II Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy pierwsze - rozwiązania

1. Dany jest okrąg **o** z zaznaczonym środkiem S. Udowodnić, że za pomocą cyrkla i linijki można koło ograniczone okręgiem **o** podzielić na siedem części o równych polach.

Dowód. Dla ustalenia uwagi niech 1 oznacza długość promienia okręgu. Oczywiście możemy skonstruować odcinki długości $2, 3, 4\dots$ odkładając kilka razy odcinek o długości 1.

Lemat 1. *Możemy skonstruować odcinek długości $\sqrt{n}$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.*

Dowód lematu. Istnieje wiele możliwości skonstruowania pierwiastka, poniżej podajemy nie najprostszą ale może najbardziej pouczającą.

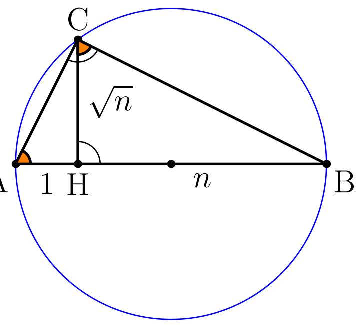
Konstruujemy odcinek AH długości 1 i odcinek HB długości n, tak, że punkty A, H, B leżą w tej kolejności na jednej prostej.

Wyznaczamy środek odcinka AB i rysujemy okrąg **o** o średnicy AB.

Przez punkt H prowadzimy prostą prostopadłą do AB. Niech C oznacza punkt przecięcia tej prostej z **o**.

Twierdzimy, że $CH = \sqrt{n}$.

Kąt $\sphericalangle ACB$ jest prosty, bo jest kątem wpisanym opartym na średnicy. Zatem trójkąt ABC jest prostokątny.



Kąty $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle CHB$ są proste, a więc

$$90^\circ = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCH.$$

Stąd $\sphericalangle CAB = \sphericalangle BCH$ i z cechy kąt-kąt-kąt uzyskujemy podobieństwo

$$\triangle ACH \simeq \triangle CBH.$$

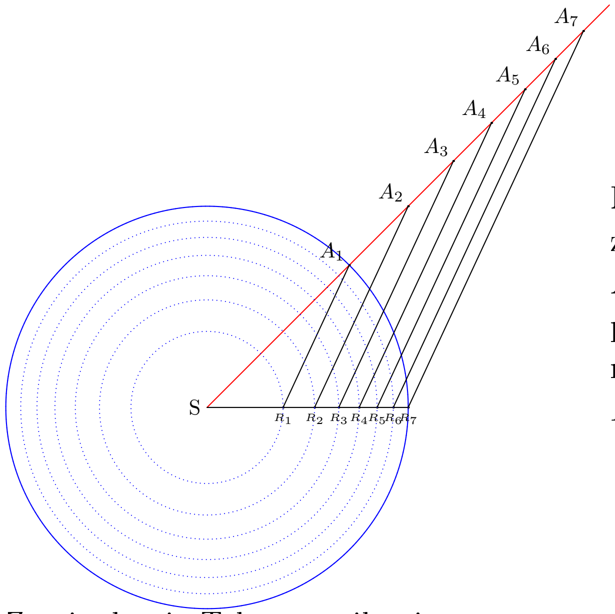
W szczególności

$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}, \text{ zatem } CH^2 = AH \cdot BH = n$$

□

Narysujmy dowolną półprostą k zaczynającą się w środku okręgu S i odłóżmy na niej odcinki $SA_1, SA_2, \dots, SA_7$ przy czym

$$SA_1 = \sqrt{1} = 1, SA_2 = \sqrt{2}, \dots, SA_7 = \sqrt{7}$$



Narysujmy dowolny promień SR_7 okręgu niezawarty w półprostej k, połączmy punkty A_7 i R_7. Przez punkty $A_1, A_2, \ldots, A_6$ prowadzimy proste równoległe do A_7R_7, niech proste te przecinają SR_7 w punktach $R_1, R_2, \ldots, R_6$.

Z twierdzenia Talesa wynika, że

$$SR_1 : SR_2 : \cdots : SR_7 = SA_1 : SA_2 : \cdots : SA_7 = 1 : \sqrt{2} : \cdots : \sqrt{7}$$

Narysujmy okręgi $o_1, o_2, \ldots, o_7$ o środku w S i promieniach $SR_1, SR_2, \ldots, SR_7$ odpowiednio.

Twierdzimy, że

koło ograniczone okręgiem o_1 oraz pierścienie ograniczone okręgami $o_1, o_2; o_2, o_3; \ldots; o_6, o_7$ tworzą siedem części o równych polach.

Oznaczmy odpowiednie pola przez $[o_1], [o_1, o_2], \ldots, [o_6, o_7]$, a przez $[o]$ pole koła ograniczonego przez **o**.

Zauważmy, że

$$\frac{[o_i]}{[o]} = \left(\frac{|SR_i|}{|SR_7|}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{7}}\right)^2 = \frac{i}{7}$$

dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$,w szczególności $\frac{[o_1]}{[o]} = \frac{1}{7}$.

Obliczamy

$$\frac{[o_i; o_{i+1}]}{[o]} = \frac{[o_{i+1}]}{[o]} - \frac{[o_i]}{[o]} = \frac{i+1}{7} - \frac{i}{7} = \frac{1}{7}.$$

To kończy poprawności konstrukcji dowód i dowód zadania. □

2. Wyznaczyć wszystkie liczby trzycyfrowe m takie, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$, ostatnie trzy cyfry liczby m^k są takie same jak cyfry liczby m.

Rozwiązanie.

Zauważmy przede wszystkim, że stwierdzenie "ostatnie trzy cyfry a są takie same jak ostatnie trzy cyfry b" jest równoważne $1000|a - b$.

Liczbą *dobrą* będziemy nazywać liczbę m spełniającą warunki zadania.

Jeżeli m jest dobra, to $1000|m^2 - m$.

Z drugiej strony niech n będzie takie, że $1000|n^2 - n$. Oczywiście

$$1000|n^3 - n^2 = n(n^2 - n), \quad 1000|n^4 - n^3 = n^2(n^2 - n) \ldots$$

a więc liczba n ma takie same cyfry jak n^2, a ta ma takie same ostatnie trzy cyfry jak n^3 itd., zatem n jest dobra.

Reasumując: liczba n jest dobra wtedy i tylko wtedy, gdy $1000|n^2 - n$. Pozostaje znaleźć wszystkie takie liczby $n \in \{100, 101, \ldots, 999\}$, że $1000|n^2 - n$.

$1000 = 125 \cdot 8$, zatem

$$1000|n^2 - n \Leftrightarrow 125|n^2 - n = n(n-1) \text{ i } 8|n^2 - n = n(n-1)$$

liczby n i $n - 1$ są względnie pierwsze, więc mamy 4 możliwości:

1. $125|n$ i $8|n$
2. $125|n$ i $8|n - 1$
3. $125|n - 1$ i $8|n$
4. $125|n - 1$ i $8|n - 1$

w 1. i 4. przypadku otrzymujemy $1000|n$ i $1000|n - 1$ odpowiednio, zatem n nie należy do wybranego przedziału.

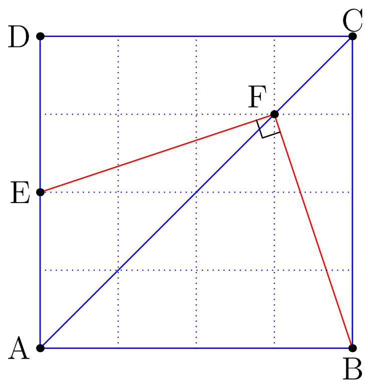
W pozostałych dwóch przypadkach najprościej sprawdzić wszystkie 16 możliwości: w 2. przypadku n równe $125, 250, 375, \ldots, 875$, a w 4. przypadku n równe

$126, 251, 376, \ldots, 876$.

Znajdujemy w ten sposób 2 rozwiązania: $n = 625$ i $n = 376$.

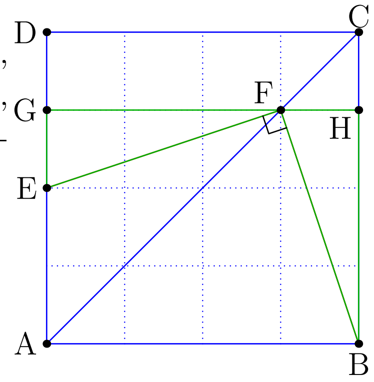
Nie jest przypadkiem, że podzielność $1000|n^2 - n$ *wraz z warunkiem* $0 \leq n \leq 1000$ *ma dokładnie 4 rozwiązania* – $0, 1, 376, 625$. *Taka sama będzie ilość rozwiązań dla* $10^k|n^2 - n$ *i* $0 \leq n \leq 10^k$.

3. Punkt F leży na przekątnej AC kwadratu $ABCD$ oraz $AF : FC = 3 : 1$. Punkt E jest środkiem boku AD. Udowodnić, że kąt BFE jest prosty.



Dowód.

Niech G oznacza rzut punktu F na bok AD, zaś H – rzut punktu F na bok BC.



Z rysunku widać, że $EG = FH = \frac{1}{4}AB$, $\sphericalangle EGF = \sphericalangle FHB = 90°$ oraz $FG = BH$, co udowadniamy za pomocą twierdzenia Talesa. Zatem na mocy cechy bok-kąt-bok

$$\triangle EGF \simeq \triangle FHB$$

w szczególności $\sphericalangle BFH = \sphericalangle FEG$.

Tak więc

$$\sphericalangle EFB = 180° - \sphericalangle EFG - \sphericalangle BFH = 180° - (\sphericalangle EFG + \sphericalangle FEG) = 180° - 90° = 90°.$$

□

4. Operacja $\mathcal{S}$ przyporządkowuje ciągowi liczb $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ciąg

$$\left(\frac{a_1 + 2a_2}{3}, \frac{a_2 + 2a_3}{3}, \ldots, \frac{a_{n-1} + 2a_n}{3}, \frac{a_n + 2a_1}{3}\right).$$

Wykazać, że jeśli wśród dodatnich liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ są liczby różne, to po wykonaniu pewnej liczby kolejnych operacji $\mathcal{S}$ otrzymamy ciąg, w którym nie wszystkie liczby są całkowite.

Sformułujmy rozwiązanie intuicyjnie: operacja $\mathcal{S}$ *uśrednia ciąg* $(a_1, \ldots, a_n)$, *więc po wielu operacjach* $\mathcal{S}$ *ciąg* $(a_1, \ldots, a_n)$ *będzie bliski ciągowi* $(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \ldots, \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})$, *ale nie równy mu. W związku z tym po wielu operacjach* $\mathcal{S}$, *któryś wyraz musi nie być całkowity, gdyż będzie zbyt bliski średniej* $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. *Poniższe rozwiązanie jest ścisłym zapisem tej intuicji.*

Dowód.

Fakt 2. *Jeżeli* $\mathcal{S}(x_1, \ldots, x_m) = \left(\frac{x_1+2x_2}{3}, \frac{x_2+2x_3}{3}, \ldots, \frac{x_{n-1}+2x_m}{3}, \frac{x_m+2x_1}{3}\right)$ *jest ciągiem w którym wszystkie wyrazy są równe, to i w ciągu* $(x_1, \ldots, x_m)$ *wszystkie wyrazy są równe.*

Dowód faktu. Niech

$$M := \frac{x_1 + 2x_2}{3} = \frac{x_2 + 2x_3}{3} = \cdots = \frac{x_{m-1} + 2x_m}{3} = \frac{x_m + 2x_1}{3}$$

Dla wygody zapisu przyjmujemy $x_0 := x_m, x_{-1} := x_{m-1}$.

Załóżmy, że x_i jest największym wyrazem ciągu $(x_1, \ldots, x_m)$. Niech $x_i = M + \varepsilon$.

Mamy $\frac{x_{i-1}+2x_i}{3} = M$, a więc $x_{i-1} = M - 2\varepsilon$. Ponadto $\frac{x_{i-2}+2x_{i-1}}{3} = M$, czyli $x_{i-2} = M + 4\varepsilon$.

Z założenia x_i jest największym wyrazem ciągu, zatem $x_{i-2} \leq x_i$ oraz $M + 4\varepsilon \leq M + \varepsilon$, $3\varepsilon \leq 0$, $\varepsilon \leq 0$. Stąd

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_i = M + \varepsilon \leq M.$$

Analogicznie udowadniamy, że

$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq M$$

Najmniejszy wyraz ciągu $(x_1, \ldots, x_m)$ jest nie mniejszy niż M i największy wyraz tego ciągu jest nie większy niż M, zatem wszystkie wyrazy ciągu $(x_1, \ldots, x_m)$ są równe M.

$\square$

Dla wygody oznaczmy $K(x_1, \ldots, x_m)$ liczbę $x_1^2 + \cdots + x_m^2$. Będziemy też mówić "K od ciągu $(x_1, \ldots, x_m)$" na oznaczenie $K(x_1, \ldots, x_m)$.

Dla dowolnego ciągu $(x_1, \ldots, x_m)$ liczba $K(x_1, \ldots, x_m)$ jest nieujemna.

Fakt 3 (Niezmiennik). *Jeżeli ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ nie jest stały, to*

$$\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2 + 2x_3}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n + 2x_1}{3}\right)^2 < x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

innymi słowy suma kwadratów wyrazów ciągu zmniejsza się ostro.

Krócej, jeżeli $(x_1, \ldots, x_n)$ nie jest stały, to

$$K(\mathcal{S}(x_1, \ldots, x_m)) < K(x_1, \ldots, x_m)$$

Dowód faktu. Wszystkie poniższe nierówności są równoważne

$$\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x_2 + 2x_3}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n + 2x_1}{3}\right)^2 < x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\frac{x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2}{9} + \frac{x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2}{9} + \cdots + \frac{x_n^2 + 4x_nx_1 + 4x_1^2}{9} < x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

$$\frac{x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 3x_1^2 - 6x_2^2}{9} + \frac{x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 3x_2^2 - 6x_3^2}{9} + \cdots +$$
$$+ \frac{x_n^2 + 4x_nx_1 + 4x_1^2 - 3x_n^2 - 6x_1^2}{9} < 0$$

$$\frac{-2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2}{9} + \frac{-2x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2}{9} + \cdots + \frac{-2x_n^2 + 4x_nx_1 - 2x_1^2}{9} < 0$$

$$-\frac{2}{9}(x_1 - x_2)^2 - \frac{2}{9}(x_2 - x_3)^2 - \cdots - \frac{2}{9}(x_n - x_1)^2 < 0$$

Ponieważ nie wszystkie wyrazy ciągu $(x_1, \ldots, x_n)$ są równe, to któreś z wyrażeń $(x_1 - x_2)^2, (x_2 - x_3)^2, \ldots, (x_n - x_1)^2$ będzie dodatnie, zatem lewa strona będzie ostro ujemna. $\square$

Przystępujemy do właściwego dowodu.

Załóżmy że ciąg $(a_1, \ldots, a_n)$ spełnia założenia zadania, ale nie spełnia tezy: w ciągu $a_1, \ldots, a_n$ są różne liczby, ale po dowolnej ilości operacji $\mathcal{S}$ wyrazy otrzymanego ciągu będą całkowite.

Z pierwszego faktu wynika, że po dowolnej liczbie operacji $\mathcal{S}$ w otrzymanym ciągu będą wyrazy różne.

Z drugiego faktu wynika, że

$$K(a_1,\dots,a_n) > K(\mathcal{S}(a_1,\dots,a_n)) > K(\mathcal{S}(\mathcal{S}(a_1,\dots,a_n))) > \dots$$

Z założenia wszystkie ciągi $(a_1,\dots,a_n), \mathcal{S}(a_1,\dots,a_n), \mathcal{S}(\mathcal{S}(a_1,\dots,a_n)),\dots$ mają wyrazy całkowite, zatem K od tych ciągów będą całkowite.

Po $K(a_1,\dots,a_n)+1$ operacjach $\mathcal{S}$ liczba K otrzymanego ciągu będzie nie większa niż

$$K(a_1,\dots,a_n)\underbrace{-1-1-1\cdots-1}_{K(a_1,\dots,a_n)+1} = -1$$

Ale liczba K, jako suma pewnej ilości kwadratów nie może być ujemna! Sprzeczność. $\square$

Alternatywny dowód. Zaczynamy jak w poprzednim dowodzie od wykazania Faktu 2.

Zauważmy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych zachodzą nierówności

$$(*) \qquad \min(a,b) \leqslant \frac{a+2b}{3} \leqslant \max(a,b),$$

przy czym w każdej z nich zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Wynika stąd, że dla dowolnego ciągu $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ $\max A \geqslant \max S(A)$. Tak więc

$$\max A \geqslant \max S(A) \geqslant \max S(S(A)) \geqslant \max S(S(S(A))) \geqslant \dots$$

Załóżmy, wbrew tezie zadania, że w po zastosowaniu dowolnej liczby operacji S w otrzymanym ciągu wszystkie wyrazy są liczbami całkowitymi (oczywiście nieujemnymi). Wtedy w powyższych nierównościach od pewnego miejsca, powiedzmy miejsca k_0, muszą występować równości (bo nie ma nieskończonego malejącego ciągu złożonego z liczb całkowitych nieujemnych). Niech więc M oznacza liczbę całkowitą taką, że $M=\max S^k(A)$, gdzie $k\geqslant k_0$, zaś $S^k(A)$ oznacza ciąg powstały z A po k-krotnym zastosowaniu operacji S.

Z Faktu 2. wynika, że w każdym z ciągów $S^k(A)$ są wyrazy mniejsze od M. Ponadto zauważmy, że jeśli a,b są kolejnymi wyrazami w ciągu $S^k(A)$, to $\frac{a+2b}{3}=M$ tylko wtedy gdy $a=b=M$. Tak więc, jeśli w ciągu $S^k(A)$ jest q wyrazów równych M, to w ciągu $S^{k+1}(A)$ jest ich co najwyżej $q-1$. Oznacza to, że liczba wyrazów równych M w ciągu $S^{k+q}(A)$ jest równa zeru, co jest niemożliwe.

$\square$

[jj i pg]