IX Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, GIMNAZJUM

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

Na płaszczyźnie narysowano trzy proste, w ten sposób dzieląc ją na dokładnie n części. Podaj wszystkie możliwe wartości n. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Niech ℓ_1, ℓ_2 oznaczają dwie spośród narysowanych prostych. Możliwe są dwa przypadki.

1° ℓ_1 i ℓ_2 są równoległe. Wtedy dzielą one płaszczyznę na 3 części.

2° ℓ_1 i ℓ_2 przecinają się w pewnym punkcie A. Wtedy dzielą płaszczyznę na 4 części, nazwijmy je C_1, C_2, C_3, C_4.

W przypadku 1° prosta ℓ_3 może być równoległa do ℓ_1 i ℓ_2 lub może przecinać każdą z nich. Jeśli wszystkie trzy proste są równoległe, to płaszczyzna jest podzielona na 4 części. Jeśli ℓ_3 przecina ℓ_1 i ℓ_2, to ℓ_3 dzieli każdą z trzech części z przypadku 1° na dwie, czyli razem płaszczyzna jest podzielona na sześć części.

W przypadku 2°, prosta ℓ_3 może przechodzić przez punkt A lub nie. Jeśli $A \in \ell_3$, to ℓ_3 zawarta jest w dwóch z czterech części C_j, a więc dzieli każdą z nich na dwie części. Płaszczyzna jest wtedy podzielona na 6 części. Przypuśćmy, że $A \notin \ell_3$. Wtedy ℓ_3 może być równoległa do jednej z prostych ℓ_1, ℓ_2 lub przecinać te proste w pewnych punktach $B \in \ell_1$ i $C \in \ell_2$. Pierwsza sytuacja została już rozważona w przypadku 1° i mamy wtedy podział płaszczyzny na 6 części. W drugiej sytuacji prosta ℓ_3 przechodzi przez trzy z czterech części C_j, dzieląc każdą z nich na dwie części. Płaszczyzna jest więc podzielona na 7 części.

Ostatecznie n jest jedną z trzech wartości 4, 6 lub 7.

Uwaga: z treści zadania nie wynika niezbicie, że proste nie pokrywają się. Przepraszamy za tę nieścisłość. Komisja uznawała za poprawne również rozwiązania uwzględniające pokrywające się proste. W tej interpretacji n może przyjmować wartości 2, 3, 4, 6 lub 7.

Zadanie 2

Znajdź liczby rzeczywiste a, b takie, że $a + b = 1$ dla których wyrażenie $a^3 + b^3 + ab$ przyjmuje możliwie najmniejszą wartość. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Ze wzoru skróconego mnożenia wynika, że

$$a^3+b^3+ab = (a+b)(a^2-ab+b^2)+ab = (a^2-ab+b^2)+ab = a^2+b^2 = \frac{1}{2}\left((a+b)^2+(a-b)^2\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(a-b)^2.$$

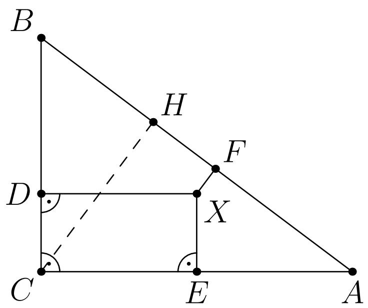
Najmniejszą wartość to wyrażenie przyjmuje, dokładnie gdy $(a-b)^2 = 0$, czyli gdy $a = b = \frac{1}{2}$.

Zadanie 3

Dany jest trójkąt ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Dla którego punktu leżącego w trójkącie ABC suma odległości od boków trójkąta jest najmniejsza? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga: Punkt leży w trójkącie ABC, jeżeli leży w jego wnętrzu lub na obwodzie.

Rozwiązanie, sposób I



Pokażemy, że suma odległości jest najmniejsza dla punktu C. Zauważmy, że dla punktu C wynosi ona $|CH|$, gdzie H jest rzutem C na AB.

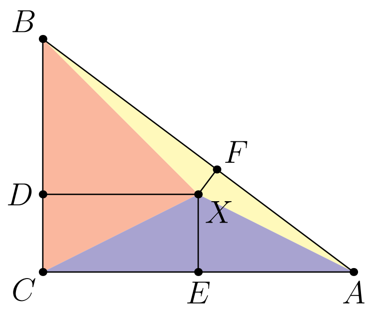
Weźmy dowolny punkt X leżący we wnętrzu trójkąta ABC, lub na jego obwodzie. Oznaczmy przez D, E, F rzuty punktu X na odcinki BC, CA, AB odpowiednio, patrz rysunek. Czworokąt $CDXE$ jest prostokątem lub odcinkiem, zatem $DE = XC$. Z nierówności trójkąta wnioskujemy, że

$$(|XD|+|XE|)+|XF| \geqslant |DE|+|XF| = |XC|+|XF| \geqslant |CF|. \tag{1}$$

Skoro F leży na AB, to $|CF| \geqslant |CH|$. Wobec tego suma odległości X od boków trójkąta ABC wynosi co najmniej $|CH|$, czyli co najmniej tyle, ile suma odległości punktu C. Zauważmy, że jeśli $X \neq C$, to $D \neq C$ lub $E \neq C$, więc nierówność (1) jest ostra. To znaczy, że dla punktu C suma odległości jest *mniejsza* niż dla każdego innego punktu, czyli jedynie dla punktu C suma jest *najmniejsza.*

Rozwiązanie, sposób II

Oznaczmy przez P pole trójkąta ABC oraz oznaczmy $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Skoro ABC jest prostokątny, to $c > a, b$.



Pokażemy, że suma odległości od boków jest najmniejsza dla punktu C. Zauważmy, że dla punktu C ta suma jest równa długości wysokości z wierzchołka C, czyli jest równa $|CH| = \frac{2P}{c}$.

Wybierzmy dowolny punkt $X \neq C$ w trójkącie ABC i oznaczmy przez h_a, h_b, h_c jego odległości od boków BC, CA, AB odpowiednio. Skoro $X \neq C$, to $h_a > 0$ lub $h_b > 0$. Odcinki AX, BX, CX dzielą ABC na trzy trójkąty, więc

$$P = \frac{1}{2}(h_a a + h_b b + h_c c) < \frac{1}{2}(h_a + h_b + h_c)c.$$

Przekształcając tę nierówność, otrzymujemy

$$h_a + h_b + h_c > \frac{2P}{c},$$

zatem suma odległości dla punktu X jest większa od sumy odległości dla punktu C.

Zadanie 4

Wyznacz wszystkie liczby całkowite x, y, z takie, że

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$

Sposób I

Liczby x, y, z są niezerowe. Po pomnożeniu równania z zadania stronami przez xyz otrzymujemy

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = 3xyz, \tag{2}$$

stąd $xyz > 0$. Równość z zadania nie zmienia się przy zamianie zmiennych miejscami, więc, z dokładnością od zamiany oznaczeń, możemy założyć, że $|x| \geqslant |y| \geqslant |z| \geqslant 1$. Załóżmy dodatkowo, że $|z| \geqslant 2$. Wtedy $(xy)^2 = |x|^2|y|^2 \geqslant 2|x| \cdot |y| \cdot |z|$ i $(xz)^2 = x^2z^2 \geqslant |x| \cdot |y| \cdot 2|z|$, więc

$$(xy)^2 + (xz)^2 \geqslant 4|xyz|,$$

sprzeczność. Stąd $|z| = 1$, czyli $z = \pm 1$.

Jeżeli $|y| \geqslant 2$, to $(xy)^2 = |x|^2|y|^2 \geqslant 2^2|x||y| > |3xyz|$, sprzeczność. Stąd $|y| = 1$, czyli $y = \pm 1$. Z równania (2) wynika, że x dzieli $(yz)^2 = 1$. Stąd $x = \pm 1$. Zatem $(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = 3$ i $3xyz = \pm 3$. Rozwiązaniami są trójki więc liczb

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), \quad (x, y, z) = (1, -1, -1), \quad (x, y, z) = (-1, 1, -1), \quad (x, y, z) = (-1, -1, 1).$$

Sposób II

Jak w poprzednim rozwiązaniu, zauważmy, że $xyz > 0$ oraz

$$(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2 = 3xyz. \tag{3}$$

Nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną dla (dodatnich!) liczb $(xy)^2$, $(xz)^2$, $(yz)^2$ głosi, że

$$\frac{(xy)^2 + (xz)^2 + (yz)^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{(xyz)^4}. \tag{4}$$

Łącząc (3) i (4), otrzymujemy $xyz \geqslant \sqrt[3]{(xyz)^4}$, stąd

$$(xyz)^3 \geqslant (xyz)^4.$$

Liczba $a = xyz$ jest całkowita dodatnia i spełnia $a^3 \geqslant a^4$, więc $a = 1$. To może się zdarzyć tylko jeśli $|x| = |y| = |z| = 1$, czyli $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. Stąd otrzymujemy rozwiązania

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), \quad (x, y, z) = (1, -1, -1), \quad (x, y, z) = (-1, 1, -1), \quad (x, y, z) = (-1, -1, 1).$$

Sposób III

Składniki lewej strony mają te same znaki, a więc albo wszystkie liczby x, y, z są dodatnie albo dwie z nich ujemne a jedna dodatnia. Wystarczy znaleźć rozwiązania w liczbach naturalnych. Przypuśćmy, że $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$. Korzystając z nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$ otrzymujemy:

$$3 = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = \frac{xy}{z} + z\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) > z\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \geqslant 2z.$$

Mamy więc $z < \frac{3}{2}$, czyli $z = 1$. Tak więc $x = y = z = 1$ jest jedynym rozwiązaniem w liczbach naturalnych, a wszystkie rozwiązania to

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), \quad (x, y, z) = (1, -1, -1), \quad (x, y, z) = (-1, 1, -1), \quad (x, y, z) = (-1, -1, 1).$$

Zadanie 5

Wykaż, że część całkowita liczby

$$\frac{1000^{2000} + 2000^{1000}}{1000^{2000} - 2000^{1000}}$$

jest równa 1 oraz, że pierwszych 2600 cyfr po przecinku tej liczby (w zapisie dziesiętnym) to zera.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że

$$\frac{1000^{2000} + 2000^{1000}}{1000^{2000} - 2000^{1000}} = 1 + \frac{2 \cdot 2000^{1000}}{1000^{2000} - 2000^{1000}} = 1 + \frac{2 \cdot 2000^{1000}}{1000^{1000} \cdot 1000^{1000} - 2000^{1000}} = 1 + \frac{2}{500^{1000} - 1}.$$

Mamy udowodnić, że

$$\frac{2}{500^{1000} - 1} < \frac{1}{10^{2600}},$$

czyli równoważnie, $2 \cdot 10^{2600} < 500^{1000} - 1$. Mamy $5^3 > 10^2$, stąd $5^{900} = (5^3)^{300} > (10^2)^{300} = 10^{600}$, zatem

$$500^{1000} = 5^{100} \cdot 5^{900} \cdot 100^{1000} > 5^{100} \cdot 10^{2600} > 2 \cdot 10^{2600} + 1,$$

czego należało dowieść.

Zadanie 6

Ile cyfr (w systemie dziesiętnym) ma liczba powstała przez wypisanie kolejno liczby 2^{2017} i liczby 5^{2017}?

Uwaga: w uzasadnieniu tego i poprzedniego zadania nie powołuj się na obliczenia na kalkulatorze, czy komputerze.

Rozwiązanie.

Załóżmy, że liczba 2^{2017} ma x cyfr, natomiast liczba 5^{2017} ma y cyfr. Skoro liczba 2^{2017} ma x cyfr i nie jest równa 10^{x-1}, to

$$10^{x-1} < 2^{2017} < 10^x.$$

Podobnie, $10^{y-1} < 5^{2017} < 10^y$. Mnożąc te nierówności stronami, otrzymujemy

$$10^{x+y-2} < 10^{2017} < 10^{x+y},$$

więc $x + y - 1 = 2017$, czyli $x + y = 2018$.

Odpowiedź: Liczba, powstała przez wypisanie kolejno liczby 2^{2017} *i liczby* 5^{2017} *ma* 2018 *cyfr.*

Uwaga: ogólny wzór na liczbę cyfr 2^n*, w zależności od* n*, jest związany z szacowaniem liczby niewymiernej* $\log 2$ *i dużo trudniejszy niż powyższe rozwiązanie.*

[jj, pg]