Podlaski Konkurs Matematyczny - 2004
Klasy Pierwsze
Rozwiązania zadań konkursowych

22 maja 2004 r.

1. Wykazać, że jeśli dodatnie liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} > \frac{c}{2ab}.$$

Rozwiązanie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Ponadto, zgodnie z założeniami $a + b - c > 0$. Wykorzystując kolejno te nierówności otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} - \frac{c}{2ab} &= \frac{2(a^2+b^2) - c^2}{2abc} = \frac{(a^2+b^2) + (a^2+b^2) - c^2}{2abc} \\ &\geqslant \frac{a^2+b^2+2ab-c^2}{2abc} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2abc} \\ &= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2abc} > 0,\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

2. Wyznaczyć wszystkie pary (x, y) nieujemnych liczb całkowitych spełniających równanie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{810}.$$

Rozwiązanie

Rozważane równanie można zapisać w postaci $\sqrt{x} = 9\sqrt{10} - \sqrt{y}$. Zatem $x = (9\sqrt{10} - \sqrt{y})^2 = 810 + y - 18\sqrt{10y}$. Z ostatniej równości wynika, że jeśli x, y są liczbami całkowitymi, to $\sqrt{10y}$ jest nieujemną liczbą całkowitą, czyli $10y = a^2$, dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej a. Zauważmy, że liczba a musi być podzielna przez 2 i 5, a więc istnieje nieujemna liczba całkowita l taka, że $a = 10l$. Mamy zatem $y = 10l^2$. Analogicznie dowodzimy, że $x = 10k^2$ dla pewnej nieujemnej liczby całkowitej k. Uwzględniając to w równaniu otrzymujemy $\sqrt{10k^2} + \sqrt{10l^2} = 9\sqrt{10}$, czyli

$$k + l = 9, \text{ gdzie } k, l \geqslant 0.$$

Stąd widać, że szukane pary (x, y) muszą mieć postać $(10k^2, 10(9-k)^2)$, gdzie $k = 0, 1, \ldots, 9$. Z drugiej strony przez bezpośrednie podstawienie sprawdzamy, że znalezione pary spełniają rozważane równanie. □

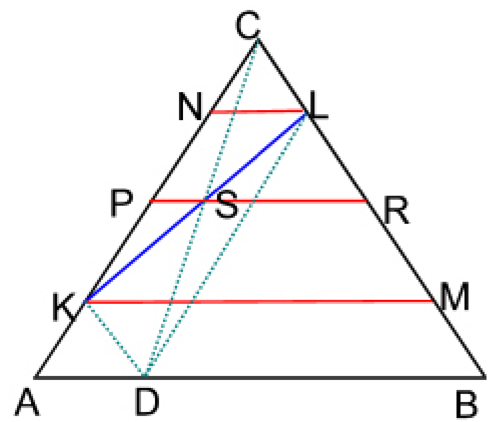
3. W trójkącie ABC boki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ są równej długości. Jaki zbiór tworzą środki wszystkich odcinków $\overline{KL}$ takich, że

$$K \in \overline{AC}, \quad L \in \overline{BC} \text{ oraz } AK = LC?$$

Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie

Rozważmy dowolne punkty $K \in \overline{AC}$ i $L \in \overline{BC}$ takie, że $AK = LC$ oraz punkty $N \in \overline{AC}$, $M \in \overline{BC}$ takie, że odcinki $\overline{KM}$ i $\overline{NL}$ są równoległe do podstawy $\overline{AB}$. Niech ponadto $\overline{PR}$ będzie odcinkiem łączącym środki ramion trójkąta ABC. Udowodnimy, że poszukiwanem zbiorem punktów jest odcinek $\overline{PR}$. Ponieważ $AK = NC$, punkt P jest środkiem odcinka $\overline{KN}$. Z twierdzenia Talesa wynika, że punkt S - przecięcia odcinków $\overline{KL}$ i $\overline{PR}$ jest środkiem odcinka $\overline{KL}$. Tak więc środek odcinka $\overline{KL}$ leży na odcinku $\overline{PR}$. Należy jeszcze wykazać, że każdy punkt S odcinka $\overline{PR}$ jest środkiem pewnego odcinka $\overline{KL}$.



W tym celu wystarczy wyznaczyć na podstawie $\overline{AB}$ punkt D - przecięcia prostej CS z podstawą, a następnie zbudować równoległobok $DKCL$. Punkt S jest wtedy środkiem odcinka $\overline{KL}$ jako punkt przecięcia przekątnych równoległoboku $DKCL$. Ostatecznie szukanym zbiorem punktów jest odcinek $\overline{PR}$. □

4. Na konkurs matematyczny przybyło n uczniów ($n \geqslant 4$). Okazało się, że każdy z uczniów ma co najwyżej trzech znajomych wśród pozostałych uczestników. Wykazać, że uczestników konkursu można rozmieścić w dwóch salach tak, aby każda osoba miała w swojej sali co najwyżej jednego znajomego.

Uwaga. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Rozwiązanie

Dowolnemu rozmieszczeniu $\mathcal{R}$ grupy złożonej z n uczniów (w dwóch salach) przyporządkujmy liczbę $N_{\mathcal{R}}$, która jest sumą ilości par uczniów znających się w pierwszej sali oraz ilości par uczniów znających się w drugiej sali. Wśród wszystkich rozmieszczeń wybierzmy takie dla którego liczba $N_{\mathcal{R}}$ jest możliwie najmniejsza. Nazwijmy je rozmieszczeniem $\mathcal{R}_0$. Udowodnimy, że $\mathcal{R}_0$ spełnia warunki zadania. Przypuśćmy, że w jednej z sal (powiedzmy w pierwszej) jest uczeń A mający przynajmniej dwóch różnych znajomych B i C. Rozważmy nowe rozmieszczenie $\mathcal{R}_1$ polegające na przemieszczeniu ucznia A do drugiej sali i pozostawieniu reszty uczniów w tych samych salach co w rozmieszczeniu $\mathcal{R}_0$. Wtedy liczba par uczniów znających się w pierwszej sali zmniejsza się o 2 (ubywają pary: (A, B) i (A, C)), zaś w drugiej sali liczba par uczniów znających się wzrasta maksymalnie o 1 (o ile w drugiej sali jest znajomy ucznia A). Stąd wynika, że $N_{\mathcal{R}_1} \leqslant N_{\mathcal{R}_0} - 1$, co przeczy wyborowi rozmieszczenia $\mathcal{R}_0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że rozmieszczenie $\mathcal{R}_0$ spełnia warunki zadania. □

[pg]