rozważmy dwie osoby A i B znające się. Niech $A_1, A_2, \ldots, A_l$ oraz $B_1, B_2, \ldots, B_m$ będą wszystkimi znajomymi A i B, odpowiednio. Zgodnie z założeniem, zbiory $\{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$ oraz $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ są rozłączne. Dla dowolnej liczby naturalnej $i \leq l$, osoby B i A_i nie znają się, a więc mają dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Jedną z nich jest osoba A. Drugą musi być jedna spośród znajomych osoby B, a więc $B_{k(i)}$ dla pewnej liczby naturalnej $k(i) \leq m$. Udowodnimy, że jeśli $i \neq j$, to $k(i) \neq k(j)$. Istotnie, jeśli $k(i) = k(j)$, to osoby A oraz $B_{k(i)}$ mają trzech wspólnych znajomych: B, A_i oraz A_j, co jest niemożliwe, bo przecież A i $B_{k(i)}$ nie znają się. Tak więc liczby $k(1), k(2), \ldots, k(l)$ są parami różne i należą do zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$. Stąd wynika, że $l \leq m$. Analogicznie dowodzimy, że $m \leq l$ (rozważając pary osób A i B_i). Ostatecznie $m = l$.

Niech teraz C i D będą dowolnymi osobami nie znającymi się. Zgodnie z założeniem mają one dokładnie dwóch wspólnych znajomych: E i F. Rozważając pary osób znających się: C i E oraz D i E oraz korzystając z udowodnionego wyżej przypadku stwierdzamy, że osoby C, E oraz D mają taką samą liczbę znajomych. $\square$

* * *

2. ZADANIA ARYTMETYCZNE

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli $p > 3$ jest liczbą pierwszą, to liczba $p^2 - 1$ dzieli się przez 24.

Rozwiązanie

Ponieważ $p > 3$, więc p jako liczba niepodzielna przez 3 daje resztę 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Oznacza to, że jedna z liczb $p+1$ lub $p-1$ jest podzielna przez 3, czyli $p^2-1 = (p+1)(p-1)$ dzieli się przez 3. Liczby $p-1$ i $p+1$ są kolejnymi liczbami parzystymi, więc każda z nich jest podzielna przez 2 i dokładnie jedna przez 4. Ostatecznie $p^2 - 1$ dzieli się przez 3 oraz 8, a więc przez 24. □

* * *

Zadanie 12. a) Wykazać, że jeśli x, y są liczbami całkowitymi oraz 3 dzieli $x^2 + y^2$, to liczby x i y są podzielne przez 3.
b) Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite x, y, z spełniajace równanie $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Rozwiązanie

a) Ponieważ $(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$ oraz $(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, więc kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 3 może dawać resztę 0 lub 1. Stąd z łatwością wnioskujemy, że liczba $x^2 + y^2$ przy dzieleniu przez trzy daje resztę resztę zero tylko w przypadku, gdy resztę zero dają liczby x^2 i y^2. Zatem liczby x i y są podzielne przez 3.
b) Oczywiście liczby $x = y = z = 0$ spełniają równanie. Przypuśćmy teraz, że trójka (x, y, z) liczb całkowitych, nie wszystkich równych zero, spełnia równanie $x^2 + y^2 = 3z^2$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $x \neq 0$. Wśród wszystkich takich trójek wybierzmy taką, że liczba $|x|$ jest najmniejsza. Z części a) wynika, że $x = 3x_1$, $y = 3y_1$ dla pewnych liczb całkowitych x_1, y_1. Podstawiając do równania otrzymujemy $9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z^2$. Stąd $3(x_1^2 + y_1^2) = z^2$, czyli $z = 3z_1$ dla pewnej liczby całkowitej z_1. Uwzględniając to w ostatnim równaniu, otrzymujemy $x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2$. Trójka (x_1, y_1, z_1) spełnia nasze równanie, lecz $|x_1| = \frac{1}{3}|x| < |x|$, wbrew wyborowi trójki (x, y, z). Uzyskana sprzeczność dowodzi, że jedynym rozwiązaniem równania w liczbach całkowitych jest $x = y = z = 0$. □

* * *

Zadanie 13. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n takie, że liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 120.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $n^5 - n = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$ oraz $120 = 3 \cdot 5 \cdot 8$. Wśród kolejnych trzech liczb całkowitych dokładnie jedna jest podzielna przez 3, więc 3 dzieli $n^5 - n$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Niech teraz $n = 5k+r$, gdzie $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $r = 0, 1$ lub 4, to odpowiednio liczby n, $n - 1$ oraz $n + 1$ są podzielne przez 5. Jeśli zaś $r = 2$ lub 3, to liczba $n^2 + 1$ jest podzielna przez 5. Stąd dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $n^5 - n$ jest podzielna przez 5. W końcu zauważmy, że jeśli n jest liczbą parzystą to liczby $n - 1$, $n + 1$ oraz $n^2 + 1$ są nieparzyste, a więc $n^5 - n$ jest podzielna przez 8 tylko wtedy, gdy n jest wielokrotnością 8. Jeśli zaś n jest liczbą nieparzystą, to $n - 1$, $n + 1$ oraz $n^2 + 1$ są parzyste a więc $n^5 - n$ dzieli się przez 8. Ostatecznie 120 dzieli liczbę $n^5 - n$ jeśli n jest liczbą nieparzystą lub wielokrotnością liczby 8. □

* * *

Zadanie 14. a) Czy liczba postaci $4k+3$ ($k \in \mathbb{N}$) może być przedstawiona w postaci sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych?
b) Wykazać, że jeśli każda z liczb a, b jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych, to ab jest także sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.

Rozwiązanie

a) Podobnie jak w zadaniu 12 można wykazać, że reszta z dzielenia przez 4 kwadratu liczby całkowitej może być równa 0 lub 1. Stąd reszta z dzielenia przez 4 liczby x^2+y^2 może być równa 0, 1 lub 2.
b) Wystarczy zauważyć, że zachodzi następująca tożsamość:

$$(x^2+y^2)(z^2+t^2) = (xz-yt)^2 + (xt+yz)^2.$$

□

* * *

Zadanie 15. Suma cyfr liczby trzycyfrowej A jest równa 7. Wykazać, że 7 dzieli A wtedy i tylko wtedy, gdy A ma równe cyfry dziesiątek i jedności.

Rozwiązanie

Niech $A = \overline{abc} = 100a+10b+c$ będzie liczbą trzycyfrową taką, że $a+b+c=7$. Wtedy $2a+2b+2c=14$ oraz $A-14 = 100a+10b+c-2a-2b-2c = 7(14a+b)+(b-c)$. Stąd A jest podzielna przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy 7 dzieli $b-c$. Jednak z założeń wynika, iż $0 \leq b, c \leq 6$, a więc $b-c$ dzieli się przez 7 tylko wtedy, gdy $b=c$. □

* * *

Zadanie 16. Na ile sposobów można przedstawić liczbę 2003 w postaci sumy pewnej ilości kolejnych liczb naturalnych?

Rozwiązanie

Rozważmy k kolejnych liczb naturalnych $n, n+1, \ldots, n+k-1$ takich, że

$$n+(n+1)+\cdots+(n+k-1) = 2003.$$

Zauważmy, że przestawiając kolejność składników w lewej stronie ostatniej równości otrzymujemy $n+(n+1)+\cdots+(n+k-1) = (n+n+\cdots+n)+(1+2+\cdots+(k-1)) = nk+\frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(2n+k-1)}{2}$. Zadanie sprowadza się zatem do wyznaczenia wszystkich liczb naturalnych k, n spełniających równanie

$$\frac{k(2n+k-1)}{2} = 2003.$$

Liczba 2003 jest jednak pierwsza (co można sprawdzić bezpośrednio). Ponieważ $k>1$ oraz jedna z liczb $\frac{k}{2}$, $\frac{2n+k-1}{2}$ jest całkowita, z powyższej równości otrzymujemy, że albo $\frac{k}{2}=1$ i $2n+k-1=2003$, albo $k=2003$ i $\frac{2n+k-1}{2}=1$. W drugim przypadku otrzymujemy ujemną wartość n. Ostatecznie $k=2$ i jedynym przedstawieniem liczby 2003 w postaci sumy kolejnych liczb naturalnych jest $2003 = 1001+1002$. □

* * *

Zadanie 17. Wykazać, że jeśli a, b są liczbami naturalnymi względnie pierwszymi, to równanie $ax+by=ab$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych x, y.

Rozwiązanie

Załóżmy, że liczby naturalne x, y spełniają równanie $ax + by = ab$. Wtedy

$$a(b - x) = by \text{ oraz } b(a - y) = ax.$$

Ponieważ liczby a, b są względnie pierwsze, więc z powyższych równości wynika kolejno, że a dzieli y oraz b dzieli x. Oznacza to, że $y \geq a$ oraz $x \geq b$. Tak więc $ax+by \geq ab+ba = 2ab > ab$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że równanie $ax+by = ab$ nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. □

* * *

Zadanie 18. Rozwiązać w liczbach całkowitych równania:
a) $xy = x + y$,
b) $6x^2 + 5y^2 = 74$,
c) $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz$.

Rozwiązanie

a) Rozważane równanie można napisać w postaci $(x - 1)(y - 1) = 1$. Stąd wynika, że albo $x - 1 = 1$ i $y - 1 = 1$, albo $x - 1 = -1$ i $y - 1 = -1$. Otrzymujemy zatem dwa rozwiązania $x = y = 2$ lub $x = y = 0$.

b) Równanie można przekształcić do postaci $6(x^2 - 4) = 5(10 - y^2)$. Stąd widać, że liczby $x^2 - 4$ oraz $10 - y^2$ są tych samych znaków oraz 5 dzieli $x^2 - 4$ i 6 dzieli $10 - y^2$. W przypadku gdy $x^2 - 4 \geq 0$ mamy $10 - y^2 \geq 0$, czyli $y^2 \leq 10$. Stąd $y^2 \in \{0, 1, 4, 9\}$. Wtedy liczba $10 - y^2$ jest podzielna przez 6 tylko dla $y^2 = 4$, czyli $y = -2$ lub $y = 2$. Z łatwością obliczamy, że w tej sytuacji $x = -3$ lub $x = 3$. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $x^2 - 4 < 0$. Wtedy jednak 5 nie dzieli $x^2 - 4$. Ostatecznie mamy cztery rozwiązania: $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$

c) Zauważmy, że jeśli trójka (x, y, z) liczb całkowitych spełnia równanie $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz$, to x jest liczbą parzystą. Podstawiając $x = 2x_1$ otrzymamy $4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 6x_1yz$. Stąd widać, że y jest liczbą parzystą i podstawiając $y = 2y_1$ otrzymamy $2x_1^3 + 4y_1^3 + z^3 = 6x_1y_1z$. Zatem liczba z też jest parzysta i po podstawieniu $z = 2z_1$ otrzymujemy $x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 = 6x_1y_1z_1$. Wykazaliśmy zatem, że jeśli trójka (x, y, z) spełnia równanie $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 6xyz$, to wszystkie liczby x, y, z są parzyste i oczywiście trójka $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ spełnia również to równanie. To samo można powiedzieć o ostatniej trójce liczb. Kontynuując rozumowanie stwierdzamy, że liczby x, y, z są podzielne przez dowolnie wielką potęgę dwójki. Stąd wynika oczywiście, iż jedynym rozwiązaniem jest trójka $(0, 0, 0)$. □

* * *

Zadanie 19. Liczba A zapisana w systemie siódemkowym ma trzy cyfry, zaś zapisana w systemie dziewiątkowym ma te same trzy cyfry, ale występują one przeciwnym porządku. Jaka to liczba?

Rozwiązanie

Mamy $A = a \cdot 7^2 + b \cdot 7 + c = c \cdot 9^2 + b \cdot 9 + a$, dla pewnych $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Stąd otrzymujemy $40c+b = 24a$, czyli b jako liczba podzielna przez 8 musi być równa zeru. Tak więc $5c = 3a$, a po uwzględnieniu ograniczeń otrzymujemy $a = 5$, $c = 3$. Ostatecznie $A = 5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 3 = 3 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9 + 5 = 248$. □

* * *

Zadanie 20*. Wykazać, że istnieje 100-cyfrowa liczba podzielna przez 2^{100}, w zapisie dziesiętnym której występują tylko cyfry 1 i 2.

Rozwiązanie

I sposób. Udowodnimy, że jeśli $A = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_k \ldots a_1 a_0}$ jest dowolną liczbą naturalną i pewna jej cyfra a_k jest różna od 1 i 2, to do A można dodać liczbę postaci $m \cdot 2^{100}$ taką, że liczba $\overline{A} = A + m \cdot 2^{100}$ jest postaci:

$$\overline{b_l b_{l-1} \ldots 1 a_{k-1} \ldots a_1 a_0} \qquad \text{lub} \qquad \overline{b_l b_{l-1} \ldots 2 a_{k-1} \ldots a_1 a_0}.$$

Tak więc do A można dodać pewną wielokrotność liczby 2^{100} tak, aby $\overline{A}$ miała identyczne jak A cyfry do pozycji k-tej (licząc z prawej strony) i $(k+1)$-szą cyfrę równą 1 lub 2. Cyfrą jedności potęgi dwójki może być $2, 4, 8$ lub 6. Z łatwością zauważamy, że cyframi jedności liczb 2^{100}, 2^{101}, 2^{102}, 2^{103} są odpowiednio $6, 2, 4, 8$. Stąd widać, że przyjmując za m jedną z czterech wartości: $10^k, 2 \cdot 10^k, 4 \cdot 10^k$, lub $8 \cdot 10^k$ jako $(k+1)$-szą cyfrę w liczbie $\overline{A}$ można uzyskać jedynkę, jeśli a_k jest nieparzysta oraz dwójkę, jeśli a_k jest parzysta. Ponieważ dodawana liczba kończy się k zerami, więc liczby A i $\overline{A}$ mają takie same ostatnie cyfry do k-tej włącznie.

Z udowodnionej własności wynika, że istnieje liczba $B = \overline{b_s \ldots b_{100} b_{99} \ldots b_1 b_0}$ podzielna przez 2^{100}, której każda z ostatnich 100 cyfr jest równa 1 lub 2 (procedurę dodawania wielokrotności 2^{100} możemy rozpocząć np. od $A = 2^{100}$). Wtedy

$$\overline{b_{99} \ldots b_1 b_0} = B - 10^{100} \cdot \overline{b_s \ldots b_{100}}$$

jest poszukiwaną liczbą 100 cyfrową.

II sposób. Udowodnimy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ istnieje n-cyfrowa liczba A_n podzielna przez 2^n w której zapisie dziesiętnym występują wyłącznie cyfry 1 lub 2. Z łatwością zauważamy, że $A_1 = 2$ i $A_2 = 12$ spełniają nasze twierdzenie dla $n = 1, 2$. Podamy metodę konstruowania liczby A_{n+1} przy pomocy liczby A_n. Niech $A_n = m \cdot 2^n$. Przyjmijmy

$$A_{n+1} = \begin{cases} 10^n + A_n, & \text{jeśli } m = 2k+1, \\ 2 \cdot 10^n + A_n, & \text{jeśli } m = 2k. \end{cases}$$

Z określenia wynika, że liczba A_{n+1} powstaje przez dopisanie do A_n z lewej strony cyfry 1 lub 2, a więc jest liczbą $(n+1)$-cyfrową. Ponadto w przypadku, gdy $m = 2k$ mamy $A_{n+1} = 2 \cdot 10^n + A_n = 2^{n+1} \cdot (5^n + k)$. Natomiast jeśli $m = 2k+1$, to $A_{n+1} = 10^n + (2k+1) \cdot 2^n = 2^n \cdot (5^n + 2k + 1)$. Oczywiście $5^n + 2k + 1$ jest liczbą parzystą, a więc 2^{n+1} jest dzielnikiem A_{n+1}. To kończy dowód. $\square$

* * *

3. FUNKCJE, WIELOMIANY, RÓWNANIA I NIERÓWNOŚCI

Zadanie 21. Wyznaczyć a, b tak aby wielomian $x^4 + x^3 + 2x^2 + ax + b$ był kwadratem innego wielomianu.

Rozwiązanie

Zauważmy, że

$$(Ax^2 + Bx + C)^2 = A^2x^4 + 2ABx^3 + (2AC + B^2)x^2 + 2BCx + C^2.$$

Należy więc dobrać A, B, C, a, b tak aby

$$\begin{cases} A^2 = 1 \\ 2AB = 1 \\ 2AC + B^2 = 2 \\ 2BC = a \\ C^2 = b. \end{cases}$$

Z łatwością obliczamy: $A = \pm 1, B = \pm\frac{1}{2}, C = \pm\frac{7}{8}$ oraz $a = \frac{7}{8}, b = \frac{49}{64}$. □

* * *

Zadanie 22. Wykazać, że dla dowolnych liczb a, b, c, x, y, z zachodzą nierówności:
a) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$,
b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$,
c) $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + ac + bc)$, gdzie a, b, c są długościami boków trójkąta. Czy ta nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c?
d) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \sqrt{(a + x)^2 + (b + y)^2 + (c + z)^2}$.

Rozwiązanie

a) Wystarczy zauważyć, że

$$0 \leq \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 = \frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab + ac - 2bc.$$

b) Nierówność wynika stąd, że

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2}\left[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\right] = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac. \end{aligned}$$

c) Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, więc $a + b - c > 0$, $a + c - b > 0$ oraz $b + c - a > 0$. Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &< a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c) = \\ &= 2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2, \end{aligned}$$

czyli $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc$. Nierówność ta nie zachodzi dla dowolnych liczb dodatnich. Wystarczy rozważyć na przykład $a = b = 1$ oraz $c = 5$.

d) Rozważana nierówność jest równoważna następującej

$$ax + by + cz \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Otrzymujemy ją przez obustronne podniesienie pierwszej do kwadratu i redukcję wyrazów podobnych. Kładąc $A = a^2 + b^2 + c^2$, $B = ax + by + cz$ oraz $C = x^2 + y^2 + z^2$

wystarczy wykazać, że $B^2 \leq AC$. Możemy założyć, że $A > 0$ (przypadek $A = 0$ jest oczywisty). Zauważmy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej t:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (at+x)^2 + (bt+y)^2 + (ct+z)^2 = \\ &= At^2 + 2Bt + C = A\left[\left(t + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{A^2}\right]. \end{aligned}$$

Nierówność:

$$\left(t + \frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2 - AC}{A^2} \geq 0$$

zachodzi dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Podstawiając $t = -\frac{B}{A}$ otrzymamy $B^2 \leq AC$, co należało udowodnić.

□

Uwaga. Używając identycznych argumentów jak wyżej można wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność:

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

Nosi ona nazwę nierówności *Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego.*

* * *

Zadanie 23. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) liczb dodatnich spełniające równanie:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} = \frac{1}{xy}.$$

Rozwiązanie

Z nierówności $(x^2 - y)^2 \geq 0$ oraz $(y^2 - x)^2 \geq 0$ wynika, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y

$$x^4 + y^2 \geq 2x^2y \qquad \text{oraz} \qquad y^4 + x^2 \geq 2y^2x,$$

przy czym obie nierówności stają się równościami wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2 = y$ oraz $y^2 = x$. Z łatwością sprawdzamy, że wśród liczb dodatnich warunki te spełniają tylko liczby $x = y = 1$. Korzystając z powyższych nierówności otrzymujemy

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{x}{2x^2y} + \frac{y}{2y^2x} = \frac{1}{xy}.$$

Stąd jedynym rozwiązaniem równania w liczbach dodatnich jest $x = y = 1$. □

* * *

Zadanie 24. a) Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

b) Wykazać, że jeśli $x \neq 1$, to

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

c) Wykazać, że równanie

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

gdzie $a_i \in \{-1, 0, +1\}$ nie ma rozwiązań w zbiorze $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Rozwiązanie

a) Jeśli $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$, to oczywiście nierówność zachodzi. Załóżmy, że $x_1+x_2+\cdots+x_n\neq 0$. Z definicji wartości bezwzględnej wynika, że wartość bezwzględna ilorazu dwóch liczb jest ilorazem wartości bezwzględnch oraz dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi nierówność: $a\leq|a|$. Mamy więc

$$\begin{aligned}1&=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}=\\&=\frac{x_1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\cdots+x_n}\leq\\&\leq\frac{|x_1|}{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}+\frac{|x_2|}{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}+\cdots+\frac{|x_n|}{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}=\\&=\frac{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}.\end{aligned}$$

Stąd wynika, że

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leq|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|.$$

b) Przyjmijmy $S=1+x+x^2+\cdots+x^n$. Wtedy

$$\begin{aligned}xS&=x+x^2+\cdots+x^{n+1}=(1+x+\cdots+x^n)+(x^{n+1}-1)\\&=S+x^{n+1}-1.\end{aligned}$$

Stąd $(x-1)S=x^{n+1}-1$, czyli $S=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

c) Przypuśćmy, że x_0 jest pierwiastkiem rozważanego równania. Z a) i b) wynika, że

$$\begin{aligned}|x_0|^n&=|x_0^n|=|a_1x_0^{n-1}+a_2x_0^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n|\leq\\&\leq|a_1||x_0|^{n-1}+|a_2||x_0|^{n-2}+\cdots+|a_{n-1}||x_0|+|a_n|\leq\\&\leq|x_0|^{n-1}+|x_0|^{n-2}+\cdots+|x_0|+1=\frac{|x_0|^n-1}{|x_0|-1}\end{aligned}$$

Zauważmy, że jeśli $|x_0|\geq 2$, to $|x_0|-1\geq 1$ oraz $\frac{|x_0|^n-1}{|x_0|-1}\leq|x_0|^n-1<|x_0|^n$. Na podstawie powyższej nierówności otrzymujemy zatem, że $|x_0|<2$.

□

* * *

Zadanie 25. a) Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x,y,z zachodzi nierówność:

$$x+y+z\leq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}.$$

b) Wykazać, że nierówność

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{50-3x}\leq 12$$

zachodzi dla wszystkich wartości $x\in\mathbb{R}$, dla których lewa strona jest określona.

Rozwiązanie

a) Korzystając z nierówności $2ab\leq a^2+b^2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2&=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\leq\\&\leq x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(x^2+z^2)=3(x^2+y^2+z^2).\end{aligned}$$

Stąd oczywiście wynika, że $x+y+z\leq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$.

b) Podstawiając w nierówności a) w miejsce x, y, z liczby $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{2x-3}$, $\sqrt{50-3x}$ odpowiednio, otrzymujemy

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \le$$
$$\le \sqrt{3[(x+1) + (2x-3) + (50-3x)]} = \sqrt{3 \cdot 48} = 12.$$

□

* * *

Zadanie 26. Czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ taka, że

$$f(f(x)) = x + 1 \text{ dla każdego } x \in \mathbb{Z},$$

gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że funkcja f istnieje. Dla liczby całkowitej x niech $y = f(x-1)$. Zgodnie z założeniem mamy $x = f(f(x-1))$, czyli $f(x) = f(f(f(x-1))) = f(f(y)) = y+1$. Stąd $f(x) = f(x-1)+1$. Z równości tej z łatwością wynika, że dla dowolnej liczby całkowitej x, $f(x) = f(0) + x$. W szczególności mamy zatem $x + 1 = f(f(x)) = f(f(0) + x) = f(0) + (f(0) + x) = 2f(0) + x$. Stąd otrzymujemy $2f(0) = 1$, co jest niemożliwe ponieważ wartości funkcji f są liczbami całkowitymi. Nie istnieje zatem funkcja o żądanych własnościach.

Uwaga. Zauważmy, że funkcja $f(x) = x + \frac{1}{2}$ określona na zbiorze liczb wymiernych spełnia zależność $f(f(x)) = x + 1$.

□

* * *

Zadanie 27. Niech liczby x, y będą takie, że $x > y$ oraz $xy = 1$. Udowodnić, że zachodzi nierówność:

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} \ge 2\sqrt{2}.$$

Rozwiązanie

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy

$$\frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{(x-y)^2+2xy}{x-y} = (x-y) + \frac{2xy}{x-y} = (x-y) + \frac{2}{x-y} =$$
$$= \left(\sqrt{x-y} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-y}}\right)^2 + 2\sqrt{2} \ge 2\sqrt{2}.$$

□

* * *

Zadanie 28. Rozwiązać układ równań:

$$\frac{xy}{x+y} = a, \qquad \frac{xz}{x+z} = b, \qquad \frac{yz}{y+z} = c,$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi.

Rozwiązanie

Rozpatrzymy osobno dwa przypadki.
1. Wśród liczb a, b, c nie ma zera.

Odwracając każde z równań otrzymamy układ:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c} \end{cases} \qquad \text{równoważny układowi} \qquad \begin{cases} X+Y=\frac{1}{a} \\ X+Z=\frac{1}{b} \\ Y+Z=\frac{1}{c} \end{cases},$$

gdzie $X=\frac{1}{x}, Y=\frac{1}{y}, Z=\frac{1}{z}$. Odejmując dwa pierwsze równania stronami otrzymujemy $Y-Z=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$. Dodając to równanie do trzeciego uzyskujemy

$$Y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{ab+bc-ac}{2abc}.$$

Dalej z łatwością stwierdzamy, że

$$x=\frac{2abc}{ab+ac-bc}, \quad y=\frac{2abc}{ab+bc-ac}, \quad z=\frac{2abc}{ac+bc-ab},$$

o ile $ab+ac-bc\neq 0$, $ab+bc-ac\neq 0$ oraz $ac+bc-ab\neq 0$.
2. Przynajmniej jedna z liczb a,b lub c jest równa zeru.
Niech przykładowo $a=0$. Wtedy z pierwszego równania wynika, że dokładnie jedna z liczb x lub y musi być równa zeru (ze względu na mianownik). Z dwóch ostatnich równań wynika wówczas, że $b=0$ lub $c=0$. Przypadek $b=c=0$ zajść nie może, bo wtedy co najmniej dwie spośród liczb x,y,z były by równe zeru. Przypuśćmy więc, że $b=0$ i $c\neq 0$. Wówczas z ostatniego równania wynika, że $z=\frac{xc}{x-c}$. Układ ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań postaci:

$$\begin{cases} x\in\mathbb{R}\setminus\{0,c\} \\ y=0 \\ z=\frac{xc}{x-c} \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y\in\mathbb{R}\setminus\{0,c\} \\ z=\frac{yc}{y-c}. \end{cases}$$

Podobną analizę przeprowadzamy w pozostałych przypadkach: ($a\neq 0$ i $b=c=0$) oraz ($b\neq 0$ i $a=c=0$).

□

* * *

Zadanie 29. Dane są takie liczby rzeczywiste a,b,c że wykresy funkcji

$$y=ax+b, \qquad y=bx+c, \qquad y=cx+a$$

mają punkt wspólny. Wykazać, że $a=b=c$.

Rozwiązanie

Współrzędne (x,y) punktu przecięcia wykresów spełniają układ równań:

$$\begin{cases} ax+b=y \\ bx+c=y \\ cx+a=y \end{cases}$$

Odejmując stronami równania drugie od pierwszego, trzecie od pierwszego i trzecie od drugiego otrzymujemy kolejno:

$$(a-b)x=c-b, \quad (a-c)x=a-b \quad \text{oraz} \quad (b-c)x=a-c.$$

Z równości tych wynika, że jeśli wśród liczb a,b,c jest para liczb równych, to wszystkie trzy są równe. Załóżmy więc, że liczby a,b,c są parami różne. Wyliczając x z każdego z równań otrzymujemy

$$x=\frac{c-b}{a-b}=\frac{a-b}{a-c}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Stąd $(a-c)^2 = (a-b)(b-c)$, $(a-b)^2 = (b-c)(c-a)$, $(b-c)^2 = (b-a)(a-c)$, a więc

$$\begin{aligned}(a-c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 &= (a-b)(b-c) + (b-c)(c-a) + (b-a)(a-c) = \\ &= ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2 = \\ &= -\frac{1}{2}[(a-c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2]\end{aligned}$$

Otrzymujemy $(a-c)^2 + (a-b)^2 + (b-c)^2 = 0$, co przy naszym założeniu jest niemożliwe. Ostatecznie $a = b = c$. □

* * *

Zadanie 30. Wyznaczyć zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność:

$$2 - x^2 - y^2 - \sqrt{(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2} > 0.$$

Rozwiązanie

Przekształćmy powyższą nierówność do postaci

$$(1-x^2) + (1-y^2) > \sqrt{(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2}.$$

Zauważmy, że

$$\sqrt{(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2} \geq 1 - x^2 \quad \text{oraz} \quad \sqrt{(1-x^2)^2 + (1-y^2)^2} \geq 1 - y^2.$$

Zatem, jeśli liczby x, y spełniają żądaną nierówność, to $(1-x^2) + (1-y^2) > 1 - x^2$ i $(1-x^2) + (1-y^2) > 1 - y^2$. Stąd $1 - x^2 > 0$ i $1 - y^2 > 0$, czyli punkty (x, y) należą do kwadratu (bez brzegu) $K = \{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$. Z drugiej strony, dla dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$ (uzasadnij!), a więc współrzedne punktów kwadratu K spełniają żądaną nierówność.

□

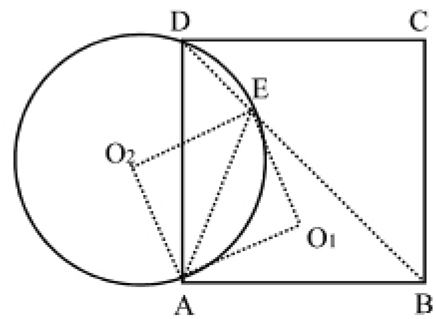
* * *

4. ZADANIA GEOMETRYCZNE

Zadanie 31. Na przekątnej BD kwadratu $ABCD$ wybrano punkt E. Punkty O_1, O_2 są odpowiednio środkami okręgów opisanych na trójkątach ABE, ADE. Dowieść, że czworokąt AO_1EO_2 jest kwadratem.

Rozwiązanie

Rozważmy okrąg opisany na trójkącie AED. Zauważmy, że $\angle ADE = 45°$. Ponieważ $\angle AO_2E$ jest kątem środkowym okręgu opartym na tym samym łuku co kąt wpisany $\angle ADE$, więc $\angle AO_2E = 90°$. Ponadto $O_2A = O_2E$, zatem $\triangle AO_2E$ jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Z tych samych powodów $\triangle AO_1E$ jest prostokątnym trójkątem równoramiennym. Oba trójkąty mają wspólną przeciwprostokątną, więc są przystające. Stąd widać, że AO_1EO_2 jest kwadratem.



□

* * *

Zadanie 32. Na płaszczyźnie wybrano cztery punkty tak, że nie leżą one ani na jednej prostej ani na jednym okręgu. Wykazać, że pewien z tych punktów położony jest wewnątrz okręgu do którego należą trzy pozostałe.

Rozwiązanie

Oznaczmy wybrane punkty przez A, B, C, D. Możliwe są dwa przypadki.

1. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Ponieważ na tym czworokącie nie można opisać okręgu, więc sumy jego przeciwległych kątów są różne od 180°. Jedna z tych sum jest wtedy większa od 180°. Przypuśćmy, że $\angle A + \angle C > 180°$. Okrąg opisany na trójkącie ABD zawiera wtedy punkt C.
2. Punkty A, B, C, D nie są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Wtedy pewne trzy spośród nich są wierzchołkami trójkąta zawierającego czwarty punkt. Okrąg opisany na tym trójkącie spełnia warunki zadania.

Uwaga. Skorzystaliśmy z charakteryzacji czworokąta na którym można opisać okrąg. *Wierzchołki czworokąta wypukłego leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy sumy jego przeciwległych kątów są równe* 180°. □

* * *

Zadanie 33. Dwusieczne AK i BM kątów trójkąta ABC przecinają się w punkcie O. Wykazać, że jeśli $OK = OM$, to albo $\angle BAC = \angle ABC$ albo $\angle ACB = 60°$.

Rozwiązanie

Oznaczmy tradycyjnie miary odpowiednich kątów trójkąta ABC przez α, β, γ. Z założeń wynika, że trójkąt KOM jest równoramienny. Niech δ będzie miarą kąta przy jego podstawie KM. Zauważmy, że $\angle AMB = 180° - (\alpha + \beta/2)$ oraz $\angle AKB =$

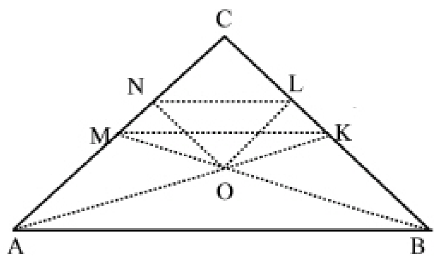
$180° - (\alpha/2 + \beta)$. Sumując kąty czworokąta $ABKM$ otrzymamy

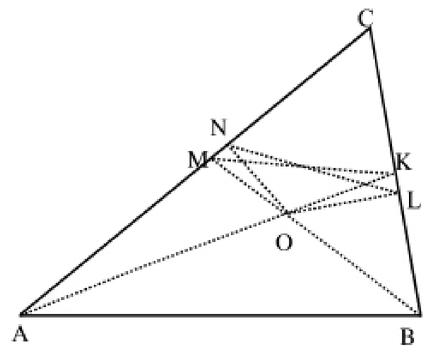
$$\alpha + \beta + [180° - (\alpha + \beta/2)] + [180° - (\alpha/2 + \beta)] + 2\delta = 360°.$$

Stąd obliczamy

$$\delta = \frac{\alpha + \beta}{4}.$$

Oznaczmy przez L, N rzuty prostopadłe punktu O na proste BC oraz AC. Wtedy punkty L, N są położone albo po tej samej stronie prostej KM albo po przeciwnych jej stronach. Rozważmy pierwszą sytuację.





Ponieważ $ON = OL$ oraz $OK = OM$, więc trójkaty prostokątne OKL i OMN są przystające. W szczególności $LK = MN$. Ponadto L, N są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Stąd $CL = CM$. Widzimy zatem, że $CM = CK$ oraz $\angle CMK = \angle CKM$, czyli $\angle AKC = \angle BMC$. Trójkąty AKC oraz BMC są zatem podobne. Stąd wynika, że $\alpha = \beta$.

Rozważmy przypadek, gdy punkty L, N są położone po przeciwnych stronach prostej KM. Z przystawania trójkątów OKL i OMN wynika, że $\angle NOL = \angle MOK$. Mamy zatem $\angle ONL = \angle OLN = \delta$. Trójkąty ABC oraz LNC mają wspólny kąt γ, więc $\angle LNC + \angle NLC = \alpha + \beta$. Sumując przeciwległe kąty (proste) czworokąta $LONC$ otrzymujemy

$$180° = \angle ONC + \angle OLC = 2\delta + \angle LNC + \angle NLC =$$
$$= 2\delta + \alpha + \beta = 2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{4} + \alpha + \beta = \frac{3}{2}(\alpha + \beta).$$

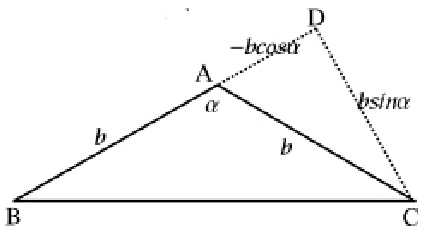
Stąd wynika, że $\alpha + \beta = 120°$, a więc $\gamma = 60°$. □

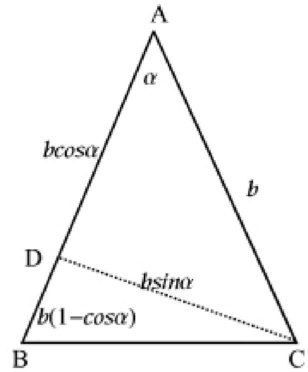
* * *

Zadanie 34. Punkty A, B, C, D należą do okręgu o promieniu R i dzielą go na cztery równe części. Wykazać, że jeśli X jest dowolnym punktem tego okręgu, to suma $AX^4 + BX^4 + CX^4 + DX^4$ nie zależy od położenia punktu X.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następującego faktu pomocniczego:
(*) *Jeśli trójkąt równoramienny ma ramiona długości b oraz kąt między tymi ramionami α, to kwadrat jego podstawy jest równy $2b^2(1 - \cos\alpha)$.*



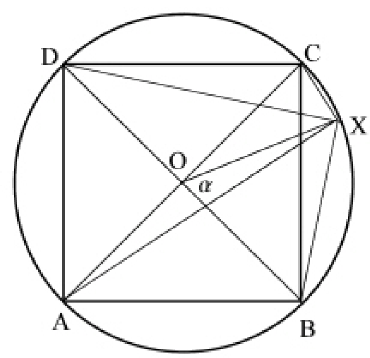


Istotnie, oznaczając przez D rzut wierzchołka C na prostą AB, z łatwością wyznaczamy $AD = \pm b\cos\alpha$ w zależności od tego czy kąt α jest rozwarty, czy ostry. Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta BCD otrzymujemy:

$$BC^2 = b^2\sin^2\alpha + b^2(1-\cos\alpha)^2 = b^2(1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha - 2\cos\alpha) =$$
$$= 2b^2(1-\cos\alpha).$$

Wracając do zadania zauważmy, że

punkty A, B, C, D są oczywiście wierzchołkami kwadratu wpisanego w okrąg. Wybierzmy dowolny punkt X na okręgu. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że X leży na łuku pomiędzy punktami B i C. Niech $\angle BOX = \alpha$. Wtedy $\angle AOX = 90° + \alpha$, $\angle XOC = 90° - \alpha$ oraz $\angle DOX = 180° - \alpha$. Stosując (*) do trójkątów równoramiennych (o ramionach długości R): $\triangle AOX, \triangle BOX, \triangle COX$ oraz $\triangle DOX$ otrzymujemy:



$$AX^2 = 2R^2(1-\cos(90° + \alpha)) = 2R^2(1+\sin\alpha)$$
$$BX^2 = 2R^2(1-\cos\alpha)$$
$$CX^2 = 2R^2(1-\cos(90° - \alpha)) = 2R^2(1-\sin\alpha)$$
$$DX^2 = 2R^2(1-\cos(180° - \alpha)) = 2R^2(1+\cos\alpha).$$

Stąd dalej wynika, że

$$AX^4 + BX^4 + CX^4 + DX^4 =$$
$$= 4R^4[(1+\sin\alpha)^2 + (1-\cos\alpha)^2 + (1-\sin\alpha)^2 + (1+\cos\alpha)^2] =$$
$$= 4R^4[1 + 2\sin\alpha + \sin^2\alpha + 1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha +$$
$$+ 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha] =$$
$$= 24R^4.$$

$\square$

Uwaga. Używając tych samych argumentów jak w dowodzie (*) można wykazać tzw. *Twierdzenie cosinusów*:

Jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąta i α jest kątem leżącym naprzeciw boku o długości a, to

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

* * *

Zadanie 35. Okrąg o jest styczny do dwóch boków trójkąta ABC oraz do dwóch jego środkowych. Wykazać, że trójkąt ABC jest równoramienny.

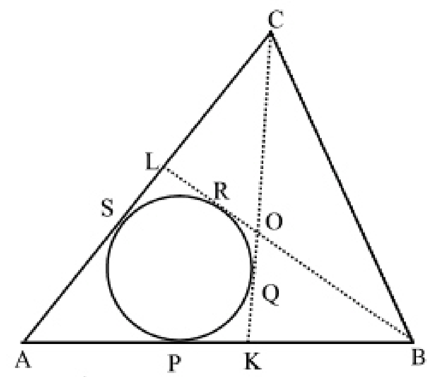
Rozwiązanie

W rozwiązaniu skorzystamy z następujących własności okręgu:

(a) *Jeżeli ramiona pewnego kąta są styczne do okręgu o, to odcinki od wierzchołka kąta do punktów styczności są równych długości.*

(b) *W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.*

Przypuśćmy, że okrąg o jest styczny do boków AB, AC oraz środkowych CK i BL (por. rysunek obok). Przyjmijmy oznaczenia: $AC = b, AB = c, CL = m_c, BL = m_b$. Okrąg o jest wpisany w czworokąt $AKOL$, więc



$$AK + OL = OK + AL.$$

O jest punktem przecięcia środkowych, więc $OL = \frac{1}{3}m_b, OK = \frac{1}{3}m_c$. Mamy zatem równość:

$$\frac{1}{3}m_c + \frac{1}{2}c = \frac{1}{3}m_b + \frac{1}{2}b.$$

Z drugiej strony zauważmy, że

$$\frac{b}{2} + m_b = CL + LB = (CS - LS) + (BR + RL) = CQ - LR + BR + LR =$$

$$= CQ + BR = (CK - KQ) + (BK + PK) = CK + BK = m_c + \frac{c}{2}.$$

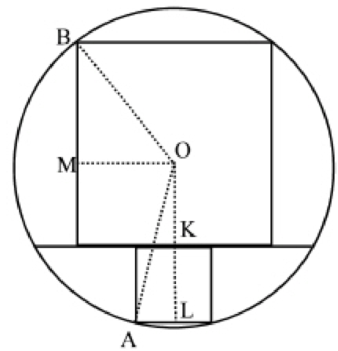
Zatem $m_b - m_c = \frac{1}{2}(c - b)$. Z wcześniej wyprowadzonej zależności wynika natomiast, że $m_b - m_c = \frac{3}{2}(b - c)$. Ostatecznie $b = c$. □

* * *

Zadanie 36. Cięciwa okręgu jest oddalona od jego środka o d. W każdy z dwóch segmentów składających się z cięciwy oraz łuku okręgu wpisano kwadrat, którego dwa wierzchołki leżą na cięciwie oraz dwa na okręgu. Obliczyć różnicę długości boków kwadratów.

Rozwiązanie.

Niech R, y, x będą odpowiednio długościami promienia okręgu, oraz boków kwadratów wpisanych w segmenty. Załóżmy, że $x < y$. Rozważymy trójkąty prostokątne OMB i OLA, gdzie M, K są rzutami środka O okręgu na odpowiedne boki kwadratów (zob. rysunek). Mamy $OM = \frac{1}{2}y$, $BM = y - d$, $AL = \frac{1}{2}x$ oraz $OL = x + d$. Stosując twierdzenie Pitagorasa do tych trójkątów otrzymujemy:



$$R^2 = \frac{1}{4}y^2 + (y-d)^2$$

$$R^2 = \frac{1}{4}x^2 + (x+d)^2.$$

Odejmując powyższe równości stronami otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4}(y^2 - x^2) + (y-d)^2 - (x+d)^2 = \\ &= \frac{1}{4}(y-x)(y+x) + (y+x)(y-x-2d) = \\ &= (y+x)\left(\frac{5}{4}(y-x) - 2d\right). \end{aligned}$$

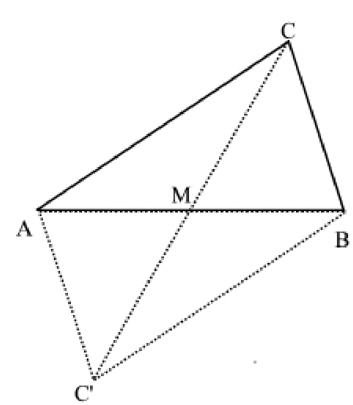
Stąd obliczamy $y - x = \frac{8}{5}d$. $\square$

* * *

Zadanie 37. Wykazać, że w dowolnym trójkącie suma długości jego środkowych jest mniejsza od obwodu oraz większa od 3/4 obwodu tego trójkąta.

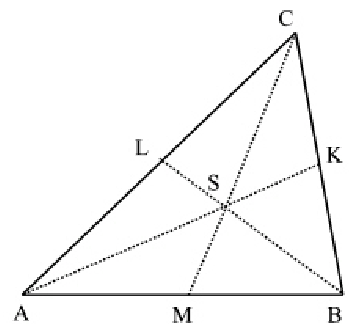
Rozwiązanie

Niech ABC będzie danym trójkątem o bokach $AB = c$, $BC = a$ i $CA = b$. Oznaczmy przez m_a, m_b, m_c długości środkowych poprowadzonych kolejno z wierzchołków A, B, C. Rozważmy punkt C' symetryczny do C względem spodka M środkowej CM. Wtedy $CC' = 2m_c$, $AC' = BC = a$. Z nierówności trójkąta zastosowanej do $\triangle CC'B$ otrzymujemy $2m_c < a+b$. Z tych samych powodów $2m_b < a + c$ oraz $2m_a < b + c$. Po dodaniu tych nierówności stronami uzyskujemy



$$m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Niech S będzie punktem przecięcia środkowych. Wiadomo, że S dzieli każdą środkową w stosunku $2:1$. Tak więc $AS = \frac{2}{3}m_a$, $BS = \frac{2}{3}m_b$, $CS = \frac{2}{3}m_c$. Stosując nierówność trójkąta do $\triangle ASB$, $\triangle BSC$ i $\triangle CSA$ otrzymujemy kolejno:



$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$$
$$\frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c > a$$
$$\frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_a > b.$$

Dodając te nierówności stronami uzyskujemy

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c).$$

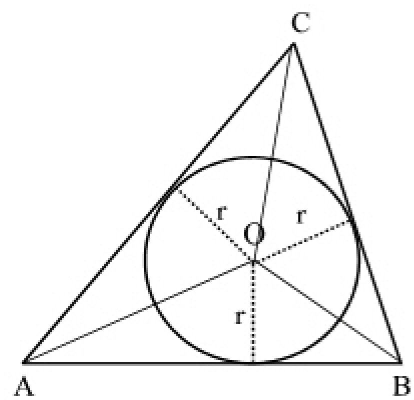
□

* * *

Zadanie 38. Promień okręgu wpisanego w dany trójkąt jest równy 1. Wykazać, że pewna wysokość tego trójkąta ma długość nie mniejszą niż 3.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez O środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Wtedy trójkąty AOB, BOC i COA mają wysokości równe długości r promienia okręgu. Dodając ich pola otrzymamy pole S trójkąta ABC, czyli $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr$. Stąd



$$r = \frac{2S}{a+b+c}.$$

Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $a \le b \le c$. Przez h_a, h_b, h_c oznaczmy długości wysokości trójkąta opuszczone odpowiednio na boki BC, AC oraz AB.

Ponieważ $r = 1$ mamy $2S = a + b + c$. Z drugiej strony $2S = ah_a$, czyli $ah_a = a + b + c \ge 3a$. Stąd $h_a \ge 3$.

□

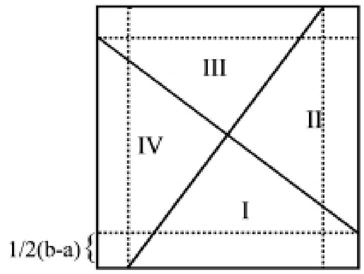
* * *

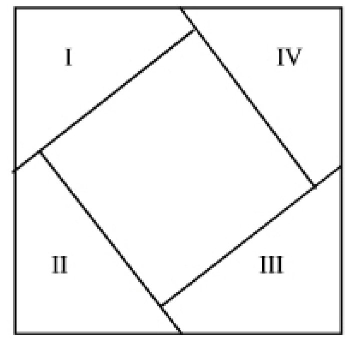
Zadanie 39. Dane dwa kwadraty podzielić na części tak aby można było z nich złożyć jeden kwadrat (wykorzystując do tego każdą część).

Rozwiązanie

Załóżmy, że kwadraty mają boki długości a, b (przy czym $a \le b$). W przypadku, gdy $a = b$ wystarczy każdy z kwadratów podzielić przekątną na dwa prostokątne trójkąty równoramienne. Z czterech takich trójkątów można oczywiście zbudować kwadrat.

Niech teraz $a < b$. Mniejszy kwadrat umieśćmy wewnątrz większego tak aby ich środki się pokrywały i boki były parami równoległe. Podzielmy większy kwadrat dwiema prostymi prostopadłymi (por. rysunek poniżej) przechodzącymi przez jego środek na cztery przystające czworokąty: I, II, III i IV. Każdy czworokąt ma dwa prostopadłe boki długości $\frac{b-a}{2}$ oraz $\frac{a+b}{2}$. Różnią się one oczywiście o a. Stąd wynika, że układając czworokąty I, II, III i IV tak jak pokazano poniżej, wewnątrz otrzymamy kwadrat o boku a.





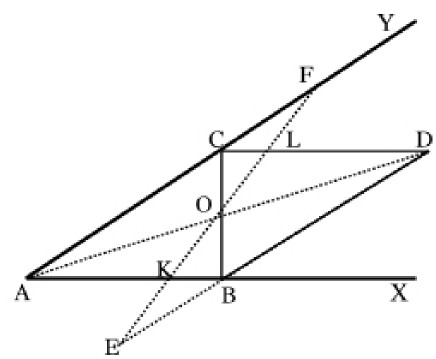
$\square$

* * *

Zadanie 40. Wewnątrz danego kąta wybrano punkt. Poprowadzić przez ten punkt prostą wycinającą z kąta trójkąt o możliwe najmniejszym polu.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez O punkt leżący wewnątrz danego kąta $\angle XAY$. Niech D będzie punktem symetrycznym do A względem O. Poprowadźmy przez D proste równoległe do ramion kąta. Otrzymamy w ten sposób równoległobok $ABDC$ w którym O jest punktem przecięcia przekątnych. Udowodnimy, że prosta BC wycina z kąta $\angle XAY$ trójkat o najmniejszym polu. W tym celu poprowadźmy przez O dowolną prostą (por. rysunek obok). Oznaczmy przez E, F, K, L punkty przecięcia tej prostej z ramionami kąta oraz prostymi w których zawarte są boki równoległoboku $ABCD$. Zauważmy, że trójkąty AKF i EDL są przystające. Stąd wynika, że



$$S_{AKF} = \frac{1}{2}(S_{ABCD} + S_{CLF} + S_{EBK}) \geq \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABC}.$$

W powyższych nierównościach równość zachodzi wtedy, gdy $L = C$ i $K = B$, czyli w sytuacji gdy EF pokrywa sie z BC. $\square$

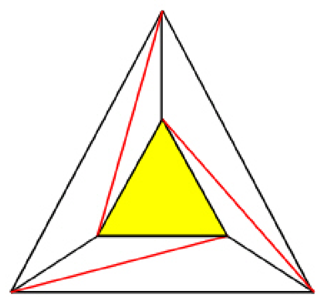
* * *

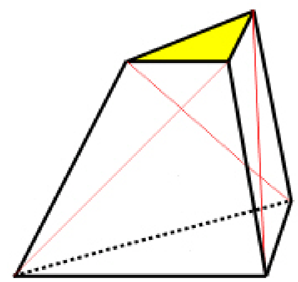
5. ZADANIA RÓŻNE

Zadanie 41. Czy na płaszczyźnie można wybrać 6 punktów i połączyć je nieprzecinającymi się odcinkami, tak aby każdy punkt był połączony z dokładnie czterema innymi?

Rozwiązanie.

Odpowiedź jest pozytywna. Przykładowa konfiguracja jest pokazana na rysunku poniżej. Zauważmy, że można ją otrzymać rzutując na podstawę krawędzie ściętego czworościanu z wybranymi przekątnymi ścian bocznych.





□

* * *

Zadanie 42. Na płaszczyźnie dany jest zbiór n-punktów o tej własności, że wśród każdych czterech punktów pewne trzy są współliniowe. Udowodnić, że w tym zbiorze jest przynajmniej $n-1$ punktów leżących na jednej prostej.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że nie wszystkie punkty naszego zbioru leżą na jednej prostej. Wtedy, zgodnie z założeniem, istnieją cztery punkty A, B, C, D spośród których trzy leżą na jednej prostej, a czwarty poza nią. Załóżmy, że A, B, C leżą na prostej ℓ oraz $D \notin \ell$. Rozważmy dowolny inny punkt X naszego zbioru. Oczywiście wystarczy wykazać, że $X \in \ell$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy w czwórce $\{A, B, D, X\}$ punkty A, B, D nie są współliniowe, a więc X musi należeć do dokładnie jednej z prostych AD lub BD. Załóżmy, że X leży na prostej AD (rozumowanie, gdy X leży na prostej BD jest analogiczne). Rozważając punkty $\{B, C, D, X\}$ stwierdzamy, że X należy do dokładnie jednej z prostych BD lub CD. Jednak jedynym punktem wspólnym prostych AD i BD jest D oraz jedynym punktem wspólnym prostych AD i CD jest D. Oznacza to, że $X = D$, wbrew założeniu. Tak więc wszystkie punkty naszego zbioru (ewentualnie poza punktem D) leżą na prostej ℓ. □

* * *

Zadanie 43. Prostokąt rozmiarów $2n \times 2m$ pokryto całkowicie kostkami domino rozmiarów 1×2. Czy na to pokrycie można nałożyć drugą warstwę kostek domino tak, że żadna kostka drugiej warstwy nie leży całkowicie na pewnej kostce pierwszej warstwy?

Rozwiązanie

Odpowiedź jest pozytywna. Wystarczy rozważyć podział prostokąta na kwadraty rozmiarów 2×2 i drugą warstwę kostek położyć nakładając po dwie kostki na każdy z kwadratów 2×2. Zauważmy, że pełne pokrycie kwadratu 2×2 uzyskamy kładąc dwie kostki poziomo lub pionowo. Tak więc, jeśli w obrębie danego kwadratu 2×2 są dwie poziome (pionowe) kostki pierwszej warstwy, to w drugiej warstwie należy położyć odpowiednio dwie kostki pionowo (poziomo). Jeśli zaś w obrębie danego kwadratu 2×2 nie ma żadnej lub jedna pełna kostka pozioma (pionowa) pierwszej warstwy, to w drugiej warstwie należy położyć odpowiednio dwie kostki pionowo (poziomo). $\square$

* * *

Zadanie 44. Odcinek długości 1 pokryto całkowicie pewną (skończoną) ilością innych odcinków. Wykazać, że wśród odcinków pokrywających można wybrać pewną ilość odcinków parami rozłącznych o łącznej długości nie mniejszej niż 1/2.

Rozwiązanie

Rozważany odcinek długości 1 utożsamimy z przedziałem $I = [0, 1]$ na osi liczbowej. Odcinek pokrywający nazwiemy *zbędnym* jeśli po usunięciu go z układu odcinków pokrywających pozostałe nadal pokrywają w całości przedział I. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że w układzie pokrywającym nie ma odcinków zbędnych. Taki układ można otrzymać z dowolnego układu, przeglądając po kolei wszystkie odcinki pokrywające i usuwając ewentualnie zbędne. Ponumerujmy teraz kolejne odcinki-przedziały pokrywające I zaczynając od lewej strony przez $[l_1, p_1], [l_2, p_2], \ldots, [l_n, p_n]$. Wtedy nie może się zdarzyć, że dla pewnego $i \geq 1$, $l_i = l_{i+1}$, bo w przeciwnym razie jeden z przedziałów $[l_i, p_i]$ lub $[l_{i+1}, p_{i+1}]$ jest zbędny. Tak więc $l_1 < l_2 < \cdots < l_n$. Udowodnimy, że dla $i = 1, 2, \ldots, n-2$ przedziały $[l_i, p_i]$ oraz $[l_{i+2}, p_{i+2}]$ są rozłączne. W przeciwnym razie mielibyśmy $l_{i+2} \leq p_i$. Zauważmy, że wtedy $p_i < p_{i+2}$ (bo inaczej przedział $[l_{i+2}, p_{i+2}]$ jest zbędny). Z drugiej strony popatrzmy na przedział $[l_{i+1}, p_{i+1}]$. Jeśli $p_{i+1} \leq p_{i+2}$, to oczywiście przedział $[l_{i+1}, p_{i+1}]$ jest zbędny, a jeśli $p_{i+2} < p_i$, to przedział $[l_{i+2}, p_{i+2}]$ jest zbędny. Ostatecznie zbiory

$$N = [l_1, p_1] \cup [l_3, p_3] \cup \ldots, \qquad P = [l_2, p_2] \cup [l_4, p_4] \cup \ldots$$

są sumami parami rozłącznych przedziałów. Ponieważ $N \cup P = I$, łączna suma długości przedziałów z N lub P musi być nie mniejsza niż 1/2. $\square$

* * *

Zadanie 45. Ile dzielników ma liczba $2^n 3^m 5^k$, gdzie m, n, k są nieujemnymi liczbami całkowitymi?

Rozwiązanie

Wykorzystamy twierdzenie o jednoznaczności rozkładu liczby naturalnej na czynniki pierwsze (por. *Dodatek A*). Wynika z niego, że d jest dzielnikiem liczby $2^n 3^m 5^k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $d = 2^{n_1} 3^{m_1} 5^{k_1}$, gdzie $0 \leq n_1 \leq n$, $0 \leq m_1 \leq m$, $0 \leq k_1 \leq k$. Stąd wynika, że liczba $2^n 3^m 5^k$ ma tyle różnych dzielników ile jest trójek nieujemnych liczb całkowitych (n_1, m_1, k_1) spełniających powyższe nierówności. Ponieważ n_1, m_1, k_1 mogą przyjmować niezależnie od siebie odpowiednio $n+1, m+1, k+1$ różnych wartości, więc mamy $(n+1)(m+1)(k+1)$ takich trójek. $\square$

* * *

Zadanie 46. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano liczby całkowite nieujemne tak, że jeśli na przecięciu pewnego wiersza i kolumny stoi zero to łączna suma liczb tego wiersza i tej kolumny jest nie mniejsza niż n. Wykazać, że suma wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}n^2$.

Rozwiązanie

Rozważmy sumy liczb występujących w poszczególnych wierszach i kolumnach tablicy. Niech m będzie najmniejszą z nich i wybierzmy ten wiersz (lub kolumnę), dla której suma liczb wynosi m. Załóżmy, że jest to wiersz W (dla kolumny rozumowanie jest analogiczne). Jeśli $m \geq \frac{n}{2}$, to suma liczb występujących w każdym wierszu jest nie mniejsza niż $\frac{n}{2}$, a stąd wynika, że suma liczb występujących w tablicy jest nie mniejsza niż $n \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$. Niech więc, $m < \frac{n}{2}$. Wtedy w wierszu W występuje co najmniej $n - m$ zer (bo m jest sumą n nieujemnych liczb całkowitych). Z założenia wynika, że suma liczb każdej kolumny zawierającej zero w miejscu przecięcia z wierszem W jest nie mniejsza niż $n - m$. Ponadto, zgodnie z określeniem liczby m, sumy liczb występujących w pozostałych kolumnach są nie mniejsze niż m. Sumując zatem kolumnami wszystkie liczby tablicy otrzymamy, że łączna suma jest nie mniejsza niż

$$(n-m)^2 + m^2 = 2m^2 - 2mn + n^2 = 2\left[\left(m - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4}\right] \geq \frac{n^2}{2}.$$

□

* * *

Zadanie 47. Iloczyn dziesięciu (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych jest równy 10^{10}. Jaką największą wartość może przyjąć suma tych liczb?

Rozwiązanie

Zauważmy, że dla dowolnych liczb naturalnych a, b zachodzi nierówność

$$(a-1)(b-1) \geq 0,$$

która jest równoważna nierówności

$$a + b \leq ab + 1.$$

Wykorzystamy ją wielokrotnie do oszacowania sumy dziesięciu liczb naturalnych.

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} \leq (x_1x_2 + 1) + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} = \\ & = (x_1x_2 + x_3) + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} + 1 \leq (x_1x_2x_3 + 1) + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} + 1 = \\ & = (x_1x_2x_3 + x_4) + x_5 + \cdots + x_{10} + 2 \leq (x_1x_2x_3x_4 + 1) + x_5 + \cdots + x_{10} + 2 = \\ & = (x_1x_2x_3x_4 + x_5) + \cdots + x_{10} + 3 \leq \cdots \leq x_1x_2x_3 \ldots x_{10} + 9. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy zatem nierówność

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leq x_1x_2 \ldots x_{10} + 9,$$

czyli w naszej sytuacji $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} \leq 10^{10} + 9$. Stąd dla $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = 1$ oraz $x_{10} = 10^{10}$ otrzymujemy największą wartość sumy, która jest równa $10^{10} + 9$.

□

* * *

Zadanie 48. Wykazać, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi równość:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}],$$

gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Rozwiązanie

Z nierówności między średnimi arytmetyczną i kwadratową dla liczb a, b (por. *Dodatek B*) wynika, że

$$a + b \leq \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2)}.$$

Niech $x = \sqrt{4n+2}$. Wtedy $n = \frac{x^2-2}{4}$ oraz wykorzystując powyższą nierówność otrzymujemy

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} = \sqrt{\frac{x^2-2}{4}} + \sqrt{\frac{x^2+2}{4}} \leq$$
$$\leq \sqrt{2\left(\frac{x^2-2}{4} + \frac{x^2+2}{4}\right)} = \sqrt{x^2} = x.$$

Udowodniliśmy, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{4n+2}.$$

W szczególności $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] \leq [\sqrt{4n+2}]$.

Ponieważ reszta z dzielenia przez 4 kwadratu liczby całkowitej może być równa 0 lub 1, liczba $\sqrt{4n+2}$ nie jest całkowita. Zatem przyjmując $k = [\sqrt{4n+2}]$, otrzymujemy $k < \sqrt{4n+2}$. Stąd jeśli $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] < [\sqrt{4n+2}]$, to

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k < \sqrt{4n+2}.$$

Podnosząc obustronnie ostatnie nierówności do kwadratu otrzymujemy

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < k^2 < 4n + 2,$$

czyli

$$2\sqrt{n(n+1)} < k^2 - 2n - 1 < 2n + 1,$$

oraz

$$4n^2 + 4n < (k^2 - 2n - 1)^2 < 4n^2 + 4n + 1.$$

Ostatnie nierówności są jednak niemożliwe bo skrajne strony są kolejnymi liczbami naturalnymi. Tak więc musi zachodzić równość:

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}].$$

□

* * *

Zadanie 49. Obliczyć sumę wszystkich liczb, które można otrzymać z liczby 1234567 dokonując wszystkich możliwych przestawień cyfr.

Rozwiązanie

Zauważmy, że dowolna z rozważanych liczb ma postać

$$\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} = a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0,$$

gdzie $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ jest pewną permutacją liczb $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Dla dowolnych $0 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 7$ mamy dokładnie $6!$ liczb powyższej postaci takich, że $a_i = j$. Stąd wynika, że suma S wszystkich takich liczb jest równa:

$$\begin{aligned} S = {} & 6!(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 10^6 + 6!(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 10^5 + \\ & + 6!(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 10^4 + 6!(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 10^3 + \\ & + 6!(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 10^2 + 6!(1+2+3+4+5+6+7)\cdot 10 + \\ & + 6!(1+2+3+4+5+6+7) = 720\cdot 28\cdot (10^6+10^5+10^4+10^3+10^2+10+1) = \\ & = 720\cdot 28\cdot 1111111 = 22399997760. \end{aligned}$$

□

* * *

Zadanie 50. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające warunek:

$$f(xy) = \frac{f(x) + f(y)}{x + y},$$

o ile tylko $x + y \neq 0$.

Rozwiązanie

Podstawiając $x = 0, y = 1$, otrzymujemy

$$f(0) = f(0 \cdot 1) = \frac{f(0) + f(1)}{0 + 1} = f(0) + f(1),$$

czyli $f(1) = 0$. Ponadto dla dowolnej liczby $x \neq -1$ mamy

$$f(x) = f(x \cdot 1) = \frac{f(x) + f(1)}{x + 1} = \frac{f(x)}{x + 1},$$

skąd wynika, że $xf(x) = 0$ dla $x \neq -1$, a więc $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \neq -1, 0$. Zauważmy również, że

$$f(-1) = f(2 \cdot \frac{-1}{2}) = \frac{f(2) + f(-\frac{1}{2})}{2 - \frac{1}{2}} = 0,$$

$$f(0) = f(0 \cdot 2) = \frac{f(0) + f(2)}{0 + 2} = \frac{f(0)}{2},$$

a więc $f(0) = 0$. Ostatecznie, tylko funkcja zerowa spełnia warunki zadania. $\square$

* * *

Dodatek A

O Rozkładach Liczb Całkowitych na Czynniki

Oznaczmy przez $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ odpowiednio zbiory wszystkich liczb naturalnych oraz całkowitych, czyli $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ oraz $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Poniżej przedstawimy podstawowe arytmetyczne własności liczb całkowitych. Kluczowym narzędziem, do którego będziemy się odwoływać w wielu rozumowaniach, będzie intuicyjnie jasna zasada

Zasada minimum: *Dowolny niepusty podzbiór zbioru liczb naturalnych zawiera liczbę najmniejszą.*

Twierdzenie 1. [**Algorytm dzielenia z resztą**] *Dla dowolnych liczb całkowitych a i b, gdzie $b \neq 0$, istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych q i r taka, że*

$$a = qb + r \quad \textit{oraz} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że obie liczby a i b są naturalne. Pozostałe przypadki można z łatwością stąd wyprowadzić. Na początek zauważmy, że jeśli $a < b$, to wystarczy przyjąć $q = 0$ oraz $r = a$, a jeśli $a = b$, to $q = 1, r = 0$ spełniają tezę twierdzenia. Przypuśćmy, że dla ustalonej liczby $b > 1$ istnieją liczby $a > b$ dla których twierdzenie nie zachodzi. Zgodnie z zasadą minimum możemy wśród nich wybrać liczbę najmniejszą. Oznaczmy ją przez a_0. Wtedy jednak dla liczby $a_0 - b$ istnieją q, r takie, że

$$a_0 - b = qb + r \quad \text{oraz} \quad 0 \leq r < b.$$

Stąd $a_0 = (q+1)b + r$, co przeczy określeniu liczby a_0.

Pozostaje uzasadnić jednoznaczność pary q, r. Niech więc q', r' bedą takie, że $a = qb + r = q'b + r'$ oraz $0 \leq q' < b$. Wtedy

$$|q - q'|b = |(q - q')b| = |r - r'| < b.$$

Powyższa nierówność jest możliwa tylko wtedy, gdy $q = q'$, a w konsekwencji musi również zachodzić równość $r = r'$. $\square$

Liczbę q nazywa się *ilorazem*, zaś r *resztą* z dzielenia a przez b. Jeśli $r = 0$, to mówimy, że liczba a jest podzielna przez b. Często zapisuje się to krótko: $b \mid a$.

Przypomnijmy, że liczbę naturalną $p > 1$ nazywa się *pierwszą*, jeśli jest ona podzielna tylko przez 1 oraz p. Korzystając z zasady minimum z łatwością można wywnioskować, że każda liczba naturalna > 1 posiada dzielnik będący liczbą pierwszą. Jeżeli a i b są różnymi od zera liczbami calkowitymi, to największą liczbę naturalną d dzielącą je obie nazywa się *największym wspólnym dzielnikiem* i oznacza (a, b). Jeśli $(a, b) = 1$, to mówi się, że liczby a i b są *względnie pierwsze.*

Twierdzenie 2. *Jeśli liczba naturalna d jest największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych a i b, to istnieją liczby całkowite x, y takie, że*

$$d = ax + by.$$

Dowód. Rozważmy zbiór $A = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Naszym celem jest wykazanie, że $d \in A$. Zauważmy, że zbiór A ma następujące własności:

(1) $u, v \in A \quad \Rightarrow \quad u - v \in A$,
(2) $u \in A,\ t \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad t \cdot u \in A$.

Istotnie, jeśli $u = ax_1 + by_1$ oraz $v = ax_2 + by_2$, to $u - v = a(x_1 - x_2) + b(y_2 - y_1) \in A$ oraz $t \cdot u = a(tx_1) + b(ty_1) \in A$.

Zbiór A zawiera oczywiście liczby naturalne. Zgodnie z zasadą minimum możemy wybrać najmniejszą liczbę naturalną $d_0 \in A$. Rozważmy dowolną liczbę $u \in A$ i podzielmy ją z resztą przez d_0. Wtedy $u = qd_0 + r$, gdzie $q \in \mathbb{Z}$ oraz $0 \leq r < d_0$. Z (1) oraz (2) wynika, że $r = u - qd_0 \in A$. Ponieważ jednak d_0 jest najmniejszą liczbą naturalną w A, więc $r = 0$. Oznacza to, że wszystkie liczby z A są podzielne przez d_0. Z drugiej strony jest jasne, że $a = a \cdot 1 + b \cdot 0 \in A$ oraz $b = a \cdot 0 + b \cdot 1 \in A$. Tak więc $d_0 \mid a$ i $d_0 \mid b$, czyli d_0 jest wspólnym dzielnikiem a i b takim, że

$$d_0 = ax + by,$$

dla pewnych $x, y \in \mathbb{Z}$. Prawa strona powyższej równości jest podzielna przez każdy wspólny dzielnik a i b, a więc d_0 jest największym wspólnym dzielnikiem tych liczb. □

Wniosek 3. *Liczby całkowite a i b są względnie pierwsze wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby całkowite x, y takie, że*

$$ax + by = 1.$$

□

Wniosek 4. [Zasadnicze Twierdzenie Arytmetyki] *Jeżeli liczby całkowite a i b są względnie pierwsze oraz c jest liczba całkowitą taką, że $a \mid bc$, to $a \mid c$.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 2 istnieją liczby całkowite x, y takie, że $ax + by = 1$. Z założenia wynika, że $a \mid bcy$, ale $bcy = c(1-ax) = c-ax$. Ostatecznie, $a \mid (c-ax)+ax = c$. □

Wniosek 5. *Jeżeli liczby całkowite a i b są względnie pierwsze oraz c jest liczbą całkowitą taką, że $a \mid c$ i $b \mid c$, to $ab \mid c$.*

Dowód. Podobnie jak wyżej, dobierzmy liczby całkowite x, y tak aby $ax + by = 1$. Niech $k \in \mathbb{Z}$, będzie taka, że $c = ak$. Wtedy $c = ak \cdot 1 = ak \cdot (ax + by) = a(akx) + abk$. Z równości tej i założenia wynika, że $b \mid a(akx)$. Z Zasadniczego Twierdzenia Arytmetyki (Wniosek 4) otrzymujemy $b \mid akx$, czyli $akx = bl$ dla pewnej liczby całkowitej l. Tak więc $c = ab(l + k)$, co kończy dowód. □

Twierdzenie 6. [Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozkładu] *Każda liczba naturalna $n > 1$ jest albo liczbą pierwszą, albo iloczynem liczb pierwszych. Jeżeli*

$$n = p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_l,$$

gdzie liczby $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_l$ są pierwsze, to $k = l$ oraz po ewentualnej zmianie numeracji $p_i = q_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

Dowód. Najpierw udowodnimy istnienie rozkładu. Przypuśćmy, że istnieją liczby nie będące ani liczbami pierwszymi, ani iloczynami liczb pierwszych. Zgodnie z zasadą minimum możemy wybrać najmniejszą taką liczbę n_0. Wtedy istnieją liczby naturalne $a, b > 1$ takie, że $n_0 = ab$. Oczywiście $a < n_0$ i $b < n_0$, a więc każda z nich jest albo liczbą pierwszą, albo iloczynem liczb pierwszych. Stąd liczba n_0 jest iloczynem liczb pierwszych, wbrew założeniu.

Przejdźmy do dowodu jednoznaczności rozkładu. Można go przeprowadzić używając podobnych argumentów jak wyżej. Przypuśćmy, że istnieją liczby mające różne rozkłady na iloczyn liczb pierwszych i niech $n_0 = p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_l$ będzie wśród nich najmniejsza. Wtedy $p_1 \mid q_1 q_2 \ldots q_l$. Z Wniosku 4 wynika, że $p_1 \mid q_i$ dla pewnej liczby $i \leq l$. Ponieważ q_i jest liczbą pierwszą, więc $p_1 = q_i$. Zmieniając ewentualnie numerację możemy założyć, że $p_1 = q_1$. Otrzymujemy zatem $p_2 \ldots p_k = q_2 \ldots q_l < n_0$. Z określenia liczby n_0 wynika jednak, że $k - 1 = l - 1$ oraz po ewentualnej zmianie numeracji $p_i = q_i$ dla $i = 2, \ldots, k$. Ostatecznie $k = l$ oraz $p_i = q_i$ dla $i = 1, 2, \ldots k$, wbrew wyborowi n_0. □

Z powyższego twierdzenia wynika, że każdą liczbę naturalną $n > 1$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k},$$

gdzie $p_1, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi oraz $\alpha_i \in \mathbb{N}$ dla $i = 1, \ldots, k$.

Dodatek B

Ważne Nierówności

Twierdzenie 7. [Nierówność Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego] *Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $\lambda \in \mathbb{R}$ taka, że $b_i = \lambda a_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dowód tej nierówności w przypadku $n = 3$ został przeprowadzony w rozwiązaniu zadania 22d. Przedstawione tam rozumowanie może być z łatwością dostosowane do ogólnej sytuacji.

Twierdzenie 8. *Jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnimi liczbami rzeczywistymi, to*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}},$$

przy czym w każdym przypadku zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Liczby występujące w powyższych nierównościach nazywa się odpowiednio średnimi: **harmoniczną**, **geometryczną**, **arytmetyczną** i **kwadratową**. Szczególnie ważna, ze względu na liczne zastosowania, jest nierówność między średnimi geometryczną i arytmetyczną, nazywana także *nierównością Cauchy'ego*. Istnieje wiele różnych jej dowodów. Poniżej przedstawimy interesujący dowód, pochodzący od Cauchy'ego.

Dowód nierówności Cauchy'ego. Wystarczy wykazać nierówność równoważną

$$\mathcal{N}(n): \qquad a_1a_2\ldots a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n.$$

Przypadek $n = 2$ jest łatwy, ponieważ powyższa nierówność po prostych przekształceniach jest równoważna następującej $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$, która jest prawdziwa. Dalej dowód przeprowadzimy w dwóch etapach dowodząc następujących implikacji

(1) $\mathcal{N}(n) \Rightarrow \mathcal{N}(2n)$,
(2) $\mathcal{N}(n) \Rightarrow \mathcal{N}(n-1)$.

Dowód (1): Niech $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ bedą dowolnymi liczbami dodatnimi. Oznaczmy przez A i B średnie arytmetyczne liczb $a_1, \ldots, a_n$ oraz $a_{n+1}, \ldots, a_{2n}$ odpowiednio. Z założenia oraz z nierówności $\mathcal{N}(2)$ wynika, że

$$a_1a_2\ldots a_{2n} = (a_1\ldots a_n)(a_{n+1}\ldots a_{2n}) \leq A^nB^n = (AB)^n \leq \left[\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right]^n = \\ = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$

Dowód (2): Załóżmy prawdziwość $\mathcal{N}(n)$ oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Rozważmy liczbę $a_n = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$. Z założenia wynika, że

$$a_1\ldots a_{n-1}a_n \leq \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)a_n + a_n}{n}\right)^n = a_n^n,$$

czyli

$$a_1a_2\ldots a_{n-1} \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}.$$

Zauważmy, że implikacje (1) i (2) gwarantują prawdziwość nierówności $\mathcal{N}(n)$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Istotnie, z $\mathcal{N}(2)$ oraz (1) wynikają kolejno nierówności $\mathcal{N}(4), \mathcal{N}(8), \ldots, \mathcal{N}(2^m), \ldots$. Dla dowolnej liczby $n > 2$ wystarczy rozważyć m takie, że $n \leq 2^m$ i $(2^m - n)$-krotnie zastosować (2) zaczynając od nierówności $\mathcal{N}(2^m)$. $\square$

Dowód nierówności między średnimi harmoniczną i geometryczną. Nierówność Cauchy'ego zastosowana do liczb $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ przybiera postać

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

która jest oczywiście równoważna dowodzonej nierówności. $\square$

Dowód nierówności między średnimi arytmetyczną i kwadratową.
Oznaczmy przez $\sum a_i a_j$ sumę wszystkich liczb postaci $a_i a_j$, gdzie $1 \leq i < j \leq n$. Dodajmy stronami wszystkie nierówności $2a_i a_j \leq a_i^2 + a_j^2$ (każda z nich jest równoważna nierówności $(a_i - a_j)^2 \geq 0$). Zauważmy, że wówczas po prawej stronie każda liczba a_i^2 wystąpi $(n-1)$-krotnie. Tak więc

$$2 \sum a_i a_j \leq (n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Dodając do obu stron powyższej nierówności $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ oraz uwzględniając fakt, że $(a_1 + a_2 \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 2\sum a_i a_j$ otrzymamy

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

Ostatnia nierówność może być z łatwością przekształcona do postaci:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

$\square$

Zauważmy, że nierówność między średnimi arytmetyczną i kwadratową jest również prostą konsekwencją nierówności Cauchy'ego-Schwarza-Buniakowskiego. Wystarczy w niej podstawić $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$.

W powyższych dowodach nic nie wspomnieliśmy o tym, kiedy rozważane nierówności stają się równościami. Jednak jak łatwo zauważyć, każda z nich jest konsekwencją nierówności $(a - b)^2 \geq 0$, którą możemy określić mianem nierówności źródłowej. Oczywiście nierówność źródłowa staje się równością tylko wtedy, gdy $a = b$. Dobrze widoczne jest w dowodzie między średnimi arytmetyczną i kwadratową, że jeśli tylko w jednej z nierówności źródłowych jest nierówność ostra, to i nierówność między średnimi też jest ostra. Uważne prześledzenie dowodu nierówności Cauchy'ego doprowadzi nas do tego samego wniosku.