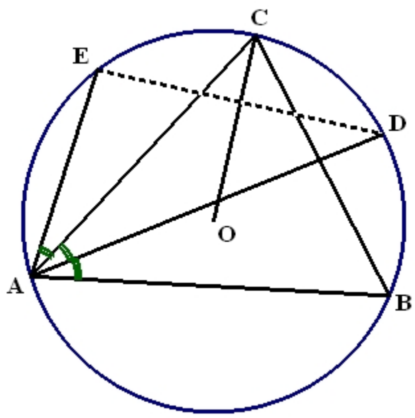
Konkurs Matematyczny
Politechniki Białostockiej - 2009
Klasy Drugie
Rozwiązania zadań konkursowych

30 maja 2009 r.

1. Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o środku O. Dwusieczna kąta $\measuredangle BAC$ przecina ten okrąg w punkcie D. Punkt E jest symetryczny do punktu D względem prostej OC. Jaka jest miara kąta $\measuredangle BAC$, jeśli wiadomo, że punkty B, O i E są współliniowe?

Rozwiązanie



Zauważmy, że punkt E leży na okręgu opisanym na $\triangle ABC$, na łuku AC. Jeżeli prosta AD jest dwusieczną kąta $\measuredangle BAC$, to

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$$

Punkty B, O i E są współliniowe, więc BE jest średnicą okręgu i $\measuredangle BAE = 90°$.
Punkt E jest odbiciem D względem OC, łuki CD i CE mają więc równe długości i

$$\measuredangle EAC = \measuredangle DAC = \frac{1}{2}\measuredangle BAC$$

Ostatecznie

$$\frac{3}{2}\measuredangle BAC = \measuredangle BAC + \measuredangle EAC = \measuredangle BAE = 90°$$

$$\measuredangle BAC = 60°$$

□

2. Niech $k > 2$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Ciąg liczbowy $x_1, x_2, \ldots$ określony jest warunkami: $x_1 = k$, $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ liczba

$$\frac{x_n^2 - 4}{k^2 - 4}$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Dla każdego naturalnego $n > 1$ zachodzi

$$\frac{x_{n+1}^2 - 4}{k^2 - 4} = \frac{(x_n^2 - 2)^2 - 4}{k^2 - 4} = x_n^2 \cdot \frac{x_n^2 - 4}{k^2 - 4}$$

Zauważmy, że ostatni ułamek jest wyrażeniem podobnym do początkowego, możemy je analogicznie rozwijać dalej, dopóki nie dojdziemy do pierwszego wyrazu:

$$\frac{x_{n+1}^2 - 4}{k^2 - 4} = x_n^2 \frac{x_n^2 - 4}{k^2 - 4} = (x_n x_{n-1})^2 \frac{x_{n-1}^2 - 4}{k^2 - 4} = \cdots = (x_n x_{n-1} \ldots x_1)^2 \frac{x_1^2 - 4}{k^2 - 4} = (x_n x_{n-1} \ldots x_1)^2$$

Liczby z ciągu (x_n) są naturalne, teza jest więc dowiedziona. □

3. Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należących do przedziału $[0, 2]$ zachodzą nierówności

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant 2.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że jeżeli przyjmiemy $f(x) = x^2 - x$, to

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Obliczmy najmniejszą i największą wartość funkcji f na przedziale $[0, 2]$. Funkcja f jest funkcją kwadratową, jest ona malejąca na $[0, \frac{1}{2}]$ i rosnąca na $[\frac{1}{2}, 2]$, więc najmniejszą wartość przyjmuje w punkcie $\frac{1}{2}$, a największą na którymś z krańców przedziału $[0, 2]$:

$$-\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) \leq f(x) \leq \max(f(0), f(2)) = f(2) = 2$$

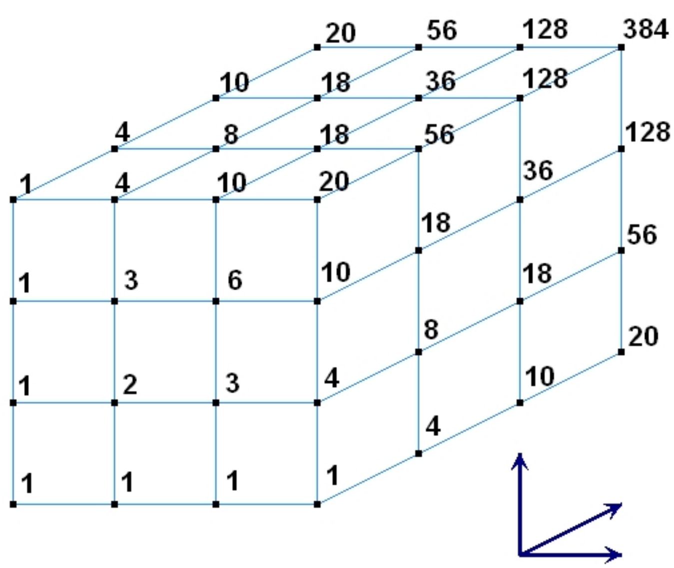
Stąd można oszacować

$$-\frac{1}{4} = \frac{-\frac{1}{4}n}{n} \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq \frac{2n}{n} = 2.$$

$\square$

4. Ściany sześcianu o krawędzi długości 3 podzielono na kwadraty o boku długości 1. Wyznaczyć liczbę najkrótszych łamanych, które zbudowane są z boków tych kwadratów i łączą dwa przeciwległe (czyli najbardziej odległe od siebie) wierzchołki sześcianu.

Rozwiązanie I



Po sześcianie możemy się poruszać w 3 kierunkach (patrz rysunek), które będę umownie nazywać *w górę, w prawo, w głąb*. Żeby dojść z punktu *startowego* S w lewym dolnym rogu do *końcowego* T w prawym górnym najkrótszą drogą musimy po 3 razy pójść w górę, w prawo i w głąb.

Liczbę najkrótszych łamanych, prowadzących z wierzchołka startowego obliczamy dla każdego punktu na bokach małych kwadratów. Najpierw stwierdzamy, że do któregokolwiek punktu z trzech krawędzi wychodzących z wierzchołka startowego S można dojść na dokładnie jeden sposób.

Dla każdego następnego punktu A obliczamy ilość łamanych jako sumę ilości łamanych dla trzech punktów: takiego, że można z niego dojść do A idąc jednokrotnie w górę, w prawo i w głąb (o ile punkty te należą do ścian). Np. liczba 18 na prawej bocznej ścianie powstaje przez dodanie do siebie liczb 10 i 8. *Uwaga*: część liczb leży na niewidocznych na rysunku ścianach, ale sumujemy je np. obliczając dwie z trzech liczb 128.

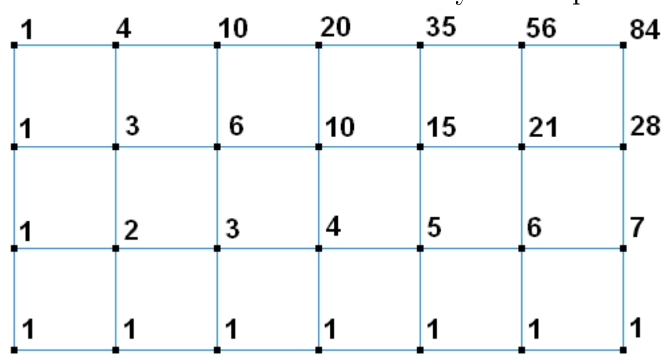
Obliczając dochodzimy do wyniku 384.

□

Rozwiązanie II [oparte na pomyśle Aleksandry Baranowskiej]

Lemat 1. *Łamanych długości $n+m$, łączących przeciwległe wierzchołki prostokąta o wymiarach $n \times m$ jest* $\displaystyle\binom{n+m}{n}$.

Dowód lematu: Dowolna taka łamana składa się z n odcinków równoległych do jednego boku prostokąta i m równoległych do drugiego. Wybór łamanej odpowiada więc wyborowi n odcinków, równoleglych do jednego boku, sposród $n+m$ kolejnych odcinków łamanej. Łamanych jest $\binom{n+m}{n}$.
Rozwiązanie: Załóżmy ogólniej, że sześcian ma krawędź długości n, a nie 3.
Zauważmy, że idąc najkrótszą drogą z jednego wierzchołka do przeciwległego idziemy po dokładnie dwóch ścianach. Zobaczmy na ile sposobów możemy tak przejść dla danej pary ścian.



Możemy to obliczyć jak na rysunku dla $n=3$, jednak z lematu wynika wprost, że łamanych jest $\binom{3n}{n}$. Możemy wybrać 6 par ścian, po których idziemy, łącznie uzyskaliśmy więc $6\binom{3n}{n}$ łamanych.

Czy jednak nie policzyliśmy niektórych łamanych dwukrotnie? Otóż tak. Jeżeli łamana zawiera krawędź dużego sześcianu, wychodzącą z S lub z T, jest liczona dwukrotnie, a jeżeli zawiera ona krawędź wychodzącą z S *i* krawędź wychodzącą z T, to nawet trzykrotnie. Są to na szczęście jedyne przypadki szczególne, pozostałe łamane liczymy dokładnie raz.
Tych „złych" łamanych jest łącznie tyle, ile

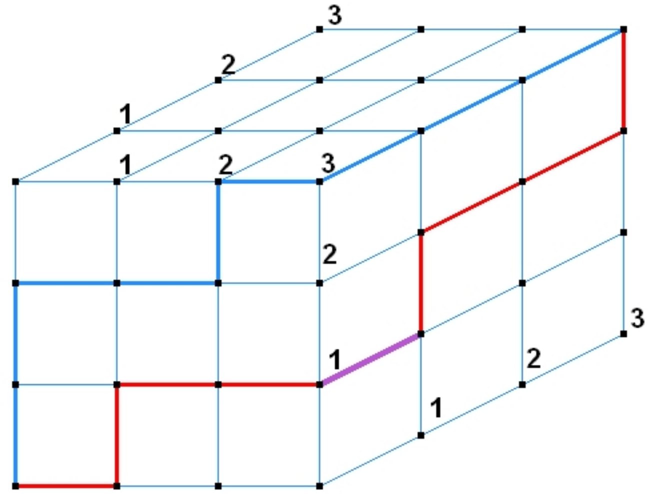
- wyborów krawędzi wychodzącej z S i potem łamanych idących po jednej ścianie od wierzchołka do przeciwległego wierzchołka.
- wyborów krawędzi wchodzącej do T i łamanej idącej po ścianie do tej krawędzi.

Zauważmy, że łamane policzone wcześniej trzykrotnie liczymy tutaj dwukrotnie.
Z lematu wynika, że po ścianie od jednego wierzchołka do przeciwległego można dojść na $\binom{2n}{n}$ sposobów, łącznie więc „złych" dróg jest $6\binom{2n}{n}$.
Odpowiedź: Łamanych jest $6\left(\displaystyle\binom{3n}{n} - \binom{2n}{n}\right)$.

□

Rozwiązanie III [oparte na pomyśle Mateusza Jocza]

Rozpatrzmy ogólny przypadek sześcianu o krawędzi n.
Ustalmy dwa przeciwległe wierzchołki sześcianu S, T i rozważmy łamaną zbudowaną z krawędzi niezawierających tych wierzchołków. Oznaczmy na tej łamanej punkty odległe o $n+i$ od S lub T przez i, dla $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Zauważmy, że łamane łączące S i T możemy podzielić na n rozłącznych klas:



- klasa n: przechodzące przez któryś z punktów oznaczonych przez n,
- klasa $n-1$: przechodzące przez któryś z punktów oznaczonych przez $n-1$, ale nie przechodzące przez punkty oznaczone n,
- klasa $n-2$: przechodzące przez któryś z punktów oznaczonych przez $n-2$, ale nie przechodzące przez punkty oznaczone $n-1$ lub n,
- ...
- klasa 1: przechodzące przez punkty oznaczone przez 1, ale nieprzechodzące przez punkty oznaczone $2, 3, \ldots, n$.

Na rysunku na niebiesko zaznaczona jest łamana klasy 3, a na czerwono łamana klasy 1. Na fioletowo zaznaczone jest miejsce, w którym ta łamana musi pójść w bok.
Obliczymy liczbę łamanych w każdej z klas.
Są 3 punkty oznaczone przez n, oraz po 6 punktów oznaczonych $n-1, n-2, \ldots, 2$.
Zauważmy, że łamana należąca do klasy i przechodzi przez dokładnie jeden punkt oznaczony i.
Łamana klasy i łączy na jednej ścianie przeciwległe wierzchołki prostokąta $n \times i$, a na drugiej ścianie przeciwległe wierzchołki prostokąta $n-1 \times n-i$ (nie $n \times n-i$, bo łamana nie może iść po krawędzi). Dla $i < n$ łamanych jest więc

$$6\binom{n+i}{n}\binom{2n-i-1}{n-1}$$

a dla $i = n$ jest ich

$$3\binom{n+n}{n}\binom{n}{n} = 3\binom{2n}{n}$$

Łącznie łamanych jest więc

$$6\left(\binom{n+1}{n}\binom{2n-2}{n-1} + \binom{n+2}{n}\binom{2n-3}{n-1} + \cdots + \binom{2n-1}{n}\binom{n}{n-1}\right) + 3\binom{2n}{n}$$

W szczególności dla $n = 3$ otrzymujemy odpowiedź

$$6\left(\binom{4}{3}\binom{4}{2} + \binom{5}{3}\binom{3}{2}\right) + 3\binom{6}{3} = 384$$

$\square$

[jj i pg]