XIV Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

ETAP KORESPONDENCYJNY, JUNIORZY

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n > 2$ co najmniej jedna z liczb $2^n - 1$, $2^n + 1$ nie jest liczbą pierwszą.

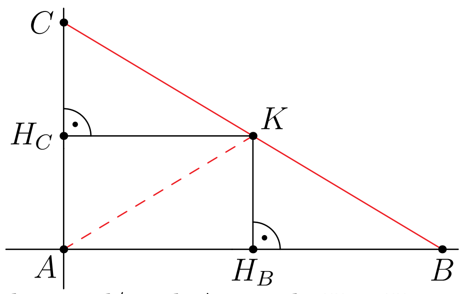
Rozwiązanie.

Liczby $2^n - 1$, 2^n, $2^n + 1$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, więc jedna z nich jest podzielna przez 3. Liczba 2^n nie jest podzielna przez 3, więc $2^n - 1$ lub $2^n + 1$ jest podzielna przez 3. Żadna z nich nie jest równa 3, bowiem $n > 2$. To pokazuje, że ta z nich, która jest podzielna przez 3, nie jest pierwsza.

Zadanie 2

Ściana jest prostopadła do podłogi, a drabina jest o nią oparta. Kot siedzi na środku drabiny, która pod jego ciężarem osuwa się po ścianie. Po jakiej krzywej porusza się kot?

Rozwiązanie.



Oznaczmy przez A narożnik ściany, zaś przez C i B punkty oparcia drabiny o ścianę i podłogę. Wreszcie oznaczmy przez K kota, jak na rysunku (czerwony odcinek to drabina). Oznaczmy przez d długość drabiny.
Trójkąt ABC jest prostokątny, zatem $|AK| = |BK| = \frac{d}{2}$. To pokazuje, że odległość kota od A nie zależy od położenia drabiny.

Z drugiej strony, niech K będzie dowolnym punktem odległym o $d/2$ od A i niech H_C, H_B będą jego rzutami na ścianę i podłogę. Niech B i C będą odbiciami A względem KH_B i KH_C. Wtedy punkt K jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym ABC, więc punkt K jest środkiem odcinka BC, który ma długość d. To pokazuje, że kot porusza się dokładnie po ćwiartce okręgu o środku w A i promieniu $d/2$, ograniczonej przez ścianę i podłogę.

Zadanie 3

Znajdź wszystkie pary liczb rzeczywistych $a, b \geqslant 2$ takie, że wszystkie trzy liczby

$$a + b, \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad ab$$

są całkowite.

Rozwiązanie.

Skoro $a \geqslant 2$, to $0 < 1/a \leqslant 1/2$. Podobnie $0 < 1/b \leqslant 1/2$. Łącznie wiemy, że

$$0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Skoro liczba $1/a + 1/b$ jest całkowita, to znaczy, że powyżej zachodzi równość, czyli również $1/a = 1/2$ i $1/b = 1/2$, zatem $a = b = 2$. Sprawdzamy, że faktycznie para $(a, b) = (2, 2)$ spełnia warunki zadania.

Zadanie 4

Boki trójkąta (mierzone w metrach) mają długości całkowite. Żadne dwie z tych długości nie są równe, a każdą z nich można zapisać używając jedynie zer i jedynek. Jaki jest minimalny obwód trójkąta o tych własnościach?

Rozwiązanie.

Rozważmy dowolny trójkąt o bokach jak w zadaniu, oznaczmy ich długości (mierzone w metrach) przez a, b, c, przy czym $a < b < c$. Z nierówności trójkąta wynika, że $a + b > c$. Skoro $b \leqslant c - 1$, to nie może zachodzić $a \leqslant 1$, zatem $a \geqslant 10$. Są tylko dwie liczby dwucyfrowe dające się zapisać cyframi 0 i 1, a mianowicie 10 i 11. Jeśli $a = 10$ i $b = 11$, to otrzymujemy sprzeczność, bowiem $c > 11$ i $c < 21$. To znaczy, że $b \geqslant 100$ i stąd $c \geqslant 101$.

Łącznie dowiedliśmy, że $a \geqslant 10$, $b \geqslant 100$ i $c \geqslant 101$, zatem $a+b+c \geqslant 211$. Faktycznie, trójkąt o bokach $10m$, $100m$ i $101m$ istnieje, zatem minimalny obwód wynosi dokładnie $211m$.