

VII Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy drugie

23 maja 2015 r.

1. Liczby rzeczywiste a, b, c są takie, że liczby $a^3 - b^3, b^3 - c^3, c^3 - a^3$ tworzą (w pewnej kolejności) ciąg arytmetyczny. Wykazać, że pewne dwie spośród liczb a, b, c są równe.

Rozwiązanie.

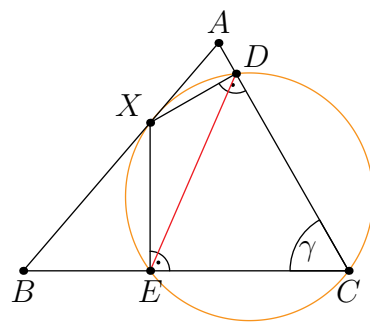
Oznaczmy przez x, y, z liczby $a^3 - b^3, b^3 - c^3, c^3 - a^3$ ustawione w kolejności rosnącej. Są one kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy r , więc $x = y - r$ oraz $z = y + r$, stąd $y = \frac{x+y+z}{3}$. Ale $x + y + z = (a^3 - b^3) + (b^3 - c^3) + (c^3 - a^3) = 0$. Wobec tego $y = 0$.

Ustaliliśmy, że jedna z liczb z zadania jest zerem. Jeżeli przykładowo $a^3 - b^3 = 0$, to $a^3 = b^3$, więc, po wzięciu pierwiastków, $a = b$. Podobnie, jeżeli $b^3 - c^3 = 0$, to $b = c$, a jeżeli $c^3 - a^3 = 0$, to $c = a$. W każdym z przypadków stwierdzamy, że pewne dwie spośród liczb a, b, c są równe.

2. Na boku AB trójkąta ostrokatnego ABC wyznaczyć punkt taki, aby odległość między jego rzutami prostopadłymi na boki AC i BC była możliwie najmniejsza.

Rozwiązanie.

Wybermy dowolny punkt X na boku AB i oznaczmy przez D i E rzuty X na boki AC i BC trójkąta ABC . Wtedy $\angle XDC$ oraz $\angle XEC$ są kątami prostymi, więc na czworokącie $XDCE$ można opisać okrąg, którego średnicą jest odcinek XC . W szczególności odcinek ten jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie DCE .



Niech $\gamma = \angle ACB = \angle DCE$. Z twierdzenia sinusów dla trójkąta DCE wynika, że

$$|DE| = |XC| \cdot \sin \gamma.$$

Chcemy wybrać X tak, by $|DE|$ było możliwe najmniejsze. Miara γ jest ustalona niezależnie od X , więc $\sin \gamma$ nie zależy od wyboru X . Najmniejszą długość $|DE|$ uzyskamy, gdy $|XC|$ będzie najmniejsze możliwe, czyli gdy X będzie spodkiem wysokości opuszczonej z C na AB .

3. Wykazać, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n jeśli $0 \leq x \leq 2n$, to

$$(x+1)^n \geq x^n + (x-1)^n.$$

Rozwiązanie.

Ponieważ nierówność jest oczywiście prawdziwa dla $x = 0$, dalej będziemy zakładać, że $0 < x \leq 2n$. Dzieliąc obie strony przez x^n otrzymujemy postać równoważną:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n \geq 1.$$

Skorzystamy z dwumianowego wzoru Newtona $(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + b^n$.

Lewa strona powyższej nierówności jest równa:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^n &= \left(1 + \binom{n}{1}\frac{1}{x} + \binom{n}{2}\frac{1}{x^2} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{x^k} + \dots + \frac{1}{x^n}\right) \\ &\quad - \left(1 - \binom{n}{1}\frac{1}{x} + \binom{n}{2}\frac{1}{x^2} - \dots + (-1)^k\binom{n}{k}\frac{1}{x^k} + \dots + (-1)^n\frac{1}{x^n}\right) \\ &= 2 \cdot \left(\binom{n}{1}\frac{1}{x} + \binom{n}{3}\frac{1}{x^3} + \binom{n}{5}\frac{1}{x^5} + \dots\right) \geq 2 \cdot \binom{n}{1}\frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{n}{x} \geq 1. \end{aligned}$$

4. W pola kwadratowej tablicy $n \times n$ wpisano kolejno rzędami liczby $1, 2, \dots, n^2$, tak jak na rysunku poniżej dla $n = 3$. *Główną przekątną* nazywamy przekątną łączącą liczby 1 i n^2 ; jej pola są pokolorowane na rysunku. Pokazać, że istnieje nieskończenie wiele liczb n takich, że wśród liczb na głównej przekątnej są dokładnie dwa kwadraty liczb całkowitych.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Rozwiązanie.

Zauważmy, że jeśli $n > 1$, to na głównej przekątnej zawsze znajdują się co najmniej dwa kwadraty liczb całkowitych, bo są tam liczby 1^2 oraz n^2 . Pozostaje znaleźć n takie, by na przekątnej nie było już więcej kwadratów liczb całkowitych.

Zastanówmy się, które liczby leżą na przekątnej. Pomiedzy wpisaniem dwóch kolejnych liczb na przekątnej wpisujemy zawsze jeden pełen rząd liczb i jeszcze jedną liczbę. Wobec tego kolejne liczby na przekątnej różnią się o $n + 1$. Na przekątnej mamy zatem dokładnie liczby

$$1, \quad 1 + (n + 1), \quad 1 + 2(n + 1), \quad \dots, \quad 1 + (n - 1)(n + 1) = n^2.$$

Każda z tych liczb daje resztę 1 z dzielenia przez $n + 1$.

Wyberzmy n takie, że $p = n + 1$ jest pierwsza i niech a^2 będzie kwadratem liczby całkowitej, znajdującym się na przekątnej. Wtedy $p = n + 1$ dzieli liczbę

$$a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1),$$

więc p dzieli $a - 1$ lub p dzieli $a + 1$. Liczba a jest z przedziału $[1, n] = [1, p - 1]$, wobec tego jedyne możliwości to $a = 1$ lub $a = p - 1$.

Zatem, jeżeli $n > 1$ oraz $n + 1$ jest pierwsza, to na przekątnej znajdują się dokładnie dwa kwadraty liczb całkowitych. Oczywiście takich liczb n , jest nieskończenie wiele.