

IV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Klasy pierwsze – rozwiązania

1. Współczynniki rzeczywiste a, b, c trójmianu ax^2+bx+c spełniają zależność $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$. Udowodnić, że jeśli $a \neq 0$, to równanie $ax^2+bx+c=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

Rozwiązanie.

Zadane równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania, gdy liczba $\Delta := b^2 - 4ac$ jest dodatnia. Podstawiając $c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$ do wyrażenia $b^2 - 4ac$ otrzymujemy

$$\Delta = b^2 - 4a \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \right) = b^2 + \frac{4}{3}a^2 + 2ab = (a+b)^2 + \frac{1}{3}a^2.$$

Skoro liczby a, b są rzeczywiste i a jest niezerowa, to $(a+b)^2 \geq 0$ i $\frac{1}{3}a^2 > 0$, a więc $\Delta > 0$ i równanie ma dwa pierwiastki.

2. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w punkcie P . Okrąg przechodzący przez punkty A, B, P przecina odcinek BC w punkcie E ($E \neq B$). Udowodnić, że jeśli $AB = AD$, to $CE = CD$.

Rozwiązanie.

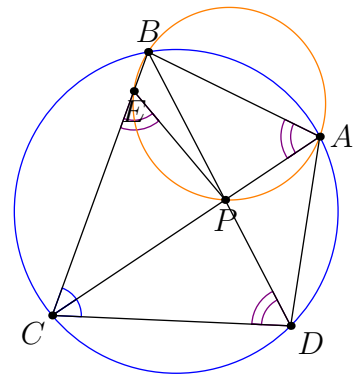
Punkty P, E, B, A leżą w tej kolejności na jednym okręgu, więc $\sphericalangle PEB + \sphericalangle PAB = 180^\circ$, a więc

$$\begin{aligned} \sphericalangle CEP &= 180^\circ - \sphericalangle PEB = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle PAB) \\ &= \sphericalangle PAB = \sphericalangle CAB. \end{aligned}$$

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc kąty $\sphericalangle CAB, \sphericalangle CDB$ są wpisane oparte na tym samym łuku; stąd $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB$.

Odcinki AD i AB mają równe długości, więc łuki AB i AD są równe, stąd $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD$.

Reasumując $\sphericalangle CEP = \sphericalangle CDB = \sphericalangle CDP$ i $\sphericalangle ECP = \sphericalangle DCP$, więc trójkąty $\triangle CEP, \triangle CDP$ są podobne. Skoro mają one wspólny odpowiadający bok CP to są przystające, zatem $CE = CD$.



3. Udowodnić, że z nieskończonego ciągu liczb naturalnych

$$1, 11, 111, 1111, 11111, \dots$$

którego n -ty wyraz jest równy $\underbrace{11\dots 1}_n$, można wybrać nieskończenie wiele różnych wyrazów, z których każde dwa są liczbami względnie pierwszymi.

Uwaga. Liczby całkowite a i b nazywamy względnie pierwszymi, jeżeli jedyną liczbą naturalną dzielącą a i b jest 1.

Rozwiązanie.

Pokażemy najpierw, że

Lemat 1. Jeśli liczby całkowite dodatnie p i q są względnie pierwsze, to również liczby $\underbrace{11\dots 1}_p, \underbrace{11\dots 1}_q$ są względnie pierwsze.

Dowód. Jeżeli $p = 1$ to $\underbrace{11\dots 1}_p = 1$ i teza lematu jest spełniona; podobnie gdy $q = 1$.

Zakładamy dalej, że $p, q > 1$.

Wybermy teraz takie p, q nie spełniające tezy lematu, że $p + q$ jest najmniejsze możliwe wśród par liczb nie spełniających tezy lematu.

Gdyby było $p = q$ to liczba $p > 1$ byłaby ich wspólnym dzielnikiem, więc nie byłyby one względnie pierwsze. Zatem $p \neq q$ i możemy, ewentualnie zamieniając te liczby, założyć, że $p > q$.

Założmy, że liczba całkowita dodatnia d dzieli $\underbrace{11\dots 1}_p, \underbrace{11\dots 1}_q$. Zauważmy, że

$$\underbrace{11\dots 1}_p = \underbrace{11\dots 1}_{p-q} + \underbrace{11\dots 1}_q \cdot 10^{p-q}, \text{ stąd } \underbrace{11\dots 1}_{p-q} = \underbrace{11\dots 1}_p - \underbrace{11\dots 1}_q \cdot 10^{p-q},$$

więc d dzieli również $\underbrace{11\dots 1}_{p-q}$.

Liczby $p - q, q$ są dodatnie, względnie pierwsze i ich suma jest mniejsza niż $p + q$, więc spełniają one tezę lematu (bo p, q były wybrane jako najmniejsze niespełniające jej), zatem liczby $\underbrace{11\dots 1}_{p-q}$ i $\underbrace{11\dots 1}_q$ są względnie pierwsze. Liczba d dzieli je obie, więc

$d = 1$.

Liczba d była wybrana jako dowolny wspólny dzielnik liczb $\underbrace{11\dots 1}_p, \underbrace{11\dots 1}_q$, więc liczby te są względnie pierwsze. Ale to znaczy, że p, q spełniają tezę lematu. Sprzeczność! Dowodzi to, że liczb p, q nie dało się wybrać, czyli każde dwie liczby względnie pierwsze spełniają tezę lematu. $\square$

Z lematu wynika, że dla każdych dwóch różnych liczb pierwszych p_1, p_2 liczby $\underbrace{11\dots 1}_{p_1}, \underbrace{11\dots 1}_{p_2}$ są względnie pierwsze. Nieskończony ciąg liczb

$$11, 111, 11111, \underbrace{11\dots 1}_7, \underbrace{11\dots 1}_{11}, \underbrace{11\dots 1}_{13}, \dots$$

indeksowanych liczbami pierwszymi spełnia założenia zadania.

4. Wielokąt wypukły $\mathcal{F}$ ma dokładnie dwie osie symetrii. Udowodnić, że są one prostopadłe.

Rozwiązanie.

Przez $S_l(x)$ oznaczamy obraz x (punktu, prostej itd.) w symetrii względem prostej l .

Załóżmy, że osiami symetrii są różne proste l, m . Skoro figura $\mathcal{F}$ jest ograniczona, to l i m nie są równoległe, więc przecinają się w pewnym punkcie O .

Niech $m' = S_l(m)$. Pokażemy, że m' jest również osią symetrii wielokąta $\mathcal{F}$.

Pokażemy najpierw, że dla każdego punktu X mamy

$$S_{m'}(X) = S_l(S_m(S_l(X))).$$

Rozważmy dowolny punkt X i punkt $X' =$

$S_{m'}(X)$. Trójkąt XOX' jest równoramienny

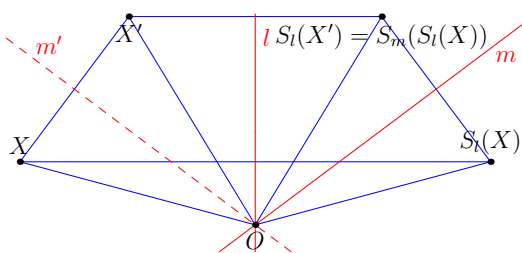
i środek boku XX' leży na m' . Roz-

ważmy $S_l(\triangle XOX') = \triangle S_l(X)OS_l(X')$. Jest

to trójkąt równoramienny i środek boku

$S_l(X)S_l(X')$ leży na prostej m , więc punkty

$S_l(X)$ i $S_l(X')$ są symetryczne względem m :



$S_m(S_l(X)) = S_l(X')$, stąd $S_l(S_m(S_l(X))) = S_l(S_l(X')) = X' = S_{m'}(X)$.

Z równania tego wynika, że symetria względem m' przetrzuca punkt figury $\mathcal{F}$ na punkt figury $\mathcal{F}$ (gdyż S_l, S_m tak czynią), więc m' jest osią symetrii $\mathcal{F}$.

Wobec tego m' musi być równa l lub m . Jeżeli $m' = l$ to i $m = l$, wbrew założeniu. Tak więc $m = m'$, co znaczy, że prosta m przechodzi w symetrii względem l w siebie, czyli $m \perp l$.