XVI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, JUNIORZY

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

Liczby rzeczywiste a i b są takie, że $-1 \leqslant a^2 + b^3 \leqslant 1$. Czy może się zdarzyć, że $a^3 + b^2 > 2024$?

Rozwiązanie.

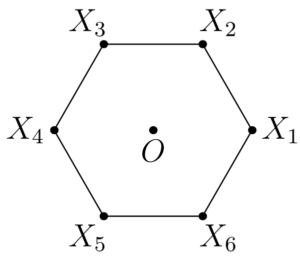
Może się tak zdarzyć. Niech c będzie dowolną dodatnią liczbą taką, że $c^9 + c^4 > 2024$. Na przykład można wziąć $c = 10$. Weźmy $a = c^3$ oraz $b = -c^2$. Wtedy $a^2 + b^3 = c^6 - c^6 = 0$ oraz $a^3 + b^2 = c^9 + c^4 > 2024$.

Zadanie 2

Trzy różne wierzchołki A, B, C sześciokąta foremnego wybrano w ten sposób, że trójkąt ABC jest ostrokątny. Oblicz miary kątów tego trójkąta. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Oznaczmy kolejne wierzchołki sześciokąta przez X_1, X_2, $\ldots$, X_6. Sześciokąt ten jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O, który jest środkiem sześciokąta. Każdy z sześciu kątów



$$\sphericalangle X_1OX_2,\ \sphericalangle X_2OX_3,\ \sphericalangle X_3OX_4,\ \sphericalangle X_4OX_5,\ \sphericalangle X_5OX_6,\ \sphericalangle X_60X_1$$

ma miarę 60°. Wobec tego każdy z kątów $\sphericalangle X_iOX_j$ ma miarę będącą wielokrotnością 60°.
Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym, wynika stąd, że każdy z kątów $\sphericalangle X_iX_kX_j$ ma miarę będą wielokrotnością 30°. W szczególności, każdy z kątów trójkąta ABC ma miarę będącą wielokrotnością 30°. Z założenia, żaden z tych kątów nie ma 90° lub więcej, więc każdy ma co najwyżej 60°. Kąty te są trzy i sumują się do $180^\circ = 3 \cdot 60^\circ$, więc każdy z nich ma dokładnie 60°.

Zadanie 3

Liczba naturalna n spełnia $n \geqslant 3$. Ponadto wiemy, że jedna z liczb $2^n - 1$, $2^n + 1$ jest pierwsza. Uzasadnij, że druga z tych liczb jest złożona.

Rozwiązanie.

Załóżmy przeciwnie, że obie liczby $2^n - 1$, $2^n + 1$ są pierwsze. Obie te liczby są większe od 3, zatem żadna z nich nie dzieli się przez 3. Również liczba 2^n nie dzieli się przez 3. Wśród każdych kolejnych trzech liczb naturalnych jest liczba podzielna przez 3. Powyżej doszliśmy do sytuacji, że żadna z liczb $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ nie jest podzielna przez 3. Jest to sprzeczność, która kończy rozwiązanie.