VI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

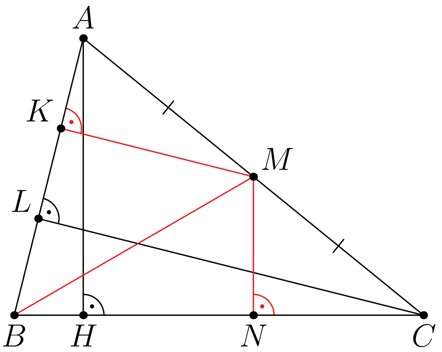
Rozwiązania - klasy drugie

17 maja 2014 r.

1. W trójkącie ostrokątnym ABC najdłuższą wysokością jest AH. Punkt M jest środkiem boku AC. Wykazać, że jeśli $AH = BM$, to kąt ABC ma miarę nie większą od 60°.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez K, L rzuty prostopadłe punktów M, C na bok AB oraz przez N rzut M na bok BC. Ponieważ trójkąt ABC jest ostrokątny, więc rzuty te leżą na bokach trójkąta. Skoro AH jest najdłuższą z wysokości, więc $CL \leqslant AH$. Zauważmy, że



$$MK = \frac{1}{2}CL \leqslant \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}BM.$$

W trójkącie prostokątnym BKM zachodzi $\sin\sphericalangle KBM = \frac{MK}{BM} \leqslant \frac{1}{2}$, a zatem

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle KBM \leqslant 30^\circ.$$

Podobnie, $\sin\sphericalangle NBM = \frac{MN}{BM} = \frac{1}{2}$, więc $\sphericalangle MBC = \sphericalangle NBM = 30^\circ$. Ostatecznie

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABM + \sphericalangle MBC \leqslant 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ.$$

2. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb x, y, z należących do przedziału $[0,1]$ zachodzi nierówność

$$(x+y+z+1)^2 \geqslant 4(x^2+y^2+z^2).$$

I rozwiązanie

Liczby x, y, z należą do przedziału $[0,1]$, więc $x \geqslant x^2$, $y \geqslant y^2$ oraz $z \geqslant z^2$. W szczególności $x+y+z \geqslant x^2+y^2+z^2$. Przyjmijmy $A = x+y+z$. Zauważmy, że oczywista nierówność $(A-1)^2 \geqslant 0$ jest równoważna nierówności $(A+1)^2 \geqslant 4A$, a więc

$$(x+y+z+1)^2 \geqslant 4(x+y+z) \geqslant 4(x^2+y^2+z^2).$$

II rozwiązanie

Nierówność nie zmienia się przy zamianie zmiennych miejscami, więc możemy założyć, że x jest największą z liczb x, y, z. Mamy

$$(x+y+z+1)^2 = x^2+y^2+z^2+1+2x+2y+2z+2xy+2yz+2zx.$$

Liczby x, y, z należą do przedziału $[0,1]$, więc $x \geqslant x^2$, $y \geqslant y^2$ oraz $z \geqslant z^2$. Wobec tego

$$(x+y+z+1)^2 \geqslant 3(x^2+y^2+z^2)+1+2xy+2yz+2zx.$$

Ponadto $1 \geqslant x^2$, $xy \geqslant y^2$ oraz $xz \geqslant z^2$, więc

$$3(x^2+y^2+z^2)+1+2xy+2yz+2zx \geqslant 4(x^2+y^2+z^2).$$

3. Udowodnić, że równanie $x^3+y^3=z^2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Rozwiązanie I

Zauważmy, że $2^3+1^3=3^2$ jest rozwiązaniem równania z zadania. Podobnie, dla dowolnego k całkowitego dodatniego zachodzi

$$(2k^2)^3+(k^2)^3=9k^6=(3k^3)^2,$$

więc również $(2k^2, k^2, 3k^3)$ jest trójką liczb dodatnich spełniających równanie z zadania. Wobec tego równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie II

Niech x i y będą dowolnymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Wtedy

$$\big(x(x^2+y^2)\big)^2+\big(y(x^2+y^2)\big)^2=(x^2+y^2)^3,$$

więc trójka liczb całkowitych dodatnich $(x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), x^2+y^2)$ jest rozwiązaniem równania z zadania. Takich trójek jest nieskończenie wiele.

4. Na tablicy zapisany jest wielomian

$$\Box x^{2014}+\Box x^{2013}+\ldots+\Box x^1+\Box.$$

Piotr i Paweł grają w grę. Ruch polega na wybraniu jednego ze współczynników wielomianu tzn. wpisaniu w jedno z pól oznaczonych $\Box$ wybranej przez siebie (dowolnie) liczby rzeczywistej. Gracze wykonują ruchy naprzemiennie. Zaczyna Piotr. Gra kończy się po wybraniu wszystkich współczynników wielomianu. Paweł wygrywa, jeżeli otrzymany wielomian ma pierwiastek rzeczywisty, w przeciwnym razie wygrywa Piotr. Który z nich ma strategię wygrywającą? Odpowiedź uzasadnić.

Gracz ma strategię wygrywającą, jeżeli wygrywa każdą rozgrywkę (o ile gra optymalnie).

I rozwiązanie

Strategię wygrywającą ma Paweł. Opisujemy ją poniżej.

W pierwszym ruchu Piotr wybiera współczynnik przy pewnym x^l. Jeżeli $l>0$, tzn. jeżeli Piotr nie wybrał współczynnika wolnego, to Paweł w swoim ruchu wybiera 0 za współczynnik wolny. Wtedy, niezależnie od następnych ruchów graczy, liczba 0 będzie pierwiastkiem otrzymanego wielomianu, więc Paweł wygrywa. Wobec tego dalej zakładamy, że w pierwszym ruchu Piotr wstawia pewną liczbę $c \neq 0$ w miejsce współczynnika wolnego.

Jeżeli c jest dodatnia, to Paweł wstawia -1 w miejsce współczynnika przy x^{2014}. W tej sytuacji, niezależnie od tego, jakie będą pozostałe współczynniki, otrzymany wielomian P będzie mieć pierwiastek rzeczywisty. Dlaczego? Skoro współczynnik przy najwyższej potędze P jest ujemny, to $P(x) < 0$ o ile x jest dużą liczbą rzeczywistą. Ponadto $P(0) = c > 0$. Wobec tego z ciągłości P istnieje taka liczba x_0, że $P(x_0) = 0$, czyli P ma pierwiastek rzeczywisty.

Podobnie, jeśli c jest ujemna, to Paweł wstawia 1 w miejsce współczynnika przy x^{2014} i otrzymany wielomian ma pierwiastek rzeczywisty ma podstawie rozumowania jak powyżej.

Zatem Paweł wygrywa niezależnie od ruchów Piotra.

II rozwiązanie

Zadanie można rozwiązać dysponując nieco mniejszą wiedzą o wielomianach niż w poprzednim rozwiązaniu. Niestety otrzymane rozwiązanie jest dłuższe.

Strategię wygrywającą ma Paweł. Opisujemy ją poniżej.

W pierwszym ruchu Piotr wybiera współczynnik przy pewnym x^l. Jeżeli $l > 0$, tzn. jeżeli Piotr nie wybrał współczynnika wolnego, to Paweł w swoim ruchu wybiera 0 za współczynnik wolny. Wtedy, niezależnie od następnych ruchów graczy, liczba 0 będzie pierwiastkiem otrzymanego wielomianu, więc Paweł wygrywa. Wobec tego dalej zakładamy, że w pierwszym ruchu Piotr wstawia pewną liczbę $c \neq 0$ w miejsce współczynnika wolnego.

Wykonując swój pierwszy ruch Paweł wstawia 0 jako współczynnik przy x^{2014}. Wielomian po jego ruchu ma postać

$$\Box x^{2013} + \ldots + \Box x^1 + c.$$

Teraz Piotr musi wstawić 0 jako współczynnik przy x^{2013}. Dlaczego? Jeżeli nie wstawia on zera, to on lub Paweł wstawia niezerową liczbę przy x^{2013}. Wtedy niezależnie od następnych ruchów, otrzymany wielomian będzie mieć stopień *nieparzysty*, a każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty. Wobec tego Paweł wygrywa. Załóżmy zatem, że Piotr wstawił 0 jako współczynnik przy x^{2013}. Wtedy Paweł wstawia 0 jako współczynnik przy x^{2012}. Wielomian po jego ruchu ma postać

$$\Box x^{2011} + \ldots + \Box x^1 + c.$$

Powtarzamy rozumowanie z poprzedniego ruchu: Piotr musi wstawić 0 w miejsce współczynnika przy x^{2011}. Wtedy Paweł wstawia 0 w miejsce współczynnika przez x^{2010}, itd. Dochodzimy do momentu gry, w którym Piotr wstawia 0 w miejsce współczynnika przy x^3 i wielomian przed ruchem Pawła ma postać

$$\Box x^2 + \Box x + c,$$

przy czym $c \neq 0$. Wtedy Paweł wstawia takie a w miejsce współczynnika przy x^2, żeby $ac < 0$, np. wstawia on $a = -c$. Piotr wstawia pewne b w miejsce współczynnika przy x i gra kończy się. Otrzymany wielomian ma postać $ax^2 + bx + c$, przy czym $b^2 - 4ac > 0$, gdyż $ac < 0$. Wobec tego wielomian ten ma pierwiastek rzeczywisty i wygrywa Paweł.

[*pg, jj*]