XVI Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej

Rozwiązania - klasy trzecie

9 marca 2024 r.

1. Wyznacz wszystkie pary (x, y) dodatnich liczb całkowitych dla których liczba

$$(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

jest całkowita.
Rozwiązanie.

Niech d oznacza największy wspólny dzielnik liczb x i y. Wtedy $x = da$, $y = db$ i liczby a, b są względnie pierwsze. Ponadto

$$(x+y)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = d(a+b)\left(\frac{1}{da}+\frac{1}{db}\right) = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \frac{(a+b)^2}{ab}$$

Z powyższego wynika, że a jest dzielnikiem liczby $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. W szczególności a dzieli b^2. Jednak liczby a i b są względnie pierwsze, więc $a = 1$. Z tych samych powodów otrzymujemy $b = 1$. Wynika skąd, że poszukiwane pary mają postać (d, d), gdzie d jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą. Odwrotnie, dla każdego d dodatniego całkowitego, para $x = y = d$ spełnia warunek z zadania.
Odpowiedź: Są to dokładnie pary $x = y = d$, gdzie d jest dowolną dodatnią liczbą całkowitą.

2. Dany jest ciąg liczb rzeczywistych a_1, a_2, a_3, $\ldots$ spełniający warunek $a_1 = 1$ oraz taki, że dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n^2 \cdot a_n.$$

Wyznacz wartość wyrazu a_{2024}. Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie.

Z założeń wynika, że

$$a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = (n+1)^2 \cdot a_{n+1} - n^2 \cdot a_n.$$

Mamy więc

$$a_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+2n}\cdot a_n = \frac{n}{n+2}\cdot a_n$$

dla $n \geqslant 1$. Stosując wielokrotnie powyższą zależność otrzymujemy

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2}\cdot a_n = \frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot a_{n-1} = \frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot a_{n-2} = \ldots$$

$$= \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3} \cdot a_1 = 2 \cdot \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}.$$

W szczególności $a_{2024} = \frac{2}{2025 \cdot 2024} = \frac{1}{2\,049\,300}$.

3. Dany jest podzbiór $\mathcal{P}$ liczb naturalnych taki, że $1 \in \mathcal{P}$, $2 \in \mathcal{P}$, oraz dla każdej liczby naturalnej $k > 1$ istnieje liczba $p \in \mathcal{P}$ taka, że $k < p < 2k$. Udowodnij, że każda liczba naturalna jest sumą różnych liczb należących do zbioru $\mathcal{P}$. *Uwaga: uznajemy, że jeśli liczba należy od $\mathcal{P}$, to jest automatycznie sumą różnych liczb z $\mathcal{P}$.*

Rozwiązanie.

Z założenia dla $k = 2$ wynika, że $3 \in \mathcal{P}$. Stąd mamy przedstawienia: $4 = 1 + 3$, $5 = 2+3$, $6 = 1+2+3$ w postaci sumy różnych liczb z $\mathcal{P}$. Załóżmy, że teza nie zachodzi i wybierzmy najmniejszą liczbę naturalną n, która nie jest sumą różnych liczb ze zbioru $\mathcal{P}$. Z powyższego wynika, że $n > 6$. Zauważmy, że istnieje wówczas liczba $p \in \mathcal{P}$ taka, że $n/2 < p < n$. Rzeczywiście, jeśli n jest parzysta to fakt ten wynika bezpośrednio z założenia. Jeśli $n = 2k + 1$ jest liczbą nieparzystą, to istnieje liczba $p \in \mathcal{P}$ taka, że $k + 1 < p < 2k + 2$. Jednak n jest wybrana tak, że $n \notin \mathcal{P}$, więc nie może zachodzić równość $n = p$, czyli $n/2 < p < n$.

Ponieważ $0 < n - p < n/2$, istnieją liczby $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$ należące do $\mathcal{P}$, takie, że

$$n - p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s.$$

Wówczas $p_s \leqslant n - p < n/2 < p$ oraz $n = p_1 + \ldots + p_s + p$. Ostatecznie n jest sumą różnych liczb z $\mathcal{P}$, wbrew założeniu. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ utworzono sześć czworokątów $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, $DEFA$, $EFAB$, $FABC$. Okazało się, że wszystkie one mają jednakowe pole. Pokaż, że przekątne AD, BE, CF mają punkt wspólny.

Rozwiązanie.

Oznaczmy odpowiednio

$$Z = AD \cap BE, \quad Y = AD \cap CF, \quad X = BE \cap CF.$$

Jeśli $X = Y$ lub $X = Z$, to znaczy, że AD przechodzi przez punkt przecięcia BE i CF, czyli teza zachodzi. Zakładamy zatem, że $X \neq Y, Z$. Podobnie uzyskujemy $Y \neq Z$. Wynika stąd też, że proste YZ i AD pokrywają się.

Punkt Y leży więc wewnątrz odcinka CX lub FX. Ewentualnie dokonując zamiany oznaczeń $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$, możemy założyć, że Y leży na odcinku XF. Gdyby punkt Z leżał na odcinku XB, to znaczyłoby, że punkty E i F leżą po różnych stronach prostej $YZ = AD$, a to przeczy wypukłości sześciokąta. Zatem Z leży na odcinku XE, patrz rysunek poniżej.

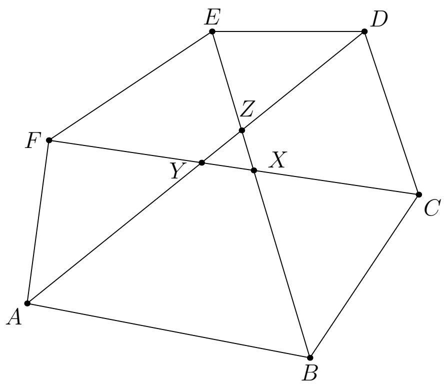
Pole figury $\mathcal{F}$ będziemy oznaczać przez $[\mathcal{F}]$.

Z założeń zadania wynika, że

$$[ABCY] + [CDY] = [ABCD] = [FABC] = [ABCY] + [AFY],$$

zatem $[CDY] = [AFY]$. Trójkąty CDY, AFY mają kąt tej samej miary przy wierzchołku Y, zatem wynika stąd, że

$$|CY| \cdot |DY| = |AY| \cdot |FY|.$$



Analogicznie wykazujemy, że

$$|AZ| \cdot |BZ| = |DZ| \cdot |EZ|,$$

$$|FX| \cdot |EX| = |CX| \cdot |BX|.$$

Mnożąc te trzy równości stronami, otrzymujemy

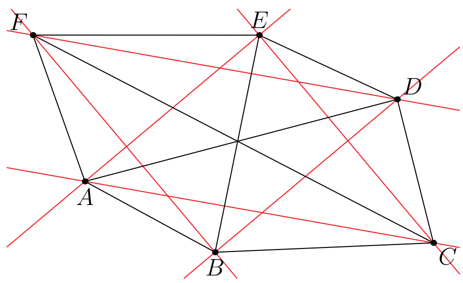
$$|CY| \cdot |DY| \cdot |AZ| \cdot |BZ| \cdot |FX| \cdot |EX| = |CX| \cdot |DZ| \cdot |AY| \cdot |BX| \cdot |FY| \cdot |EZ|.$$

Zauważmy jednak, że $|CY| > |CX|$, $|DY| > |DZ|$, $|AZ| > |AY|$, $|BZ| > |BX|$, $|FX| > |FY|$, $|EX| > |EZ|$. Mnożąc stronami te sześć nierówności (w których wszystkie liczby są dodatnie), otrzymujemy

$$|CY| \cdot |DY| \cdot |AZ| \cdot |BZ| \cdot |FX| \cdot |EX| > |CX| \cdot |DZ| \cdot |AY| \cdot |BX| \cdot |FY| \cdot |EZ|,$$

co daje sprzeczność z równaniem powyżej. Sprzeczność kończy dowód.

Uwaga dodatkowa:
Wbrew tezom niektórych rozwiązań, sześciokąt spełniający warunki zadania nie musi być foremny. Równość pól $[ABCD] = [ABCF]$ można sprowadzić do równości pól $[ACD] = [ACF]$ która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy proste AC i DE są równoległe.



Podobnie, pozostałe równości zachodzą tylko jeśli również proste BD i AE oraz BF i CE są równoległe. Rozpoczynając do narysowania trzech par prostych równoległych, otrzymujemy bardzo różne sześciokąty spełniające warunki zadania, patrz rysunek.

[pg, jj]