Podlaski Konkurs Matematyczny - 2004
Klasy Drugie
Rozwiązania zadań konkursowych

22 maja 2004 r.

1. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej n liczba n^2+5n+1 nie jest podzielna przez 49.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $n^2+5n+1=(n-1)^2+7n$. Wynika stąd w szczególności, że jeśli liczba n^2+5n+1 jest podzielna przez 7, to 7 dzieli $n-1$. Tak więc jeśli 49 dzieli n^2+5n+1, to $n=7k+1$ dla pewnej liczby całkowitej k. Mamy jednak $(n-1)^2+7n=49k^2+7(7k+1)=49k^2+49k+7$, czyli n^2+5n+1 daje resztę 7 przy dzieleniu przez 49. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

2. Liczby rzeczywiste a,b,c są pierwiastkami wielomianu x^3+px^2+qx+2 o współczynnikach całkowitych. Niech

$$A=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab},\quad B=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}\quad \text{oraz}\quad C=\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}+\frac{c^2}{ab}.$$

Wykazać, że jeśli A jest liczbą całkowitą, to również liczby B i C są całkowite.

Rozwiązanie

Ze wzorów Viete'a wynika, że $a+b+c=-p$, $ab+bc+ac=q$ oraz $abc=-2$. Zauważmy, że

$$A=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{p}{2},$$

skąd wynika, że p jest liczbą parzystą. Dalej mamy

$$B=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}=\frac{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}{abc}=\frac{p^2-2q}{-2}=q-\frac{1}{2}p^2.$$

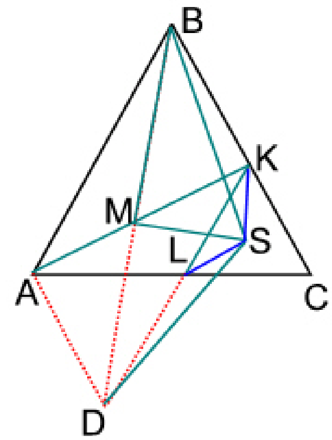
Liczba p jest parzysta, więc B jest liczbą całkowitą. Wyznaczmy teraz liczbę C. Ponieważ a,b,c spełniają równanie $x^3=-px^2-qx-2$, więc

$$C=\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{-p(a^2+b^2+c^2)-q(a+b+c)-6}{abc}=-pB-qA+3.$$

Stąd widać, że również C jest liczbą całkowitą. $\square$

3. W trójkącie równobocznym ABC poprowadzono prostą równoległą do boku $\overline{AB}$, przecinającą boki $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ odpowiednio w punktach K i L. Następnie wybrano środek M odcinka $\overline{AK}$ oraz środek ciężkości S trójkąta KCL. Wykazać, że kąt $\measuredangle BMS$ jest prosty.

Rozwiązanie



Rozważmy punkt D taki, aby czworokąt $ABKD$ był równoległobokiem. Wtedy punkt M jest punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABKD$. Zauważmy, że $SL = SK$, $KB = LD$ (bo $AD = AK$ i trójąt ALD jest równoboczny) oraz $\measuredangle DLS = \measuredangle BKS = 150°$. Wynika stąd, że trójkąty DLS i BKS są przystające. W szczególności otrzymujemy, że $SD = SB$. W konsekwencji $\overline{SM}$ jest wysokością trójkąta równoramiennego BSD, co kończy dowód. $\square$

4. Niech $n > 1$ będzie liczbą naturalną. Dla dowolnego niepustego podzbioru X zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ oznaczmy przez $m(X)$ sumę najmniejszej liczby należącej do X i największej liczby należącej do X. Niech S będzie sumą wszystkich liczb $m(X)$, gdzie $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ (tzn. X przebiega wszystkie niepuste podzbiory zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$). Wykazać, że liczba S jest podzielna przez $n + 1$.
Uwaga. Jeśli $X = \{k\}$ jest podzbiorem jednoelementowym, to przyjmujemy, że k jest zarówno najmniejszą jak i największą liczbą w X, czyli $m(X) = 2k$.

Rozwiązanie

Dla dowolnego niepustego podzbioru $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ niech $min(X)$, $max(X)$ będą odpowiednio najmniejszą i największą liczbę zbioru X. Oczywiście

$$m(X) = min(X) + max(X).$$

I sposób. [na podstawie rozwiązania uczestnika konkursu Damiana Łozińskiego]
Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dla dowolnego podzbioru $X \in \mathcal{P}$ niech $X' = \{n + 1 - x \mid x \in X\}$. Zauważmy, że $X' \in \mathcal{P}$, $(X')' = X$ oraz $min(X') = n + 1 - max(X)$ i $max(X') = n + 1 - min(X)$. Mamy więc

$$m(X) + m(X') = min(X) + max(X) + min(X') + max(X') = 2(n + 1).$$

Rozważmy zbiór $\mathcal{P}'$ wszystkich par uporządkowanych (X, X'), gdzie $X \in \mathcal{P}$. Zauważmy, że $\mathcal{P}'$ ma $2^n - 1$ elementów oraz każdy podzbiór X pojawia się w zbiorze par dokładnie dwa razy (w parach: (X, X') i (X', X) jeśli $X \neq X'$ lub w parze (X, X) jeśli $X = X'$). Stąd wnioskujemy, że

$$S = (2^n - 1)\frac{m(X) + m(X')}{2} = (n + 1)(2^n - 1),$$

co kończy dowód.

II sposób. Zauważmy, że $max(X) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \{k\} \cup Y$, gdzie Y jest podzbiorem zbioru $\{1, \ldots, k - 1\}$. Podobnie $min(X) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \{k\} \cup Y$, gdzie $Y \subseteq \{k + 1, \ldots, n\}$). Mamy więc dokładnie 2^{k-1} podzbiorów X dla których $max(X) = k$, oraz 2^{n-k} podzbiorów X dla których $min(X) = k$. Stąd wynika, że dla dowolnej liczby $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ w rozważanej sumie mamy 2^{k-1} składników równych k (pochodzących od zbiorów X takich, że $max(X) = k$) oraz 2^{k-1} składników równych $n - k + 1$ (pochodzących od zbiorów X takich, że $min(X) = n - k + 1$). Tak więc S można wyrazić jako sumę składników postaci $(k + (n - k + 1))\, 2^{k-1} = (n+1)2^{k-1}$, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$. Ostatecznie

$$S = (n + 1)2^0 + (n + 1)2^1 + \cdots + (n + 1)2^{n-1} = (n + 1)(2^n - 1).$$

[pg]