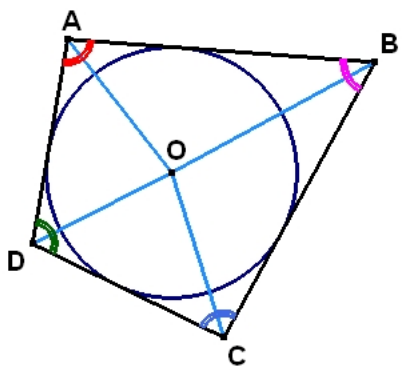
Konkurs Matematyczny
Politechniki Białostockiej - 2009
Klasy Pierwsze

Rozwiązania zadań konkursowych

30 maja 2009 r.

1. Na okręgu o środku O opisano czworokąt wypukły, którego kolejne wierzchołki oznaczono literami A, B, C i D. Udowodnić, że suma miar kątów $\measuredangle AOB$ i $\measuredangle COD$ jest równa $180°$.

Rozwiązanie



Okrąg o środku O jest okręgiem wpisanym w czworokąt $ABCD$, więc dwusieczne kątów $\measuredangle ABC, \measuredangle BCD, \measuredangle CDA, \measuredangle DAB$ przecinają się w O, czyli

$$\measuredangle OAB = \measuredangle OAD = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$$
$$\measuredangle OBA = \measuredangle OBC = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$$
$$\measuredangle OCB = \measuredangle OCD = \frac{1}{2}\measuredangle BCD$$
$$\measuredangle ODC = \measuredangle ODA = \frac{1}{2}\measuredangle CDA$$

Stąd wynika

$$\measuredangle AOB = 180° - \measuredangle OAB - \measuredangle OBA = 180° - \frac{1}{2}\measuredangle DAB - \frac{1}{2}\measuredangle ABC$$

$$\measuredangle COD = 180° - \measuredangle OCD - \measuredangle ODC = 180° - \frac{1}{2}\measuredangle BCD - \frac{1}{2}\measuredangle CDA$$

a więc

$$\measuredangle AOB + \measuredangle COD = 360° - \frac{1}{2}(\measuredangle DAB + \measuredangle ABC + \measuredangle BCD + \measuredangle CDA) = 360° - \frac{1}{2}360° = 180°$$

$\square$

2. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną, zaś $x_1, x_2, \ldots, x_n$ liczbami całkowitymi, których suma dzieli się przez 10. Udowodnić, że liczba

$$x_1^5 + x_2^5 + ... + x_n^5$$

jest również podzielna przez 10.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że

$$10|x^5 - x$$

dla wszyskich x całkowitych. Wiemy, że dla k, r całkowitych, liczby $(10k + r)^5$ i $10k + r$ dają taką resztę z dzielenia przez 10 jak liczby r^5 i r odpowiednio, wystarczy zatem ręcznie sprawdzić, czy podzielność zachodzi dla liczb $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$. Obliczamy $1^5, 2^5, 3^5, \ldots, 9^5$ i okazuje się, że faktycznie ta podzielność zachodzi. (podzielność wynika też łatwo z małego

twierdzenia Fermata).
Wiemy, że

$$10|x_1^5 - x_1,\ 10|x_2^5 - x_2,\ \dots,\ 10|x_n^5 - x_n$$
$$10|x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

stąd

$$10|(x_1^5 - x_1) + (x_2^5 - x_2) + \cdots + (x_n^5 - x_n) + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5$$

□

3. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia

$$f(x,y) = xy^2 + 2x(x-1)y + x^3 - 5x + 4,$$

gdzie y jest dowolną liczbą rzeczywistą, zaś x dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią.

Rozwiązanie

Zauważmy, że rozważane wyrażenie jest, ze względu na y, trójmianem kwadratowym

$$ay^2 + by + c$$

gdzie $a = x,\ b = 2x(x-1),\ c = x^3 - 5x + 4$.
Z przedstawienia trójmianu w postaci kanonicznej

$$ay^2 + by + c = a\left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

wynika, że jego wartość jest niemniejsza od wartości wyrażenia $-\frac{\Delta}{4a}$.
Obliczamy $-\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(2x(x-1))^2 - 4x(x^3 - 5x + 4)}{4x} = 2(x^2 - 3x + 2)$, a to wyrażenie jest znowu funkcją kwadratową, przyjmuje ono najmniejszą wartość dla $x = \frac{1}{2}$; ta wartość to $-\frac{1}{2}$.
Dla $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2\cdot\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ trójmian przyjmuje wartość $-\frac{1}{2}$, więc najmniejsza wartość tego wyrażenia to $-\frac{1}{2}$.

□

4. Sześcian **S** o krawędzi długości n (gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną) podzielono na n^3 małych sześcianów o krawędzi długości 1. Na ile sposobów można wybrać n małych sześcianów, tak aby środki żadnych dwóch z wybranych sześcianów nie leżały na prostej równoległej do którejkolwiek ściany sześcianu **S**?

Rozwiązanie

Wprowadźmy standardowy trójwymiarowy układ współrzędnych, który przyporządkowuje każdemu środkowi małego sześcianiku 3 liczby całkowite ze zbioru $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Warunek „aby środki żadnych dwóch z wybranych sześcianów nie leżały na prostej równoległej do którejkolwiek ściany sześcianu **S**" jest równoważny temu, że dla każdych dwóch wybranych sześcianików ich współrzędne są różne tj. jeżeli mamy wybrane sześcianiki o środkach (a_1, b_1, c_1) i (a_2, b_2, c_2), to musi być

$$a_1 \neq a_2 \text{ i } b_1 \neq b_2 \text{ i } c_1 \neq c_2$$

Nie interesuje nas kolejność wybieranych sześcianików, umówmy się więc, że najpierw wybieramy sześcian o pierwszej współrzędnej 1, potem sześcian o współrzędnej 2, itd. a na końcu o współrzędnej n.

Drugą i trzecią współrzedną 1. wybieranego sześcianu możemy wybrać na $n \cdot n$ sposobów (każdą na n-sposobów, ze zbioru $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$), współrzedne drugiego sześcianu możemy wybrać na $(n-1)^2$ sposobow (nie możemy wybrać liczb wybranych przy pierwszym sześcianie), $\ldots$, n-tego sześcianu na 1^2 sposobów.
Łącznie możemy więc wybrać sześciany na $(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1)^2 = (n!)^2$ sposobów. $\square$

[jj i pg]