X Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

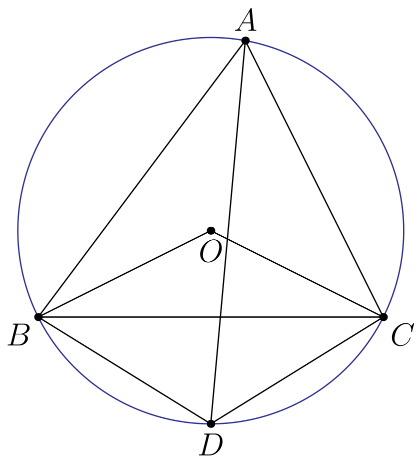
Rozwiązania - klasy drugie

28 kwietnia 2018 r.

1. Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg o środku w punkcie O. Niech dwusieczna kąta BAC przecina ten okrąg w punkcie D ($D \neq A$). Podaj warunek konieczny i wystarczający na to, by czworokąt $OBDC$ był rombem.

Rozwiązanie.

Niech α oznacza miarę kąta BAC. Wtedy kąt środkowy BOC ma miarę 2α. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc kąt BDC ma miarę $180^\circ - \alpha$. Pokażemy, że



Czworokąt $OBDC$ jest rombem wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = 60^\circ$.

Załóżmy, że $OBDC$ jest rombem. Wtedy BOC i BDC są przeciwległymi kątami rombu, więc mają tę samą miarę. Wobec tego $180^\circ - \alpha = 2\alpha$, czyli $\alpha = 60^\circ$. To dowodzi implikacji „tylko wtedy”.

Załóżmy, teraz że $\alpha = 60^\circ$. Jak powyżej, obliczamy, że $\sphericalangle BOC = \sphericalangle BDC = 120^\circ$. Zauważmy też, że $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CBD = \alpha/2 = 30^\circ$ z własności kątów wpisanych. Wobec tego trójkąt BDC jest równoramienny. Odcinki BO i CO są promieniami okręgu opisanego, więc $BO = CO$ i trójkąt BOC jest także równoramienny. Trójkąty BOC i BDC są równoramienne i mają tę samą miarę kąta pomiędzy ramionami, więc są podobne. Mają one wspólny bok, więc są przystające. Zatem $CO = BO = BD = CD$, czyli $OBDC$ jest rombem.

2. Niech $f(n)$ będzie liczbą sposobów, na które można ustawić liczby $\{1, 2, \ldots, n\}$ w ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, by $a_i + i$ było podzielne przez 4 dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$. Oblicz $f(2018)$ oraz $f(2019)$.

Rozwiązanie.

Zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ przestawmy w postaci sumy czterech rozłącznych podzbiorów A_0, A_1, A_2, A_3, gdzie A_i jest zbiorem liczb dających przy dzieleniu przez 4 resztę i. Oznaczmy przez n_i liczbę elementów zbioru A_i. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będzie ustawieniem liczb $1, 2, 3, \ldots, n$ takim, że $a_i + i$ jest podzielne przez 4 dla każdego $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Wówczas $i \in A_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \in A_0$ oraz dla $r = 1, 2, 3$ mamy $i \in A_r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i \in A_{4-r}$. W szczególności zbiory A_1 oraz A_3 musza mieć tyle samo elementów.

Zauważmy, że $n_1 = [\frac{n+3}{4}]$ oraz $n_3 = [\frac{n+1}{4}]$; tutaj $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x. Jeśli $[\frac{n+3}{4}] \neq [\frac{n+1}{4}]$, to nie istnieje żądane ustawienie, a więc wtedy $f(n) = 0$. Tak jest na przykład dla $n = 2018$, gdyż $[\frac{2018+1}{4}] = 504$, zaś $[\frac{2018+3}{4}] = 505$. Ostatecznie $f(2018) = 0$. Jeśli zaś $[\frac{n+3}{4}] = [\frac{n+1}{4}]$ to, żądane ustawienia powstają przez przyporządkowanie:

- elementom zbioru A_0 indeksów ze zbioru A_0,
- elementom zbioru A_1 indeksów ze zbioru A_3,
- elementom zbioru A_2 indeksów ze zbioru A_2,
- elementom zbioru A_3 indeksów ze zbioru A_1.

Każde z tych przyporządkowań można zrobić niezależnie odpowiednio na $n_0!$, $n_1!$, $n_2!$, $n_3!$ sposobów, czyli $f(n) = n_0!n_1!n_2!n_3!$. Ostatecznie

$$f(n) = \begin{cases} n_0!n_1!n_2!n_3!, & \text{gdy } n_1 = n_3 \\ 0, & \text{gdy } n_1 \neq n_3. \end{cases}$$

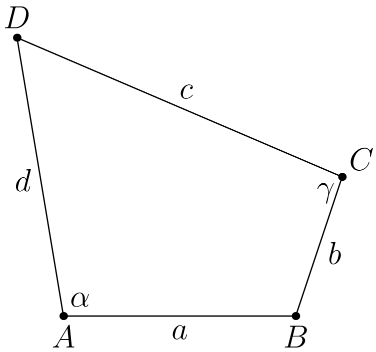
Dla $n = 2019$ mamy $n_0 = 504$, $n_1 = n_2 = n_3 = 505$, czyli $f(2019) = 504! \cdot (505!)^3$.

3. Dany jest czworokąt wypukły o polu S. Udowodnij, że suma pól kwadratów zbudowanych na bokach tego czworokąta jest większa lub równa $4S$. Kiedy zachodzi równość?

Rozwiązanie.

Niech a, b, c, d będą długościami kolejnych boków czworokąta, patrz rysunek. Skoro czworokąt jest wypukły, to jego pole jest sumą pól trójkątów ABD i BCD: $S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma$. Korzystając z nierówności $2xy \leqslant x^2 + y^2$ oraz $\sin\alpha, \sin\gamma \leqslant 1$ otrzymujemy

$$4S = 2ad\sin\alpha + 2bc\sin\gamma \leqslant 2ad + 2bc \leqslant a^2 + d^2 + b^2 + c^2.$$



W powyższych nierównościach zachodzi równość, gdy $\sin\alpha = \sin\gamma = 1$, $a = d$ oraz $b = c$. Wówczas $\alpha = \gamma = 90^\circ$ oraz czworokąt składa się z dwóch równoramiennych trójkątów prostokątnych, a więc jest kwadratem.

Uwaga: użyta nierówność $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ jest równoważna oczywistej nierówności $(x - y)^2 \geqslant 0$.

4. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, z spełniające równanie

$$x^2 + y^2 = z^k.$$

Sposób I

Jeżeli k jest nieparzyste, powiedzmy $k = 2l + 1$, to liczby $x = y = 2^l$ oraz $z = 2$ spełniają równanie z zadania. Załóżmy, że k jest parzyste, powiedzmy $k = 2l + 2$, gdzie l jest całkowite nieujemne. Wtedy liczby $x = 3 \cdot 5^l$, $y = 4 \cdot 5^l$ oraz $z = 5$ spełniają równanie, gdyż

$$x^2 + y^2 = 3^2 \cdot 5^{2l} + 4^2 \cdot 5^{2l} = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{2l} = 5^2 \cdot 5^{2l} = 5^{2l+2} = z^k.$$

Zatem dla każdego k całkowitego dodatniego istnieją liczby spełniające równanie.

Sposób II

Zauważmy, że zachodzi tożsamość

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \tag{1}$$

Oznaczmy przez $M \subset \mathbb{N}$ zbiór liczb całkowitych będących sumami kwadratów dwóch liczb całkowitych dodatnich. Ustalmy $z = a^2 + b^2$, gdzie $a > b > 0$ (uwaga: ważne, że liczby a, b są nierówne). Pokażemy, że $x \in M$ implikuje $xz \in M$.

Skoro $x \in M$, to $x = c^2 + d^2$ dla pewnych liczb całkowitych dodatnich. Załóżmy, że $c \geqslant d$. Wtedy $ac \geqslant ad > bd$, więc $ac - bd > 0$. Oczywiście $ad + bc > 0$. Z tożsamości (1) liczba xz jest równa $(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Skoro $ac - bd$ i $ad + bc$ są dodatnie, to $xz \in M$.

Skoro $z = a^2 + b^2$, to $z \in M$. Skoro $z \in M$, to $z \cdot z \in M$. Skoro $z \in M$ i $z^2 \in M$, to $z^2 \cdot z \in M$ i tak dalej; przez (trywialną) indukcję mamy $z^k \in M$ dla każdego k. To implikuje tezę.

Wybierając konkretne wartości a i b można podać konkretne przykłady x, y i z. Np. wybierzmy $a = 2$, $b = 1$. Wtedy $z = 5$. Mamy $z^2 = (2\cdot 1 + 1\cdot 2)^2 + (2\cdot 2 - 1\cdot 1)^2 = 4^2 + 3^2$, podobnie $z^3 = (4\cdot 1 + 3\cdot 2)^2 + (4\cdot 2 - 3\cdot 1)^2 = 10^2 + 5^2$, $z^4 = (10\cdot 1 + 5\cdot 2)^2 + (10\cdot 2 - 5\cdot 1)^2 = 20^2 + 15^2$ itd.

Uwaga: Nie *jest prawdą, że $x, y \in M$ implikuje $xy \in M$. Przykładowo $2 = 1^2 + 1^2$, więc $2 \in M$, czyli $2, 2 \in M$ ale $2 \cdot 2 \notin M$, bo 4 nie jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych dodatnich.*

[*pg, jj*]