XI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - juniorzy

13 kwietnia 2019 r.

1. Pewne cztery spośród wierzchołków n-kąta foremnego tworzą równoległobok. Dla których n może się to zdarzyć? Odpowiedź dokładnie uzasadnij.
Rozwiązanie.

Zauważmy, że n-kąt foremny można wpisać w okrąg. Jeśli czworokąt jest wpisany w okrąg, to jest przeciwległe kąty sumują się do $180°$. Jeśli czworokąt jest równoległobokiem, to jego przeciwległe kąty są równe. Zatem jeśli równoległobok jest wpisany w okrąg to jego wszystkie kąty są równe $90°$, czyli jest on prostokątem. Tym samym zadanie sprowadza się do znalezienia tych n dla których pewne cztery wierzchołki tworzą prostokąt.

Jeśli n jest parzyste, to takie wierzchołki istnieją. Mianowicie niech $n = 2k$ i ponumerujemy wierzchołki A_1, A_2, $\ldots$,A_n. Wtedy odcinki A_1A_{k+1} i A_2A_{k+2} są średnicami okręgu opisanego, więc wierzchołki A_1, A_2, A_{k+1}, A_{k+2} tworzą prostokąt.

Załóżmy odwrotnie: że n jest takie, że pewne cztery wierzchołki X,Y,Z,T n-kąta foremnego tworzą prostokąt. Wtedy $\sphericalangle XYZ = 90°$, więc XZ jest średnicą okręgu opisanego na n-kącie foremnym. Niech O oznacza środek okręgu opisanego na tym n-kącie. Wtedy $\sphericalangle XOZ = 180°$. Z drugiej strony, kąt XOZ jest wielokrotnością kąta $\frac{360°}{n}$. Zatem istnieje liczba naturalna a taka

$$a \cdot \frac{360°}{n} = 180°.$$

Z tego równania wynika, że $n = 2a$ jest liczbą parzystą.
Odpowiedź: Opisana w zadaniu sytuacja zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste.

2. Liczby 1, 2, $\ldots$, 8, 9 dzielimy na trzy grupy, po trzy liczby w każdej grupie, a następnie wyznaczamy iloczyny liczb w każdej grupie. Pokaż, że jeden z tych iloczynów jest równy co najmniej 72.
Rozwiązanie.

Zauważmy, że

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 = (2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 4 \cdot 6) \cdot (1 \cdot 8 \cdot 9) = 70 \cdot 72 \cdot 72 > 70^3.$$

Gdyby iloczyn liczb w każdej grupie, na które dzielimy, wynosił co najwyżej 70, to iloczyn wszystkich liczb wynosiłby co najwyżej 70^3, sprzeczność. Zatem istnieje grupa G, której iloczyn wynosi więcej niż 70. Iloczyn ten nie może być równy 71, bo 71 jest liczbą pierwszą, więc nie dzieli $9!$. Zatem iloczyn elementów grupy G wynosi co najmniej 72.

3. Dany jest trójkąt ABC. Wyznacz taki punkt X na prostej AC, że suma długości promieni okręgów opisanych na trójkątach ABX i BCX jest najmniejsza. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Niech R_A, R_C oznaczają promienie okręgów opisanych na trójkątach ABX, BCX odpowiednio. Odcinek AB jest cięciwą w okręgu o średnicy długości $2R_A$, więc $|AB| \leqslant 2R_A$, czyli $R_A \geqslant |AB|/2$. Podobnie, $R_C \geqslant |BC|/2$. Zatem dla dowolnego punktu X zachodzi nierówność

$$R_A + R_B \geqslant \frac{|AB| + |BC|}{2}. \qquad (1)$$

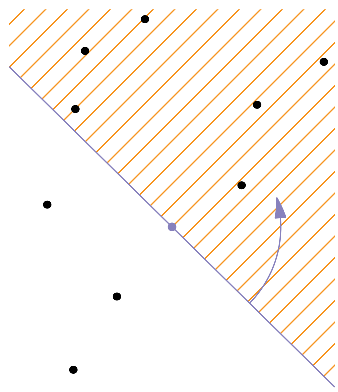
Niech H będzie spodkiem wysokości opuszczonej z B na prostą AC. Wtedy $\sphericalangle BHC = \sphericalangle BHA = 90°$. W trójkątach prostokątnych BHC, BHA boki BC, BA są średnicami, więc dla $X = H$ mamy $R_A + R_B = \frac{|AB|+|BC|}{2}$. Z nierówności (1) wynika, że jest to najmniejsza możliwa wartość.

Odpowiedź: Szukanym punktem jest spodek wysokości opuszczonej z B na prostą AC.

4. Na prostokątnej działce rośnie 2020 palm. Na działce znajduje się również małe jeziorko i prosty kanał, który przechodzi przez jeziorko i dzieli działkę na dwie części. Na jednej z tych części rośnie 1000 palm, zaś na drugiej 1020. Ponadto żadne dwie palmy nie rosną w jednej linii z jeziorkiem. Właściciel działki chce zakopać istniejący kanał i wykopać nowy prosty kanał przez jeziorko tak, by po obu stronach rosło tyle samo palm. Udowodnij, że jest to możliwe.

Uwaga: zakładamy, że palmy i jeziorko są punktami, zaś kanały, zarówno istniejący jak i planowany, są prostymi.

Rozwiązanie.



Zaznaczmy część działki, na której rośnie 1020 palm i zastanówmy się, jak będzie się zmieniała liczba palm w zaznaczonej częsci, gdy będziemy zmieniać położenie kanału, obracając go wokół jeziorka, tak jak pokazane na rysunku.

Skoro żadne dwie palmy nie rosną w jednej linii z jeziorkiem, to liczba palm będzie się zmieniać (zwiększać lub zmniejszać) o dokładnie jeden, w zależności od tego, czy palma przechodzi z niezaznaczonej części do zaznaczonej, czy odwrotnie.

Po dokonaniu obrotu o 180° część zaznaczona będzie odpowiadać niezaznaczonej części rysunku, więc liczba palm w niej wyniesie 1000. Skoro ta liczba zmieniała się zawsze o jeden, to musiała przyjąć wszystkie wartości ze zbioru $\{1000, 1001, 1002, \ldots, 1020\}$. W szczególności istnieje taki obrót kanału, dla którego liczba palm w zaznaczonej części wynosi dokładnie $1010 = \frac{2020}{2}$.

[pg, jj]