



XVI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Zadania konkursowe - klasy drugie

9 marca 2024 r.

1. Liczby dodatnie a , b i c są długościami boków pewnego trójkąta. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geq 1$ istnieje trójkąt o bokach długości $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ i $\sqrt[n]{c}$.

2. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D leży na jego boku BC , punkt E leży na jego boku AC , zaś punkt F leży na jego boku AB . Ponadto na każdym z czworokątów $ABDE$, $BCEF$, $ACDF$ można opisać okrąg. Pokaż, że odcinki AD , BE , CF są wysokościami trójkąta ABC .

3. Dla dowolnych danych liczb całkowitych $n, m \geq 2$, wyznacz wszystkie rozwiązania całkowite x równania

$$2^n - 1 = x^m.$$

4. Na płaszczyźnie dany jest ciąg kwadratów $K_0, K_1, \dots, K_{2024}$ zbudowany w następujący sposób:

- wszystkie kwadraty mają wspólny wierzchołek A ,
- jednym z boków kwadratu K_{i+1} jest przekątna kwadratu K_i przechodząca przez wierzchołek A . Zachodzi to dla każdego $i = 0, \dots, 2023$.
- kwadrat K_{i+2} nie zawiera kwadratu K_i . Zachodzi to dla każdego $i = 0, \dots, 2022$.

Kwadrat K_0 ma bok długości 1. Oblicz pole figury, która jest sumą wszystkich tych kwadratów.

Informacje dla uczestnika konkursu

1. Czas trwania konkursu: 240 minut (4 godziny).
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania zadań należy przepisać tekst każdego zadania na oddzielnym arkuszu.
3. Należy pisać wyłącznie na papierze dostarczonym przez organizatorów. Na jednym arkuszu nie należy zamieszczać rozwiązań różnych zadań.
4. W czasie zawodów nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych.
5. Lista nagrodzonych w konkursie zostanie ogłoszona na stronie konkurs.wi.pb.edu.pl do 12 marca 2024 r.
6. W tym roku tradycyjnego zakończenia konkursu nie przewidujemy; nagrody zostaną dostarczone do szkół.