

VII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

23 maja 2015 r.

1. Liczby pierwsze p i q różnią się o 4. Liczba powstała z zapisania kolejno cyfr liczb p i q jest również pierwsza. Znaleźć wszystkie pary (p, q) . Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie.

Wprowadźmy nieco oznaczeń. Piszemy $x \equiv y$ na oznaczenie „liczby x i y dają tę samą resztę z dzielenia przez 3”. Piszemy $S(x)$ na oznaczenie sumy cyfr liczby x . Cecha podzielności przez 3 mówi, że $x \equiv S(x)$.

Oznaczmy przez s liczbę powstałą z zapisania kolejno cyfr liczb p i q . Wtedy

$$s \equiv S(s) = S(p) + S(q) \equiv p + q.$$

Pokażemy, że któraś z liczb p lub q jest podzielna przez 3. Załóżmy przeciwnie, że ani p ani q nie są podzielne przez 3. Skoro $|p - q| = 4$, to dają one różne reszty z dzielenia przez 3. Wobec tego liczba $p + q$ jest podzielna przez 3, zatem również s jest podzielna przez 3. Skoro s jest pierwsza, to $s = 3$. Ale $s \geq p + q \geq 2 + 2 = 4$, sprzeczność.

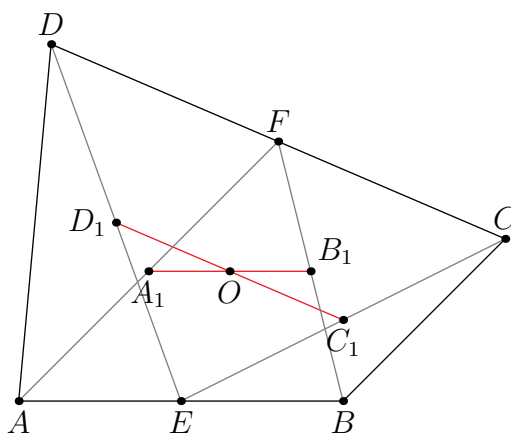
Pokazaliśmy, że $p = 3$ lub $q = 3$. Jeżeli $p = 3$ to $q = 7$ oraz $s = 37$ jest pierwsza, czyli mamy rozwiązanie. Również jeżeli $q = 3$ to $p = 7$ oraz $s = 73$ jest pierwsza i otrzymujemy drugie rozwiązanie.

Odpowiedź: Są dwie takie pary: $(p, q) = (3, 7)$ oraz $(p, q) = (7, 3)$.

2. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkt E jest środkiem boku AB zaś F jest środkiem boku CD . Wykazać, że środki odcinków AF , CE , BF oraz DE są wierzchołkami równoległoboku.

Rozwiązanie, sposób I

Oznaczmy przez A_1 , B_1 , C_1 i D_1 odpowiednio środki odcinków AF , BF , CE i DE . Niech O oznacza środek odcinka A_1B_1 . Skoro A_1B_1 łączy środki boków AF i BF trójkąta ABF , to z podobieństwa trójkątów stwierdzamy, że O jest środkiem odcinka FE . Niech O' będzie środkiem odcinka C_1D_1 . Analizując trójkąt CDE podobnie jak wyżej, stwierdzamy, że O' jest środkiem odcinka EF , więc $O = O'$. Skoro odcinki A_1B_1 i C_1D_1 mają wspólny środek, to $A_1B_1C_1D_1$ jest równoległobokiem.



Rozwiązanie, sposób II

Oznaczmy przez A_1 , B_1 , C_1 i D_1 odpowiednio środki odcinków AF , BF , CE i DE . Wystarczy pokazać, że wektor $\overrightarrow{A_1D_1}$ jest równy wektorowi $\overrightarrow{C_1B_1}$. Z dodawania wektorów

wynika, że

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}).$$

Podobnie

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{A_1F} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DD_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}).$$

Sumując te równości i dzieląc przez 2 otrzymujemy

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DE}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}).$$

Podobnie stwierdzamy, że

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FB}),$$

wobec tego

$$\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A_1D_1}.$$

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2a} \geq \frac{2}{3}.$$

Rozwiązanie, sposób I

Rozważmy liczby $u = a + 2b$ i $v = 2a + b$. Wówczas $u > 0$, $v > 0$ oraz z łatwością obliczamy

$$a = \frac{-u + 2v}{3} \text{ oraz } b = \frac{2u - v}{3}.$$

Tak więc

$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{2a+b} = \frac{-u+2v}{3u} + \frac{2u-v}{3v} = \frac{2}{3} \left(\frac{u}{v} + \frac{v}{u} \right) - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(\frac{u^2 + v^2}{uv} \right) - \frac{2}{3} \geq \frac{2}{3} \frac{2uv}{uv} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

W ostatnim kroku skorzystaliśmy z nierówności $u^2 + v^2 \geq 2uv$, która jest równoważna oczywistej nierówności $(u - v)^2 \geq 0$.

Rozwiązanie, sposób II

Dodajemy do obu stron nierówności z zadania liczbę 2 i otrzymujemy równoważną postać nierówności

$$\frac{a + (a + 2b)}{a + 2b} + \frac{b + (b + 2a)}{b + 2a} \geq 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}. \quad (1)$$

Lewa strona jest równa $2(a + b) \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2a} \right)$. Po przekształceniach otrzymujemy z (1) równoważną nierówność

$$3 \cdot \frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2a}}. \quad (2)$$

Użyjemy teraz następującego pomocniczego faktu:

Lemat 1 (nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a harmoniczną dla dwóch liczb).
Jeżeli liczby x i y są dodatnie, to

$$\frac{x+y}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

Dowód. Mamy $(x+y)(1/x+1/y) = 2 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 4 + \left(\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 \geq 4$, co daje naszą nierówność. $\square$

Stosując lemat do liczb $x = a + 2b$ oraz $y = b + 2a$ otrzymujemy

$$\frac{(a+2b) + (b+2a)}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2a}},$$

czyli dokładnie nierówność (2), którą należało dowieść.

4. W trójkącie ABC o polu powierzchni S długości boków $|BC| = a$ i $|AC| = b$ są liczbami całkowitymi i spełniają nierówność

$$(a+b)^2 < 8S + 1.$$

Wykazać, że trójkąt ten jest równoramienny.

Rozwiązanie.

Niech h_a oznacza długość wysokości trójkąta opuszczonej z wierzchołka A na prostą zawierającą bok BC . Wówczas $h_a \leq |AC| = b$. Mamy więc nierówność:

$$(a+b)^2 < 8S + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2}ah_a + 1 \leq 4ab + 1.$$

Stąd wynika, że $(a+b)^2 - 4ab < 1$, czyli $(a-b)^2 < 1$. Ponieważ a, b są liczbami całkowitymi, z ostatniej nierówności wynika, że $a = b$.

[pg, jj]