XI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy pierwsze

13 kwietnia 2019 r.

1. Znajdź wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$ takie, że liczba $n^6 - 1$ ma dokładnie dwa dzielniki pierwsze. Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie.

Zauważmy, że dla $n = 2$ liczba $n^6 - 1 = 63$ faktycznie ma dwa dzielniki pierwsze. W dalszym ciągu zakładamy, że $n > 2$, czyli $n-1 > 1$. Ze wzorów skróconego mnożenia wynika, że

$$n^6 - 1 = (n^3 - 1)(n^3 + 1) = (n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1).$$

Przed przystąpieniem do rozwiązania obliczmy największe wspólne dzielniki liczb $n-1$, $n+1$, n^2-n+1, n^2+n+1. Mamy $n^2-n+1 = n(n-1)+1$, więc $\mathrm{NWD}(n-1, n^2-n+1) = 1$. Podobnie, $\mathrm{NWD}(n + 1, n^2 + n + 1) = \mathrm{NWD}(n + 1, n(n + 1) + 1) = 1$. Ponadto

$$\mathrm{NWD}(n - 1, n^2 + n + 1) = \mathrm{NWD}(n - 1, (n - 1)(n + 2) + 3) = \mathrm{NWD}(n - 1, 3), \quad (1)$$

co jest równe 3 jeśli $3 \mid n - 1$ lub 1 w pozostałych przypadkach. Podobnie zachodzi

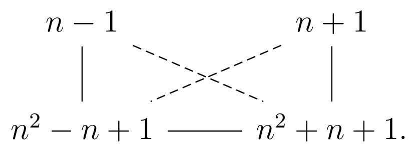
$$\mathrm{NWD}(n + 1, n^2 - n + 1) = \mathrm{NWD}(n + 1, (n + 1)(n - 2) + 3) = \mathrm{NWD}(n + 1, 3) \quad (2)$$

co jest równe 3 jeśli $3 \mid n + 1$ lub 1 w pozostałych przypadkach.

Liczba $n^2 - n = n(n - 1)$ jest iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych, więc jest parzysta. Zatem $n^2 - n + 1$ jest nieparzysta, czyli względnie pierwsza z 2. Jest ona także względnie pierwsza z n, czyli jest ona względnie pierwsza z $2n$. Wobec tego

$$\mathrm{NWD}(n^2+n+1, n^2-n+1) = \mathrm{NWD}(n^2+n+1-(n^2-n+1), n^2-n+1) = \mathrm{NWD}(2n, n^2-n+1) = 1.$$

Możemy podsumować informacje o największych wspólnych dzielnikach na poniższym diagramie, gdzie odcinki łączą liczby względnie pierwsze, a odcinki przerywane łączą liczby, których największym wspólnym dzielnikiem jest 1 lub 3.



Jeśli 3 nie dzieli $n - 1$ to liczby $n - 1$, $n^2 - n + 1$, $n^2 + n + 1$ są parami względnie pierwsze i większe niż jeden, więc każda z nich ma co najmniej jeden dzielnik pierwszy i żadne dwie nie mają tego samego dzielnika. To znaczy, że $n^6 - 1$ ma co najmniej trzy dzielniki pierwsze. Jeśli 3 nie dzieli $n+1$ to liczby $n+1$, n^2-n+1, n^2+n+1 są parami względnie pierwsze i rozumujemy jak poprzednio. Pozostaje przypadek, gdy 3 dzieli zarówno $n-1$ jak $n+1$. Ale wtedy 3 dzieli $(n+1)-(n-1)=2$, co jest niemożliwe. Ostatecznie otrzymujemy, że *jedyną liczbą n spełniającą warunki zadania jest $n=2$.*

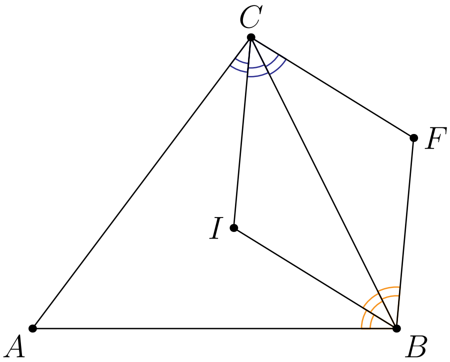
2. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC. Odbicia punktu I względem prostych AB, BC, CA leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Oblicz miary kątów trójkąta ABC. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie, pierwszy sposób

Niech I_{AB}, I_{BC}, I_{CA} oznaczają odbicia I względem prostych AB, BC, CA odpowiednio. Niech r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Długość $|II_{AB}|$ jest dwukrotnie większa niż odległość I od boku AB, czyli $|II_{AB}|=2r$. Podobnie $|II_{BC}|=2r$ i $|II_{CA}|=2r$, czyli punkt I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $I_{AB}I_{BC}I_{CA}$. Ale okrąg opisany na tym trójkącie to z założenia okrąg opisany na trójkącie ABC! Zatem I jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.

W szczególności wynika stąd, że $|IA|=|II_{AB}|=2r$. Oznaczmy przez F rzut I na AB. Wtedy $|IF|=r$ oraz $|IA|=2r$. Trójkąt prostokątny IFA ma boki długości $r, 2r, \sqrt{3}r$, więc kąt $\sphericalangle IAF=\sphericalangle IAB$ ma miarę $30°$. Podobnie dowodzimy, że $\sphericalangle IAC=30°$, więc $\sphericalangle BAC=60°$. Analogicznie sprawdzamy, że $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BCA=60°$, zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

Rozwiązanie, drugi sposób



Oznaczmy przez α, β, γ miary kątów BAC, ABC, BCA trójkąta ABC. Niech F będzie odbiciem punktu I względem prostej BC. Wtedy $\sphericalangle FCB=\sphericalangle ICB=\frac{\gamma}{2}$ oraz $\sphericalangle FBC=\sphericalangle IBC=\frac{\beta}{2}$. Wobec tego

$$\sphericalangle BFC+\sphericalangle BAC=180°-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}+\alpha.$$

Jeśli punkty A, B, C, F leżą na jednym okręgu, to lewa strona równania wynosi $180°$, więc $\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}$.
Rozważając odbicia punktu I względem pozostałych boków, otrzymujemy dwa inne równania, a więc łącznie układ równań

$$\begin{cases}\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}\\ \beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}\\ \gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}\end{cases}$$

Rozwiązujemy go i stwierdzamy, że $\alpha=\beta=\gamma$. Zatem trójkąt ABC jest równoboczny.

3. Znajdź wszystkie liczby naturalne x, y, z takie, że liczby

$$\frac{x^y}{y^z},\qquad \frac{y^z}{z^x},\qquad \frac{z^x}{x^y}$$

są także naturalne. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Jeśli $x=y=z$ to warunki zadania są spełnione. Pokażemy, że nie ma innych rozwiązań. Wybierzmy dowolne liczby naturalne x, y, z spełniające warunki zadania.

Zauważmy, że
$$\frac{x^y}{y^z} \cdot \frac{y^z}{z^x} \cdot \frac{z^x}{x^y} = 1.$$
Liczby $\frac{x^y}{y^z}, \frac{y^z}{z^x}, \frac{z^x}{x^y}$ są naturalne i ich iloczyn jest jedynką, więc wszystkie są równe 1, a zatem
$$x^y = y^z = z^x. \tag{3}$$
Zanim przejdziemy dalej, przypomnijmy ogólny fakt: jeśli a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $a \geqslant b$, to zachodzi $a^c \geqslant b^c$. Dodatkowo, jeśli zachodzi równość $a^c = b^c$, to $a = b$. Wracamy do rozwiązania. Ewentualnie dokonując zamiany cyklicznej $x \mapsto y$, $y \mapsto z$, $z \mapsto x$ możemy założyć, że $x = \max(x, y, z)$. Rozważmy dwa przypadki:

1. Przypadek pierwszy: $z = \min(x, y, z)$. Wtedy $z \leqslant y$ i $y \leqslant x$, więc $x^y \geqslant x^z \geqslant y^z$. Z równania (3) wynika, że $x^y = y^z$. Łącząc to z powyższą nierównością mamy $x^y = x^z = y^z$. Z równości $x^z = y^z$ wynika $x = y$. Po podstawieniu tego do (3) otrzymujemy $x^x = x^y = z^x$. Stąd $x = z$. Łącznie dowiedliśmy, że $x = y = z$.

2. Przypadek drugi: $y = \min(x, y, z)$. Wtedy $z^x \geqslant z^z \geqslant y^z$. Z równania (3) wynika, że $z^x = z^z = y^z$. Zatem $y = z$. Ale wtedy, ponownie korzystając z równania (3), otrzymujemy $x^y = y^y$, a więc $x = y$. Łącznie pokazaliśmy, że $x = y = z$.

Odpowiedź: warunki zadania spełniają dokładnie te trójki (x, y, z) dla których zachodzi $x = y = z$.

4. Na płaszczyźnie zaznaczono $n \geqslant 4$ punktów. Gdy policzono wszystkie trójkąty o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, okazało się, że tych trójkątów jest mniej niż $\frac{n(n-1)}{2}$. Pokaż, że pewne $n-2$ punkty spośród zaznaczonych leżą na jednej prostej.
Rozwiązanie.

Oznaczmy przez d liczbę par: trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach i jego bok. Każdy trójkąt ma trzy boki, więc $d < 3\frac{n(n-1)}{2}$. Jest $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ par zaznaczonych punktów. Wobec tego istnieje para punktów (A, B), taka, że AB jest bokiem co najwyżej $d/\binom{n}{2}$ trójkątów. Ale
$$\frac{d}{\binom{n}{2}} < \frac{3\frac{n(n-1)}{2}}{\binom{n}{2}} = 3$$
Zatem AB jest bokiem co najwyżej dwóch trójkątów. Dowolny zaznaczony punkt nie leżący na prostej AB tworzy wraz z A, B trójkąt o boku AB. Skoro są co najwyżej dwa takie trójkąty, to co najwyżej dwa zaznaczone punkty leżą poza prostą AB. Zatem $n-2$ punkty leżą na tej prostej, co kończy dowód.

[*pg, jj*]